

REVISTA  
DE LA  
**UNION MATEMATICA ARGENTINA**

(MIEMBRO DEL PATRONATO DE LA MATHEMATICAL REVIEWS)

ORGANO DE LA

**ASOCIACION FISICA ARGENTINA**

REDACTADA por

J. Babini (Director), J. Rey Pastor, L. A. Santaló y E. Gaviola (Delegado de la A. F. A.)



MIEMBROS TITULARES DE LA U. M. A.

J. BABINI (Santa Fe) (fundador). — M. BALANZAT (San Luis). — J. BARRAL SOUTO (B. Aires) (fundador). — C. A. BULA (Rosario) (fundador). — E. COROMINAS (Mendoza). — E. CHICHIZOLA (Rosario). — C. DIEULEFAIT (Rosario) (fundador). — A. DURAZONA Y VEDIA (B. Aires). — FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS FÍSICAS Y NATURALES (B. Aires) (fundador). — FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS (Rosario) (fundador). — FACULTAD DE QUÍMICA INDUSTRIAL (Santa Fe) (fundador). — Y. FRENKEL (B. Aires). — E. GASPAR (Rosario) (fundador). — F. L. GASPAR (Rosario) (fundador). — J. GIANNONE (Rosario) (fundador). — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ (Buenos Aires) (fundador). — J. GONZÁLEZ GALE (Buenos Aires) (fundador). — M. GUITARTE (Buenos Aires) (fundador). — W. S. HILL (Montevideo) (fundador). — C. ISELLA (Rosario) (fundador). — H. MAGLIANO (La Plata). — OBSERVATORIO ASTRONÓMICO (La Plata). — J. OLGUIN (Rosario) (fundador). — P. Pí CALLEJA (San Juan). — E. R. RAIMONDI (Buenos Aires) (fundador). — J. E. REYNAL (Buenos Aires). — J. REY PASTOR (Buenos Aires) (fundador). — E. L. SAMATÁN (Buenos Aires) (fundador). — L. A. SANTALÓ (Rosario) (fundador). — J. SORTEX (Tucumán) (fundador). — D. T. A. DE SPELUZZI (Buenos Aires) (fundador). — E. TERRADAS (La Plata) (fundador). — F. TORANZOS (La Plata). — E. H. ZARANTONELLO (La Plata).



BUENOS AIRES

1946

# UNION MATEMATICA ARGENTINA

## MIEMBROS HONORARIOS

Tulio Levi-Civita (†); Beppo Levi; Alejandro Terracini; George D. Birkhoff (†); Marshall H. Stone; Georges Valiron.

## JUNTA DIRECTIVA

Presidente, Alejandro Terracini, Salta 417, Tucumán  
Vicepresidentes, Agustín Durañona y Vedia. Alberto E. Sagastume Berra.  
Secretarios, Máximo Valentinuzzi (Buenos Aires). Luis A. Santaló (Litoral).  
Angel J. Guarnieri (Cuyo). Félix E. Herrera (Tucumán). Eduardo Zarantonello (La Plata). Ricardo Platzeck (Córdoba). Tesorera, Clotilde A. Bula.  
Protesorera, Yanny Frenkel de Cotlar.

## REPRESENTANTES EN EL EXTRANJERO

Ing. Rafael Laguardia (Uruguay). Ing. José Luis Massera (Uruguay).  
Dr. Sergio Sispánov (Paraguay). Dr. Godofredo García (Perú). Dr. Leopoldo Nachbin (Brasil). Dr. Roberto Frucht (Chile). Dr. Peter Thullen (Ecuador).  
Dr. Mario González (Cuba). Dr. Alfonso Nápoles Gandara (México).

---

Para ingresar como miembro titular de la Unión Matemática Argentina, es necesaria la presentación del solicitante por dos socios fundadores, la admisión por la Junta, y el pago de una cuota de \$ 5. — m/n. mensuales o de \$ 50.— anuales.

Para ingresar como miembro adherente (con derecho a la Revista y a las Memorias en fascículos separados) es necesario el pago de una cuota de \$ 10.— anuales. Los pagos deberán efectuarse por cheque, giro u otro medio libre de gastos, a la orden de la Tesorera, Prof. Clotilde A. Bula, Lavalle 1115, Rosario.

Los señores miembros adherentes domiciliados en la Ciudad de Buenos Aires podrán, si lo prefieren, efectuar su pago en doce cuotas mensuales de \$ 1.00 m/n. cada una, que serán cobradas a domicilio.

Por ser la U. M. A. miembro del patronato de la Mathematical Reviews (sponsoring member), los socios de la U. M. A. tienen derecho a suscribirse a esa importante revista de bibliografía y crítica, con 50 % de rebaja sobre el precio de suscripción que es de 13 dólares por año. Los socios de la U. M. A. pagarán por tanto sólo 6.50 dólares por año.

Los trabajos originales enviados para su publicación serán previamente analizados por un ponente, quien emitirá dictamen acerca de la novedad y corrección de sus resultados.

La impresión de las tiradas aparte, y las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

---

Abonnement annuel à l'étranger: 4.00 dollars (Etats-Unis).

Prière d'adresser toute la correspondance scientifique et administrative à l'adresse ci-dessous:

SR. SECRETARIO DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

Dr. MÁXIMO VALENTINUZZI

Gascón 520, Buenos Aires (REP. ARGENTINA)

---

## ASOCIACION FISICA ARGENTINA

Para ingresar a la Asociación Física Argentina debe abonarse una cuota mensual de \$ 5.— m/n. Los estudiantes de física y de astronomía pagarán una cuota mensual de \$ 1.— m/n.

Presidente: Enrique Gaviola

Tesorera: Estrella Mazzolli de Mathov, Buenos Aires, San Juan 1931.

Secretarios Locales: Ernesto E. Galloni, Buenos Aires, Yerbal 1763.

Fidel Alsina Fuertes, La Plata, calle 44, N° 717.

Guido Beck, Córdoba, Laprida 922.

José Würschmidt, Tucumán, Laprida 765.

# DIRECTIONS DE JULIA ET DIRECTIONS DE PICARD DES FONCTIONS ENTIÈRES (\*)

par GEORGES VALIRON,

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

G. Julia a montré qu'étant donnée une fonction entière  $f(z)$ , ou plus généralement une fonction holomorphe autour du point à l'infini qui est point singulier essentiel, il existe au moins une direction, ou demi-droite  $\Delta$  définie par  $\arg z = \varphi_0 = \text{const.}$ , telle que le théorème de Picard reste vrai dans tout angle  $A$  de sommet origine et de bissectrice  $\Delta$ . C'est dire que, dans un tel angle  $A$ ,  $f(z)$  prend une infinité de fois toute valeur finie sauf au plus une seule valeur exceptionnelle. Ce théorème de Julia s'applique aussi à la plupart des fonctions méromorphes autour du point à l'infini lorsque ce point est point limite de pôles. Les démonstrations de Julia s'appuient sur la théorie des familles normales de Montel. Ostrowski a apporté d'importants compléments aux résultats de Julia: il a déterminé complètement la classe des fonctions méromorphes qui font exception au théorème; il a montré que:

Il existe sur  $\Delta$  une suite de points  $z_n$  s'éloignant indéfiniment lorsque  $n$  croît indéfiniment qui jouissent de la propriété suivante. A tout couple de nombres  $\varepsilon, d$  correspond un entier  $N(\varepsilon, d)$  tel que  $f(z)$  prend dans tout cercle  $|z - z_n| < \varepsilon |z_n|$ , de rang supérieur à  $N(\varepsilon, d)$ , toute valeur représentée sur la sphère de rayon 1 à l'extérieur de deux cercles de rayon  $d$  (ces cercles dépendent de  $n$ ).

Ce sont de tels cercles que Milloux appelle cercles de remplissage.

---

(\*) Trabajo expuesto por el Prof. G. Valiron en la sesión realizada en su honor, el 2 de agosto de 1946, por la Unión Matemática Argentina.

J'ai proposé (Journal de math., 1928) de réserver le nom de directions de Julia aux directions  $\Lambda$  jouissant de la propriété qui vient d'être donnée et d'appeler d'une façon générale directions de Picard toute direction  $\Lambda$  possédant la propriété donnée au début: le théorème de Picard s'applique dans tout angle de bissectrice  $\Lambda$ . Les fonctions méromorphes sauf à l'origine et au point à l'infini qui restent invariantes par la substitution  $(z, sz)$ , où  $|s| > 1$ , donnent des exemples de directions de Picard qui ne sont pas directions de Julia: si l'argument de  $s$  est incommensurable à  $\pi$ , toute direction est direction de Picard et il n'y a pas de direction de Julia. Mais je n'avais pas su montrer qu'il existe des fonctions holomorphes autour du point à l'infini qui possèdent des directions de Picard qui ne sont pas directions de Julia. C'est cette lacune que je me propose de combler ici.

Considérons les deux fonctions entières d'ordre nul

$$g(z) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right), \quad h(z) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z}{b_n}\right).$$

Les nombres  $a_n$  sont pris réels positifs, on suppose

$$a_1 = 2\pi, \quad a_{n+1} \geq a_n^2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \frac{a_n}{2\pi} \text{ entier.}$$

Les nombres  $b_n$  ont tous le même argument  $\omega$  compris entre 0 et  $\frac{\pi}{4}$  et incommensurable à  $\pi$ . On a, en général  $|b_n| = a_n$ , mais pour une suite infinie de valeurs de  $n$ , qui seront définies plus loin, on aura seulement

$$\frac{3}{4} < \frac{|b_n|}{a_n} < \frac{5}{4}.$$

Si l'on suppose

$$(1) \quad \frac{a_n}{2} < |z| < 2a_{n+1},$$

on trouve facilement que l'on a

$$g(z) = (-1)^{n-1} \frac{z^{n-1}}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \left(1 - \frac{z}{a_{n+1}}\right) \left(1 + \frac{O(1)}{\sqrt{|z|}}\right)$$

(0(1) désignant un nombre qui reste borné lorsque  $|z|$  croit indéfiniment) et l'on a la même égalité pour  $h(z)$ , les  $b_n$  remplaçant les  $a_n$ . Il s'ensuit que, dans la couronne (1) la fonction méromorphe

$$F(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$$

est égale à

$$(2) \quad \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{b_1 b_2 \dots b_n} \frac{z-b_n}{z-a_n} \frac{z-b_{n+1}}{z-a_{n+1}} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \left(1 + \frac{0(1)}{\sqrt{|z|}}\right).$$

Si l'on suppose  $|b_n| = a_n$  et si l'on prend  $z = a_n e^{i\varphi}$ ,  $F(z)$  prend la valeur

$$(3) \quad F_n = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{b_1 b_2 \dots b_n} \frac{e^{i\varphi} - e^{i\omega}}{e^{i\varphi} - 1} \left(1 + \frac{0(1)}{a_{n-1}}\right).$$

Supposons maintenant que  $z'$  appartienne à une couronne (1) quelconque, son argument  $\varphi$  étant fixe et compris entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $\pi$ . D'après l'expression (2), lorsque  $z$  décrit le cercle

$$|z - z'| < \varepsilon |z'|$$

on a

$$F(z) = F(z') e^\lambda$$

avec

$$(4) \quad \lambda = -\log \left( \frac{z'-b_n}{z-b_n} \frac{z-a_n}{z'-a_n} \frac{z'-b_{n+1}}{z-b_{n+1}} \frac{z-a_{n+1}}{z'-a_{n+1}} \right) + \frac{0(1)}{\sqrt{|z'|}}.$$

Il s'ensuit facilement que

$$|\lambda| < 0(1) \varepsilon$$

et

$$F(z) = F(z') (1 + \varepsilon 0(1)).$$

Cette égalité permet d'affirmer que la direction d'argument  $\varphi$

considéré n'est pas direction de Julia: la famille de fonctions  $F(tz)$  où  $t$  est réel positif arbitraire est normale pour tous les points  $z$  d'argument  $\varphi$ .

D'autre part, lorsque le point  $z$  décrit le cercle

$$(5) \quad |z - a_n e^{i\varphi}| < \varepsilon a_n, \quad |b_n| = a_n$$

la même égalité (4) montre que les valeurs de  $Z = F(z)$  couvrent tout un cercle

$$(6) \quad |Z - F_n| < k \varepsilon |F_n|,$$

le nombre  $k$  étant indépendant de  $n$  qui est supposé assez grand.

Supposons que l'on ait choisi les  $|b_n|$  de telle façon que les nombres

$$\mu_n = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{b_1 b_2 \dots b_n}, \quad |b_n| = a_n,$$

soient denses dans toute couronne

$$(7) \quad \frac{1}{A} < |\mu_n| < A$$

si grand que soit le nombre donné  $A$ . D'après l'égalité (3), les nombres  $F_n$  seront aussi denses dans une couronne analogue et d'après (6) la fonction  $F(z)$  prendra une infinité de fois toute valeur  $Z$  telle que

$$\frac{1}{A} < |Z| < A$$

dans la suite des cercles (5) où  $\varepsilon$  est arbitrairement petit. La direction  $\varphi$  sera direction de Picard de  $F(z)$ . La fonction  $F(z)$  est méromorphe, mais la fonction

$$f(z) = F(z) (1 - e^{iz})$$

est une fonction entière d'après la définition des  $a_n$ . Comme  $\varphi$

est pris entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $\pi$ , le second facteur dans l'expression de  $f(z)$  est de la forme

$$1 + O(1) e^{-|z| \sin \varphi}$$

et tout ce qui a été dit pour  $F(z)$  vaut pour  $f(z)$ . Les directions  $\varphi$  comprises entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $\pi$  sont directions de Picard pour  $f(z)$  sans être directions de Julia. La valeur 0 est exceptionnelle. On verra facilement comment on pourra s'arranger pour qu'il n'y ait pas de valeur exceptionnelle, et aussi qu'on peut obtenir des directions de Picard pour une fonction entière qui ne sont pas directions de Picard pour la dérivée.

Il reste à établir que l'on peut choisir les  $|b_n|$  pour que les  $\mu_n$  soient denses dans toute couronne (7). On prendra d'abord

$$|b_n| = a_n \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots, N_1 - 1$$

de sorte que  $|\mu_n| = 1$  pour  $n < N_1$  et comme l'argument de  $\mu_n$  est  $-n\omega$ , on peut supposer  $N_1$  assez grand pour que l'écart maximum de ces  $\mu_n$  soit inférieur à un nombre donné  $\eta$ . Prenons alors

$$|b_{N_1}| = a_{N_1} \left(1 + \frac{1}{5}\right),$$

pris de nouveau  $|b_n| = a_n$  jusqu'à  $n = N_2 - 1$ ,  $N_2$  étant pris assez grand pour que l'écart maximum des points  $\mu_n$  obtenus sur le cercle de rayon  $\frac{5}{6}$  soit inférieur à  $\eta$ . Nous prenons alors

$$|b_{N_2}| = a_{N_2} \left(1 + \frac{1}{6}\right)$$

puis de nouveau  $|b_n| = a_n$  pour  $n = N_2 + 1, \dots, N_3 - 1$ ,  $N_3$  étant pris assez grand pour que l'écart des points  $\mu_n$  obtenus sur le cercle de rayon  $\frac{5}{7}$  soit inférieur à  $\eta$ . Et nous continuons ces

opérations alternées jusqu'à ce qu'on arrive à  $|\mu_n| = \frac{1}{2}$ , obtenu à partir de  $n = N_5$ . Nous prenons alors

$$|b_{N_5}| = a_{N_5} \frac{1}{1 + \frac{1}{11}}$$

et ainsi de suite, en alternant toujours, jusqu'à obtenir  $|\mu_n| = 2$ . On recommence alors à faire décroître  $|\mu_n|$  jusqu'à  $\frac{1}{4}$ , puis croître jusqu'à 4, mais en remplaçant dans cette série nouvelle d'opérations  $\eta$  par  $\frac{\eta}{2}$ . Dans la série suivante, où  $|\mu_n|$  variera entre 4 et  $\frac{1}{8}$  puis entre  $\frac{1}{8}$  et 8, on remplacera  $\frac{\eta}{2}$  par  $\frac{\eta}{4}$ , Et ainsi de suite. Les  $\mu_n$  seront denses dans la couronne (7), si grand que soit  $A$ , même lorsqu'on écarte ceux pour lesquels  $|b_n| \neq a_n$ .

## PARA LA GEOMETRIA DE LOS POLINOMIOS MONODIFRICOS (\*)

por ALEJANDRO TERRACINI  
(Universidad Nacional de Tucumán)

Ha sido estudiada recientemente por el señor Rufus P. Isaacs (1) una clase de funciones  $f(z)$  de una variable compleja  $z$ , que él llamó *monodífricas*, las cuales constituyen algo análogo a las funciones analíticas, en cuanto se reemplace la unicidad de la derivada por la igualdad de las razones incrementales correspondientes a incrementos unitarios en las direcciones positivas, real e imaginaria pura, del plano de Gauss:

$$f(z+1) - f(z) = \frac{f(z+i) - f(z)}{i} (= \Delta f(z)).$$

Si en lugar de los incrementos  $1$  e  $i$  se tomaran  $h$  e  $ih$ , siendo  $h$  una constante compleja arbitraria, que puede llamarse *abertura*, se obtendrían las funciones  $h$ -monodífricas, cuya teoría se reduce a la de las funciones monodífricas mediante un cambio de variable.

En particular pueden considerarse *polinomios* monodífricos. El señor Isaacs ha dado a conocer la forma más general de un polinomio monodífrico de grado  $n$ , a saber:

$$a_0 z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} z + a_n.$$

---

(\*) Trabajo presentado en las *Primeras Jornadas Matemáticas Argentinas*, realizadas en Buenos Aires y La Plata del 27 al 29 de julio de 1945.

(1) *A Finite Difference Function Theory*, Rev. de Mat. y Fis. teor. de la Universidad Nacional de Tucumán, vol. 2, 1941.

Las  $a_0, a_1, \dots, a_n$  indican constantes complejas arbitrarias (la primera no nula, si el polinomio debe tener efectivamente grado  $n$ ). En cuanto a  $z^{(n)}$ , que desempeña un papel análogo al de la potencia  $n$ -ésima de  $z$ , y puede por ejemplo definirse por recurrencia por las condiciones

$$\Delta z^{(n)} = n z^{(n-1)} \quad (n \geq 1); \quad z^{(0)} = 1; \quad 0^{(n)} = 0 \quad (n \geq 1),$$

su expresión explícita es

$$z^{(n)} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} i^{n-j} x(x-1) \dots (x-j+1) y(y-1) \dots (y-n+j+1).$$

No es difícil demostrar que una ecuación monodífrica de grado  $n$  siempre admite cierto número  $\sigma$  de raíces complejas; no menos que  $n$ , pero a veces más: y precisamente,

$$n \leq \sigma \leq n^2.$$

Es éste un ejemplo de las distorsiones que sufre la teoría de las funciones analíticas al pasar a la de las monodífricas. Creo que el estudio de las ecuaciones monodífricas puede dar lugar a algunos resultados interesantes. Expondré brevemente a continuación algunos de los más elementales<sup>(1)</sup>.

Aunque se trate de cosas muy elementales, mi curiosidad geométrica ha sido estimulada en primer término por el deseo de darme cuenta de qué son y de cómo están distribuidos en el plano de Gauss los grupos  $G_4$  de cuatro puntos representativos de una ecuación monodífrica de segundo grado

$$z^{(2)} + \beta z + \gamma = 0, \tag{1}$$

en cuanto por supuesto se trate de una ecuación que admite efectivamente *cuatro* raíces. La expresión explícita de  $z^{(2)}$  permite

(1) Una exposición más completa de la mayor parte de los resultados que exponemos a continuación aparecerá, con el título "*Un primer aporte a la geometría de los polinomios monodífricos*" en las Actas de la Academia Nacional de Ciencias Exactas Físicas y Naturales de Lima.

sacar de inmediato la conclusión que los cuatro puntos de cada  $G_4$  son siempre vértices de un cuadrángulo ortogonal (cuadrángulo completo  $ABCD$ , cuyos pares de lados opuestos son perpendiculares, es decir cuyos vértices son vértices y ortocentro de un triángulo). Sin embargo los cuadrángulos ortogonales son  $\infty^6$ , mientras que los  $G_4$  son  $\infty^4$ . De modo que se comprende que los cuadrángulos ortogonales correspondientes a los  $G_4$  cumplen con ciertas condiciones ulteriores. Pues bien, dichas condiciones necesarias y suficientes pueden expresarse en la forma siguiente.

La primera condición vincula, por decirlo así, el tamaño de los cuadrángulos ortogonales representativos, en el sentido de que para cada uno de ellos el círculo circunscrito al triángulo diagonal, o círculo de Feuerbach, debe tener radio, igual a  $\sqrt{2}/4$ : en forma equivalente puede decirse que el círculo circunscrito p. e. al triángulo  $ABC$  debe tener radio  $\sqrt{2}/2$ . Es claro que esta primera limitación encuentra su razón de ser en la *apertura*, igual a 1, de los polinomios monodífricos considerados.

La segunda limitación, en cambio, tiene un alcance, diré así, angular, y depende en definitiva del papel privilegiado que desempeña la dirección del eje  $x$  en la definición de las funciones monodífricas. Para enunciarla, conviene partir de la observación que en cualquier cuadrángulo ortogonal, si se llaman  $M_{AB}$ , etc., los puntos medios de los 6 lados, y se fija una recta orientada cualquiera  $r$ , las seis sumas de ángulos

$$2(r, AB) + (r, M_{AB} M_{CD}); \quad 2(r, AC) + (r, M_{AC} M_{BD});$$

$$2(r, AD) + (r, M_{AD} M_{BC});$$

$$2(r, CD) + (r, M_{CD} M_{AB}); \quad 2(r, BD) + (r, M_{BD} M_{AC});$$

$$2(r, BC) + (r, M_{BC} M_{AD})$$

son todos congruos entre sí mod  $360^\circ$ : se entiende que la recta  $M_{AB} M_{CD}$  se orienta desde el primer punto hacia el segundo, etc. Rara entendernos, podemos llamar al valor común de esas sumas *anomalía del cuadrángulo ortogonal respecto al eje  $r$* . Pues bien, la segunda condición consiste en que, con respecto al eje  $x$ , cada  $G_4$  brinda un cuadrángulo ortogonal cuya anomalía es constantemente de  $135^\circ$ .

A la descripción de nuestros  $\infty^4$  cuadrángulos ortogonales puede darse una forma más sintética, si para cada cuadrángulo ortogonal, se introduce la correspondiente hipocicloide tricúspide de Steiner (hipocicloide inscrita en el cuadrángulo, es decir, tangente a sus seis lados). Las hipocicloides de Steiner son  $\infty^4$  (lo mismo como los triángulos equiláteros  $T$  integrados por sus cúspides) y a cada una pueden circunscribirse  $\infty^2$  cuadrángulos ortogonales. Pues bien, los cuadrángulos ortogonales correspondientes a las ecuaciones monodífricas pueden caracterizarse en base únicamente a sus hipocicloides de Steiner, en cuanto es necesario y suficiente que el triángulo equilátero  $T$  tenga cierto tamaño bien determinado (el radio del círculo circunscrito debe ser  $3\sqrt{2}/4$ ) y esté colocado de manera que la semirecta que va de su centro a un vértice tenga una anomalía de  $-135^\circ$ . Se tienen así  $\infty^2$  hipocicloides de Steiner  $\varphi$ , que se deducen todas una de otra por traslación: sus cuadrángulos ortogonales circunscritos son los  $\infty^4$  representativos de las ecuaciones monodífricas. El resultado es sencillo también desde el punto de vista algebraico, debido a que las  $\infty^2$  hipocicloides  $\varphi$ , como envolventes, integran un sistema lineal.

También he conseguido algunos resultados relativos a las involuciones cuadráticas monodífricas, logradas al combinar linealmente la (1) y otra ecuación análoga:

$$\lambda(z^{(2)} + \beta z + \gamma) + \mu(z^{(2)} + \beta_1 z + \gamma_1) = 0.$$

Una involución  $I$  es por lo tanto cierto conjunto  $\infty^2$  de cuadrángulos ortogonales (completado por los pares de puntos representados por la ecuación anterior, para los valores de  $\lambda/\mu$  que llevan a dos solas raíces). Prescindiendo del caso trivial en el cual el punto impropio es punto base, se encuentran esencialmente dos tipos de involuciones monodífricas. Hay un tipo *particular* cuando el punto impropio es unido: en tal caso los cuadrángulos ortogonales que integran la involución son los circunscritos a una misma hipocicloide  $\varphi$ . En cambio, en el caso *general*, cuadrángulos distintos de la involución llevan a hipocicloides  $\varphi$  igualmente distintas. La posición mutua de los cuadrángulos ortogonales de la involución puede describirse así. En general, dos cuadrángulos ortogonales  $Q, Q'$  no circunscritos a

una misma hipocicloide de Steiner dan lugar a un punto que puede llamarse central, el cual resulta de la forma siguiente: dos hipérbolas equiláteras circunscriptas a  $Q, Q'$  y con asíntotas paralelas, tienen en común una cuerda propia, que al variar esas asíntotas, pasa por un punto fijo: es ese el punto que llamamos central. Pues bien, los  $\infty^2$  cuadrángulos de la involución  $I$  tienen, dos a dos, un mismo punto central.

En una involución cuadrática monodífrica  $I$  siempre existen  $\infty^1 G_4$ , cada uno de los cuales tiene un punto por lo menos doble. En el caso que hemos llamado particular, el lugar de los puntos dobles propios se reduce al círculo de Feuerbach común a los  $\infty^2$  cuadrángulos ortogonales de la involución. En cambio, en el caso general ese lugar es una cuártica  $E^4$  (con infinitos puntos reales) bitangente a la recta impropia. Su género es generalmente igual a 3, aunque en casos especiales puede adquirir valores menores, lo que ocurre en el ejemplo particularmente sencillo brindado por una involución cuadrática monodífrica con un punto base  $O$  (es decir por el conjunto de los  $\infty^2 G_4$  entre cuyos puntos figura el punto dado  $O$ ). En este caso la curva  $E^4$  tiene un punto triple en  $O$ , y es la «rosa de tres hojas» que al tomar  $O$  como polo tiene la ecuación polar

$$\rho = \sqrt{2} \operatorname{sen} 3(75^\circ - \vartheta);$$

esta curva, junto con su simétrica  $J^4$  respecto a  $O$  (la cual es el lugar de los puntos ulteriores de los  $G_4$  del plano de Gauss que

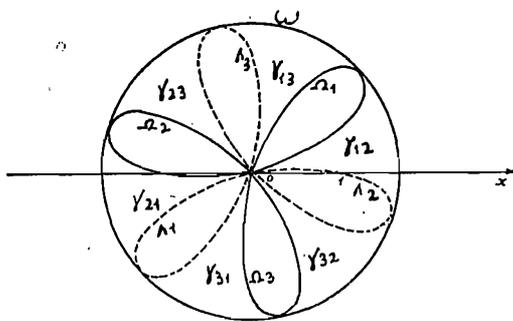


Fig. 1

aceptan  $O$  como punto por lo menos doble), permite formarse una idea de conjunto de la distribución de las ternas de puntos que, junto con  $O$ , integran los  $\infty^2 G_4$ . Considerando también el círculo  $\omega$  de centro  $O$  circunscrito a las curvas  $E^4$  y  $J^4$ , y llamando, como en la fig. 1,  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  los tres óvalos que integran  $E^4$ ,  $A_1, A_2, A_3$  los que integran  $J^4$ , y  $\gamma_{lm}$  la región comprendida entre  $\omega$ ,  $\Omega$  e  $A_m$  ( $l, m = 1, 2, 3$ ;  $l \neq m$ ), resulta que para cada  $G_4$  integrado por  $A$  y tres puntos ulteriores distintos de  $A$  y entre sí, dichos tres puntos ulteriores pueden dar lugar únicamente a uno de los dos casos siguientes: a) un punto está situado

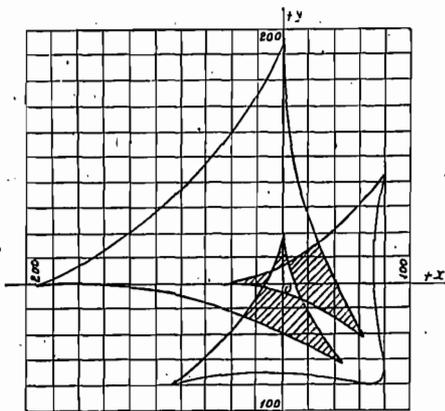


Fig. 2

dentro de un óvalo  $\Omega_l$  y los dos restantes uno en cada uno de las regiones  $\gamma_{lm}$  adyacentes; b) los tres puntos están situados dentro de las tres regiones  $A_1, A_2, A_3$ , uno en cada región.

Terminaré con unos resultados sobre el número de las raíces  $n$ -ésimas monodígrafas de un dado número complejo  $M$ , es decir, sobre las raíces de la ecuación

$$z^{(n)} = M,$$

para  $n=2$  o  $n=3$ . ¿Cómo depende de  $M$  el número  $\sigma$  de esas raíces? Para  $n=2$ , resulta que cuando el punto  $M$ , en el plano

de Gauss, es exterior a cierta hipocicloide de Steiner perfectamente determinada (de tamaño y posición distintas de las hipocicloides  $\varphi$  de las cuales he hablado anteriormente<sup>(1)</sup>), existen tan sólo dos raíces cuadradas monodífricas de  $M$ ; cuando es interior, existen cuatro distintas entre sí. Para  $n=3$ , el resultado depende de la posición del punto  $M$  respecto a la línea representada en la figura 2, (en donde los números indican centésimos): la línea divide el plano de Gauss en ocho regiones: si el punto  $M$  pertenece a la más interior, la que contiene el origen, se tiene  $\sigma=9$ ; para  $M$  comprendido dentro cada una de las 4 regiones (rayadas) colindantes con la anterior  $\sigma=7$ ; en las dos restantes regiones no completamente exteriores respecto a la curva se tiene  $\sigma=5$ ; y finalmente en el exterior de la curva se tiene  $\sigma=3$ .

---

(1) Dicha hipocicloide es la que tiene sus cúspides en los puntos representativos de los valores  $s = i/2$ ;  $s = (\pm 3\sqrt{3} - i)/16$ .

# CARTOGRAFIA Y CURVAS DE ESCALA

por

JOHN DE CICCO

Department of Mathematics  
Columbia University  
New York, New York (U.S.A.)

1. *Introducción.* — KASNER y el autor han estudiado la geometría de las curvas de escala en una cartografía general. Vamos a presentar aquí un resumen de nuestra obra precedente y de los nuevos resultados obtenidos sobre el mismo tema. Véase la bibliografía al final del artículo.

Indicaremos por  $(x, y)$  las coordenadas curvilíneas generales de un punto sobre una superficie  $\Sigma$  y también las coordenadas cartesianas sobre un plano  $\pi$ . El cuadrado del elemento lineal  $dS$  de  $\Sigma$  es

$$dS^2 = E(x, y) dx^2 + 2F(x, y) dx dy + G(x, y) dy^2 \quad (1)$$

donde  $H^2 = EG - F^2 > 0$  y el cuadrado del elemento lineal  $ds$  de  $\pi$  es  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ . Esto define una transformación  $T$  entre los puntos de  $\Sigma$  y los de  $\pi$  tal que puntos correspondientes son aquellos y solamente aquellos representados por las mismas coordenadas. A toda representación particular de la superficie  $\Sigma$  sobre el plano  $\pi$  le llamaremos un *cartograma*. Por tanto, un cartograma depende no sólo de la superficie  $\Sigma$  sino también de la transformación  $T$ . El cartograma se dirá conforme o no conforme, según lo sea la transformación  $T$ .

La *función de escala*  $\sigma = ds/dS$  es la razón entre los elementos de arco de curvas correspondientes en  $\pi$  y en  $\Sigma$  respec-

tivamente, respecto la transformación  $T$ . Está definida por la fórmula

$$\sigma^2 = \left( \frac{ds}{dS} \right)^2 = \frac{1+y'^2}{E+2Fy'+Gy'^2} \quad (2)$$

donde el ápice indica la derivada respecto  $x$ . En general,  $\sigma$  depende no solamente del punto  $(x, y)$  sino también de la pendiente  $y'$ . Únicamente es independiente de la dirección si  $T$  es conforme. La escala  $\sigma$  se reduce a una constante únicamente en el caso en que  $\Sigma$  es desarrollable y la transformación  $T$  es el desarrollo de  $\Sigma$  sobre  $\pi$  seguido de una semejanza en  $\pi$ .

Una *curva de escala* es un lugar de puntos de  $\Sigma$  o de  $\pi$  para los cuales la escala  $\sigma$  toma un mismo valor. La totalidad de las curvas de escala para un cartograma dado está definida por  $\sigma = \text{constante}$ . Para un cartograma no conforme existen  $\infty^2$  curvas de escala. Para un cartograma conforme existen  $\infty^1$  curvas de escala, excepto en el caso de degeneración ya mencionado en que cualquier curva es una curva de escala. En lo sucesivo omitiremos este caso degenerado, de manera que supondremos que  $\sigma$  es siempre una función no constante.

Este artículo se refiere al estudio de la geometría de las curvas de escala en el plano  $\pi$ . Consideraremos teoremas generales referentes a curvas de escala para los dos casos de cartogramas conformes y no conformes.

## CARTOGRAMAS NO CONFORMES

2. *La ecuación diferencial de las  $\infty^2$  curvas de escala.* — Puesto que la representación  $T$  de  $\Sigma$  sobre  $\pi$  no es conforme, se deduce que la función de escala  $\sigma$  es una función del elemento lineal  $(x, y, y')$ , donde  $y'$  está presente explícitamente. Por tanto, *en los cartogramas no conformes hay siempre  $\infty^2$  curvas de escala.*

Eliminando la constante  $\sigma$  de la ecuación (2) por derivación, encontramos que la ecuación diferencial de nuestras  $\infty^2$  curvas de escala es

$$y'' = \frac{(1+y'^2)[E_x + y'(E_y + 2F_x) + y'^2(2F_y + G_x) + y'^3G_y]}{2[-F + y'(E - G) + y'^2F]} \quad (3)$$

No todo sistema de  $\infty^2$  curvas puede representar las curvas de escala de un cartograma no conforme, puesto que según (3) debe existir una relación algebraica especial entre sus primeras derivadas.

De (3) se observa que hay tres direcciones de inflexión y dos direcciones cuspidales para las curvas de escala. Las direcciones cuspidales son siempre ortogonales y coinciden con las direcciones características. Según un teorema de TISSOT las direcciones características son las de la única red ortogonal sobre  $\pi$  que por una transformación no conforme  $T$  se convierte en una red ortogonal sobre  $\Sigma$ .

3. *Caracterización del sistema de  $\infty^2$  curvas de escala.* — Sean  $(X, Y)$  las coordenadas cartesianas relativas al punto  $(x, y)$ , del centro de curvatura de una curva de escala en el punto  $(x, y)$ . Para un punto fijo  $(x, y)$ , los centros de curvatura correspondientes (lugar de los centros) de las  $\infty^1$  curvas de escala que pasan por el punto fijo, describen la cúbica

$$G_y X^3 - (2F_y + G_x) X^2 Y + (E_y + 2F_x) X Y^2 - E_x Y^3 + 2[-F X^2 + (E - G) X Y + F Y^2] = 0. \quad (4)$$

El lugar de los centros de curvatura (lugar de los centros) es una cúbica general que tiene un nodo en el punto fijo  $(x, y)$  y las direcciones de las tangentes en el nodo coinciden con las direcciones características.

Esta propiedad pertenece no solamente a toda familia de  $\infty^2$  curvas de escala, sino también a familias más generales de curvas. Si una familia de curvas posee la propiedad precedente, debe ser definida por una ecuación diferencial de la forma

$$y'' = \frac{(1+y'^2)(\alpha + \beta y' + \gamma y'^2 + \delta y'^3)}{2(-\eta + \varepsilon y' + \eta y'^2)}. \quad (5)$$

Esta familia representará curvas de escala únicamente si las seis funciones  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta$  de  $(x, y)$  satisfacen las dos ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$M_y = N_x \\ \alpha_y + N\alpha = \delta_x + \varepsilon_{xy} + N\varepsilon_x + \varepsilon N_x + M(\delta + \varepsilon_y + \varepsilon N) \quad (6)$$

donde  $M$  y  $N$  están definidos por

$$\begin{aligned} (\varepsilon^2 + 4\eta^2)M &= \varepsilon(\alpha - \gamma) + 2\eta(\beta - \delta) - 4\eta\eta_x + 2\varepsilon\eta_y - \varepsilon\varepsilon_x - 2\eta\varepsilon_y, \\ (\varepsilon^2 + 4\eta^2)N &= -2\eta(\alpha - \gamma) + \varepsilon(\beta - \delta) - 2\varepsilon\eta_x - 4\eta\eta_y + 2\eta\varepsilon_x - \varepsilon\varepsilon_y. \end{aligned} \quad (7)$$

*Existen esencialmente  $\infty^2$  superficies que poseen la misma familia de  $\infty^2$  curvas de escala.* Si la superficie  $\Sigma$  con el elemento lineal (1) está representada sobre el plano  $\pi$  de manera que la ecuación diferencial (3) representa las curvas de escala, el elemento lineal  $dS'$  de cualquier superficie  $\Sigma'$  con las mismas curvas de escala debe estar dado por

$$dS'^2 = adS^2 + bds^2 \quad (8)$$

donde  $a \neq 0$  y  $b$  son constantes.

La clase de las curvas de escala es convertida en sí misma únicamente por el grupo conforme. Esto vale también para las clases de curvas definidas por ecuaciones diferenciales del tipo (5).

Obsérvese que los resultados de esta sección son válidos solamente para el caso general en que la cúbica (4) no es degenerada.

4. *Curvas de escala del tipo de velocidades.* Si las curvas paramétricas de  $\Sigma$  no son ortogonales, es decir,  $F \neq 0$ , la cúbica lugar geométrico (4) puede degenerar en tres rectas, dos de las cuales son las tangentes a las curvas características correspondientes al punto fijo y la otra es la recta general

$$G_y X + E_x Y - 2F = 0. \quad (9)$$

*En este caso las  $\infty^2$  curvas de escala forman un sistema de velocidades.* (Un sistema de velocidades se define en general por una ecuación diferencial de la forma  $y'' = (1 + y'^2)(\psi - y'\phi)$ , donde  $\phi$  y  $\psi$  son funciones arbitrarias de  $x, y$ ). Las  $\infty^2$  curvas de escala (3) forman un sistema de velocidades si y únicamente si se verifica

$$\begin{aligned} G_y(E - G) &= F(E_x + G_x + 2F_y) \\ -E_x(E - G) &= F(E_y + G_y + 2F_x). \end{aligned} \quad (10)$$

La ecuación diferencial de las  $\infty^2$  curvas de escala es entonces

$$y'' = \frac{1}{2F} (1 + y'^2) (-E_x + y'G_x). \quad (11)$$

Si las curvas de escala forman una familia natural, las curvas características constituyen una red isoterma. Si la familia de curvas de escala es un sistema completo de trayectorias isogonales de una familia isoterma (*conformal rectilinear wex*), las curvas  $E - G = \text{constante}$  y  $F = \text{constante}$  forman una red isoterma.

Un sistema de  $\infty^2$  curvas de escala puede ser del tipo cúbico (*Lie-Liouville*) cuando y únicamente cuando sea un sistema de velocidades.

Si las curvas paramétricas son ortogonales, o sea  $F = 0$ , la cúbica (4) únicamente puede degenerar si  $G_y = 0$  o  $E_x = 0$ . En tal caso la cúbica está formada por la tangente a una de las curvas características y por una cónica tangente a la otra curva característica en el punto dado. Este caso puede también presentarse si las curvas paramétricas no son ortogonales.

Para el caso en que  $F = 0$ , las  $\infty^2$  curvas de escala forman un sistema de velocidades cuando  $G_y = E_x = 0$ . La ecuación diferencial (3) es entonces

$$y'' = \frac{1}{2(E - G)} (1 + y'^2) (E_y + y'G_x). \quad (12)$$

En este caso la cúbica (4) consta de las tangentes a las curvas características correspondientes al punto fijo y de la recta

$$-G_x X + E_y Y + 2(E - G) = 0. \quad (13)$$

5. *Cartogramas con escalas rectilíneas.* — Vamos a determinar la clase de superficies  $\Sigma$  para las cuales existe un mapa de  $\Sigma$  sobre el plano  $\pi$  tal que las curvas de escala coincidan con

la totalidad de las  $\infty^2$  rectas. Esta clase de superficies  $\Sigma$  es

$$dS^2 = a_0(ydx - xdy)^2 + 2(a_1dx + b_1dy)(ydx - xdy) + a_2dx^2 + 2c_2dxdy + b_2dy^2. \quad (14)$$

Para esta clase de superficies se encuentra

$$H^2 = (a_0a_2 - a_1^2)x^2 + 2(a_0c_2 - a_1b_1)xy + (a_0b_2 - b_1^2)y^2 + 2(a_1c_2 - a_2b_1)x + 2(a_1b_2 - b_1c_2)y + (a_2b_2 - c_2^2). \quad (15)$$

La curvatura de Gauss  $G$  está dada por

$$H^4G = -2a_0H^2 + a_0(c_2^2 - a_2b_2) + a_2b_1^2 - 2a_1b_1c_2 + a_1^2b_2. \quad (16)$$

por consiguiente, la curvatura de Gauss  $G$  resulta ser una función racional de  $x, y$ .

En el caso general (14), las  $\infty^1$  rectas de escala correspondientes a una escala dada son tangentes a una cónica. Variando  $\sigma$  se encuentra que estas cónicas forman un sistema de cónicas homofocales, compuesto por cónicas con centro o por parábolas, según que sea  $a_0 \neq 0$ , o  $a_0 = 0$ .

Si la curvatura de Gauss  $G$  es constante, ella debe ser cero. En tal caso es  $a_0 = a_1 = b_1 = 0$ . Esto significa que si la superficie  $\Sigma$  es de curvatura constante y las curvas de escala son todas líneas rectas,  $\Sigma$  es una superficie desarrollable y la representación de  $\Sigma$  sobre  $\pi$  es el desarrollo de  $\Sigma$  sobre  $\pi$  seguido de una transformación afín. A una escala dada  $\sigma$  corresponde un haz de rectas paralelas.

Por consiguiente, *no existe una representación no conforme de la esfera o pseudoesfera sobre un plano tal que las curvas de escala coincidan con la totalidad de las  $\infty^2$  rectas del plano*. De aquí se deduce que el único mapa, conforme o no, de una esfera sobre un plano tal que las curvas de escala sean líneas rectas en la proyección de Mercator en cuyo caso se tiene una simple infinidad de rectas paralelas como curvas de escala.

## CARTOGRAMAS CONFORMES

6. *Familias casi-isotermas.* — Si el mapa  $T$  de  $\Sigma$  sobre el plano  $\pi$  es conforme, se obtiene que la función de escala  $\sigma$  es una

función del punto  $x, y$  únicamente. El cuadrado del elemento lineal  $dS$  de  $\Sigma$  es de la forma

$$dS^2 = e^{2\lambda(x,y)} (dx^2 + dy^2). \quad (17)$$

La función de escala  $\sigma = ds/dS$  está dada por  $\sigma = e^{-\lambda(x,y)}$ . La curvatura de Gauss  $G$  de  $\Sigma$  vale

$$G = -e^{-2\lambda(x,y)} (\lambda_{xx} + \lambda_{yy}) \quad (18)$$

y la curvatura geodésica  $k$  de una curva de  $\Sigma$  es

$$k = \frac{y'' - (1+y'^2)(\lambda_y - y'\lambda_x)}{e^{\lambda}(1+y'^2)^{3/2}}. \quad (19)$$

Como  $\sigma$  se supone que no es una constante, se deduce que *en los cartogramas conformes hay siempre  $\infty^1$  curvas de escala.*

Toda familia de  $\infty^1$  curvas en  $\pi$  o en  $\Sigma$  puede representar las curvas de escala de un mapa conforme  $T$  sobre el plano  $\pi$  de cualquier superficie  $\Sigma$  de una cierta clase. Diremos que una familia de  $\infty^1$  curvas es *casi-isoterma* si ella representa las curvas de escala de un mapa conforme de una superficie  $\Sigma$  sobre un plano  $\pi$  de manera que la curvatura de Gauss  $G$  sea constante a lo largo de las curvas de escala.

*Una familia de curvas  $f(x, y) = cte.$  es casi isoterma si y solamente si  $f$  satisface la ecuación en derivadas parciales de cuarto orden*

$$\left( f_y \frac{\partial}{\partial x} - f_x \frac{\partial}{\partial y} \right) \left[ \frac{\left( f_y \frac{\partial}{\partial x} - f_x \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( (f_{xx} + f_{yy}) \right)}{\left( f_y \frac{\partial}{\partial x} - f_x \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( (f_x^2 + f_y^2) \right)} \right] = 0. \quad (20)$$

En este caso es posible encontrar una función  $\lambda = \lambda(f)$  tal que  $\lambda$  satisfaga a una ecuación en derivadas parciales de segundo orden de la forma

$$\lambda_{xx} + \lambda_{yy} = \Phi(\lambda), \quad (21)$$

lo cual justifica el nombre adoptado de familias casi-isotermas.

El logaritmo de la función de escala  $\sigma$  satisface también a una ecuación diferencial de la misma forma.

Si  $\lambda$  satisface a una ecuación diferencial de la forma (21),  $\lambda(x, y) = c$  define una familia casi-isoterma de curvas y  $c$  se llama el *parámetro casi-isoterma*.

7. *Familias isotermas y familias paralelas de tipo casi-isotérmico.* Toda familia isoterma es casi-isoterma, pero no toda familia casi-isoterma es isoterma. Por ejemplo la familia de elipses semejantes  $x^2 + 2y^2 = \text{cte.}$  es casi-isoterma, pero no es isoterma.

Si las  $\infty^1$  curvas de escala de un mapa conforme de una superficie  $\Sigma$  sobre un plano  $\pi$  forma un sistema isoterma tal que la curvatura de Gauss  $G$  sea constante a lo largo de toda curva de escala,  $\Sigma$  es o bien desarrollable, o bien aplicable sobre una superficie de revolución.

En el primer caso las curvas de escala pueden ser cualquier familia isoterma (y el mapa conforme es de carácter perfectamente general), mientras que en el segundo caso las curvas de escala deben ser o rectas paralelas o círculos concéntricos (y el mapa conforme es de carácter especial).

Una familia casi-isoterma en el plano  $\pi$  está formada por curvas paralelas únicamente cuando consiste en rectas paralelas o en círculos concéntricos. La superficie asociada  $\Sigma$  debe ser o desarrollable o aplicable sobre una superficie de revolución.

Si una superficie desarrollable  $\Sigma$  está representada conformemente sobre un plano  $\pi$  con curvas de escala paralelas, la representación o mapa  $T$  es igual al producto del desarrollo de  $\Sigma$  sobre  $\pi$  por una de las transformaciones  $U = u^v$ ,  $U = \log u$ ,  $U = e^v$  (donde  $u = x + iy$ ,  $v = x - iy$  son las coordenadas mínimas de un punto), seguido de una semejanza. Esto es completamente diferente a lo que ocurre en el caso isoterma donde la representación conforme es completamente arbitraria.

Si una superficie  $\Sigma$  de curvatura de Gauss  $G$  constante, distinta de cero, está representada conformemente sobre el plano  $\pi$  con curvas de escala isotermas o paralelas, estas curvas de escala deben ser rectas paralelas o círculos concéntricos. Por tanto *los únicos mapas conformes de la esfera sobre un plano con curvas de escala paralelas o isotermas son la proyección de Mercator (con curvas de escala rectilíneas), y las proyecciones estereográficas*.

*ficas y de Lambert (con escalas circulares) seguidas de una semejanza.*

8. *Representación conforme parcialmente geodésica.* — Un famoso teorema de Beltrami establece que si una superficie  $\Sigma$  se puede representar biunívocamente sobre un plano de manera que sus  $\infty^2$  geodésicas se representen sobre las  $\infty^2$  rectas del plano, la superficie  $\Sigma$  tiene curvatura de Gauss constante. Vamos ahora a estudiar lo que ocurre cuando no todas las geodésicas están representadas por rectas.

KASNER ha demostrado que en cualquier representación biunívoca de una superficie  $\Sigma$  sobre un plano  $\pi$  (o, más generalmente, sobre otra superficie  $\Sigma'$ ), existen a lo sumo 3  $\infty^1$  geodésicas que estén representadas por rectas (o por geodésicas de  $\Sigma'$ ), a no ser que lo estén todas.

En una representación o mapa conforme, hay a lo sumo  $\infty^1$  geodésicas de  $\Sigma$  a las que corresponden rectas de  $\pi$  (puesto que a las 2  $\infty^1$  líneas mínimas de  $\Sigma$  ya corresponden las 2  $\infty^1$  líneas mínimas de  $\pi$ ). KASNER ha demostrado que un mapa conforme transforma exactamente  $\infty^1$  geodésicas de  $\Sigma$  en rectas de  $\pi$ , las curvas de escala de la representación deben formar una familia de curvas paralelas y la familia de sus curvas ortogonales es la familia de geodésicas mencionada.

*Si una superficie  $\Sigma$  de curvatura de Gauss constante está representada conformemente sobre un plano  $\pi$  de manera que  $\infty^1$  geodésicas de  $\Sigma$  estén representadas por rectas de  $\pi$ , las curvas de escala son rectas paralelas o círculos concéntricos.*

Para el caso de una superficie desarrollable o de una esfera, estos mapas son los descritos en el n.º 7.

Es imposible representar conformemente una esfera sobre un plano de manera que los  $\infty^2$  círculos máximos se transformen en rectas. Las tres representaciones clásicas, estereográfica (de Ptolomeo), Mercator y de Lambert son las únicas representaciones conformes que transforman el máximo número posible ( $\infty^1$ ) de geodésicas en líneas rectas.

9. *Familias casi-isotermas de rectas y círculos.* — Lagrange demostró que las únicas familias de  $\infty^1$  rectas o círculos que son isotermas son los haces. Nuestra generalización de este resultado es la siguiente:

Las únicas familias de  $\infty^1$  rectas, o  $\infty^1$  círculos, que son de tipo casi-isotermo son los haces. La superficie asociada  $\Sigma$  debe ser o desarrollable o aplicable sobre una superficie de revolución.

Si una superficie desarrollable  $\Sigma$  está representada conformemente sobre un plano  $\pi$  de manera que las curvas de escala sean rectas o círculos, la representación es el producto de un desarrollo de  $\Sigma$  sobre  $\pi$  seguido de una de las transformaciones  $U=ur$ ,  $U=\log u$ ,  $U=e^u$  y de una semejanza.

El único mapa conforme de la esfera sobre el plano cuyas curvas de escala son rectas, es la proyección de Mercator (seguida de una semejanza). Los mapas conformes de la esfera sobre el plano con curvas de escala circulares son la proyección estereográfica (Ptolomeo) y la de Lambert (seguidas de una semejanza).

10. Caracterización de las superficies aplicables sobre superficies de revolución.— Puesto que vamos a ocuparnos ahora principalmente de las superficies de revolución, es conveniente introducir la siguiente terminología. Una superficie *esferiforme* (*sphere-like surface*) será una superficie de curvatura de Gauss constante, diferente de cero. Una superficie *vasiforme* (*vase-like surface*) será cualquier superficie aplicable sobre una superficie de revolución con curvatura de Gauss variable. Por tanto, toda superficie aplicable sobre una superficie de revolución puede ser desarrollable, esferiforme o vasiforme. Estas tres clases se excluyen mutuamente.

Adoptando coordenadas mínimas  $u=x+iy$ ,  $v=x-iy$ , se ve fácilmente que si una superficie  $\Sigma$  está representada conformemente sobre un plano  $\pi$ , el cuadrado de su elemento lineal está dado por

$$dS^2 = 2e^{\lambda(u,v)} du dv. \quad (22)$$

La escala  $\sigma = ds/dS$  está dada por  $\sigma = e^{-\lambda/2} / \sqrt{2}$  y la curvatura de Gauss vale

$$G = -e^{-\lambda} \lambda_{uv}. \quad (23)$$

La condición para que la superficie sea desarrollable es

$\lambda_{uv}=0$  y las condiciones para que sea esférico son  $\lambda_{uuv} - \lambda_u \lambda_{uv} = 0$  y  $\lambda_{uvv} - \lambda_v \lambda_{uv} = 0$ .

Una superficie  $\Sigma$  con el elemento lineal (22) es vasiforme cuando y únicamente cuando se satisface idénticamente el siguiente sistema de dos ecuaciones en derivadas parciales de cuarto orden.

$$\frac{G_{uu}}{G_u^2} - \frac{G_{vv}}{G_v^2} = \frac{1}{G_{uv}} \left( \frac{G_{uuv}}{G_u} - \frac{G_{uvv}}{G_v} \right) = \frac{\lambda_u}{G_u} - \frac{\lambda_v}{G_v}. \quad (24)$$

Esta es, esencialmente, la forma analítica de un teorema de KASNER que afirma que las únicas superficies con un sistema isoterma de geodésicas son aquellas aplicables sobre una superficie de revolución. En tal caso, el sistema isoterma de geodésicas es  $v' = G_u/G_v$ .

En toda superficie vasiforme  $\Sigma$  representada conformemente sobre un plano  $\pi$ , si las curvas de escala  $\lambda = cte.$  coinciden con la familia  $G = cte.$ , las curvas de escala son rectas paralelas o círculos concéntricos. Si las curvas  $G = cte.$  forman una familia de curvas paralelas del plano  $\pi$ , ellas coinciden con las curvas de escala  $\lambda = cte.$  y por consiguiente son líneas rectas o círculos concéntricos.

Este teorema es una consecuencia de las condiciones (24) para superficies vasiformes y de los teoremas mencionados en el n. 7.

11. Superficies vasiformes para las cuales existen mapas conformes tales que las curvas de escala forman sistemas isotermos que no son ni rectas paralelas ni círculos concéntricos. — Las razones por las cuales nos vamos a restringir a superficies vasiformes son las siguientes. Sea  $\Sigma$  una superficie aplicable sobre una superficie de revolución; ella será desarrollable, esférico o vasiforme.

Si  $\Sigma$  es desarrollable, en cualquier mapa de la misma sobre un plano las curvas de escala forman una familia isoterma. Inversamente, cualquier sistema isoterma de curvas puede servir como sistema de curvas de escala de un mapa conforme de alguna superficie desarrollable sobre un plano.

Hemos demostrado que si una superficie esférico está representada conformemente sobre un plano de manera que las

curvas de escala formen una familia isoterma, estas curvas de escala deben ser o rectas paralelas o círculos concéntricos.

Queda así justificada nuestra limitación a superficies vasiformes. El sistema isotermo de las curvas de escala no debe consistir en rectas paralelas ni en círculos concéntricos, pues es bien conocido que toda superficie aplicable sobre una superficie de revolución puede representarse conformemente sobre un plano de manera que las curvas de escala sean rectas paralelas o círculos concéntricos.

*Los elementos lineales de todas las superficies vasiformes para las cuales existen mapas de las mismas tales que las curvas de escala formen sistemas isotermos que no sean rectas paralelas ni círculos concéntricos, pueden ser reducidos, mediante convenientes transformaciones, a los siguientes tipos:*

$$dS^2 = \frac{ce^{uv}}{(uv)^n} du dv \quad (25.1)$$

$$dS^2 = \frac{2e^{f(u)+g(v)}}{(u+v)^2} du dv \quad (25.2)$$

$$dS^2 = \frac{[(au+b)(cv+d)]^{(n-2)}}{(u+v)^n} du dv, \quad \text{donde } n \neq 0,2 \quad (25.3)$$

$$dS^2 = \frac{ce^{u+v}}{(u+v)^n} du dv, \quad \text{donde } n \neq 0,2 \quad (25.4)$$

$$dS^2 = \frac{c(uv)^{(n-2)/2}}{(u+v)^n} du dv, \quad \text{donde } n \neq 0,2 \quad (25.5)$$

$$dS^2 = \frac{c(uv)^k}{(uv-1)^n} du dv, \quad \text{donde } k \neq 0, n \neq 2, \quad (25.6)$$

$$dS^2 = \frac{c[u^{1+ib} v^{1-ib}]^{(n-2)/2}}{(u+v)^n} du dv, \quad \text{donde } b \neq 0 \quad (25.7)$$

En el campo real hay esencialmente siete tipos de tales superficies vasiformes, pero en el campo imaginario únicamente hay

seis tipos: los dos últimos (25.6) y (25.7) son equivalentes por una transformación conforme imaginaria.

Columbia University  
New York, New York (U. S. A.)

#### BIBLIOGRAFIA

1. KASNER, *Isothermal systems of geodesics*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 5, pp. 55-60 (1904).
2. KASNER, *The problem of partial geodesic representation*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 7, pp. 200-206 (1906).
3. DE CICCIO, *New proofs of the theorems of Beltrami and Kasner on linear families*, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 49, pp. 407-411 (1943).
4. KASNER and DE CICCIO, *Ovals should be used to map airplane ranges*, Science news Letter, March 25, 1944, p. 200.
5. KASNER and DE CICCIO, *Scale curves in conformal maps*, Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. 30, pp. 162-164 (1944).
6. KASNER and DE CICCIO, *Scale curves in general cartography*, Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. 30, pp. 211-215 (1944).
7. KASNER and DE CICCIO, *Geometry of scale curves in conformal maps*, American Journal of Mathematics, Vol. 67, pp. 157-166 (1945).
8. DE CICCIO, *Conformal maps of surfaces with isothermal systems of scale curves*, American Journal of Mathematics, Vol. 68, pp. 137-146 (1946).
9. KASNER and DE CICCIO, *The distortion of Angles in general cartography*, Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. 32, pp. 94-97 (1946).

## PLAZOS OPTIMOS PARA PRESTAMOS CON SEGURO DE VIDA (\*)

por el Prof. JOSÉ BARRAL SOUTO

De la Facultad de Ciencias Económicas de Buenos Aires

Facilitar la adquisición de la vivienda propia es una preocupación de carácter económico-social y con esa finalidad se han generalizado procedimientos ligeramente distintos, consistentes en acordar préstamos combinados con un seguro de vida, que en sus líneas fundamentales pueden esquematizarse de la manera siguiente:

Se trata de una operación en la que intervienen:

a) El *prestatario*, solicitante del préstamo, que contrae la obligación de abonar una cuota periódica, equivalente a un peso anual, durante  $n$  años.

b) El *prestamista*, que facilita el capital o préstamo igual al valor actual representado por las cuotas periódicas que abonará el prestatario durante  $n$  años.

c) El *asegurador*, que a cambio de una cuota, o prima, única, se obliga a pagar de inmediato el saldo de la deuda, en caso de fallecimiento del prestatario.

La combinación del préstamo con el seguro de vida se resuelve, sencillamente, entregando al prestatario el monto del préstamo con deducción de la prima única, o coste, del seguro pertinente.

El prestatario queda así obligado a pagar el equivalente de \$ 1.— anual si vive y por un plazo no mayor de  $n$  años. Y a cambio de ello recibe un cierto valor efectivo  $\mathcal{E}(n)$  igual al capital facilitado por el prestamista menos la parte de capital que debe cederse al asegurador como coste del seguro para responder por el saldo de la deuda en caso de fallecimiento.

---

(\*) Comunicación hecha en las *Primeras Jornadas Matemáticas Argentinas* realizadas en julio de 1945, en las ciudades de La Plata y Buenos Aires.

Si  $x$  es la edad del prestatario y  $n$  el plazo, el mencionado valor efectivo, utilizando las funciones biométricas y financieras conocidas, se expresa pues, así:

$$(1) \quad \mathcal{E}(n) = \int_0^n e^{-\delta z} dz - \int_0^n {}_tP_x \mu_{x+t} e^{-\gamma t} dt \int_t^n e^{-\delta(z-t)} dz$$

siendo  $\delta$  el tipo de interés continuo por el cual se rige el prestatista y  $\gamma$  el que rige para el asegurador;  $e$  la base de los logaritmos neperianos;  ${}_tP_x$  la probabilidad para un individuo de edad  $x$  de sobrevivir a la edad  $x+t$  y  $\mu_{x+t}$  la tasa instantánea de mortalidad a la edad  $x+t$ .

Esa expresión, invirtiendo el orden de integración de las variables de acuerdo a la regla de Dirichlet, puede transformarse en:

$$(2) \quad \mathcal{E}(n) = \int_0^n e^{-\delta z} \left( 1 - \int_0^z {}_tP_x \mu_{x+t} e^{-(\gamma-\delta)t} dt \right) dz$$

y su derivada vale:

$$(3) \quad \mathcal{E}'(n) = e^{-\delta n} \left( 1 - \int_0^n {}_tP_x \mu_{x+t} e^{-(\gamma-\delta)t} dt \right).$$

La integral contenida en el paréntesis del segundo miembro representa, formalmente, el costo único de un seguro de vida por un capital unitario, valuado a un tipo de interés continuo que puede ser negativo o positivo, según sean los valores  $\delta$  y  $\gamma$ .

Generalmente el tipo de interés  $\delta$  por el que se rige el prestatista es superior al  $\gamma$  que rige para el asegurador, y en tal caso resulta negativo e igual a  $-(\delta-\gamma)$  el tipo de interés, con lo cual el factor descuento resulta mayor que la unidad, asignando más valor a los pagos futuros que a los actuales, contrariamente a lo que ocurre con la generalidad de las operaciones.

Ahora bien, designando con  $\omega$  la edad límite es

$$\int_0^{\omega-x} {}_tP_x \mu_{x+t} dt = 1$$

y por lo tanto la posibilidad de que la integral contenida en (3) supere o no el valor uno depende de si el tipo de interés  $(\delta-\gamma)$ ,

es positivo o negativo, como se desprende de una simple aplicación del valor medio.

De aquí, la observación interesante que hasta ahora, que se sepa, no ha sido hecha, y es la de que la función  $\mathcal{E}(n)$  admite un máximo, determinado por el valor  $n_0$  que anula su primera derivada. En ese sentido  $n_0$  es un plazo óptimo y es interesante señalar que depende únicamente de la tabla de mortalidad y de la diferencia entre los tipos anuales de interés (interés continuo)  $(\delta - \gamma)$ ; y no de los valores aislados,  $\delta$  y  $\gamma$ .

Para la tabla de mortalidad  $H^m$  corresponden, con suficiente aproximación, los siguientes valores:

PLAZOS OPTIMOS (en años)

Edades del prestatario	(1) Diferencia entre las tasas, $(\delta)$ del préstamo y $(\gamma)$ del seguro: 100 $(\delta - \gamma)$				
	0 %	0,96 %	1,91 %	2,84 %	3,77 %
30	71,3	46,3	40,8	37,0	34,1
40	61,3	38,6	34,1	30,9	28,5
50	51,3	31,2	27,4	24,9	23,0
60	41,3	24,1	21,1	19,2	17,7
70	31,3	17,5	15,3	13,9	12,9
80	21,3	11,8	10,3	9,3	8,7
90	11,3	7,3	6,3	5,7	5,3

(1) Las tasas se refieren a los tipos anuales de interés continuo. Siendo los tipos anuales de interés,  $i$  del préstamo y  $j$  del seguro, la diferencia  $\gamma - \delta$  está determinada por la relación  $e^{\delta - \gamma} = \frac{1 + i}{1 + j}$ . La diferencia  $\delta - \gamma$  coincide, aproximadamente, con la diferencia  $i - j$ .

## UNAS FORMULAS INTEGRALES REFERENTES A CUERPOS CONVEXOS

por L. A. SANTALÓ

1. RESUMEN DE RESULTADOS. — Fijada una esfera de radio unidad con centro el origen de coordenadas, una dirección cualquiera del espacio queda determinada dando las coordenadas  $\vartheta, \varphi$  (colatitud y longitud) del punto  $P$  de la esfera que es extremo del radio paralelo a dicha dirección. El elemento de área de la esfera, correspondiente a este punto vale

$$dP = \text{sen } \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi. \quad (1.1)$$

Una recta  $G$  del espacio puede determinarse por el punto  $(\vartheta, \varphi)$  que fija su dirección, más las coordenadas  $x, y$  del punto en que  $G$  es cortada por un plano normal a la misma; las coordenadas  $x, y$  se refieren a un sistema cartesiano ortogonal de dicho plano normal. Entonces, para «medir» conjuntos de rectas  $G$  del espacio, es sabido que se toma la integral, extendida al conjunto, de la forma diferencial

$$dG = \text{sen } \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dx \, dy = dP \, dx \, dy \quad (1.2)$$

que se llama «densidad» para conjuntos de rectas<sup>(1)</sup>.

Sea  $K$  un cuerpo convexo del espacio. Se llama «plano de apoyo» de  $K$  a todo plano que tiene algún punto común con  $K$  sin atravesarlo, es decir, dejando a  $K$  todo de un mismo lado. Por cada recta  $G$  que no corta a  $K$ , pasan dos planos de apoyo de  $K$ . Las rectas  $G$  para las cuales estos planos de apoyo tienen con  $K$  más de un punto de contacto, forman un con-

---

(1) Ver, por ejemplo, R. DELTHEIL, *Probabilités géométriques*, Paris, 1926, pág. 89. W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Integralgeometrie*, Leipzig und Berlin, 1937, pág. 66.

junto de medida nula (entendida la medida como la integral de (1.2)) y no influirán en nuestras consideraciones. Para las demás rectas, cada plano de apoyo de  $K$  que pasa por ellas tiene un punto de contacto único. Llamemos  $T_1$  y  $T_2$  a las distancias de los puntos de contacto de los dos planos de apoyo de  $K$  que pasan por  $G$  a la misma recta  $G$ . Llamemos, además,  $\omega$  al ángulo que forman estos dos planos de apoyo de  $K$  que pasan por  $G$ , tomando el ángulo que comprende a  $K$  en su interior (fig. 1).

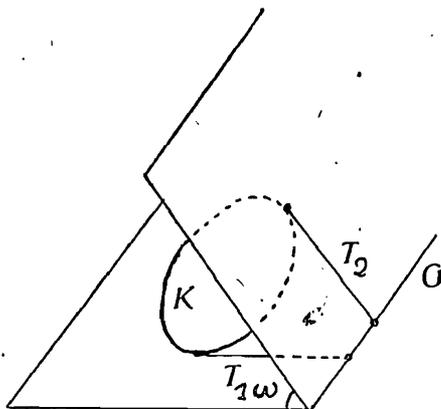


Fig. 1.

Las fórmulas que queremos demostrar en esta nota son, con las notaciones dichas, las siguientes, en todas las cuales la integración se considera *extendida a todas las rectas del espacio que no cortan a K*:

$$(a) \quad \int \frac{\text{sen}^{2\omega}}{T_1 T_2} dG = 8 \pi^2,$$

que se generaliza, para  $m > 1$ , en las siguientes

$$(b) \quad \int \frac{\text{sen}^{2m\omega}}{T_1 T_2} dG = 8 \frac{(2m-2)(2m-4) \dots 4 \cdot 2}{(2m-1)(2m-3) \dots 3 \cdot 1} \pi^2$$

$$(c) \quad \int \frac{\text{sen}^{2m+1\omega}}{T_1 T_2} dG = 4 \frac{(2m-1)(2m-3) \dots 3}{2m(2m-2) \dots 2} \pi^3.$$

las cuales pueden condensarse en la fórmula única

$$\int \frac{\operatorname{sen}^n \omega}{T_1 T_2} dG = 4 \pi^{5/2} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}.$$

Llamando  $M$  a la integral de curvatura media de  $K$  (Ver n.º. 2), vale también

$$(d) \quad \int (2\omega - \operatorname{sen} 2\omega) \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) dG = 16 \pi M.$$

Si  $K$  tiene curvatura de Gauss  $k$  distinta de cero en cada punto, llamando  $k_1, k_2$  a los valores de esta curvatura en los puntos de contacto de los planos de apoyo de  $K$  que pasan por  $G$ , siendo  $F$  el área de  $K$ , se tiene también

$$(e) \quad \int (2\omega - \operatorname{sen} 2\omega) \left( \frac{1}{T_1 k_1} + \frac{1}{T_2 k_2} \right) dG = 4 M F.$$

Además de estas, en el n.º. 3, II, obtenemos todavía otras fórmulas del mismo tipo, como las (3.10) y (3.11).

Todas estas fórmulas vienen a ser la generalización al espacio de otras conocidas para figuras convexas del plano, obtenidas por Crofton y por Lebesgue<sup>(2)</sup>.

2. FÓRMULAS CONOCIDAS.— Para la demostración de las fórmulas enunciadas, necesitaremos algunas fórmulas auxiliares conocidas, que vamos a enunciar.

Sean  $P_1, P_2$  dos puntos de la superficie de la esfera unidad. Ellos determinarán un círculo máximo  $C$ , cuyo polo representaremos por  $P$ . Para determinar el conjunto de los dos puntos  $P_1, P_2$ , en lugar de las cuatro coordenadas  $\vartheta_i, \varphi_i (i=1, 2)$ , se pueden dar las coordenadas  $\vartheta, \varphi$  de  $P$ , más los ángulos  $\alpha_1, \alpha_2$  que fijan la posición de  $P_1$  y  $P_2$  sobre el círculo  $C$ , es decir, las distancias angulares de dichos puntos a un punto fijo de

(<sup>2</sup>) H. LEBESGUE, *Exposition d'un mémoire de M. W. Crofton*, Nouvelles Annales de mathématiques, vol. 12, 1912, págs. 481-502.

(\*) Ver W. BLASCHKE, *loc. cit.*, pág. 78.

C. Se demuestra entonces que vale la siguiente fórmula diferencial<sup>(3)</sup>

$$dP_1 dP_2 = |\operatorname{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)| d\alpha_1 d\alpha_2 dP, \quad (2.1)$$

donde los  $dP_i$  tienen los valores (1.1).

Otra fórmula que necesitaremos es la siguiente, que puede obtenerse como simple ejercicio de cálculo integral

$$\int_0^\pi \int_0^\pi |\operatorname{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)|^n d\alpha_1 d\alpha_2 = \begin{cases} \frac{(2m-1)(2m-3)\dots 3}{2m(2m-2)\dots 2} \pi^2, & \text{si } n=2m \\ 2 \frac{(2m-2)(2m-4)\dots 4 \cdot 2}{(2m-1)(2m-3)\dots 3 \cdot 1} \pi, & \text{si } n=2m-1. \end{cases} \quad (2.2)$$

Para la obtención de las fórmulas (d) y (e) necesitaremos recordar como debe tomarse la «medida» de un conjunto de planos del espacio. Fijado un punto  $O$ , un plano  $E$  del espacio queda determinado dando su distancia  $h$  al punto  $O$  y la dirección de su normal, la cual estará determinada por el punto  $P_E$  correspondiente de la esfera de radio unidad.

Para medir un conjunto de planos, se toma entonces la integral, extendida al conjunto, de la expresión diferencial

$$dE = dP_E dh \quad (2.3)$$

siendo  $dP_E$  el elemento de área (1.1) de la esfera unidad correspondiente a la dirección de la normal al plano  $E$ .

La medida del conjunto de todos los planos que cortan a un cuerpo convexo  $K$ , es un invariante  $M$  del mismo que, cuando  $K$  tiene radios principales de curvatura  $R_1, R_2$  distintos de cero en cada punto, coincide con la integral de curvatura media, o sea,

$$\int_{K, E \neq 0} dE = M = \frac{1}{2} \int_K \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) ds \quad (2.4)$$

siendo  $ds$  el elemento de área de  $K$ <sup>(4)</sup>. Cuando  $K$  tiene pun-

(<sup>3</sup>) Ver DELTHELL, *loc. cit.*, pág. 95. BLASCHKE, *loc. cit.*, pág. 65 y 72.

tos o líneas con radios principales de curvatura no definidos o iguales a cero,  $M$  no puede definirse por la última integral (2.4), pero lo seguiremos llamando *integral de curvatura media* de  $K$ .

3. DEMOSTRACIÓN DE LAS FÓRMULAS ENUNCIADAS EN EL N<sup>o</sup> 1. —

I. Consideremos una figura convexa plana  $K^*$  y un punto exterior  $Q$ . Sean  $A$  y  $B$  los puntos de contacto de las rectas de apoyo de  $K$  que pasan por  $Q$  y  $\omega$  el ángulo que estas rectas forman entre sí. Pongamos  $T_1 = QA, T_2 = QB$  (fig. 2). Las rec-

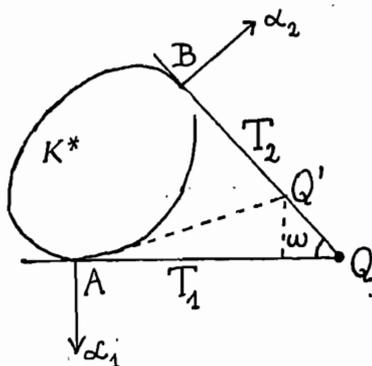


Fig. 2.

tas de apoyo que pasan por  $Q$ , y por tanto también este punto  $Q$ , quedan determinadas dando las direcciones  $\alpha_1, \alpha_2$  de sus normales; suponiendo  $Q$  determinado por  $\alpha_1, \alpha_2$  queremos hallar la expresión del elemento de área del plano, correspondiente al punto  $Q$ . Basta observar para ello que al variar  $\alpha_1$  a  $\alpha_1 + d\alpha_1$ , el punto  $Q$  pasa a un punto  $Q'$  sobre  $QB$  tal que

$$QQ' \cdot \text{sen } \omega = T_1 d\alpha_1. \quad (3.1)$$

Análogamente, supuesta la recta  $QA$  fija y haciendo variar  $\alpha_2$  a  $\alpha_2 + d\alpha_2$ , el punto  $Q$  pasa al punto  $Q''$  (no dibujado en la figura) sobre  $QA$  tal que

$$QQ'' \text{ sen } \omega = T_2 d\alpha_2. \quad (3.2)$$

Como el elemento de área del plano correspondiente al punto  $Q$  vale  $dQ = QQ' \cdot QQ'' \operatorname{sen} \omega$ , de (3.1) y (3.2) se deduce

$$dQ = \frac{T_1 T_2}{\operatorname{sen} \omega} d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (3.3)$$

y también

$$d\alpha_1 d\alpha_2 = \frac{\operatorname{sen} \omega}{T_1 T_2} dQ. \quad (3.4)$$

Supongamos ahora un cuerpo convexo  $K$  del espacio y una recta  $G$  que no lo corta. Consideremos los planos de apoyo de  $K$  que pasan por  $G$ . Proyectemos toda la figura sobre un plano perpendicular a  $G$ ; sea  $K^*$  la proyección de  $K$  y  $Q$  el punto en que se proyecta la recta  $G$ . Las distancias  $T_1, T_2$  que figuran en las fórmulas del n.º 1, son ahora las longitudes  $T_1, T_2$  de las rectas de apoyo de  $K^*$  que pasan por  $Q$ .

Los puntos  $P_1$  y  $P_2$  de la esfera unidad, correspondientes a las direcciones de las normales a  $K$  en los puntos de contacto de los planos de apoyo que pasan por  $G$ , pueden determinarse, (n.º 2), por el punto  $P$ , polo del círculo máximo que ellos determinan y que coincide con la dirección de  $G$ , más los ángulos  $\alpha_1, \alpha_2$  que son ahora los mismos que en la proyección determinan las normales a las rectas de apoyo de  $K^*$  trazadas por  $Q$ .

De (2.1) y (3.4) se deduce por tanto (puesto que  $\operatorname{sen} \omega = |\operatorname{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)|$ ),

$$dP_1 dP_2 = \frac{\operatorname{sen}^2 \omega}{T_1 T_2} dQ dP.$$

Pero, según (1.2), puesto que  $dx dy = dQ$ , se tiene

$$dP_1 dP_2 = \frac{\operatorname{sen}^2 \omega}{T_1 T_2} dG. \quad (3.5)$$

Integremos ambos miembros de esta expresión a todos los pares de puntos  $P_1, P_2$  de la esfera unidad. El primer miembro, siendo  $\int dP_1 = \int dP_2 = 4\pi$ , nos da  $16\pi^2$ . Si el segundo miembro lo integramos a todas las rectas  $G$  del espacio que no cortan a  $K$ , puesto que permutando entre sí  $P_1$  y  $P_2$  se obtiene

la misma recta  $G$ , el resultado será igual al del primer miembro dividido por 2, o sea, igual a  $8\pi^2$ . Queda, por tanto,

$$\int \frac{\text{sen}^2 \omega}{T_1 T_2} dG = 8\pi^2 \quad (3.6)$$

extendida la integración a todas las rectas  $G$  exteriores a  $K$ . Es la fórmula (a).

Para obtener las fórmulas (b) y (c), basta multiplicar ambos miembros de (3.5) por  $\text{sen}^{n-1} \omega$ , e integrar a todos los pares de puntos  $P_1, P_2$  de la esfera unidad. En el primer miembro, teniendo en cuenta que  $\text{sen } \omega = |\text{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)|$  y (2.1), resulta

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\text{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)|^n d\alpha_1 d\alpha_2 \int dP = 2\pi \cdot 4 \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} |\text{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)|^n d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (3.7)$$

habiendo integrado  $dP$  sobre una semiesfera, puesto que a puntos opuestos corresponde el mismo círculo máximo  $C$ . Dividiendo por 2, como antes, la expresión (3.7) para tener en cuenta que al permutar entre sí los puntos  $P_1, P_2$  se obtiene la misma recta  $G$ , resulta

$$\int \frac{\text{sen}^{n+1} \omega}{T_1 T_2} dG = 4\pi \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} |\text{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)|^n d\alpha_1 d\alpha_2$$

estando la primera integración extendida a todas las rectas  $G$  que no cortan a  $K$ . Aplicando (2.2) resultan de aquí inmediatamente las fórmulas (b) y (c).

II. Si el cuerpo convexo  $K$  tiene en todos sus puntos curvatura de Gauss  $k$  distinta de cero, llamando  $ds$  al elemento de área de la superficie de  $K$  y siendo  $dP$  el elemento de área de la esfera unidad en el punto correspondiente a la normal a  $K$  en  $P$ , es

$$dP = k ds. \quad (3.8)$$

Por tanto, llamando  $k_1, k_2$  a los valores de la curvatura de Gauss de  $K$  en los puntos de contacto de los planos de apoyo que pasan por  $G$  y  $ds_1, ds_2$  a los elementos de área correspondientes a los mismos puntos, en lugar de (3.5) se puede poner

$$ds_1 ds_2 = \frac{\text{sen}^2 \omega}{k_1 k_2 T_1 T_2} dG. \quad (3.9)$$

De aquí, integrando  $ds_1, ds_2$  a toda el área  $F$  de  $K$  y dividiendo por 2 para tener en cuenta que al permutar los puntos entre sí resulta la misma  $G$ , se tiene

$$\int \frac{\text{sen}^2 \omega}{k_1 k_2 T_1 T_2} dG = \frac{1}{2} F^2, \quad (3.10)$$

estando la integración, como siempre, extendida a todas las rectas  $G$  exteriores a  $K$ .

Si en (3.5) se sustituye únicamente  $dP_1$  por  $k_1 ds_1$  y se mantiene  $dP_2$ , al integrar  $ds_1$  a toda la superficie de  $K$  y  $dP_2$  a toda la esfera unidad, y permutando luego  $P_1$  y  $P_2$  para mantener la simetría en el segundo miembro, resulta

$$\int \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) \frac{\text{sen}^2 \omega}{T_1 T_2} dG = 4 \pi F, \quad (3.11)$$

extendida la integración a todas las  $G$  que no cortan a  $K$ .

III. Para demostrar las fórmulas (d) y (e) supongamos el conjunto de un plano secante  $E_s$  y un plano de apoyo  $E_a$  de  $K$ . Sea  $G$  la recta en que ambos planos se cortan y  $T_1$  la distancia del punto de contacto de  $E_a$  a la recta  $G$ .

Proyectemos toda la figura sobre un plano perpendicular a  $G$ . Como antes, sea  $Q$  el punto en que  $G$  corta a este plano sección y  $K^*$  la proyección de  $K$  (fig. 3). Sea  $O^*$  la proyección del punto fijo  $O$  que sirve para medir la distancia  $h$  al plano  $E_s$  (n.º 2). La recta  $QA$ , sección del plano  $E_a$ , queda determinada por el ángulo  $\alpha_1$  que forma su normal con una dirección fija. La recta  $QB$ , sección del plano  $E_s$ , queda determinada por la dirección  $\alpha_2$  de su normal y la distancia  $h$  a  $O^*$ . Al variar  $\alpha_1$  a  $\alpha_1 + d\alpha_1$ , manteniéndose fijos  $h$  y  $\alpha_2$ , el punto  $Q$  pasará a un punto  $Q'$  tal que

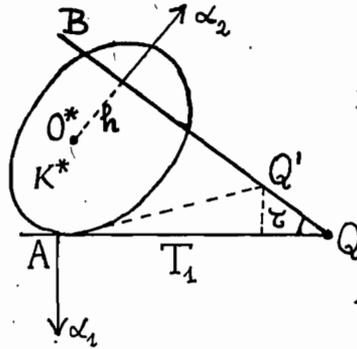


Fig. 3.

$$T_1 da_1 = QQ' \operatorname{sen} \tau, \quad (3.12)$$

siendo  $\tau$  el ángulo de los dos planos  $E_s$  y  $E_a$ . Si se suponen fijos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  y varía  $h$  a  $h + dh$ , el punto  $Q$  pasa al punto  $Q''$  (no dibujado en la figura) situado sobre  $QA$ , tal que

$$dh = QQ'' \operatorname{sen} \tau, \quad (3.13)$$

y si  $h$  y  $\alpha_1$  se mantienen fijos y se hace variar  $\alpha_2$  a  $\alpha_2 + d\alpha_2$ , es

$$d\alpha_2 = d\tau. \quad (3.14)$$

De (3.12), (3.13) y (3.14) se deduce, siendo el elemento de área del plano  $dQ = QQ' \cdot QQ'' \cdot \operatorname{sen} \tau$ ,

$$dh da_1 d\alpha_2 = \frac{\operatorname{sen} \tau}{T_1} dQ d\tau. \quad (3.15)$$

Multipliquemos ahora ambos miembros de (3.15) por el elemento de área de la esfera unidad  $dP$ , correspondiente a la dirección de la recta  $G$ . Siendo  $\operatorname{sen} \tau = \operatorname{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)$ , según (2.1) y (1.2), resulta

$$dh dP_1 dP_2 = \frac{\operatorname{sen}^2 \tau}{T_1} dG d\tau \quad (3.16)$$

siendo  $P_1$  el punto de la esfera unidad correspondiente a la normal a  $E_a$  y  $P_2$  el correspondiente a la normal a  $E_s$ .

De (3.16) y (2.3) se deduce

$$dP_1 \cdot dE_s = \frac{\text{sen}^2 \tau}{T_1} dG d\tau. \quad (3.17)$$

Integremos finalmente estas expresiones equivalentes, a todos los planos  $E_s$  que cortan a  $K$  y a todos los puntos  $P_1$  de la esfera unidad. El primer miembro, según (2.4), da

$$\int dP_1 dE_s = \int dP_1 \int dE_s = 4\pi M. \quad (3.18)$$

En cuanto al segundo miembro de (3.17), habrá que integrarlo a todas las rectas  $G$  exteriores a  $K$  y, para cada  $G$ , a los valores de  $\tau$  comprendidos entre 0 y  $\omega$ , siendo como antes  $\omega$  el ángulo que forman entre si los dos planos de apoyo de  $K$  que pasan por  $G$ . Siendo

$$\int_0^\omega \text{sen}^2 \tau d\tau = \frac{1}{4} (2\omega - \text{sen } 2\omega), \quad (3.19)$$

resulta que la integral del segundo miembro de (3.17) extendida a todas las rectas  $G$  exteriores a  $K$ , poniendo de manifiesto para cada  $G$  los valores  $T_1$  y  $T_2$  correspondientes a sus dos planos de apoyo, vale

$$\frac{1}{4} \int (2\omega - \text{sen } 2\omega) \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) dG \quad (2.20)$$

extendida la integración a todas las rectas  $G$  que no cortan a  $K$ .

Igualando (3.18) y (3.20) se obtiene la fórmula (d).

Si en (3.17) se pone  $dP_1 = k_1 ds_1$  (según (3.8)), se puede escribir

$$ds_1 dE_s = \frac{\text{sen}^2 \tau}{k_1 T_1} dG d\tau,$$

e integrando ambos miembros a todos los planos  $E_s$  que cortan a  $K$  y a toda el área  $F$  de  $K$ , resulta, teniendo en cuenta (3.19), la última fórmula (e) enunciada.

## SOBRE DERIVADAS GENERALIZADAS DE PEANO (\*)

por ERNESTO COROMINAS (Mendoza)

La historia de las derivadas de Peano se remonta casi a los fundamentos del cálculo infinitesimal; pero mejor será limitarse a Lagrange. Lagrange en su Teoría de las funciones analíticas decía que si se quería justificar rigurosamente el cálculo infinitesimal debía introducirse el concepto de derivada partiendo del desarrollo de Taylor, sin embargo, la evolución histórica posterior siguió un camino muy diverso al definir Cauchy la derivada como el límite del cociente incremental; con ello pudo introducirse el rigor que deseaba Lagrange, aunque el desarrollo de Taylor pasaba a ser una consecuencia, o teorema, deducida de los principios y nociones fundamentales del cálculo. A pesar de todo, las ideas de Lagrange no quedaron del todo olvidadas, ya que en las funciones de variable compleja el desarrollo de Taylor volvió a jugar un papel preponderante.

Cuando se reconoció el carácter intrínseco de las funciones analíticas quedó patentizado que si las derivadas se introducían mediante el desarrollo de Taylor se reducía enormemente el concepto de derivada, al quedar reducido el campo de aplicación a las funciones analíticas. De este modo quedaban excluidas del cálculo, no solamente las funciones casi analíticas sino también las clases más reducidas de las funciones infinitamente derivables y hasta las funciones con una sola derivada; la definición de Cauchy era mucho más amplia que la de Lagrange.

A pesar de todo, la idea de utilizar el desarrollo en serie de potencias del incremento para definir a las derivadas sucesivas

---

(\*) Trabajo presentado en las *Primeras Jornadas Matemáticas Argentinas* realizadas en Buenos Aires y La Plata del 27 al 29 de julio de 1945.

era buena si previamente se introducían algunas variantes, por ejemplo, tomando un número finito de términos y dando una expresión del resto independiente de las mismas derivadas. Esta aguda modificación fué propuesta por el genial matemático italiano Peano, demostrando previamente que el resto es de la forma  $o(h^n)$ , esto es, un infinitésimo de orden superior a  $n$ . En definitiva tenemos que si una función admite  $n$  derivadas sucesivas ordinarias en un punto  $x$  se verifica que

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!} + o(h^n) \quad (1)$$

es decir, que en el entorno de un punto la función coincide con un polinomio del incremento de grado  $n$ , cuando se prescinde de infinitésimos de orden superior, esto es, de orden superior a  $n$ .

Peano invirtió los términos de la cuestión tomadno esta propiedad, que era un teorema para las derivadas de Cauchy, como definidora de las derivadas. Así, siempre que una función en el entorno de un punto coincida con un polinomio de grado  $n$  del incremento, salvo infinitésimos de orden superior, diremos que la función tiene  $n$  derivadas sucesivas que son precisamente los coeficientes del desarrollo multiplicados por las respectivas factoriales. En una palabra, la igualdad (1) es la misma definición de las derivadas.

Evidentemente cuando existan las  $n$  derivadas ordinarias la definición de Peano será equivalente a la de Cauchy, lo que no siempre sucede, según veremos después. Es interesante destacar que para la primera derivada ambas definiciones son equivalentes pues, en efecto, si

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(h)$$

se deduce

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \rightarrow f'(x) \quad (h \rightarrow 0)$$

y reciprocamente.

Con la definición de Peano dejamos de definir las derivadas sucesivas reiterando la definición de derivada primera, ya

que definimos las  $n$  derivadas simultáneamente a partir de la función, dejando de ser necesariamente cada una de ellas la derivada de la anterior. Por lo demás, cuando se habla de derivada  $n$ -ésima, aunque se defina directamente a partir de la función, existen todas las anteriores, puesto que se han definido simultáneamente con ella. Estas consideraciones, inmanentes en la misma definición, son las que más caracterizan y distinguen a estas derivadas de las corrientes.

Con un ejemplo veremos mejor lo antedicho a la vez que se apreciará bien claramente la mayor generalidad de estas derivadas. Sea  $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \sin e^{\frac{1}{x^2}}$ , para  $x \neq 0$ , y nula en el origen. El primer factor de la función, y por lo tanto la función toda, es un infinitésimo de tipo exponencial, siendo por consiguiente de orden mayor que  $n$  arbitrario. Así resulta que la función coincide con un polinomio idénticamente nulo, cuando se prescinde de infinitésimos de orden superior; la función admite, pues, infinitas derivadas y todas son nulas. Por otro lado la función derivada  $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} \sin e^{\frac{1}{x^2}} - \frac{2}{x^3} \cos e^{\frac{1}{x^2}}$  es discontinua en el origen (con oscilación infinita) y por consiguiente  $f(x)$  no admite derivada segunda; además ninguna de las infinitas derivadas de Peano es derivable  $P$  (Peano) por ser todas discontinuas.

Peano mismo estudió fácilmente las propiedades formales de sus derivadas que, naturalmente son las mismas que para las corrientes. Después para encontrarnos con un progreso real debemos llegar hasta el año 1935 en que el matemático francés Denjoy publica un trabajo fundamental sobre el problema de la nueva derivación donde sienta las bases para su ulterior estudio.

Denjoy comenzó estudiando el punto básico para toda derivada, a saber, si ella determina la primitiva o función de la cual procede. A tal efecto ideó un proceso transfinito y constructivo que permitiera el cálculo efectivo de la primitiva, generalizando su conocida totalización; de este modo solucionó de un golpe dos problemas: por un lado daba directamente la primitiva con lo cual quedaba resuelto por el otro, el problema de si la derivada determinaba a la primitiva, en una palabra, demostró también el teorema fundamental del cálculo integral. Sometidas a esta prueba esencial las nuevas derivadas dejaban de ser una mera curiosidad, ya que sobre ellas podía construirse una teoría

análoga y paralela a la de nuestro cálculo; como en la integración se podía ampliar el campo de aplicación manteniendo en pie las ideas fundamentales.

Para profundizar las analogías se nos planteó de un modo natural indagar si se podía demostrar el teorema fundamental del cálculo integral correlativamente a como se hace en cálculo. Por otro lado como la demostración de Denjoy utilizaba los números transfinitos también nos propusimos eliminarlos para satisfacer a los que todavía mantienen escrúpulos o repugnancia hacia tal método de razonar que, además de cómodo y seguro, es de una eficacia extraordinaria. La pauta es bien conocida: comenzar por los teoremas del valor medio, y así lo hicimos.

En anteriores comunicaciones a la Unión Matemática Argentina, ya dimos cuenta de que todos los teoremas del valor medio pueden generalizarse para las derivadas de Peano; con ello la analogía con las derivadas ordinarias quedó definitivamente confirmada. No volveremos sobre la cuestión y pasaremos adelante.

Como consecuencia del teorema del incremento finito generalizado hemos demostrado la propiedad distributiva para la derivación, es decir, que la derivada  $m$ -ésima de la derivada  $n$ -ésima es precisamente la derivada  $(n+m)$ -ésima de la función, o de otra manera

$$[f^{(n)}(x)]^{(m)} = f^{(n+m)}(x) \quad \text{o} \quad D^m D^n f(x) = D^{m+n} f(x)$$

pero en cambio, como ya dijimos antes pueden existir  $D^n f(x)$  y  $D^{n+m} f(x)$  sin que la primera admita derivada  $m$ -ésima; esta es la única característica de la derivación ordinaria que se pierde. La mayor generalidad de las derivadas (P) se obtiene, pues, a un precio bien módico.

Y ahora viene algo muy curioso. Aún en el caso en que  $f^{(n+1)}(x)$  no sea la derivada de  $f^{(n)}(x)$ , siguen en pie los teoremas del valor medio, por ejemplo,  $f^{(n)}(x+h) - f^{(n)}(x) = hf^{(n+1)}(x+h)$  a pesar de que la función del segundo miembro no sea la derivada de la del primer miembro. Lo mismo acontece cuando las derivadas, sin relación entre ellas, no son consecutivas. Una generalización se presenta naturalmente después de eso; *definiremos a  $f^{(n+m)}(x)$  como derivada  $m$ -ésima de  $f^{(n)}(x)$ .*

Si aplicamos la anterior definición a la función  $f(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \cos \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x^2}}$  (derivada de  $e^{-\frac{1}{x^2}} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}$ ) resulta tener infinitas derivadas todas nulas y en cambio no es derivable (P) por ser discontinua. Este nuevo concepto permite derivar funciones discontinuas (no todas) manteniendo en pie los teoremas de la media.

La mayor generalidad de la derivación de Peano es evidente cuando se considera un solo punto, pero para un solo punto y hasta para un conjunto numerable de puntos no merecería la pena preocuparse de ninguna innovación. Será necesario estudiar si puede darse un ejemplo de función derivable (P) y no diferenciable en ningún punto. Referente a este punto hemos obtenido el siguiente teorema:

*Cuando una derivada n-ésima de Peano es acotada en todo un segmento se confunde en todo él con la correspondiente derivada ordinaria.*

El mismo teorema se puede dar en forma puntual considerando acotada a una función en un punto cuando lo es en todo un entorno del mismo. Para derivadas acotadas las definiciones de Cauchy y de Peano son equivalentes, luego la novedad de la derivación (P) se circunscribe a las derivadas no acotadas. Para las derivadas finitas, sabemos por un razonamiento de Baire, que son puntualmente no acotadas, esto es, que en el interior de un segmento cualquiera se puede encontrar otro en que la función es acotada y, en estos segmentos, se confundirán las dos derivadas. Resulta, pues, que las derivadas finitas se confunden para conjuntos abiertos densos topológicamente, lo que no es óptico para que dicho conjunto sea de medida infinitamente pequeña.

La demostración del anterior teorema, principal motivo de la comunicación, presenta analogías con la demostración de ciertos teoremas de carácter tauberianos o inversos, que como es bien sabido pertenecen a la teoría de la sumación de series divergentes. En particular el parecido es notable con el teorema de Hardy que afirma la convergencia de las series sumables Cesaro ( $C_1$ ) cuando el término general es de la forma  $O\left(\frac{1}{n}\right)$ . Una tal analogía con un criterio de convergencia induce a pensar que será difícil dar una condición necesaria y suficiente para dilucidar cuando las dos derivaciones coincidirán, piénsese solamente en

que nunca se da un criterio definitivo, lo que obliga a formular una sucesión de criterios cada vez más afinados. En nuestro caso la condición dada es simplemente suficiente, puesto que existen derivadas ordinarias no acotadas.

La semejanza con los teoremas tauberianos no termina aquí, ya que la generalización debida a Landau del teorema de Hardy tiene correlativo en nuestra teoría. El teorema de Landau se limita a reemplazar la doble acotación de Hardy  $u=O\left(\frac{1}{n}\right)$  por una acotación simple  $u_n < O\left(\frac{1}{n}\right)$  o  $u_n > O\left(\frac{1}{n}\right)$ . Así, si se sustituye la hipótesis de la doble acotación de la derivada ( $P$ ) por la acotación superior, o inferior, de la misma manera se puede concluir que ambas derivaciones coinciden.

Son muchas las analogías y contactos que se pueden establecer entre estos estudios de la derivación y otros capítulos de la Matemática. Aparte de la sumación de series, de lo que ya hemos hablado, se nos han presentado estrechas relaciones con el álgebra y el cálculo de diferencias finitas y, dentro de este cálculo, especialmente con las ecuaciones a diferencias finitas y el teorema de Poincaré. Con ello se confirma una vez más las múltiples aplicaciones que puede tener la fecunda teoría de funciones de variable real en el resto de la matemática.

## UN RECONOCIMIENTO DE ESTRELLAS DOBLES QUE TIENEN COMPONENTES ENANAS BLANCAS (\*)

por WILLEM J. LUYTEN  
(Universidad de Minnesota, Estados Unidos)

Mucho es lo que se ha trabajado en años recientes en el problema de la constitución interna de las estrellas y, en particular, de las enanas blancas, pero la cantidad decisiva es siempre la masa y hasta ahora sólo se conocen las masas de dos enanas blancas. Por esto se pensó que era importante buscar enanas blancas entre las componentes de estrellas binarias. Ya que pocas enanas blancas, si es que hay alguna, son más luminosas (que magnitud absoluta 10, no tiene mucho sentido el buscarlas entre estrellas dobles visuales, la mayor parte de las cuales son estrellas gigantes o estrellas brillantes de la secuencia principal, y nuestra mejor posibilidad para descubrirlas parece encontrarse entre los pares débiles con movimiento propio grande.

Como primer paso, se observaron con el reflector de 91 cm. del Observatorio Steward de la Universidad de Arizona, todos los pares débiles contenidos en el catálogo LDS, con declinaciones al norte de  $-48^\circ$  y con movimientos que exceden  $0''.1$  por año. Para cada estrella se tomaron dos placas, una azul ordinaria, de emulsión 103 a-O, y una amarilla, de emulsión 103 a-E, usando filtro «minus blue» N<sup>o</sup>. 12. Esta tarea fué cumplida mediante la colaboración entre el Dr. P. D. Jose y el autor; alrededor de la mitad de las placas fueron tomadas por los dos juntos durante las tres visitas por intervalos de diez días que el

---

(\*) Comunicación presentada a la 8<sup>a</sup> Reunión de la A F A, en Córdoba, el 20 de septiembre de 1946. (Traducida por J. Sahade).

(<sup>1</sup>) Pronto será publicado el detalle completo de estas observaciones.

autor hizo a Tucson en septiembre de 1944, marzo de 1945 y marzo de 1946, y el resto por Jose en 1945 y 1946. El índice de color diferencial entre las componentes fué estimado de la manera usual, directamente al décimo y relativamente a 5 o 10 estrellas de comparación de más o menos la misma magnitud aparente, aplicándose una corrección, creciente con la magnitud y con la latitud galáctica, para tener en cuenta el color promedio de las estrellas de comparación.

En total, han sido observadas, así, 327 estrellas binarias<sup>(1)</sup> y, entre éstas, se encontraron 8 binarias nuevas cada una de las cuales posee una componente blanca. Si a éstas agregamos las cinco binarias semejantes anunciadas hace algún tiempo y que fueran descubiertas por el autor entre estrellas del hemisferio Sud con movimientos que exceden  $0''.3$  por año, las dos descubiertas por Jose y el autor entre pares similares del hemisferio Norte, y las tres compañeras de estrellas binarias, cuyo carácter de enanas blancas fuera descubierto por Kuiper, se tiene un total de 18. Los datos relativos a estas estrellas se consignan en la Tabla 1, cuyas diferentes columnas dan, sucesivamente, la designación de la estrella, su posición para 1900, el movimiento propio total por año, la dirección de este movimiento, las magnitudes fotográficas y los índices de color de cada componente, la separación y el ángulo de posición del par, la época de la medición, y, finalmente, el movimiento orbital a esperarse.

Si bien puede resultar que no todas las estrellas incluidas en la lista sean enanas blancas genuinas, es casi seguro que todas ellas deben estar situadas considerablemente por debajo de la secuencia principal y deben ser degeneradas en grado marcado.

Las magnitudes fotográficas de muchas de estas estrellas han sido determinadas por el autor con el telescopio de Tucson, mediante comparaciones con magnitudes de las «Selected Areas» de Mount Wilson. Para facilitar una posterior normalización con el trabajo similar que se ha emprendido para las enanas blancas muy australes, sólo se utilizaron «Selected Areas» en el ecuador celeste. En la tabla, A designa siempre la componente fotográficamente más brillante; las magnitudes determinadas fotométricamente están dadas al centésimo. Sin embargo, para estrellas tales como las componentes de LDS 826, que ya cuando pasan por el meridiano de Tucson alcanzan una altura de sólo  $23^\circ$ , los valores dados pueden muy bien ser inciertos en cerca

de media magnitud porque la corrección por extinción resulta extremadamente incierta y, si bien las determinaciones individuales de magnitud son suficientemente concordantes, no hay que desechar la posibilidad de un error sistemático en la extinción; los errores internos de estas magnitudes no han de exceder 0,06. Ya que el espejo de 91 cm. está aluminizado, es dudoso que estas magnitudes puedan realmente ser consideradas como magnitudes fotográficas en la escala internacional. Las magnitudes indicadas para binarias recientemente descubiertas y para las muy australes, son siempre estimaciones; están dadas al décimo más próximo y deben ser exactas dentro de media magnitud.

Quando estas estrellas dobles fueron publicadas por primera vez en el catálogo LDS sólo se indicó el cuadrante y la separación aproximada al segundo de arco más próximo. Mediciones más precisas han sido hechas ahora en placas tomadas con el reflector de 152 cm. de Bosque Alegre y con el de 91 cm. de Tucson. Pero ya que las determinaciones futuras de movimiento orbital relativo deben ser hechas en cualquier caso mediante métodos diferenciales y ya que no se disponía de trazos de orientación, se pensó que por el momento bastaría expresar las distancias al décimo de segundo de arco más próximo y los ángulos de posición al grado más próximo. Se ha consignado también la época de la observación, a los fines de referencias futuras. Los movimientos orbitales a esperarse han sido calculados con la fórmula deducida con anterioridad<sup>(2)</sup>, pero adaptada al hecho de que las masas de estas enanas blancas son probablemente mayores que las de las estrellas de la secuencia principal que tienen la misma luminosidad. Los valores así obtenidos se dan en la última columna. Quizás pueda añadirse aquí que una comparación entre placas tomadas en Tucson y en McDonald indicaron, para LDS 275, un movimiento orbital de alrededor de 3° en 2 años lo que corresponde a casi 0".1 por año (movimiento orbital aparente. N. del T.); por otra parte, para LDS 410, una comparación entre placas tomadas con el telescopio de 152 cm. de Harvard y con el de igual abertura de Bosque Alegre da un movimiento orbital de  $0".024 \pm 0.009$  en ascensión recta y de  $-0".021 \pm 0.009$  en declinación. Estos últimos valores están basados en placas tomadas con reflectores distintos,

---

(<sup>2</sup>) W. J. LUYTEN, *M. N.*, 93, 196, 1932.

CATALOGO DE ENANAS DOBLES (W. J. Luyten)

DESIGNACION	$\alpha$ (1900)	$\delta$ (1900)	Movimiento propio total por año	Dirección del movimiento propio	Comp. A		Comp. B		Separación	Angulo de posición	Epoca de la medición	Movimiento orbital a esperarse
					Magnitud fotográfica	Indice de color	Magnitud fotográfica	Indice de color				
L 587—77 AB	3h24m7	-27°44'	0''81	64°	13.88	-0.1	15.61	+1.7	7''7	226°	44.72	0''015
L 745—46 AB	7 35 8	-17 10	1 29	117	12.84	-0.1	16.88	+1.8	21 0	276	44.91	0 014
LDS 235	8 43 0	-18 37	0 15	287	12.65	+1.0	14.63	-0.1	30 0	236	45.68	0 002
LDS 275	9 32 9	-36 54	0 35	299	14.87	-0.1	15.15	0.0	30 9	-38	44.24	0 02
L 1405—40/1	11 45 1	+25 52	0 29	250	15.35	+0.1	16.18	+1.3	36 2	250	46.24	0 002
LDS 410	12 22 8	-70 56	1 17	339	15.7	+1.1	17.7	+1.0	15 3	108	45.61	0 008
LDS 455	13 31 6	-15 49	0 09	253	14.90	0.0	15.18	+1.6	14 0	241	45.51	0 001
L 619—49/50	13 45 3	-27 04	0 24	168	13.9	+1.4	15.0	+0.1	8 2	234	46.29	0 003
LDS 539	15 38 6	-38 00	0 13	165	14.7	+1.1	14.9	+0.3	10 3	265	46.09	0 002
-37°6571 AB	15 41 C	-37 36	0 52	242	6.8	+0.8	13.2	-0.1	14 7	130	45.10	0 030
W 672	17 13 6	+ 2 04	0 56	230	14.27	0.0	15.57	+1.5	12 3	137	45.96	0 007
LDS 678	19 15 2	- 7 51	0 20	198	11.89	-0.3	13.72	+1.8	27 2	308	45.47	0 022
LDS 683	19 30 1	-13 42	0 14	189	15.1	+1.2	15.4	-0.1	28 2	205	45.85	0 009
LDS 749	21 27 0	- 0 13	0 41	87	11.00	+1.0	14.18	0.0	132 8	28	45.75	0 003
LDS 766	21 51 7	-43 56	0 22	43	14.0	+0.1	15.4	+1.3	9 0	329	45.85	0 004
LDS 785	22 21 7	-34 42	0 19	99	14.7	+0.2	14.7	+1.5	9 4	197	45.98	0 003
L 1512—34/5	23 38 9	+31 59	0 22	358	13.01	+0.1	13.41	+1.3	174 0	9	45.20	0 001
LDS 826	23 48 8	-33 50	0 50	217	14.60	0.0	15.04	+1.3	7 0	359	45.50	0 008

$p=0''17:$

$p=0.152 \pm 0.047$

$p=0.076 \pm 0.006$

El movimiento de *LDS 410* ha sido medido en base a placas tomadas en Harvard y en Córdoba con un intervalo de 9 años; resultó ser de  $+0''024 \pm 0,009$  en ascensión recta, y de  $-0''021 \pm 0.009$  en declinación.

El carácter de enanas blancas de las componentes *-37°6571*, *W 672* y *LDS 749* fué descubierto por Kuiper. El de todas las otras por Luyten.

de modo que la incertidumbre real quizás sea mucho mayor que la indicada por los errores medios dados aquí. De cualquier modo, en los dos casos mencionados los valores medidos son considerablemente mayores que las estimaciones calculadas. Si esto resulta ser cierto siempre, podemos tener confianza en que dentro de 10 o 25 años dispondremos de determinaciones suficientemente exactas de los movimientos orbitales de la mayor parte de estas estrellas, para permitir, por lo menos, una evaluación estadística de sus masas.

Puede destacarse el hecho de que en dos pares, ambas componentes son degeneradas; para LDS 275, los espectros que se obtuvieron, aunque de calidad muy pobre, parecen ser continuos, probablemente DC 20, en el sistema del autor, mientras que las componentes de LDS 410, que en la placa tomada en Bosque Alegre resultarían ser más blancas que lo que se esperaba, parecen ser dos estrellas degeneradas cuyas magnitudes absolutas son las menores que se conocen, alrededor de 16 y 18.

Acaban de obtenerse, con el reflector de 208 cm. de McDonald y la cámara Schmidt f/1, dos hermosos espectros de las componentes de LDS 678. El de la componente más débil parece corresponder al de una estrella normal de tipo M2 o M3, lo que indicaría, para el sistema, una paralaje de alrededor de 0".05. Esto significaría que la magnitud absoluta de la componente más brillante es más o menos 11. Ahora bien, su espectro es continuo y la distribución de energía en éste indica una temperatura superficial de alrededor de 18000° K, que concuerda con lo que indica el índice de color de -0.3. Esto, a su vez, implicaría, que el radio de la estrella es más o menos un término medio entre el de la Tierra y el de la Luna, resultando, entonces, una densidad media de 5.000.000 en la escala CGS.

# SOBRE LA RADIACION COSMICA GENERADORA DE LOS GRUPOS DE PARTICULAS PENETRANTES

por G. WATAGHIN

Departamento de Física, São Paulo (Brasil)

La existencia de chaparrones (showers) que contienen más de una partícula capaz de atravesar espesores de Pb mayores de 20 cm., fué demostrada por medio de experiencias con contadores de Geiger efectuadas en São Paulo en 1939. Estos chaparrones, hallados independientemente por Janossy e Ingleby, en Inglaterra en 1940, fueron motivo de varios trabajos en el período comprendido entre 1939 y 1946. En julio del año 1946, determinaciones de la frecuencia de estos chaparrones, en el Brasil, fueron realizadas en avión, a una altura de cerca de 7 km. (presión atmosférica de  $\sim 34$  cm. de Hg). Los resultados obtenidos en tres vuelos (que tuvieron buen éxito) pueden ser resumidos de la siguiente manera.

Adoptamos un dispositivo, análogo al usado desde 1939 en São Paulo y Campos de Jordão (altura 1750 m.), de cuatro contadores dispuestos a lo largo de las cuatro aristas horizontales, y paralelas entre sí, de un paralelepípedo rectangular, y protegidos de todos los lados con 10,5 cm. de Pb, por lo menos. El circuito cuádruple poseía un poder resolvente de 2 microsegundos y una eficiencia de 100 %. La eficiencia de los contadores era superior al 98 %.

La frecuencia observada a tres alturas diferentes está indicada en la tabla siguiente:

	Altura	Presión atm.	Nº de coin. 4-ples y Nº de minutos	Frecuencia
São Paulo	750m	700mm Hg	$\frac{135}{66540}$	$(2,0 \pm 0,3) \cdot 10^{-3}$ min
Camp. de Jordão	1750m	615mm Hg	$\frac{155}{21830}$	$(7,1 \pm 0,5) \cdot 10^{-3}$ min
avión	7000m	340mm Hg	$\frac{36}{266}$	$(160 \pm 27) \cdot 10^{-3}$ min

Las experiencias en avión fueron hechas en colaboración con el señor Oscar Salas; las experiencias iniciales en colaboración con el Dr. M. D. de Souza Santos y del Dr. P. A. Pompeia.

En la tabla se ve que la frecuencia de los chaparrones penetrantes aumenta 80 veces con el aumento de altura desde 750 m. hasta 7000 m. Parece que la interpretación más plausible de este resultado se obtiene, suponiendo una ley exponencial de absorción de la radiación que genera los chaparrones de partículas penetrantes, del tipo  $ae^{-\frac{x}{l}}$ , donde  $x$  indica la presión atmosférica en  $\text{gr/cm}^2$  y  $l$  es la recíproca del coeficiente de absorción, que resulta ser de  $\sim 100 \text{ gr/cm}^2$ . Este valor corresponde a una sección eficaz para la producción de estos chaparrones de  $2,3 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$ . Janossy y Rochester hallaron un coeficiente de absorción del mismo orden de magnitud, observando el «efecto de transición» en Pb, al nivel del mar.

Un análisis preliminar del reducido material experimental referente a los chaparrones de partículas penetrantes, del cual disponemos, permite concluir que la multiplicidad y la extensión de estos chaparrones y la distribución angular de las partículas, varía mucho. (Fuéron observados chaparrones que cubren  $100 \text{ m}^2$  y que seguramente contienen millones de partículas penetrantes). Extrapolando la curva exponencial de absorción se halla que la frecuencia aumenta con la altura por un factor  $\sim 2 \cdot 10^4$  al pasar del nivel del mar a la parte superior de la atmósfera. La frecuencia de los mesones, medida en un telescopio, varía en relación a la misma variación de altura solamente por un factor 12. Se puede explicar este hecho, recordando la diferencia del poder penetrante de los mesones y de los protones, que constituyen probablemente las principales causas de la producción de los chaparrones aquí estudiados, y observando que un telescopio formado con contadores de Geiger puede registrar los mesones a cualquier altura encima del mismo, pero dentro del ángulo sólido definido por la geometría del telescopio, integrando el efecto de todos los centros de producción dentro de este ángulo sólido. Al contrario, un dispositivo del tipo usado en São Paulo para los chaparrones, tiene un alcance mucho más limitado por causa de la distribución angular de las partículas del chaparrón, y, por lo tanto, la frecuencia medida con este dispositivo indica el número de protones enérgicos existentes cerca del aparato.

En opinión del autor, la mayor parte de los mesones es producida en las capas superiores de la atmósfera (a la profundidad correspondiente a la presión de  $100 \text{ gr./cm}^2$ ), por medio del mecanismo de la producción de chaparrones del tipo aquí estudiados, o sea, de chaparrones de mesones generados en las colisiones de los protones primarios con los núcleos y acompañados de nucleones y, tal vez, de otras partículas.

## CRONICA

### LA ESTADA EN LA ARGENTINA DEL PROFESOR GEORGES VALIRON

Con motivo de la visita al país del distinguido matemático francés profesor Georges Valiron, la Unión Matemática Argentina realizó el 2 de agosto último una reunión de comunicaciones científicas en su honor, la que se desarrolló de acuerdo al siguiente programa:

1. *A. Durañona y Vedia*: Palabras de homenaje al Prof. Georges Valiron y entrega del nombramiento de miembro honorario.
2. *L. A. Santaló*: Sobre un complejo lineal ligado a toda curva cerrada del espacio.
3. *A. Durañona y Vedia*: Caracterización de espacios topológicos.
4. *A. González Domínguez*: Sobre la distribución límite de la media geométrica.
5. *Horacio E. Calcagno* (Montevideo): La medida en el campo complejo. (Informado por M. Cotlar).
6. *M. Cotlar*: Una definición general de límite.
7. *Yanny Frenkel*: Criterio de bicompatibilidad y  $H$ — completitud de un espacio topológico  $T_1$ .
8. *G. Valiron*: a) Un problema simple de cálculo de variaciones; b) Direcciones de Julia y direcciones de Picard.

La segunda comunicación presentada por el profesor Valiron aparece en este mismo número de la Revista.

A continuación de la reunión, los miembros de la Unión Matemática Argentina ofrecieron una cena en honor del distinguido huésped en el Club Universitario. Hablaron el Prof. Rey Pastor, destacando el espíritu latino y la influencia de los matemáticos franceses en la Argentina, y el Prof. Valiron, agradeciendo el homenaje. Asistieron a esta lucida y gratísima cita L. A. Santaló y Sra., A. Durañona y Sra., A. Cicchini, Y. Frenkel de Cotlar, M. Cotlar, G. Domínguez y Sra., M. Sadosky, J. B. Souto, C. Berra, C. A. Trejo, J. C. Vig-

naux, Juana M. Cardoso, J. Giambiagi, Sra. de Balanzat, Estrella Mazzoli, Cecilia Mossin Kottin, Sr. Scotto, Sr. Yanzi Oro, Sra. Rey Pastor de Yanzi Oro, Celina Repetto, M. Valentinuzzi y Sra., Sr. R. Scarfiello, Sr. Zadunaiski y Sra., Susana Fernández Long, Luisa Uranga, María J. Erramuspe, Sres. Laguardia y Vales (de Montevideo) y Sr. Machado y Sra.

Los días 7 y 8 de agosto el profesor Valiron visitó Rosario en cuya oportunidad dió dos conferencias en la Facultad de Ciencias Matemáticas: una sobre los trabajos matemáticos publicados en Francia durante la ocupación, y otra, en el Instituto de Matemática de dicha Facultad, sobre algunos problemas actuales de la teoría de funciones analíticas.

El 27 de agosto el profesor Valiron dió una conferencia en el Instituto Pedagógico de San Luis sobre el tema: "Lugar de la teoría de funciones de variable compleja en las matemáticas superiores". En esa conferencia el profesor Valiron reseñó los problemas que condujeron a la creación de los números complejos, primero, y a las funciones de variable compleja, después; resumiendo las diferentes formas de encarar esta teoría y las características de cada una de ellas. Estudió luego el problema de la uniformación de las funciones algebraicas y explicó los resultados de Poincaré mostrando la conexión de este problema con el estudio de las geometrías no euclideas. Finalmente estudió la conexión de la teoría de funciones de variable compleja con la moderna teoría de números.

Antes de la conferencia, el profesor Valiron tuvo una charla con los profesores y alumnos del Instituto Pedagógico sobre la organización y tendencias actuales de la investigación científica en Francia. Al terminar la conferencia el profesor Valiron fué obsequiado con un vino de honor por el profesorado del Instituto de San Luis.

Finalmente, el 13 de setiembre, la Unión Matemática Argentina realizó una sesión pública extraordinaria, a las 18.30 en un aula de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Buenos Aires y en la que el profesor Valiron habló sobre "Un teorema de Sergio Bernstein" y luego sobre "Los trabajos de Análisis Matemático en Francia durante la ocupación".

#### EL FALLECIMIENTO DEL PROFESOR ENRIQUES

En respuesta a la nota de pésame que las autoridades de la *Unión Matemática Argentina* remitieron al profesor G. Castelnuovo, con motivo del fallecimiento del profesor F. Enriques, aparecida en el número anterior de esta Revista, el secretario de la *Unión*, doctor M. Valentinuzzi recibió la siguiente carta:

*Accademia Nazionale dei Lincei*  
*Presidenza*

Roma, 6 agosto 46

*Egr. Sig. Dr. Valentinuzzi, Segretario de l'Union Matematica Argentina.*  
*Ringrazio vivamente Lei e, col Suo mezzo, l'Union Mat. Argentina e il suo Presidente Prof. Terracini delle gentili parole di condoglianza che mi ri-*

*volgono, nulla lettera del 12 luglio, a proposito della morte del Prof. F. Enriques, mio cognato e carissimo amico. •*

*La improvvisa scomparsa del Prof. Enriques è certo una gravissima sventura per la scienza e la Scuola Italiana. Rivedendo oggi la sua opera matemática, storica e filosófica, si scorge quanto essa sia vasta e quale influencia egli abbia esercitato sul pensiero contemporaneo. Tutti gli amici ne piangono la morte ed i discepoli, que egli amava e guidava con i suoi consigli, sono desolati.*

*La famiglia è vivamente grata a codesta Union della parte che ha preso al suo dolore, et io rinnovo le espressioni della mia gratitudine ed invio distinti saluti. Obbl.*

G. CASTELNUOVO

#### FUNDACION FEDERIGO ENRIQUES

En homenaje al gran geómetra y filósofo recientemente desaparecido, el Dr. Julio Rey Pastor instituye a sus expensas esta fundación para el fomento de los estudios epistemológicos en Italia e Ibero-américa con las condiciones siguientes:

1º) Cada año se concederá un premio de 300 dólares, con publicación del trabajo y entrega de 100 ejemplares, al autor del mejor estudio de carácter epistemológico, residente en Italia o país ibero-americano, sobre el tema propuesto por la fundación.

2º) La fundación será administrada por la Institución Cultural Argentina (I. C. A.) subvencionada por el Dr. Rey Pastor o por sus herederos y concederá cada año el premio al trabajo propuesto por una comisión técnica formada por dos jurados: uno elegido por la Accademia dei Lincei; el otro por el Instituto de Historia y Filosofía de la ciencia (que actualmente dirige el Dr. Aldo Mieli) y, en caso de disolución, por la Unión Matemática Argentina.

3º) El citado jurado técnico propondrá el tema de concurso en el mes de septiembre de cada año y la ICA se encargará de hacerlo publicar en Ibero-América e Italia fijando como plazo de admisión hasta el 31 de diciembre siguiente; los trabajos, de extensión comprendida entre 30.000 y 60.000 palabras, se presentarán en ejemplar triple mecanografiado, escrito en castellano, italiano o portugués.

El jurado podrá elegir un tercer miembro si lo cree conveniente y se expedirá lo antes posible, comunicando su fallo a la ICA que procederá inmediatamente al pago de los 300 dólares y a la publicación. Mientras no se encuentre editor en italiano o portugués para los trabajos escritos en estas lenguas, la edición será hecha en castellano.

4º) Por esta primera vez, ante la imposibilidad de cumplir este año la cláusula anterior, se fija como tema de concurso para 1947:

*Exposición elemental accesible a público no especializado de la Semántica científica*

Los trabajos pueden dirigirse al Instituto de Historia y Filosofía de la Ciencia: B. Irigoyen 672; o a la Unión Matemática Argentina. Perú 222, Buenos Aires.

CONFERENCIA DEL DOCTOR GROSS

Bajo los auspicios de la Unión Matemática Argentina, el doctor Bernardo Gross, físico del Instituto de Tecnología de Río de Janeiro, pronunció en uno de los salones de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales el miércoles 25 de setiembre de 1946, a las 18,30, una conferencia sobre el tema: "La ecuación de Volterra".

CONFERENCIA DEL DOCTOR SCHÖNBERG

El 27 de setiembre de 1946, el doctor Mario Schönberg, de la Universidad de San Pablo (Brasil), pronunció, bajo los auspicios de la Unión Matemática Argentina, una conferencia sobre el tema: "La ecuación de Klein-Gordon".

---

## PUBLICACIONES DE LA U. M. A.

Vol. I (1936-1937). Vol. II (1938-1939), Vol. VII (1940-1941), Vol. VIII (1942), Vol. IX (1943), Vol. X (1944-1945), Vol. XI (1945-1946)

Notas y memorias de J. BABINI, M. BALANZAT, J. BARRAL SOUTO, A. BATTIG, G. BECK, C. BIGGERI, G. BIRKHOFF, C. A. BULA, M. BUNGE, H. E. CALCAGNO, F. CERNUSCHI, A. W. CONWAY, C. CRESPO, E. A. DE CESARE, J. DE CICCO, J. A. DEL PERAL, J. FAVET, E. FERRARI, V. y A. FRAILE, Y. FRENKEL, R. FRUCHT, E. GASPÁR, E. GAVIOLA, A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ, A. J. GUÁRNIERI, J. E. HERRERA, E. KASNER, G. KNIE, N. KRIVÓSHEIN, T. LEVI-CITTA, W. MÄCHLER, J. L. MASSERA, M. PETROVICH, M. M. PEIXOTTO, A. PETRACCA, E. R. RAIMONDI, J. J. REBELLA, J. REY PASTOR, S. RÍOS, P. ROSSELL SOLER, M. SADOSKY, R. SAN JUAN, L. A. SANTALÓ, S. SISPÁNOV, A. TERRACINI, P. THUULEN, F. TORANZOS, J. V. USPENSKY, J. WÜRSCHMIDT.

Informes de las reuniones de la Asociación Física Argentina.

Soluciones de temas propuestos. Bibliografía, Crónica, etc.

Vol. III 1938-1939). Vol. IV (1939). Vol. V (1940). Vol. VI (1940-1942)

Fascículos separados

- Nº 1. — GINO LORIA. *Le Matematiche in Ispagna e in Argentina.*
- » 2. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre las series de funciones de Hermite.*
- » 3. — MICHEL PETROVICH. *Remarques arithmétiques sur une équation différentielle du premier ordre.*
- » 4. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Una nueva demostración del teorema límite del Cálculo de Probabilidades. Condiciones necesarias y suficientes para que una función sea integral de Laplace.*
- » 5. — NIKOLA OBRECHKOFF. *Sur la sommation absolue par la transformation d'Euler des séries divergentes.*
- » 6. — RICARDO SAN JUAN. *Dérivación e integración de series asintóticas.*
- » 7. — Resolución adoptada por la U. M. A. en la cuestión promovida por el Sr. Carlos Biggeri.
- » 8. — F. AMODEO. *Origen y desarrollo de la Geometría Proyectiva.*
- » 9. — CLOILDE A. BULA. *Teoría y cálculo de los momentos dobles.*
- » 10. — COTILDE A. BULA. *Cálculo de superficies de frecuencia.*
- » 11. — R. FRUCHT. *Zur Geometria auf einer Fläche mit indefiniter Metrik (Sobre la Geometría de una superficie con métrica indefinida).*
- » 12. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre una memoria del Prof. J. C. Vignaux.*
- » 13. — F. TORANZOS. *Sobre las singularidades de las curvas de Jordan.*
- » 14. — M. BALANZAT. *Fórmulas integrales de la intersección de conjuntos.*
- » 15. — G. KNIE. *El problema de varios electrones en la mecánica cuantista.*
- » 16. — A. TERRACINI. *Sobre la existencia de superficies cuyas líneas principales son dadas.*
- » 17. — L. A. SANTALÓ. *Valor medio del número de partes en que una figura convexa es dividida por n rectas arbitrarias.*
- » 18. — A. WINTNER. *On the iteration of distribution functions in the calculus of probability (Sobre la iteración de funciones de distribución en el cálculo de probabilidades).*
- » 19. — E. FERRARI. *Sobre la paradoja de Bertrand.*
- » 20. — J. BABINI. *Sobre algunas propiedades de las derivadas y ciertas primitivas de los polinomios de Legendre.*
- » 21. — R. SAN JUAN. *Un algoritmo de sumación de series divergentes.*
- » 22. — A. TERRACINI. *Sobre algunos lugares geométricos.*
- » 23. — V. y A. FRAILE y C. CRESPO. *El lugar geométrico y lugares de puntos áreas en el plano.*
- » 24. — R. FRUCHT. *Coronas de grupos y sus subgrupos, con una aplicación a los determinantes.*
- » 25. — E. R. RAIMONDI. *Un problema de probabilidades geométricas sobre los conjuntos de triángulos.*

En 1942 la U. M. A. ha iniciado la publicación de una nueva serie de "Memorias y monografías" de las que han aparecido hasta ahora las siguientes:

Nº 1. — GUILLERMO KNIE, *Mecánica ondulatoria en el espacio curvo.*

Nº 2. — GUIDO BECK, *El espacio físico.*

Nº 3. — JULIO REY PASTOR, *Integrales parciales de las funciones de dos variables en intervalo infinito.*

Nº 4. — JULIO REY PASTOR. *Los últimos teoremas geométricos de Poincaré y sus aplicaciones. Homenaje póstumo al Prof. G. D. BIRKHOFF.*

Además han aparecido tres cuadernos de *Miscelánea matemática.*

## S U M A R I O

	PÁG.
Directions de Julia et directions de Picard des fonctions entières, par G. Valiron .....	49
Para la geometría de los polinomios monodifricos, por A. Terracini	55
Cartografía y curvas de escala, por J. de Cicco .....	62
Plazos óptimos para préstamos con seguro de vida, por J. Barral Souto .....	75
Unas fórmulas integrales referentes a cuerpos convexos, por L. A. Santaló .....	78
Sobre derivadas generalizadas de Peano, por E. Corominas .....	88
Un reconocimiento de estrellas dobles que tienen componentes enanas blancas, por W. J. Luyten .....	94
Sobre la radiación cósmica generadora de los grupos de partículas penetrantes, por G. Wataghin .....	99
<i>Crónica.</i> La estada en la Argentina del profesor Georges Valiron. — El fallecimiento del profesor Enriques. — Fundación Federigo Enriques. — Conferencia del doctor Gross. — Conferencia del doctor Schönberg .....	101

Contribuyen especialmente al sostenimiento de las publicaciones de  
la UNION MATEMATICA ARGENTINA los siguientes

### MIEMBROS PROTECTORES

COMPAÑÍA INDUSTRIAL DEL NORTE DE SANTA FE. INGENIO AZUCARERO "ARNO"  
(Villa Ocampo. F. C. S. F.). — JULIO REY PASTOR (Buenos Aires). — T. G.  
BERLENGIERI y CIA. (Rosario). — TRICERRI HNOS. (Rosario). — MANUEL GUI-  
TARTE (Buenos Aires). — CLOTILDE A. BULA (Rosario). — ELBA R. RAIMONDI  
(Buenos Aires). — FERNANDO L. GASPAS (Rosario). — CARLOS ISELLA (Ro-  
sario). — PEDRO J. TRICERRI (Rosario).