Volumen XI Número 6

REVISTA

DE LA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

(MIEMBRO DEL PATRONATO DE LA MATHEMATICAL REVIEWS)

ORGANO DE LA

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

REDACTADA por

J. Babini (Director), J. Rey Pastor, L. A. Santaló y E. Gaviola (Delegado de la A. F. A.)

BUENOS AIRES
1946

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Para ingresar como miembro titular de la Unión Matemática Argentina, es necesaria la presentación del solicitante por dos socios fundadores, la admisión por la Junta, y el pago de una cuota de $ 5. — m/n. mensuales o de $ 50.— anuales.

Para ingresar como miembro adherente (con derecho a la Revista y a las Memorias en fascículos separados) es necesario el pago de una cuota de $ 10.— anuales. Los pagos deberán efectuarse por cheque, giro u otro medio libre de gastos, a la orden de la Tesorera, Prof. Clotilde A. Bula, Moreno 364, Rosario.

Los señores miembros adherentes domiciliados en la Ciudad de Buenos Aires podrán, si lo prefieren, efectuar su pago en doce cuotas mensuales de $ 1.00 m/n. cada una, que serán cobradas a domicilio.

Por ser la U. M. A. miembro del patronato de la Mathematical Reviews (sponsoring member), los socios de la U. M. A. tienen derecho a suscribirse a esa importante revista de bibliografía y crítica con 50 % de rebaja sobre el precio de suscripción que es de 13 dólares por año. Los socios de la U. M. A. pagarán por tanto sólo 6.50 dólares por año.

Los trabajos originales enviados para su publicación serán previamente analizados por un ponente, quien emitirá dictamen acerca de la novedad y corrección de sus resultados.

La impresión de las tiradas aparte, y las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

Abonnement annuel à l'etranger: 4.00 dollars (Etats-Unis).

Prière d'adresser toute la correspondance scientifique et administrative à l'adresse ci-dessous:

SR. SECRETARIO DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA
Dr. MÁXIMO VALENTINUZZI
Gascón 520, Buenos Aires (REP. ARGENTINA)

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

Para ingresar a la Asociación Física Argentina debe abonarse una cuota mensual de $ 5.— m/n. Los estudiantes de física y de astronomía pagarán una cuota mensual de $ 1.— m/n.

MEMORANDUM: LA ARGENTINA Y LA ERA ATOMICA *

por el

Dr. Enrique Gaviola

Presidente de la Asociación Física Argentina

Introducción.

La ciencia mundial atraviesa actualmente —como resultado de su importancia decisiva en la última guerra— por una severa crisis que pone en peligro su futuro. La cultura científica de occidente fué creada sobre la base de una ciencia internacional al servicio del progreso humano. En los países que hasta ayer iban a la cabeza de la cultura la ciencia ha sido ahora nacionalizada y puesta al servicio de la guerra.

El director del «National Bureau of Standards» de Washington doctor en física Edward U. Condon, quien hasta hace poco era Director de los laboratorios de investigación de la Westinghouse, pronunció el 5 de Marzo en la capital de los Estados Unidos las siguientes palabras (traducidas de «Science» de Abril 5, 1946): «¿Qué está sucediendo? A científicos pro-«minentes se les niega el privilegio de viajar al extranjero. A «los físicos no se les permite discutir entre ellos ciertos campos «de su ciencia, ni siquiera a aquellos que están trabajando en «aspectos estrechamente relacionados del mismo asunto. Ellos «pueden comunicarse sólo a través de conductos oficiales que «implican censura de sus comunicaciones por oficiales del ejér-«cito sin conocimientos y por ello sin competencia. Información «esencial para poder comprender (la enseñanza) es negada a los «estudiantes de nuestras universidades, de modo que, si esta si-«tuación continúa, los jóvenes estudiantes que honramos aquí «esta noche recibirán de sus profesores una versión aguada y «pasada por la censura militar («army-approved») de las leyes «de la naturaleza».

(*) Presentado junto con copia del informe: ''Empleo de la Energía Atómica...'' a los Ministerios de Guerra y de Marina.

Ante tal situación es alto privilegio y es clara conveniencia de los países no directamente interesados en la tercera guerra mundial levantar y mantener encendida la antorcha de la ciencia libre internacional.

Centenares de hombres de ciencia, con los mejores a la cabeza, abandonarán los países donde se sientan oprimidos si encuentran la posibilidad de trabajar en tierras donde reine libertad científica. La Argentina está en condiciones de recibir a muchos de ellos, si lo desea. Su venida puede significar una revolución industrial, científica y cultural para el país. Para que vengan es necesario darles seguridad económica, medios de trabajo y libertad científica a través de un organismo capaz de inspirarles confianza. Tal organismo podría ser una «Comisión Nacional de Investigaciones», formada por los pocos hombres de ciencia activos de reputación internacional con que cuenta el país, que dispusiera de suficiente autoridad y recursos. Un anteproyecto de ley creando tal comisión se agrega al final.

La Ciencia y la Guerra.

En tiempos remotos, los ingenieros de talento que construían fortificaciones y máquinas militares o castillos-fortalezas eran, a menudo, muertos y enterrados en su obra con tres propósitos: 1) para que su espíritu continuase defendiendo permanentemente la obra; 2) para que los secretos de las construcciones no fuesen divulgados; 3) para que el ingeniero no pudiera hacer después construcciones análogas para el enemigo.

En esa forma eran selectivamente eliminados los hombres cuyo talento tenía aplicación militar. Es probable que este método de eliminación de los mejores haya retardado el progreso científico por miles de años y que haya rebajado el nivel intelectual medio humano. A esto contribuyó, sin duda, la quema de herejes y brujos — los intelectuales de su medio y de su época. Ello explica, tal vez, el hecho cierto de que el nivel medio intelectual humano es sumamente bajo en la actualidad.

La construcción de la bomba atómica por el esfuerzo coordinado de varios miles de los mejores cerebros de Estados Unidos, Inglaterra y Canadá, estimulados por un grupo selecto de emigrados de Hungría, Italia y Alemania, parece estar a punto de renovar la antigua historia: el progreso científico que comenzó con Galileo y cuyo ritmo ha ido acelerándose hasta nuestros días, corre peligro de ser detenido y aún destruído por el afan de mantener el secreto de las nuevas armas atómicas. A partir de 1940 rige un «black out» científico. Actualmente se trabaja febrilmente en 4 países — Estados Unidos, Rusia, Inglaterra y Francia — bajo el mayor secreto, en producir las armas atómicas para la tercera guerra mundial.

Los hombres de ciencia de primera línea de aquellos países ya no pueden hablar, escribir ni viajar con libertad. Viven acechados por espías y contraespías bajo la amenaza de una acusación de traición a su patria.

Muchas voces de protesta se han levantado de entre los hombres de ciencia que forjaron la bomba atómica —y también de entre los que no lo hicieron— por la destrucción de la ciencia libre e internacional a que asistimos. Las protestas no han surtido, hasta ahora, efecto sensible.

De Inglaterra llegan noticias de que el 80 % de los hombres de ciencia que han sido invitados a colaborar en la fabricación secreta de bombas atómicas se han negado a ello.

En Estados Unidos se habla de un entendimiento tácito internacional entre científicos para no producir resultados si estos no son dados a publicidad. «You can take a horse to water but you can not make it drink».

Es indudable que hombres de ciencia de primera línea emigrarían para escapar al secreto y la censura si pudieran ir a un lugar donde se investigase en seguridad y libertad.

La Persecución Europea y el Progreso de Estados Unidos en 1930 - 1940.

El grupo de hombres de ciencia que en los Estados Unidos dió los primeros pasos en febrero de 1939 para llegar a la producción de bombas atómicas y al aprovechamiento industrial de la energía nuclear estaba formado por: Leo Szilard, Enrico Fermi, Eugene Wigner, Víctor Weisskopf y Edward Teller. Todos ellos son hombres de ciencia europeos que emigraron a los Estados Unidos en busca de seguridad y libertad. A ellos se sumaron, después, miles de científicos norteamericanos. De estos miles una buena parte coronó su formación científica con las enseñanzas y el estímulo de sabios europeos que dejaron sus patrias por la inseguridad económica, la persecución política y racial y la falta de libertad de investigación.

La historia reciente ha mostrado bien claro que la falta de libertad científica significa la rápida decadencia industrial y militar de un país. A forjar las armas con que los países del Eje fueron derrotados contribuyeron en alto grado, como hemos visto, hombres de ciencia nacidos y formados allí, a los cuales aquellos países no supieron retener.

Calidad y Cantidad.

En una empresa científico-técnica pueden trabajar cientos de hombres de ciencia en estrecha colaboración. Pudiera creerse que en un grupo así uno del grupo puede ser fácilmente reemplazado por otro, pero no es siempre así. Es bien sabido que el éxito o el fracaso de toda la empresa depende, a menudo, de un solo cerebro dirigente. Su valor está no primordialmente en los problemas que él mismo resuelve, sino en su capacidad para inspirar, orientar y hacer trabajar a los otros con provecho. Hombres de primera línea como Bohr, Fermi, Kapitza, Lawrence, Oppenheimer, Oliphant, Chadwick, Conant obtienen milagros del trabajo de docenas, centenares de hombres de segunda línea. Estos íltimos dejados sólos en un problema de investigación — como lo ha dicho Conant — hacen más mal que bien.

Los hombres de primera línea, indispensables para el progreso, no pueden ser reemplazados. En cada época su número en todo el mundo es reducido. Este no puede ser artificialmente aumentado, como no puede incrementarse sensiblemente la cantidad de grandes músicos. Si un país desea tener hombres de primera línea, debe cultivar cuidadosamente a los pocos que surjan en cada generación y debe atraer a los nacidos y cultivados en otras tierras.

La Coyuntura Científica Actual.

En épocas de seguridad y libertad en Europa y los Estados Unidos era prácticamente imposible atraer a la Argentina a hombres de ciencia de primera línea. La inseguridad económica y política en Europa y la imposición de secreto y de censura en los Estados Unidos y en los principales países de Europa hacen que ello sea posible ahora.

Tales hombres vendrían a la Argentina si se les dieran los medios para investigar y para enseñar y la seguridad de que podrían trabajar con libertad y dar a publicidad sus resultados sin interferencias. Una coyuntura tan favorable como la presente, para convertir a la Argentina en un país civilizado y culto, puede no volver a presentarse en los próximos cien años.

Los Recursos Propios.

El número de físicos y químicos capaces de investigar con provecho es actualmente en el país seguramente inferior a veinte. Ninguno de ellos ha revelado ser —hasta ahora— de primera línea.

Dicho número no aumentará considerablemente, en los años venideros, a menos que las escuelas científicas sean ayudadas a mejorarse radicalmente.

¿Cuántos investigadores son necesarios?

En Inglaterra existen doce mil investigadores científicos en las distintas ramas del saber. Se ha sostenido, últimamente, que dicho número es insuficiente para asegurar su supervivencia nacional y económica; que se necesitan noventa mil.

La Argentina, con la tercera parte de la población de Inglaterra, podría hacer buen uso de unos cinco mil investigadores, de los cuales no menos de mil deberían ser físicos y químicos. Tenemos veinte.

Si tuviéramos mil —y entre ellos tres o cuatro de primera línea— la industria podría abrir laboratorios industriales, las universidades podrían tener profesores que supiesen enseñar a investigar investigando, los institutos y laboratorios podrían publicar trabajos que serían recibidos en las páginas de revistas científicas internacionales y podríamos construir institutos tecnológicos. Pero tenemos veinte.

Perspectiva.

El camino a andar es, pues, largo y difícil.

Quien crea que con nuestra materia prima, nuestra industria y nuestros investigadores podemos fabricar bombas atómicas o levantar plantas de aprovechamiento industrial de la energía nuclear en 5 o 10 años sufre alucinaciones. Antes de soñar con hacer tales cosas hay que pensar en formar hombres capaces de hacerlas y en atraer a otros del extranjero para que nos ayuden en la ardua tarea.

Para ello es necesario un organismo que tenga bastante autoridad y medios en el interior y suficiente prestigio en el exterior. El anteproyecto agregado a este Memorandum contempla las necesidades y las posibilidades del país.

La creación de la «Comisión Nacional de Investigaciones» en la forma proyectada y el nombramiento para integrarla de los mejores investigadores activos con que cuenta el país puede producir una revolución en la ciencia, la enseñanza, la industria y la defensa nacional en un plazo no mayor de veinte años.

Ante-Proyecto de Ley

Teniendo en cuenta:

1 - Que la investigación científica ha hecho posible el grado de civilización y de cultura alcanzado por la humanidad;

2 - Que la libertad de elegir los temas de investigación y la libertad de publicar los resultados han sido, en todos los tiempos, factores indispensables del progreso;

3 - Que tales libertades se encuentran restringidas actualmente en muchos países, con grave peligro para el futuro de la cultura humana;

4 - Que la Nación Argentina desea contribuir, en la medida de sus posibilidades, al mantenimiento de la tradición de libertad científica en su propio interés y en el del progreso humano;

5 - Que es conveniente ayudar en sus tareas a los investigadores en actividad, fomentar la formación de otros nuevos y facilitar la incorporación al país de los hombres de ciencia del mundo que deseen investigar en un ambiente de seguridad personal y de libertad científica;

6 - Que para llenar tales finalidades es necesario crear un organismo constituído y dirigido por investigadores activos y reputados en el mundo científico internacional;

7 - Que dicho organismo debe contar con autoridad y con medios suficientes para cumplir su alta misión;

8 - Que el país puede esperar de sus actividades una aceleración en su progreso industrial, técnico, científico y cultural.

Por tanto.....................

RESUELVE CON FUERZA DE LEY:

1 - Declarar que la Nación asegura a los hombres de ciencia que trabajen en el territorio argentino completa libertad de elegir los temas de investigación y de publicar los resultados que obtengan.

2 - Declarar que el Gobierno fomentará la inmigración de hombres de ciencia que quieran investigar en un ambiente de seguridad personal y de libertad científica.

3 - Crear una «Comisión Nacional de Investigaciones» con el fin de ayudar en sus tareas a los hombres de ciencia, fomentar la formación de otros nuevos y facilitar la incorporación al país de los investigadores del mundo que quieran habitar nuestro suelo.

4 - La Comisión Nacional de Investigaciones podrá:

a) Convenir con las Universidades, Escuelas, Institutos y Laboratorios el modo de ayudarles a fomentar la investigación y la formación de hombres de ciencia.

b) Acordar a investigadores subsidios, ayudas y facilidades para llevar adelante investigaciones en curso o planeadas.

c) Contratar a hombres de ciencia residentes en el extranjero para que se incorporen al país y auxiliar a los que vengan por iniciativa propia por medio de informaciones, subsidios, contratos y facilidades para la investigación y la enseñanza.

d) Crear sus propios institutos y laboratorios de investigación científica.

5 - La Comisión Nacional de Investigaciones estará formada por un Director General, con rango de Ministro Secretario de Estado, un Subdirector General y cinco vocales nombrados por el P. E. con acuerdo del Senado.

EMPLEO DE LA ENERGIA ATOMICA (NUCLEAR) PARA FINES INDUSTRIALES Y MILITARES

por E. Gaviola
Director del Observatorio de Córdoba

Informe presentado a la 7ª Reunión de la Asociación Física Argentina realizada en La Plata, Instituto de Física, el 19 de abril de 1946

Abstract. — The present report is based on the general knowledge on fission processes up to 1940, on the Smyth Report and on an article of Oliphant (Nature, January 5, 1946). An effort has been made to read between the lines in order to fill some of the lacunae left by the censorship imposed on the authors.

A description is given of the possible dimensions and functioning of the heterogeneous pile.

A schematic possible gun for firing atomic bombs is described.

As applications of scientific interest the spectra of matter at very high temperatures and the experimental production of cumulo-nimbus storms and earthquakes are mentioned.

Introducción.

Las publicaciones científicas referentes a la fisión nuclear en general y a la del uranio en particular cesaron en 1940. Ello se debió a la campaña iniciada por Leo Szilard en febrero de 1939 en los Estados Unidos, para evitar que el enemigo en potencia se enterara de resultados científicos que, según declaración de E. Fermi en Washington del 26 de enero de 1939, podían tener importancia militar. El estado de los conocimientos al correrse la cortina metálica de la censura fué referido por Cecilia Mossin Kottin[1]) en su parte física y por Juan T.

(1) C. Mossin Kottin, Rev. UMA y AFA, V. 10, p. 130 (1945); C. é Invest. Set. 1945.

D'Alessio[2]) en su parte química en la Tercera (Cuarta según la nueva cronología) Reunión de la Asociación Física Argentina efectuada en el Instituto de Física de La Plata el 28 de Agosto de 1944.

Con la censura impuesta en 1940, una era científica — la de la ciencia libre internacional — ha terminado y otra — la de la ciencia nacional al servicio de la guerra — ha comenzado. Es probable que ésta dure mientras no cambie fundamentalmente el actual panorama político mundial.

Desde el principio de la nueva era han aparecido dos informes, uno muy largo y confuso[3]) en los Estados Unidos y otro[4]) breve y claro en Inglaterra, y algunas breves notas y cartas a editores que tienen sólo relación más o menos remota con el asunto.

Para formarse una idea medianamente clara sobre los trabajos y progresos efectuados entre 1940 y 1945 no queda más remedio que, basándose en los conocimientos públicos de 1940, leer los informes entre líneas, atar cabos y hacer una cantidad de supuestos plausibles. Es lo que voy a hacer en este informe. El peligro de equivocarse es grande. Es uno de los peligros a que nos somete la nueva era de las ciencias secretas nacionales. Todo lo que se haga por mitigar ese mal será beneficioso para la ciencia.

El Problema.

El problema que, desde 1940, se presentó a los físicos era doble: a) Producir una reacción en cadena, por medio de la fisión del uranio, de manera controlable, que sirviera para producir energía para uso industrial. Este problema fué parcialmente resuelto por medio de la así llamada *pila heterogénea*; b) Construir una bomba atómica para fines militares. Este problema fué doblemente resuelto: por medio de la separación de los isótopos del Uranio y por medio de la purificación del *Plutonio* producido como *subproducto* de la pila heterogénea.

---

(2) JUAN T. D'ALESSIO, Rev. UMA y AFA, Vol. 10, pág. 132 (1945).

(3) HENRY D. SMYTH, *Atomic Energy for Military Purposes* (1945), Reproducido en: Review of Mod. Phys. (Vol. 17, Nº 4, 1945, pág. 351).

(4) M. L. OLIPHANT, *Nature*, January 5, 1946.

Hechos fundamentales conocidos.

Se sabe que las siguientes reacciones nucleares conducen a la fisión de los núcleos indicados:

$$ {}^{235}_{92}U + \text{neutrón} \longrightarrow \text{fisión} + 2 \text{ a } 3 \text{ neutrones} + 180\,\text{Mev} $$

$$ {}^{239}_{94}P_u + \text{neutrón} \longrightarrow \text{fisión} + 2 \text{ a } 3 \text{ neutrones} + 200\,\text{Mev} $$

$$ {}^{238}_{92}U + \text{neutrón } (10^6\text{ev}) \longrightarrow \text{fisión} + 2 \text{ a } 3 \text{ neutrones} + 200\,\text{Mev}. $$

El isótopo 235 del Uranio y el Plutorio sufren fisión al capturar neutrones de cualquier energía. El Uranio 238, en cambio, necesita ser atacado por neutrones de energía igual o mayor que un millón de electrónvoltios para que la probabilidad de entrar en fisión sea grande. Con neutrones de menor energía puede transformarse, como veremos, sin dividirse en partes de tamaño comparable. La fisión es improbable.

El número de neutrones puestos en libertad por la fisión no es el mismo para cada caso individual. El promedio no es un número entero. Dicho número parece depender de la forma en que se divide el núcleo original, forma que puede variar de caso a caso, dentro de ciertos límites, conduciendo a distintos productos de desdoblamiento. Los neutrones secundarios no son producidos instantáneamente. Algunos demoran segundos en ser emitidos. Ello facilita el manejo de la reacción en cadena.

La siguiente serie de transformaciones conduce al nacimiento de los elementos transuranianos Neptunio y Plutonio:

$$ {}^{238}_{92}U + \text{neutrón } (38\,\text{ev}) \longrightarrow {}^{239}_{92}U + \text{rayos } \gamma $$

$$ {}^{239}_{92}U \xrightarrow{\text{23 min.}} {}^{239}_{93}N_p + \text{rayos } \beta $$

$$ {}^{239}_{93}N_p \xrightarrow{\text{2,3 días}} {}^{239}_{94}P_u + \text{rayos } \beta + \text{rayos } \gamma $$

$$ {}^{239}_{94}P_u \xrightarrow{10^4 \text{ años}} {}^{235}_{92}U + \text{rayos } \alpha. $$

Las curvas completas de absorción de los dos isótopos principales del uranio no han sido publicadas. Es de suponer que tengan la forma indicada cualitativamente en figura 1. El Thorio se comporta en forma análoga al U 238; el Plutonio al U 235.

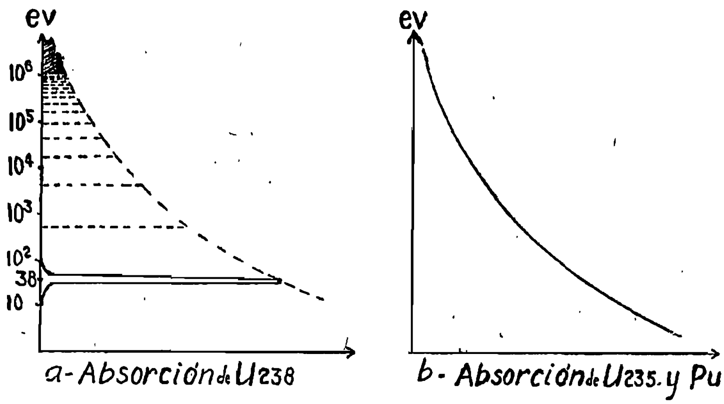

Fig. 1

El más bajo de los niveles de absorción del U 238 se encuentra a 38 electrón-voltios y es un nivel de resonancia. Por encima de éste se encuentran otros niveles de absorción (indicados por líneas punteadas en la figura) de menor intensidad. Los niveles están más próximos unos a otros a medida que crece la energía. Cerca de 10^6 ev comienza una banda continua de absorción. Parece que la captura de un neutrón dentro de esta banda produce fisión; por debajo de ella tan sólo excitación e inestabilidad radioactiva. La fisión nuclear del U 238 adquiriría, así, un lejano parecido formal a la ionización atómica por absorción de fotones.

La absorción de neutrones de parte del U235 y del P_u es continua, teniendo el coeficiente un valor grande para pequeñas velocidades (velocidades «térmicas») y uno cada vez menor a medida que las velocidades crecen.

Reacción en Cadena.

Se ignora aún si una masa suficientemente grande de Uranio metálico purísimo produciría una reacción en cadena en forma de explosión. Para que tal sucediera sería necesario que más de uno de cada dos o tres neutrones rápidos (energía cercana a

10^6 ev) procedentes de una fisión fuese absorbido en la banda continua del U 238 indicada en Fig. 1 a. En tal caso, tendríamos una superbomba atómica, no menos de mil veces más efectiva que las actualmente conocidas y considerablemente más fácil de preparar.

Si el porcentaje de neutrones capturados en la banda de absorción continua es inferior a uno por cada dos o tres neutrones rápidos, no hay posibilidad de reacción en cadena en Uranio metálico puro. En efecto, la mayoría de los neutrones serían, en este caso, capturados en los niveles de absorción del U 238 de energía inferior a 10^6 ev, sin conducir a fisión ni a la emisión de nuevos neutrones.

El isótopo 235 del Uranio tiene un coeficiente de absorción elevado para neutrones lentos («térmicos») y la captura conduce a fisión, con la emisión de 2 a 3 nuevos neutrones. El isótopo 238 del Uranio, además, no absorbe neutrones de energía inferior a 38 ev. Si los neutrones emitidos por la fisión de U 235 tuvieran energía inferiores a 38 ev, una reacción en cadena se produciría fácilmente en Uranio metálico. Pero los neutrones emitidos por la fisión del U 235 tienen una energía cercana a 10^6 ev. Hay que reducir su energía por medio de un «moderador» para obtener reacción en cadena.

Un «moderador» es una substancia de peso atómico pequeño y que no absorbe, prácticamente, neutrones. Como tal pueden servir el Deuterio (Hidrógeno pesado), el Helio, el Berilio y el Carbono (grafito).

Si el moderador es mezclado en forma *homogénea* con el Uranio metálico no se produce reacción en cadena: por cada átomo U 235 hay 140 átomos U 238; al ir perdiendo paulatinamente energía un neutrón rápido por choques con núcleos de átomos del moderador, la probabilidad de ser capturado por U 238 en una de sus «líneas» de absorción — en especial en la de 38 ev — es muy grande. Tales capturas no conducen a la producción de nuevos neutrones. Si el moderador es mezclado, en cambio, en forma *heterogénea* con el Uranio, la reacción en cadena es posible. Esta mezcla puede ser hecha de varios modos. La primera forma ensayada por Fermi fué la de «red cúbica»: Consiste en una construcción hecha con «ladrillos» cúbicos de grafito. Los ocho vértices de cada cubo son limados, introduciéndose en los espacios dejados libres terrones de Uranio metálico o de UO_2 purificado. El tamaño de éstos y el de los cubos de grafito es calculado de modo tal que: 1) casi todos los neutrones rápidos, producidos por fisión de un núcleo de U 235 en un terrón dado, abandonen éste sin ser absorbidos y penetren en el grafito; 2) al llegar a otro terrón vecino, a través del grafito, entre dos terceras partes y una mitad de los neutrones deben tener una energía inferior a 38 ev, a fin de ser capturados por U 235 y mantener la cadena, los restantes pueden ser capturados por U 238, para producir Plutonio, o por impurezas.

Es fácil ver que el crecimiento de la cadena es favorecido por pequeños terrones de Uranio y grandes cubos de grafito. La producción de Plutonio es favorecida por grandes terrones de Uranio y pequeños cubos de grafito (mientras la cadena no se corte).

Los neutrones que se escapan por la periferia de la *pila heterogénea* no vuelven a penetrar en ella. Para que la cadena no se corte es necesario que el volumen sea grande (unos 5 metros de diámetro) y que la pila esté rodeada de una substancia «reflectora» de neutrones, que devuelva la mitad de los que tratan de escapar.

Como substancia reflectora se ha usado grafito, la misma substancia moderadora. Podrían usarse también Plomo, Bismuto, Berilio, Aluminio, Magnesio, Zink, Estaño y Parafina o agua preparada con Deuterio.

Si se quiere evitar que la cadena crezca en forma de explosión más o menos violenta, es necesario introducir en la pila, láminas o barras de substancias que absorben fuertemente neutrones lentos. Para tal fin se han usado Cadmio, acero al Cadmio y acero al Boro. La extracción lenta y controlada de tales láminas o barras, permite regular la marcha de la reacción en cadena.

La fisión del Uranio produce una gran cantidad de calor. El enfriamiento de la pila a través de su periferia es mínimo, debido a su gran volumen. Si el calor producido en su interior no es extraído, el Uranio y el grafito se calentarían fuertemente hasta que se cortase la cadena — por la variación de los coeficientes de absorción de neutrones de los isótopos del Uranio con la temperatura — o hasta que la pila se evaporase. Para eliminar estas contingencias se refrigeran las pilas haciendo pasar aire, Helio o agua, por cañerías apropiadas, a través de la pila.

Dificultades y Soluciones.

El 1º. de Noviembre de 1939 el primer comité oficial norteamericano pidió, en base a un memorandum de Leo Szilard, 50 toneladas de óxido de uranio y 4 toneladas de grafito. Ambos materiales —los mejores que producía la industria— resultaron excesivamente impuros: con ellos no podía funcionar una pila heterogénea. La cantidad de grafito pedida resultó, además, unas cien veces demasiado pequeña. Una primera dificultad a vencer fué, pues, el perfeccionamiento de los métodos de producción y refinación industrial del UO_2 y del grafito. Una segunda dificultad, la producción de tales substancias en cantidades suficientes y en tiempos razonables.

El UO_2 refinado puede ser usado, como lo demostró Fermi, en pilas heterogéneas. Es preferible, sin embargo, usar Uranio metálico, para evitar la captura de neutrones por el Oxígeno. La obtención de Uranio metálico puro en grandes cantidades es una operación difícil. Fué obtenido, aparentemente, por electrólisis de sales de Uranio fundidas.

En lugar del grafito puede usarse con ventaja agua o parafina pesadas. Pero para ello es necesario disponer de cantidades suficientes (toneladas) de Deuterio. La separación de este último del Hidrógeno común es difícil y lenta. Por ello se prefirió concentrar los esfuerzos durante la guerra en la obtención de grafito puro como moderador, dejando la fabricación de agua pesada para después de la guerra.

Al fisionarse el Uranio en la pila heterogénea produce, entre otras cosas, gases nobles (Xenon y Kripton) radioactivos. Si se permitiera el escape de tales gases, sin ciertas precauciones, se envenenaría la atmósfera alrededor de la pila durante su funcionamiento. Para evitar el escape de estos gases fuera de tiempo y lugar es necesario encerrar al Uranio en recipientes herméticos.

El Uranio metálico es un metal poroso. Contiene, en contacto con la atmósfera, gran cantidad de aire adsorbido. El Nitrógeno del aire captura neutrones. Es conveniente, pues, hacer el vacío dentro de los recipientes herméticos que contienen el Uranio y «desgasarlo».

Los recipientes o *tarros* en cuestión deben, pues, ser herméticos, aguantar el vacío, soportar la temperatura de desgasamiento y «last not least» ser hechos de un material que no capture Neutrones. Parece que estas dificultades fueron vencidas usando tarros de aluminio de unos 42 mm. de diámetro y algo así como 1 metro de largo (para la pila de simetría cilíndrica).

La substancia usada como refrigerante y los caños dentro de los que circula deben capturar pocos neutrones.

Resueltas todas estas dificultades, se puede construir una pila heterogénea.

La pila heterogénea.

La primera reacción en cadena fué obtenida por Enrico Fermi con una pila de simetría cúbica construída en Chicago en una sala de deportes de la Universidad. No tenía dispositivo para refrigeración. Anduvo a razón de 1/2 vatio el 2 de diciembre de 1942, a 200 vatios 10 días después.

La segunda pila heterogénea se elevó en Clinton en el Valle del Tenessee. Fué enfriada con Helio primero y con aire después. El uso de Helio resultaba molesto, pues era difícil evitar su escape. Esta pila fué construída cambiando la simetría cúbica por simetría cilíndrica: el Uranio, en lugar de estar en forma de terrones en los vértices de cubos, estaba en forma de barras a lo largo de las aristas de paralepípedos de grafito, de sección cuadrada. El grafito fué substituído, posteriormente, por agua pesada. Ello permitió reducir el tamaño de la pila.

La pila de Clinton funcionó a una potencia superior a 1800 kilovatios.

La tercera pila, levantada en Hanford (Washington) con el propósito de producir Plutonio en cantidad, fué construída usando unas 300 toneladas de grafito como moderador y reflector, unas 30 toneladas de Uranio metálico y el agua del río Columbia como refrigerador. Funciona normalmente a 100.000 kilovatios durante un mes entero.

La figura 2 representa esquemáticamente una forma probable de la pila heterogénea.

La pila heterogénea de Hanford está probablemente formada por un tronco de cilindro de grafito de unos 6 metros de diámetro y alrededor de 6 metros de largo. La parte central del cilindro de grafito está atravesada, por unas 80 barras de Uranio metálico encerrado en «tarros» de aluminio, que corren paralelas al eje del cilindro. Para su mejor manejo, cada tarro

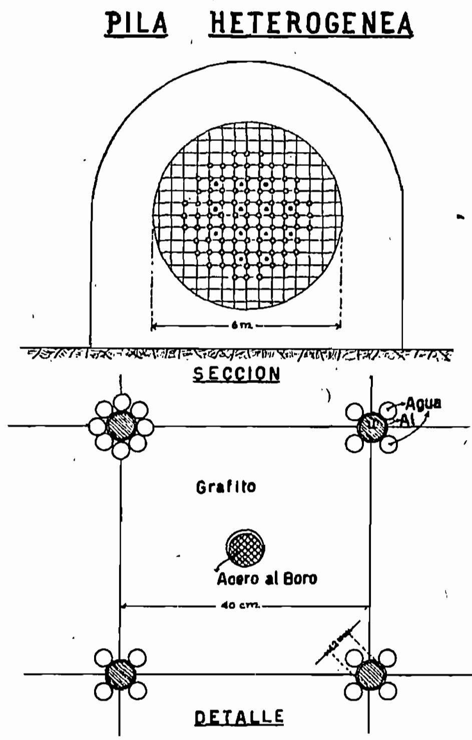

Fig. 2

de 42 mm. de diámetro tiene menos de 1 metro de longitud. La distancia entre barras es de unos 40 cm. Como las barras del centro reciben mayor lluvia de neutrones que las de la periferia, se las coloca, con el fin de emparejar el calentamiento, a distancia diferente que a las periféricas. El manto cilíndrico exterior de grafito sirve de «reflector» de los neutrones. Entre las barras de Uranio pasa un cierto número de barras o láminas de acero al Boro o al Cadmio que sirven para regular la marcha de la reacción en cadena. Cada barra de Uranio está rodeada por un sistema de caños de Aluminio por los que circula el agua refrigerante.

El cilindro de grafito está sostenido y encerrado por una espesa pared de concreto. Esta tiene por misión principal detener las radiaciones que se escapan del cilindro de grafito. La muralla de concreto tiene, naturalmente, aberturas por las que se introducen y extraen los «tarros» de Uranio y las barras de acero.

El agua común, destilada, no es un refrigerante ideal. El Hidrógeno absorbe neutrones, transformándose en Deuterio. El Oxígeno captura también algunos neutrones. Sería mejor usar agua pesada o algún aceite o parafina del tipo C_nD_{2n+2}. Estos últimos permitirían, talvez, elevar la temperatura del refrigerante a un valor que facilitase el aprovechamiento industrial del calor producido.

Es posible que el agua usada como refrigerante —especialmente purificada— sea enfriada en serpentinas y recirculada. En tal caso, el río Columbia no pasaría por dentro de la pila, sino que las serpentinas de enfriamiento estarían sumergidas en el mismo. Se evitaría así el envenenamiento de las aguas del río con materias hechas radioactivas por la radiación neutrónica. El agua refrigerante se iría convirtiendo paulatinamente en agua pesada, con lo que mejoraría con el tiempo la eficiencia de la pila.

Funcionamiento de la pila heterogénea.

Cargada la pila con tarros de Uranio, que pesan en total 30 toneladas, estando en su lugar un número suficiente de láminas o barras de acero al Cadmio o Boro y puesta en circulación el agua refrigerante, se inicia la reacción en cadena retirando progresivamente el material absorbente hasta que la temperatura de salida del refrigerante tenga el valor deseado. El tiempo que tarda la pila en acomodarse a un nuevo nivel de potencia al retirar o introducir material absorbente —tiempo de relajación— es largo: 4 horas. El manejo de la pila no es, pues, crítico. Eso sí, debe ser hecho a distancia, por el peligro de las radiaciones de toda clase que andan cerca de la pila. Dicho manejo puede ser automático, por medio de termóstatos accionados por el refrigerante a su salida de la pila.

La pila funciona un tiempo del orden de un mes a una potencia constante de unos 100.000 kilovatios. Durante este tiempo, de los 1 a 3 neutrones que emite el *U* 235 por fisión, alrededor de uno es capturado por *U* 238, convirtiéndose en la substancia radioactiva *U* 239. Esta se transforma, por emisión β, en Neptunio y este, a su vez, en igual forma, en Plutonio.

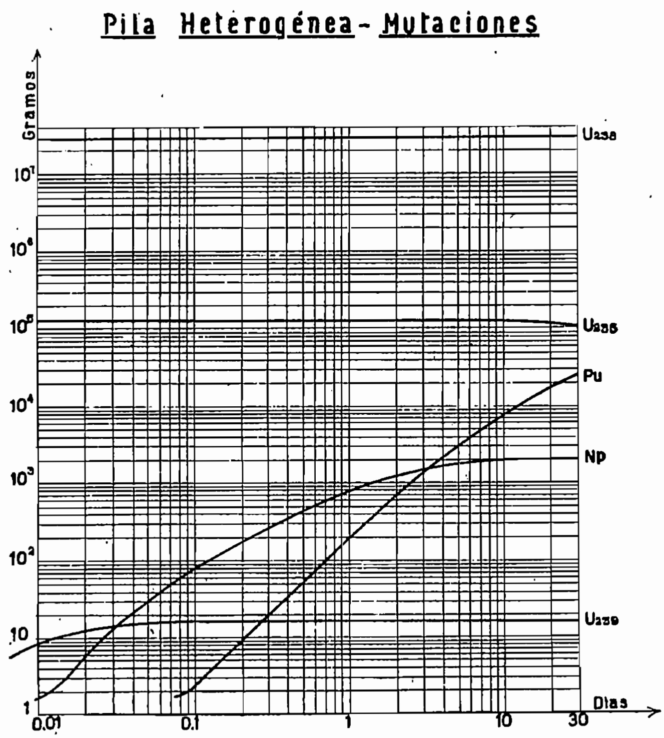

Fig. 3

La figura 3 muestra, en forma aproximadamente cuantitativa, la marcha de las reacciones. Las curvas han sido calculadas en la forma usual para procesos radioactivos, teniendo en cuenta los valores conocidos de las «vidas medias» del *U* 239 y del Neptunio.

A los 30 días de funcionamiento, la curva del Plutonio ha alcanzado cerca de 24 kilos y continúa creciendo rápidamente con el tiempo. Convendría, pues, prolongar el funcionamiento de la pila. Es cierto que el Plutonio formado sería fisionado, en parte, por neutrones lentos del *U* 235, pero hay que tener presente, también, que la fisión de un átomo de Plutonio conduce, después de un cierto tiempo, a la formación de otro, al ser capturado uno de sus neutrones por un núcleo de *U* 238. Si no hubieran inconvenientes de otra naturaleza, convendría proseguir la cadena hasta que casi todo el *U* 235 hubiera desaparecido, siendo reemplazado por una cantidad comparable de Plutonio. Los inconvenientes de otra naturaleza que lo impiden son los productos de la fisión del *U* 235: Bario, Iodo, Kriptón, etc. Casi todos ellos absorben fuertemente neutrones. La cantidad (en peso) acumulada de tales subproductos es, en cada instante, igual o mayor que la cantidad de Plutonio. Llega un momento, pues, en el que la cadena se detiene, aún retirando todo el material absorbente de control.

Si la eficiencia de la pila fuese menor que un átomo de *Pu* por cada fisión de *U* 235, el tiempo de funcionamiento estaría limitado por la creciente fisión del *Pu* mismo, lo que haría que su cantidad tendiera a un nivel de equilibrio radioactivo.

Detenida la reacción en cadena, se procede a la extracción de los «tarros» de Uranio, dejándolos caer a una pileta con agua. Allí permanecen como una semana, esperando que los 15 gramos de *U* 239 y los 2 kilos de Neptunio existentes se transformen en Plutonio.

Disolventes agregados posteriormente deshacen los «tarros» de Aluminio: los gases nobles radioactivos, producto de la fisión, aprisionados en los mismos, se escapan a la atmósfera por altas chimeneas. Podrían ser envasados para fines industriales o científicos, si se lo deseara.

Las operaciones de separación química del Plutonio se efectúan bajo tierra y por control a distancia, para evitar los efectos de las radiaciones que desprenden los productos de la fisión. Una vez separados estos, los operadores pueden acercarse al Plutonio conseguido.

En un mes de funcionamiento, la pila heterogénea produce entre 25 y 30 kilos de Plutonio, cantidad que es suficiente para construir una bomba atómica.

El Plutonio.

El estudio químico del Plutonio (94) y de los otros elementos transuranianos, el Neptunio (93), el Americium (95) y el Curium (96) muestra que todos ellos pertenecen a un grupo químico (que incluye al Uranio) análogo al de las tierras raras. Tal hecho se interpreta, en el modelo atómico de Bohr, diciendo que los últimos electrones agregados se incorporan a órbitas internas no ocupadas, sin alterar mucho las órbitas exteriores o de valencia.

El Plutonio sufre fisión al capturar neutrones de cualquier energía, en forma análoga al Uranio 235 (figura 1 - b)). Es radioactivo y se descompone lentamente por emisión de partículas α. Su vida media es de diez mil años.

Aprovechamiento Industrial — Pila Heterogénea.

La potencia de 100.000 kilovatios producida por la pila heterogénea en forma de calor puede, en principio, ser usada para accionar máquinas térmicas industriales. Las dificultades encontradas parecen consistir en que la pila funciona en condiciones óptimas a baja temperatura, a la cual el rendimiento de una máquina térmica es malo. Si se permite que la temperatura de la pila y del refrigerante lleguen a valores más altos, parece ser que la eficiencia de la pila decrece, porque el coeficiente de absorción de neutrones del *U* 235 cae con la temperatura y porque algunos de los materiales empleados en la pila sufren deterioro. Esto último será seguramente remediado cuando se ensaye un número suficiente de materiales. Lo primero puede ser compensado usando para cargar la pila Uranio enriquecido en *U* 235 por difusión térmica, por ejemplo. Podría agregarse, también, Plutonio al Uranio natural, pero este método es, seguramente, poco práctico, por cuando el Plutonio casi puro obtenido de la pila heterogénea puede ser usado con ventajas en una «pila homogénea».

La Pila Homogénea.

Usando *Pu* o *U* 235 muy concentrados, pueden construirse pilas pequeñas para uso industrial. En este caso se pueden mezclar íntimamente tales metales con un moderador tal como agua pesada o parafina pesada. La cadena resultante es sumamente fuerte, pues no existe ya la proporción de 140 a 1 del isótopo «pasivo» $U\,238$ al lado del «activo» $U\,235$.

Una pila construída de tal modo y enfriada con un aceite C_nD_{2n+2} podría funcionar a temperaturas superiores a cien grados. Podría ser tan pequeña como para ser usada en un barco o en una locomotora. El principal problema a resolver sería evitar el efecto de las radiaciones y de las emanaciones radioactivas de la pila.

Plutonio desnaturalizado.

El Uranio natural no puede ser usado sin más trámites para hacer bombas atómicas por la gran cantidad de isótopo $U\,238$ que contiene. La separación del isótopo «activo», el $U\,235$, és difícil, como veremos. El Uranio natural podría ser llamado «Uranio 235 desnaturalizado».

Se ha hablado, últimamente, de «Plutonio desnaturalizado». El Plutonio concentrado que se obtiene de la pila heterogénea puede ser fácilmente empleado para construir bombas atómicas. La entrega de este producto a la industria privada podría producir, pues, sentimientos de inseguridad. Si se mezcla el $Pu\,239$ con un isótopo «pasivo», análogo al $U\,238$, podría obtenerse un producto útil para la producción industrial de energía pero inútil para la guerra. Tal isótopo podría ser el $Pu\,240$, el que se formaría conjuntamente con el $Pu\,239$ en la pila heterogénea por medio de la reacción

$$ {}^{239}_{93}Np + \text{neutrón} = {}^{240}_{94}Pu + \text{rayos } \beta. $$

Se ignora si este isótopo del Pu es estable.

Si la mezcla de isótopos obtenida de la pila es sometida a operaciones de fraccionamiento, la fracción enriquecida en $Pu\,239$ sería destinada a bombas atómicas, la fracción enriquecida en $Pu\,240$ sería el «Plutonio desnaturalizado», destinada a la industria.

El Plutonio desnaturalizado no serviría, seguramente, para pilas homogéneas. Habría que recurrir con él al uso de pilas heterogéneas.

La Separación de Isótonos.

Vimos al comienzo que el problema de la fabricación de una bomba atómica fué doblemente resuelto, por la «elaboración» de Plutonio y por la extracción del isótopo 235 del Uranio natural.

Varios métodos fueron ensayados para extraer el *U* 235. Tres de ellos condujeron a resultados prácticos satisfactorios:

1 - La difusión fraccionada a través de membranas porosas.

2 - La separación en el «Calutron» o espectrógrafo de masas.

3 - La difusión térmica.

Otros métodos, tales como la centrifugación en torre de fraccionamiento a contracorriente, continúan siendo estudiados.

Los métodos 1 y 3 eran ya conocidos y habían sido usados para separar isótopos antes de la guerra. Los procedimientos secretos descubiertos durante la guerra consisten principalmente en el uso de una membrana porosa mejor que la de plata-zink ya conocida y en la adaptación de la torre de difusión térmica usada en Alemania por H. Clusius y G. Dickel para gases, al uso de líquidos, con lo que presumiblemente se aumenta la eficiencia.

Las instalaciones necesarias en cualquiera de estos métodos son de dimensiones impresionantes. Para el primero hacen falta *hetáreas de membrana porosa y miles de bombas centrífugas de circulación.*

Así y todo, se obtienen con ello tan sólo «unos gramos de Uranio por día con 10 % de *U* 235».

El Calutron.

El Calutron («California University-tron») es una adaptación hecha por E. O. Lawrence, de Berkeley de los aparatos ideados como espectrógrafos de masas, por Aston y otros, a la separación de los isótopos del Uranio.

Lawrence usó primero el electroimán del «cyclotron» de polos de 94 cm. de diámetro que tenía en funcionamiento en Berkeley. Consiguió aumentar la eficiencia en forma considerable — con respecto a cualquier aparato anterior — destruyendo el potencial espacial en la cámara de vacío con la ionización de restos gaseosos y multiplicando el número de haces de iones que atraviesan la cámara simultáneamente.

Asegurando el éxito, Lawrence hizo terminar el electroimán de 5000 toneladas, cuya construcción había sido anteriormente paralizada por la guerra. Este electroimán tiene polos de 4,67 m. de diámetro. El «calutron» hecho con este electroimán probó ser capaz de producir 1 a 2 gramos de Uranio 235 por día, de una pureza del 80 al 40 por ciento respectivamente, partiendo de Uranio natural. Si se parte de Uranio ya enriquecido por difusión térmica, se puede aumentar la cantidad producida o la pureza. Ambas son inversamente proporcionales.

La gran ventaja del calutron sobre la difusión térmica o por membranas es que el primero produce en un escalón un enriquecimiento que requiere miles de escalones en los otros.

La magnitud del esfuerzo industrial necesario, aún con éste método, puede estimarse si se tiene en cuenta que para producir los 30 kilos de *U* 235 concentrado necesarios para una bomba atómica, a razón de 3 gramos por unidad por día, se necesitan 100 calutrones de 5000 toneladas cada uno funcionando durante 100 días.

La Separación del Deuterio.

Hemos visto que como «moderador», en las pilas heterogénea y homogénea, el Deuterio ofrece grandes ventajas. Su obtención en cantidad se ha conseguido por tres métodos:

1 - Destilación en torre de fraccionamiento.

2 - Fraccionamiento por intercambio químico en torre de contracorriente de Hidrógeno y de vapor de agua.

3 - Electrólisis.

El primer método utiliza el hecho de que el agua pesada hierve a 101°,4 C mientras que el agua liviana lo hace a 100°,OC. Este método parece ser el más económico. Lo está usando en gran escala la casa Dupont.

El segundo método es más rápido pero menos económico.

El tercer método — el más antiguo — requiere el consumo de grandes cantidades de corriente eléctrica.

La Bomba Atómica.

Una cantidad suficientemente grande de Uranio 235 o de Plutonio reunida en un espacio pequeño y mezclada, talvez, con una reducida cantidad de moderador explota. Ello se debe a que la reacción en cadena con neutrones de cerca de 10^6 ev, puede ser iniciada por uno de los muchos neutrones que andan sueltos debido a la radiación cósmica. Si la cantidad de metal es inferior a un cierto límite — el límite crítico — muchos neutrones se escapan por la superficie exterior y las reacciones en cadena se cortan: no hay explosión posible. El problema técnico de la bomba atómica — una vez obtenidas cantidades suficientes de *U* 235 o de *Pu* — consiste en evitar que explote antes de tiempo y en hacer que lo haga en el instante deseado. El principio de su solución consiste en el hecho de que si bien una bola maciza de *U* 235 o de *Pu*, de unos 10 cm. de diámetro y unos 30 kilos de peso, explota sola, las dos mitades de la bola, suficientemente separadas, están por debajo del límite crítico y no son explosivas. Basta, pues, juntar las dos mitades en el momento deseado para que la explosión se produzca.

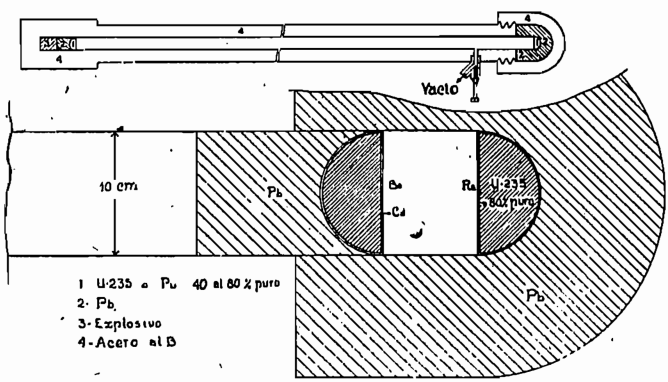

FIG 4 — CAÑON

La explosión completa tarda un tiempo del orden de un millonésimo de segundo. Para evitar el comienzo y la dispersión prematuros del material — lo que interrumpiría la cadena antes del consumo total del explosivo, restando violencia a la explosión — es necesario que las dos mitades se junten rápidamente y que permanezcan juntas no menos de 10^{-6} segundos, por la inercia de un material pesado que las envuelva.

Estos requisitos conducen a suponer que un posible mecanismo de ignición es el «cañón» representado esquemáticamente en figura 4.

En un «cañón» de acero (4) se encuentran, a la izquierda, la mitad de la bomba de Uranio, respaldada por un «taco» de Plomo y una carga de explosivo (3) contenida en recipiente hermético. En la boca del cañón se encuentra la otra mitad del Uranio (1), un manto de Plomo (2) y el cierre hermético de acero (4). El interior del cañón debe ser evacuado y desgasado. El proyectil debe llegar a la boca del cañón a una velocidad no menor de 1000 metros por segundo.

En la parte inferior de figura 4 se indica al proyectil en marcha, unos centímetros antes de llegar a su meta. Es posible que al Uranio se lo haya protegido con una delgada capa de Cadmio para evitar su deterioro por neutrones lentos durante su almacenamiento. Tal capa no parece indispensable.

Como el Uranio está dentro de un cañón de acero — absorbente de neutrones cósmicos — es probable que se use un «fulminante» consistente en una aguja de Berilio que se hunde en un preparado de Radium o de Polonium. La aguja de Berilio sola pudiera ser suficiente, por cuanto el *U* 235 y el *Pu* son radioactivos, con emisión α.

La inercia mecánica del Plomo que rodea al Uranio durante la explosión tiene la misión de evitar que este se disperse antes de tiempo. Según los informes publicados, esto no se consiguió del todo en Nueva México, Hiroshima y Nagasaki.

La bamba se dispara soltando el cañón desde un avión, con un dispositivo que enciende el explosivo en el momento deseado. La temperatura y la presión calculadas para el instante en que termina la explosión son 10^7 grados y 10^7 atmósferas.

El efecto letal y destructivo de la explosión se debe a:

1 - La intensísima radiación ultravioleta y γ.

2 - La lluvia de neutrones;

3 - La onda elástica de compresión;

4 - El «huracán» que la sigue;

5 - La elevada temperatura de los gases en expansión;

6 - La radioactividad producida en el lugar.

La magnitud de los efectos 1 y 5 puede juzgarse del hecho de que en Nueva México las arenas del desierto fueron fundidas en 400 metros a la redonda. El efecto 6 puede durar muchos años, pero con intensidad que decrece exponencialmente.

El tamaño de la bomba dividida en mitades está limitado por la condición de que cada mitad debe estar por debajo del límite crítico. Si se desean disparar bombas más grandes, es necesario dividirlas en un número mayor de partes. El problema de hacer que todas ellas se junten dentro de 10^{-6} segundos debe ser resuelto. Una posible solución consistiría en hacer que el choque de una estructura aerodinámica contra la tierra (o el agua) produjera el disparo simultáneo, por inercia, de un número de cañones dispuestos en forma radial, en su interior, de modo que los proyectiles embocaran en una cámara común.

Aplicaciones Científicas.

La explosión de bombas atómicas podría ser usada para importantes investigaciones científicas. La astrofísica y la física ganarían muchísimo si se obtuvieran series cinematográficas de espectros de distintas mezclas gaseosas a temperaturas de hasta diez millones de grados. Hasta ahora se han podido tomar espectros de fuentes de laboratorio hasta treinta mil grados únicamente. La meteorología podría hacer estudios de «nubes experimentales» tipo cúmulo-congestus y cúmulo-nimbus, pues no otra cosa constituyen las masas de gases calientes que se elevan hasta la estratósfera después de la explosión. Es probable que a cada disparo siga tormenta eléctrica con granizo y lluvia. La sismología podría experimentar con terremotos artificiales.

Conclusión.

La producción de bombas atómicas y la investigación de la posible aplicación industrial de la energía nuclear puede ser encarada por cualquier país que tenga una idustria desarrollada, materia prima y un número suficiente de físicos y de químicos de primera y de segunda línea.

Las dificultades técnicas a vencer son enormes. Si se conocieran todos los «secretos» se reducirían, pero no mucho. La labor requeriría, en cualquier caso, muchos años.

Deseo expresar mi especial agradecimiento al doctor Guido Beck, quien me ha ayudado con sugestiones y críticas a componer este informe.

SOBRE UN PROBLEMA DE JUAN BERNOULLI

(Tercera Parte)

por J. V. Uspensky

12. — Examinemos ahora convergentes intermedias y sea primero n impar. Sea

$$mR \equiv r_m \pmod S, \quad 0 \leqq r_m < S$$

y sea K ajustado de manera que

$$\left[\frac{K}{S}\right] = 0.$$

Entonces tenemos que satisfacer condiciones

$$\left[\frac{r_m}{S} - m\omega\right] = \left[\frac{r_m}{S} + \frac{K}{S}\right]$$

para $m = 1, 2, \ldots, S$, donde

$$\omega = \frac{x_n - \mu}{S(Q_n x_n + Q_{n-1})}.$$

Ya que la parte izquierda sea negativa mientras la parte derecha nula para $m = S$ concluímos que la convergente intermedia $\frac{R}{S}$ no es aproximación óptima en caso de n impar. Sea ahora n par. Entonces debe ser

$$\left[\frac{r_m}{S} + m\omega\right] = \left[\frac{r_m}{S} + \frac{K}{S}\right]$$

para $m = 1, 2, \ldots, S$ mientras

$$\left[\frac{K}{S}\right] = 0.$$

Sea $r_m = S - 1$ o

$$mR \equiv -1 \pmod S$$

Ya que

$$Q_n R \equiv -1 \pmod S$$

sigue

$$m \equiv Q_n \pmod S.$$

Tomando por consiguiente $m = Q_n$ y considerando que

$$Q_n \omega = \frac{Q_n(x_n - \mu)}{S(Q_n x_n + Q_{n-1})} < \frac{1}{S}$$

tenemos

$$\left[\frac{r_m}{S} + m\omega\right] = 0;$$

luego

$$\left[1 + \frac{K-1}{S}\right] = 0$$

lo que necesita $K < 1$ y ya que por otra parte $K \geqq 0$ resulta $K = 0$. Veamos ahora cuál es el mínimo m tal que no se verifique

$$\left[\frac{r_m}{S} + m\omega\right] = 0$$

o, lo que es lo mismo,

$$m\omega \geqq \frac{S - r_m}{S}.$$

Puesto $r_m = S - i$; $i = 1, 2, \ldots, S$ resulta

$$mR \equiv -i \pmod S$$

$$Q_n R \equiv -1 \pmod S$$

y por tanto

$$m \equiv i\, Q_n \pmod S$$

o bien

$$m = hS + i\, Q_n.$$

La desigualdad que deseamos satisfacer equivale a

$$(hS+i\,Q_n)\,(x_n-\mu)\geqq i\,(Q_n(x_n-\mu)+S)$$

o

$$h\geqq\frac{i}{x_n-\mu}$$

El mínimo m corresponde a $i=1$, $h=1$ por ser $x_n-\mu\geqq 1$ y vale

$$m=S+Q_n$$

de modo que

$$\left[\frac{r_m}{S}+m\omega\right]=0$$

para $m<S+Q_n$ pero esto no será cierto tomando $m=S+Q_n$. Luego el punto de divergencia de la serie

$$\left(\frac{R}{S}.0\right)$$

correspondiente a la convergente intermedia en caso de que sea n par será Q_n+S.

De lo expuesto sigue que todas las aproximaciones óptimas se encuentran entre convergentes principales $\frac{P_n}{Q_n}$ de índice impar y convergentes intermedias (si las hay)

$$\frac{R}{S}=\frac{\mu P_n+P_{n-1}}{\mu Q_n+Q_{n-1}}$$

correspondientes a índices n pares. Y como se ve fácilmente que los puntos de divergencia crecen con los denominadores serán efectivamente todas las fracciones mencionadas aproximaciones óptimas. En el sentido de § 10 el problema de Bernoulli está resuelto para la serie $(x,0)$. Puesto que las series $(x,0)$ y (x,x) son esencialmente idénticas y por otra parte, siendo n par, el punto de divergencia correspondiente a la convergente principal $\frac{P_n}{Q_n}$ sobrepasa el máximo de los puntos de divergencia que corresponden a las convergentes intermedias entre $\frac{P_n}{Q_n}$ y $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ se ve, tratando de modo análogo convergentes intermedias para n impar, que las aproximaciones óptimas para la serie (x, x) son sólo convergentes principales lo que proporcionará la más expedita solución del problema de Bernoulli en el caso que consideramos.

13. — Queda que estudiemos el caso $b = \frac{1}{2}$ de enteros próximos. Examinemos convergentes principales $\frac{P_n}{Q_n}$ y limitémonos a valores de n impares. El caso de n par se trata del modo en todo análogo. Puesto que Q_n es par tenemos

$$\left[mx + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{mP_n + \frac{Q_n}{2}}{Q_n} + m\omega\right]$$

y para Q_n impar

$$\left[mx + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{mP_n + \frac{Q_n - 1}{2}}{Q_n} + \frac{1}{2Q_n} + m\omega\right]$$

En cuanto a la serie $\left(\frac{P_n}{Q_n}, \frac{l}{Q_n}\right)$ la podemos exhibir para conveniencia ora en forma

$$\left(\frac{P_n}{Q_n}, \frac{K + \frac{Q_n}{2}}{Q_n}\right)$$

si Q_n es par, ora en forma

$$\left(\frac{P_n}{Q_n}, \frac{K + \frac{Q_n - 1}{2}}{Q_n}\right)$$

si Q_n es impar con cierto entero K. Sea primero Q_n par. Para que sea $\frac{P_n}{Q_n}$ aproximación óptima es preciso que tengamos

$$\left[\frac{mP_n + \frac{Q_n}{2}}{Q_n} + m\omega\right] = \left[\frac{mP_n + \frac{Q_n}{2}}{Q_n} + \frac{K}{Q_n}\right]$$

para $m = 0, 1, 2, \ldots, Q_n$, siendo K ajustado propiamente, o bien

$$\left[\frac{r_m}{Q_n} + m\omega\right] = \left[\frac{r_m}{Q_n} + \frac{K}{Q_n}\right]$$

donde r_m está definido por la congruencia

$$m\,P_n + \frac{Q_n}{2} \equiv r_m \pmod{Q_n}; \quad 0 \leqq r_m < Q.$$

En particular para $r_m = 0$ y $r_m = Q_n - 1$ tenemos condiciones

$$\left[\frac{K}{Q_n}\right] = 0, \quad \left[1 - \frac{1}{Q_n} + \frac{K}{Q_n}\right] = 0$$

pues $m\omega < \dfrac{1}{Q_n}$ para $m = 0, 1, 2, \ldots, Q_n - 1$, de las cuales deducimos $K = 0$ y entonces

$$\left[\frac{r_m}{Q_n} + m\omega\right] = 0$$

hasta el punto de divergencia el cual será el mínimo entero m tal que

$$\frac{r_m}{Q_n} + m\omega \geqq 1.$$

Sea $r_m = Q_n - i$ de modo que

$$m\,P_n \equiv -\frac{Q_n}{2} - i \pmod{Q_n}$$

$$Q_{n-1}\,P_n \equiv -1 \pmod{Q_n}$$

de donde

$$m \equiv i\,Q'_{n-1} + \frac{Q_n}{2} \pmod{Q_n}$$

ó

$$m = h\,Q_n + i\,Q_{n-1} + \frac{Q_n}{2}.$$

Entonces la desigualdad

$$\frac{r_m}{Q_n} + m\omega \geqq 1$$

se reduce a

$$h + \frac{1}{2} \geqq i\,x_n.$$

Claro que el mínimo m corresponde a $i = 1$ y al mínimo entero h tal que

$$h + \frac{1}{2} \geqq x_n = a_n + \vartheta; \quad 0 < \vartheta < 1 \ (*).$$

Sea primero $\vartheta > \frac{1}{2}$ lo que corresponde a $a_{n+1} = 1$; será entonces $h = a_n + 1$. Segundo si $\vartheta \leqq \frac{1}{2}$ y por tanto $a_{n+1} > 1$ es preciso que sea $h = a_n$. Luego el punto de divergencia será

$$Q_{n\pm1} + \frac{1}{2}\,Q_n \text{ en caso } Q_{n+2} > Q_{n+1} + Q_n$$

$$Q_{n\pm1} + \frac{3}{2}\,Q_n \text{ en caso } Q_{n+2} = Q_{n+1} + Q_n.$$

Sea ahora Q_n impar. Entonces poniendo

(*) En caso de x racional siempre desarrollámoslo en fracción contínua con número de elementos impar.

$$m\,P_n+\frac{Q_n-1}{2}\equiv r_m \pmod{Q_n},\quad 0\leqq r_m<Q_n$$

tenemos

$$\left[\frac{r_m}{Q_n}+\frac{1}{2Q_n}+m\omega\right]=\left[\frac{r_m}{Q_n}+\frac{K}{Q_n}\right]$$

para $m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ Q_n-1$ con K propiamente ajustado y de estas condiciones deduciremos el valor de K. Busquemos primero el mínimo m tal que

$$\frac{r_m}{Q_n}+\frac{1}{2Q_n}+m\omega\geqq 1$$

o, poniendo $r_m=Q_n-i$,

$$m\omega\geqq\frac{2i-1}{2}\ \frac{1}{Q_n}$$

o en otra forma

$$m\geqq\frac{2i-1}{2}\left(Q_n x_n+Q_{n-1}\right)=\frac{2i-1}{2}\,Q_{n+1}+\frac{2i-1}{2}\ \frac{Q_n}{x_{n+1}}$$

Ya que

$$m\,P_n\equiv-\frac{Q_n-1}{2}-i\pmod{Q_n}$$

$$Q_{n+1}\,P_n\equiv-1\pmod{Q_n}$$

sigue

$$m\equiv Q_{n+1}\left(\frac{Q_n-1}{2}+i\right)\pmod{Q_n}.$$

Ahora es preciso distinguir dos casos: Q_{n+1} par y Q_{n+1} impar.

1°. Sea Q_{n+1} par. Entonces

$$m \equiv \frac{2i-1}{2} Q_{n+1} \pmod{Q_n}$$

o

$$m = h\,Q_n + \frac{2i-1}{2} Q_{n+1}$$

y la desigualdad para m se reduce a

$$h \geqq \frac{2i-1}{2x_{n+1}}.$$

Claro que el mínimo m corresponde a $i=1$, $h=1$ y vale

$$m = Q_n + \frac{1}{2} Q_{n+1}.$$

Para $r_m = 0$ y $r_m = Q_n - 1$, siendo $m < Q_n$, tenemos condiciones

$$\left[\frac{K}{Q_n}\right] = 0, \quad \left[1 - \frac{1}{Q_n} + \frac{K}{Q_n}\right] = 0$$

y resulta $K=0$. Además el punto de divergencia que corresponde a $\dfrac{P_n}{Q_n}$ será

$$m = Q_n + \frac{1}{2} Q_{n+1}.$$

2º. Sea Q_{n+1} impar. Entonces

$$m = h\,Q_n + \frac{Q_n + (2i-1)Q_{n+1}}{2}$$

y

$$h + \frac{1}{2} \geqq \frac{2i-1}{2x_{n+1}}.$$

El mínimo m corresponde a $i=1$, $h=0$ y vale

$$m = \frac{Q_n + Q_{n+1}}{2} > Q_n.$$

Considerando otra vez $r_m = 0$ y $r_m = Q_n - 1$, siendo $m < Q_n$, hallamos de la misma manera que antes $K = 0$. El punto de divergencia que corresponde a $\frac{P_n}{Q_n}$ será

$$m = \frac{Q_n + Q_{n+1}}{2}.$$

En caso particular cuando

$$Q_{n+1} = Q_n + Q_{n-1}$$

será Q_{n-1} par y el punto de divergencia correspondiente a $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$

$$Q_n + \frac{3}{2} Q_{n-1}$$

sobrepasa

$$\frac{Q_n + Q_{n+1}}{2} = Q_n + \frac{1}{2} Q_{n-1}$$

de modo que en este caso $\frac{P_n}{Q_n}$ por cierto no es aproximación óptima. El caso de n par se trata del modo en todo análogo y llegamos a las mismas conclusiones excepto que $K = -1$ en caso de Q_n par.

14. — Examinemos ahora convergentes intermedias y limitémonos a la discusión detallada sólo del caso de n par. Sea primero

$$S = \mu Q_n + Q_{n-1}$$

impar. Si

$$r_m \equiv mR + \frac{S-1}{2} \pmod{S}; \quad 0 \leqq r_m < S$$

para hallar K tenemos condiciones

$$\left[\frac{r_m}{S}+\frac{1}{2S}+m\omega\right]=\left[\frac{r_m}{S}+\frac{K}{S}\right]$$

para $m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ S-1$, donde

$$\omega=\frac{x_n-\mu}{S(Q_n x_n+Q_{n-1})}.$$

Puesto $r_m=S-i$ y teniendo en cuenta congruencias

$$mR\equiv-\frac{S-1}{2}-i \pmod S$$

$$Q_n R\equiv-1 \pmod S$$

hallamos

$$r_m\equiv Q_n\left(\frac{S-1}{2}+i\right) \pmod S.$$

1°. Sea Q_n par; entonces resulta

$$m=hS+\frac{2i-1}{2}Q_n$$

y la desigualdad

$$\frac{r_m}{S}+\frac{1}{2S}+m\omega\geqq 1$$

exige que sea

$$h\geqq\frac{2i-1}{2}\,\frac{1}{x_n-\mu}.$$

Ya que $x_n-\mu\geqq 1$ el mínimo m corresponde a $i=1$, $h=1$ y vale

$$m=S+\frac{1}{2}Q_n.$$

Para $r_m = 0$ y $r_m = S-1$ con $m<S$ tenemos

$$\left[\frac{K}{S}\right]=0,\quad \left[1-\frac{1}{S}+\frac{K}{S}\right]=0$$

y por tanto $K=0$. El punto de divergencia

$$S+\frac{1}{2}Q_n$$

siendo menor que $Q_{n+1}+\frac{1}{2}Q_n$, sigue que $\frac{R}{S}$ no es aproximación óptima. Teniendo en cuenta que con Q_n par debe ser S impar concluimos que convergentes intermedias entre $\frac{P_n}{Q_n}$ y $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ no se encuentran entre aproximaciones óptimas si n es par y lo mismo vale para n impar.

2º. Sea Q_n impar. Entonces

$$m \equiv \frac{(2i-1)Q_n+S}{2} \pmod S.$$

La desigualdad

$$\frac{(2i-1)Q_n+S}{2}<S$$

tiene lugar si

$$2i-1 \leqq \mu.$$

Por otra parte con

$$m=\frac{(2i-1)Q_n+S}{2}$$

de la desigualdad

$$\frac{r_m}{S}+\frac{1}{2S}+m\omega \geqq 1$$

resulta

$$2i-1 \leqq x_n - \mu \quad \text{o} \quad 2i-1 \leqq a_n - \mu.$$

Sea ρ el máximo entero tal que

$$2\rho - 1 \leqq \mu, \quad 2\rho - 1 \leqq a_n - \mu.$$

Entonces para $i = 1, 2, \ldots, \rho$ y $m < S$ tenemos

$$\left[\frac{r_m}{S} + \frac{1}{2S} + m\omega\right] = 1$$

pero

$$\left[\frac{r_m}{S} + \frac{1}{2S} + m\omega\right] = 0$$

para $i \geqq \rho + 1$. En particular, tomando $i = \rho$ y $i = \rho + 1$, resulta

$$\left[1 - \frac{\rho}{S} + \frac{K}{S}\right] = 1, \quad \left[1 - \frac{\rho+1}{S} + \frac{K}{S}\right] = 0,$$

lo que necesita $K = \rho$. Veamos ahora cuál es el mínimo m tal que

$$\frac{r_m}{S} + \frac{1}{2S} + m\omega \geqq 1$$

siendo $r_m = S - i$ y $i \geqq \rho + 1$. Introduciendo

$$m = \frac{(2h-1)S + (2i-1)Q_n}{2}$$

esta desigualdad se reduce a

$$2h - 1 \geqq \frac{2i-1}{x_n - \mu}$$

y m resultará mínimo tomando $i = \rho + 1$ y buscando el mínimo h tal que

$$2h - 1 \geqq \frac{2\rho+1}{x_n - \mu}.$$

Claro que $h=1$ sólo si

$$2\rho+1\leqq a_n-\mu$$

y en el caso contrario será $h=2$. En efecto

$$2\rho-1\leqq x_n-\mu,\quad 2\leqq 2(x_n-\mu)$$

de donde

$$2\rho+1\leqq 3(x_n-\mu).$$

Ya que, según hipótesis

$$S=\mu\, Q_n+Q_{n-1}\equiv 1 \pmod 2$$

sigue

$$\mu\equiv 1+Q_{n-1} \pmod 2.$$

También

$$a_n\equiv Q_{n+1}+Q_{n-1} \pmod 2$$

de modo que $a_n-\mu$ será par o impar, según que sea Q_{n+1} impar o par.

1º. Sea Q_{n+1} par. Suponiendo $\mu<a_n-\mu$ tenemos

$$2\rho-1\leqq\mu,\quad 2\rho-1<a_n-\mu$$

y por consiguiente

$$2\rho+1\leqq a_n-\mu$$

de modo que $h=1$ y

$$m=\frac{S+(2\rho+1)Q_n}{2}.$$

Si a_n es par, μ es impar y

$$2\rho-1=\mu,\qquad\qquad 2\rho+1=\mu+2<a_n-\mu+2.$$

Luego

$$m<\frac{(a_n-\mu+2)Q_n+S}{2}=Q_n+\frac{Q_{n+1}}{2}.$$

Pero $Q_n+\dfrac{1}{2}\,Q_{n+1}$ es el punto de divergencia correspondiente a $\frac{P_n}{Q_n}$; por tanto $\frac{R}{S}$ no es una aproximación óptima. Si a_n es impar, μ es par y entonces

$$2\rho-1=\mu-1, \qquad\qquad 2\rho+1=\mu+1<a_n-\mu+1$$

y

$$m<\frac{(a_n-\mu+1)Q_n+S}{2}=\frac{Q_{n+1}+Q_n}{2}<Q_n+\frac{Q_{n+1}}{2}$$

y $\frac{R}{S}$ no puede ser una aproximación óptima. Sea ahora

$$\mu\geqq a_n-\mu, \quad 2\mu\geqq a_n.$$

Entonces

$$2\rho-1=a_n-\mu,$$

luego $2\rho+1=a_n-\mu+2$, $h=2$ y

$$m=\frac{(a_n-\mu+2)Q_n+3S}{2}=Q_n+\frac{Q_{n+1}}{2}+S.$$

Queda por examinar si esta cantidad es efectivamente el punto de divergencia correspondiente a $\frac{R}{S}$. Con tal objeto mostraremos que el mínimo m que satisface la desigualdad

$$\frac{r_m}{S}+\frac{1}{2S}+m\omega\geqq 2$$

y corresponde a $r_m=S-i$ con $i\leqq\rho$ será mayor que $Q_n+\frac{1}{2}Q_{n+1}$ $+\mathrm{S}$. En efecto, sustituyendo

$$m=\frac{(2h-1)S+(2i-1)Q_n}{2}$$

deducimos de la desigualdad precedente

$$2h-1 \geqq 2Q_n + \frac{2S+2i-1}{x_n-\mu}$$

y para que resulta m mínimo es preciso que $i=1$ y que sea $2h-1$ el mínimo entero impar tal que

$$2h-1 \geqq 2Q_n + \frac{2S+1}{x_n-\mu}.$$

Pero $2S+1 > 2\mu\, Q_n$, $x_n - \mu \leqq \mu + \vartheta$, $0 \leqq \vartheta < 1$, luego

$$\frac{2S+1}{x_n-\mu} > \frac{2\mu Q_n}{\mu+\vartheta} > Q_n$$

y

$$2h-1 > 3Q_n,$$

es decir $2h-1 \geqq 3Q_n + 2$ y

$$\frac{(2h-1)S+Q_n}{2} \geqq \frac{(3Q_n+2)S+Q_n}{2}.$$

Comparando la parte derecha con

$$Q_n + \frac{Q_{n+1}}{2} + S$$

basta mostrar que

$$3Q_n\, S > Q_n + Q_{n+1}.$$

Pero

$$3S = 3\mu\, Q_n + 3Q_{n-1},\ Q_n + Q_{n+1} = (a_n+1)\, Q_n + Q_{n-1} \leqq (2\mu+1)\, Q_n + Q_{n-1}.$$

y ya que

$$3\mu\, Q_n + 3Q_{n-1} > (2\mu+1)\, Q_n + Q_{n-1}$$

la desigualdad queda demostrada.

2º. Sea ahora Q_{n+1} impar y luego $a_n - \mu$ par. Sea primero $\mu < a_n - \mu$ y μ par.

Entonces

$$2\rho - 1 = \mu - 1, \; 2\rho + 1 = \mu + 1 < a_n - \mu,$$

luego $h = 1$ y

$$m = \frac{S + (2\rho+1)Q_n}{2} < \frac{(a_n - \mu)Q_n + S}{2} = \frac{Q_{n+1}}{2}$$

Sea μ impar y $\mu + 1 < a_n - \mu$. Entonces

$$2\rho - 1 = \mu, \; 2\rho + 1 = \mu + 2 < a_n - \mu$$

luego $h = 1$ y

$$m < \frac{(a_n - \mu)Q_n + S}{2} = \frac{Q_{n+1}}{2}.$$

Por ser

$$\frac{Q_n + Q_{n+1}}{2}$$

el punto de divergencia correspondiente a $\frac{P_n}{Q_n}$ en ambos casos discutidos no puede ser $\frac{R}{S}$ aproximación óptima. Si $\mu + 1 = a_n - \mu$ tenemos

$$2\rho + 1 = \mu + 2 > a_n - \mu,$$

luego $h = 2$ y

$$m = \frac{(a_n - \mu + 1)Q_n + 3S}{2} = \frac{Q_{n+1} + Q_n}{2} + S.$$

Sea finalmente $\mu \geqq a_n - \mu$. Entonces

$$2\rho - 1 = a_n - \mu - 1, \; 2\rho + 1 > a_n - \mu,$$

luego $h = 2$ y

$$m = \frac{(a_n - \mu + 1) Q_n + 3S}{2} = \frac{Q_{n+1} + Q_n}{2} + S.$$

Vamos a mostrar que en caso $\mu + 1 \geqq a_n - \mu$

$$\frac{Q_{n+1} + Q_n}{2} + S$$

será efectivamente el punto de divergencia que corresponde a $\frac{R}{S}$.

De la misma manera que antes basta mostrar que

$$\frac{Q_{n+1} + Q_n}{2} < \frac{(2h-1)S + Q_n}{2} - S$$

o bien

$$(2h-3)S > Q_{n+1}$$

donde $2h - 1$ es el mínimo número impar tal que

$$2h - 1 \geqq 2Q_n + \frac{2S+1}{x_n - \mu}$$

Ya que evidentemente $2h - 1 \geqq 2Q_n + 1$ tenemos $2h - 3 \geqq 5$ para $Q_n \geqq 3$. En caso $Q_n = 1$ por ser $2\mu + 1 \geqq a_n$ tenemos

$$2S + 1 = 2\mu + 1 + 2Q_{n-1} > \mu + \vartheta + 1 \geqq x_n - \mu,$$

luego

$$2h - 1 > 2 + 1 = 3,$$

es decir $2h - 1 \geqq 5$ y $2h - 3 \geqq 3$. Pero

$$3S = 3\mu\, Q_n + 3Q_{n-1} \geqq (2\mu + 1) Q_n + 3Q_{n-1} \geqq Q_{n+1} + 2Q_{n-1}$$

y la desigualdad

$$(2h-3)S > Q_{n+1}$$

será por cierto satisfecha.

CRONICA

EL HOMENAJE A REY PASTOR DE LA FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS DE ROSARIO

Como lo informáramos oportunamente (¹), la Facultad de Ciencias Matemáticas de Rosario, se adhirió a los homenajes tributados al doctor Julio Rey Pastor con motivo de sus bodas de plata con la docencia universitaria argentina, disponiendo la publicación, en honor del mismo, de un volumen de las "Publicaciones del Instituto de Matemática" de dicha Facultad.

Tal homenaje acaba de concretarse (²) bajo la forma de dos magníficos volúmenes, con un conjunto de cerca de 700 páginas y que contienen mas de un medio centenar de memorias científicas que los alumnos, colegas, y admiradores, del país y del extranjero, ofrecen al doctor Rey Pastor.

Además de las memorias esos volúmenes contienen unas palabras iniciales del Decano de la Facultad, ingeniero Cortés Pla y dos artículos sobre la obra de Rey Pastor: uno del doctor Esteban Terradas sobre Rey Pastor, como hombre e investigador, y el segundo del doctor Fausto L. Toranzos sobre Rey Pastor y la enseñanza de la matemática en la Argentina. Integran esos volúmenes una lista relativamente completa de los trabajos científicos de Rey Pastor en el período 1905-1945 y un hermoso retrato del mismo.

Damos a continuación la nómina de las memorias científicas:

J. Hadamard, *Remarques sur le cas parabolique des équations aux dérivées partielles.*

G. Fubini, *Un problema sulle piastre su cui agisce un carico concentrato e sue generalizazioni analitiche.*

P. Pi Calleja, *Sobre la integral de Stieltjes.*

J. Babini, *Sobre la transformación del método de Graeffe.*

G. Pólya, *Approximations to the area of the ellipsoid.*

J. V. Uspensky, *Sur la méthode de Laplace dans la théorie de l'attraction des ellipsoides homogènes.*

J. Würschmidt, *Los principios de acción variada y estacionaria.*

E. Kasner, *Geometric properties of isothermal families.*

J. De Cicco, *Geometric properties of generalized dynamical trajectories.*

M. Balanzat, *Conjuntos compactos y separables en los espacios* D_0.

A. Mieli, *Rivoluzione nelle rappresentazioni del macrocosmo e del microcosmo nell'anno fatidico 1543.*

S. Sispánov, *Ecuaciones diferenciales análogas a las de Clairaut.*

A. Rosenthal, *On interval-functions and associated set-functions.*

A. Korn, *On vibrational vortices.*

C. de Losada y Puga, *Reflexiones sobre la teoría de la relatividad.*

E. García de Zuñiga, *Galileo y la matemática pura.*

A. Terracini, *Sobre las ecuaciones diferenciales de Monge-Ampère.*

R. Frucht, *Sobre ciertos invariantes de grupos finitos.*

A. Valeiras, *Algunas fórmulas elementales relativas a la teoría de las curvas unicursales.*

G. García, *Sobre la regularización del problema plano de los tres cuerpos.*

M. O. González, *Sobre series divergentes y prolongación analítica.*

(¹) Véase *Revista de la Unión Matemática Argentina*, vol. IX, págs. 38 y 54.

(²) Corresponden a los volúmenes V (1945) y VI (1946) de las *Publicaciones del Instituto de Matemática.* Rosario, R. Argentina.

A. ROSENBLATT, *Sobre el problema del arco elástico sometido a presiones constantes en el extrados y en el intrados.*

L. A. SANTALÓ, *Superficies cuyas curvas-D son geodésicas o trayectorias isogonales de las líneas de curvatura.*

E. GASPAR, *Sobre la representación de variedades racionales normales.*

G. D. BIRKHOFF y J. LIFSHITZ, *Ciertas transformaciones en la dinámica sin elementos periódicos.*

C. PLA, *Las experiencias realizadas para determinar la velocidad del sonido en el aire.*

J. PASCALI, *Generación proyectiva de las curvas W.*

E. COROMINAS, *Propiedades diferenciales de las funciones continuas que carecen de puntos angulosos.*

P. CAPELLI y M. COTLAR, *Algunas cuestiones vinculadas a una posible extensión del principio de conservación de dominios.*

C. MOSSIN KOTIN, *Intensidad de reflexión de los rayos X por cristales.*

J. BARRAL SOUTO, *Teoremas análogos al de Rolle y valor medio para las funciones continuas, en base a diferencias finitas y divididas.*

P. M. GONZÁLEZ QUIJANO, *Derivada y continuidad.*

Y. FRENKEL, *Demostración simplificada de un teorema de Lebesgue.*

M. FRÉCHET, *Sur les lignes de discontinuité du plan tangent à une extrémale.*

E. DE RAFAEL, S. J., *Escalas axonométricas exactas.*

J. L. MASSERA, *Sobre la fórmula de Green.*

G. BLASCHKE, *Consideraciones sobre cinemática.*

E. FERRARI, *Sobre los espacios topológicos generales.*

L. VIGIL, *Observaciones sobre un teorema de Rey Pastor sobre el método de Gräffe.*

J. B. KERVOR, *Sobre la suma de series divergentes.*

A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ, *Sobre ciertas fórmulas de inversión.*

J. PALACIOS, *Determinación del número e por un método fotográfico.*

R. SAN JUAN, *Una aplicación de las aproximaciones diofánticas a la ecuación funcional* $f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2)$.

F. SANVISENS, *Las indicatrices de los funcionales analíticos n-lineales y su aplicación a la integración de funciones racionales.*

S. RIOS, *Sobre los conjuntos de las series de Taylor prolongables y no prolongables.*

E. RAIMONDI, *Sobre las funciones continuas sin derivada.*

G. JULIA, *Sur les convergences faible et forte dans l'espace d'Hilbert.*

P. MONTEL, *Sur les fonctions analytiques dont les valeurs couvrent un domaine d'aire bornée.*

J. DUFRESNOY, *Familles complexes quasi-normales.*

C. A. BULA, *Sobre ciertos polinomios de dos variables análogos a los de Laguerre.*

C. REPETTO, *Convergencia uniforme e inversión de las integrales* D_λ *en el campo complejo elíptico y parabólico.*

M. A. FERRARI, *Propiedades de la transformación* D_λ.

F. L. GASPAR, *Sobre una propiedad de los números reales.*

B. LEVI, *Sobre una fórmula de Laplace.*

M. SANDOVAL VALLARTA, *Consideraciones sobre la estabilidad de las órbitas periódicas en el campo de un dipolo magnético.*

Felicitamos al Instituto de Matemática de Rosario y en especial a su eminente director: doctor Beppo Levi, por tal espléndida realización de un merecido homenaje.

BIBLIOGRAFIA

POLYA, G.. *How to solve it. A new aspect of Mathematical method.* Princeton University Press, 1945. 204 páginas.

El conocido ex-profesor de matemáticas de Zürich, hoy profesor en la Stanford University de los Estados Unidos, trata en este librito, apoyado por la indiscutible autoridad de sus largos años de profesor e investigador, de presentar un estudio acerca de los métodos seguidos para llegar a la solución de los problemas y acerca de los métodos para enseñar la manera de llegar a estas soluciones y despertar a los alumnos la afición y capacidad para las mismas. Se refiere principalmente a problemas de matemáticas, pero sus reglas y observaciones son en muchos puntos más generales, pudiéndose aplicar a cualquier ciencia. Los ejemplos son siempre de matemática elemental, por lo que el libro puede ser de gran utilidad para los profesores de enseñanza media, como ejemplo de la manera de conducir la enseñanza de las matemáticas.

Está dividido en tres partes. Parte I: En la clase. Parte II: Cómo hallar la solución. Parte III: Breve diccionario de heurística.

La Parte I es un conjunto de reglas pedagógicas y ejemplos, tratados en forma de diálogo entre profesor y alumno, referentes a la enseñanza de las matemáticas y a la manera como debe proceder el profesor para lograr que el alumno vaya descubriendo por si solo los resultados a que se quiere llegar. La misión del profesor —dice— es ayudar al alumno, pero sin que la ayuda sea excesiva, para que el alumno no lo encuentre todo hecho, ni deficiente, para que el alumno no se encuentre detenido ni imposibilitado de avanzar por carencia de medios.

La Parte II consta sólo de cuatro páginas. En ella se dan unas reglas concretas y condensadas que deben presidir el proceso de solución de cualquier problema. Este proceso lo considera el autor dividido en 4 partes sucesivas: a) esfuerzo para comprender bien el problema, b) búsqueda de ideas útiles hasta trazarse un plan de ataque, c) desarrollo de este plan, d) mirada retrospectiva para asegurar que no ha sido olvidado ningún detalle y para procurar simplificar la solución.

En la Parte III, como indica su título, analiza una serie de conceptos, dispuestos en orden alfabético, más o menos relacionados con la resolución de problemas. Menciona, por ejemplo, los métodos de analogía (estudiar problemas análogas más simples que se sepan resolver), descomposición (descomponer el problema en partes auxiliares), inducción matemática, reducción al absurdo, simetrías, etcétera. Muchos puntos de este breve diccionario podrían sin duda desarrollarse más detenidamente y hacen desear que sea una próxima realidad el proyecto que anuncia el Autor en el prólogo de publicar una obra complementaria más extensa.

En resumen la obra nos parece una excelente y breve exposición de didáctica matemática, muy recomendable a los profesores de enseñanza media y también a los universitarios, pues aunque los ejemplos concretos son completamente elementales, las ideas directrices pueden extrapolarse perfectamente a la enseñanza y a la resolución de problemas de matemática superior.

L. A. SANTALÓ

INDICE

BIOGRAFIAS

SOLUCIONES DE LOS TEMAS PROPUESTOS

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

BIBLIOGRAFIA

CRONICA

ERRATA. — La figura de la página 190 debe invertirse.

PUBLICACIONES DE LA U. M. A.

VOLUMEN I (1936-1937), VOLUMEN II (1938-1939)

Notas y memorias de J. BABINI, C. BIGGERI, C. A. BULA, F. CERNUSCHI, J. A. DEL PERAL, J. FAYET, Y. FRENKEL, F. L. GASPAR, A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ, T. LEVI-CIVITA, M. PETROVICH, J. REY PASTOR, S. RIOS, F. TORANZOS.

Bibliografía, Extractos, Crónica, Revista de revistas, etc.

VOL. III (1938-1939). VOL. IV (1939). VOL. V (1940). VOL. VI (1940-1942)

Fascículos separados

Nº 1. — GINO LORIA. *Le Matematiche in Ispagna e in Argentina.*

» 2. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre las series de funciones de Hermite.*

» 3. — MICHEL PETROVICH. *Remarques arithmétiques sur une équation differentielle du premier ordre.*

» 4. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Una nueva demostración del teorema límite del Cálculo de Probabilidades. Condiciones necesarias y suficientes para que una función sea integral de Laplace.*

» 5. — NIKOLA OBRECHKOFF. *Sur la sommation absolue par la transformation d'Euler des séries divergentes.*

» 6. — RICARDO SAN JUAN. *Derivación e integración de series asintóticas.*

» 7. — Resolución adoptada por la U. M. A. en la cuestión promovida por el Sr. Carlos Biggeri.

» 8. — F. AMODEO. *Origen y desarrollo de la Geometría Proyectiva.*

» 9. — CLOTILDE A. BULA. *Teoría y cálculo de los momentos dobles.*

» 10. — COTILDE A. BULA. *Cálculo de superficies de frecuencia.*

» 11. — R. FRUCHT. *Zur Geometria auf einer Fläche mit indefiniter Metrik (Sobre la Geometría de una superficie con métrica indefinida).*

» 12. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre una memoria del Prof. J. C. Vignaux.*

» 13. — F. TORANZOS. *Sobre las singularidades de las curvas de Jordan.*

» 14. — M. BALANZAT. *Fórmulas integrales de la intersección de conjuntos.*

» 15. — G. KNIE. *El problema de varios electrones en la mecánica cuantista.*

» 16. — A. TERRACINI. *Sobre la existencia de superficies cuyas líneas principales son dadas.*

» 17. — L. A. SANTALÓ. *Valor medio del número de partes en que una figura convexa es dividida por n rectas arbitrarias.*

» 18. — A. WINTNER. *On the iteration of distribution functions in the calculus of probability (Sobre la iteración de funciones de distribución en el cálculo de probabilidades).*

» 19. — E. FERRARI. *Sobre la paradoja de Bertrand.*

» 20. — J. BABINI. *Sobre algunas propiedades de las derivadas y ciertas primitivas de los polinomios de Legendre.*

» 21. — R. SAN JUAN. *Un algoritmo de sumación de series divergentes.*

» 22. — A. TERRACINI. *Sobre algunos lugares geométricos.*

» 23. — V. y A. FRAILE y C. CRESPO. *El lugar geométrico y lugares de puntos áreas en el plano.*

» 24. — R. FRUCHT. *Coronas de grupos y sus subgrupos, con una aplicación a los determinantes.*

» 25. — E. R. RAIMONDI. *Un problema de probabilidades geométricas sobre los conjuntos de triángulos.*

VOL. VII (1940-1941). VOL. VIII (1942). VOL. IX (1943). VOL. X (1944-1945)

Notas y memorias de J. BABINI, M. BALANZAT, J. BARRAL SOUTO, G. BECK, M. BUNGE, H. E. CALCAGNO, E. A. DE CESARE, E. FERRARI, V. y A. FRAILE y C. CRESPO, Y. FRENKEL, R. FRUCHT, E. GASPAR, F. L. GASPAR, A. J. GUARNIERI, J. E. HERRERA, G. KNIE, N. KRIVOSHEIN, W. MÄCHLER, E. R. RAIMONDI, J. J. REBELLA, J. REY PASTOR, S. RIOS, P. ROSSELL SOLER, M. SADOSKY, R. SAN JUAN, L. A. SANTALÓ, S. SISPÁNOV, A. TERRACINI.

Informes de las reuniones de la Asociación Física Argentina.

Soluciones de temas propuestos, Bibliografía, Crónica, etc.

En 1942 la U. M. A. ha iniciado la publicación de una nueva serie de ''Memorias y monografías'' de las que han aparecido hasta ahora las siguientes:

Nº 1. — GUILLERMO KNIE, *Mecánica ondulatoria en el espacio curvo.*

Nº 2. — GUIDO BECK, *El espacio físico.*

Nº 3. — JULIO REY PASTOR, *Integrales parciales de las funciones de dos variables en intervalo infinito.*

Nº 4. — JULIO REY PASTOR. *Los últimos teoremas geométricos de Poincaré y sus aplicaciones.* Homenaje póstumo al Prof. G. D. BIRKHOFF.

Además han aparecido tres cuadernos de *Miscelánea matemática.*

SUMARIO