Volumen XII Número 3

REVISTA

DE LA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

(Miembro del patronato de la Mathematical Reviews)

ORGANO DE LA

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

REDACTADA por

J. Babini (Director), J. Rey Pastor, L. A. Santaló y E. Gaviola (Delegado de la A. F. A.)

□

MIEMBROS TITULARES DE LA U. M. A.

J. Babini (SantaFe) (fundador). — M. Balanzat (San Luis). — J. Barral Souto (B. Aires) (fundador) — C. A. Bula (Rosario) (fundador). — E. Corominas (Mendoza). — E. Chichizola (Rosario). — C. Dieulefait (Rosario) (fundador). — A. Duraňona y Vedia (B. Aires). — Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales (B. Aires) (fundador). — Facultad de Ciencias Matemáticas (Rosario) (fundador). Facultad de Química Industrial (Santa Fe) (fundador). — Y. Frenkel (B. Aires). — E. Gaspar (Rosario) (Fundador). — F. L. Gaspar (Rosario) (fundador). — J. Giannone (Rosario (fundador). — A. González Domínguez (Buenos Aires) (fundador). — J. González Gale (Buenos Aires) (fundador). — M. Guitarte (Buenos Aires) (fundador). — W. S. Hill (Montevideo) (fundador). — C. Isella (Rosario) (fundador). — H. Magliano (La Plata). — Observatorio Astronómico (La Plata). — J. Olguin (Rosario) (fundador). — P. Pí Calleja (San Juan). — E. R. Raimondi (Buenos Aires) (fundador). — J. E. Reynal (Buenos Aires). — J. Rey Pastor (Buenos Aires) (fundador). — E. L. Samatán (Buenos Aires) (fundador). — L. A. Santaló (Rosario) (fundador). — J. Sortheix (Tucumán) (fundador). — D. T. A. de Speluzzi (Buenos Aires) (fundador). — E. Terradas (La Plata) (fundador). — F. Toranzos (La Plata). — E. H. Zarantonello (La Plata).

□

BUENOS AIRES
1947

UNION MATEMATICA ARGENTINA

MIEMBROS HONORARIOS

Tulio Levi-Civita (†); Beppo Levi; Alejandro Terracini; George D. Birkhoff (†); Marshall H. Stone; Georges Valiron.

JUNTA DIRECTIVA

Presidente, Alejandro Terracini, Salta 417, Tucumán
Vicepresidentes, Agustín Durañona y Vedia. Alberto E. Sagastume Berra. Secretarios, Máximo Valentinuzzi (Buenos Aires). Luis A. Santaló (Litoral). Angel J. Guarnieri (Cuyo). Félix E. Herrera (Tucumán). Eduardo Zarantonello (La Plata). Ricardo Platzeck (Córdoba). Tesorera, Clotilde A. Bula. Protesorera, Yanny Frenkel de Cotlar.

REPRESENTANTES EN EL EXTRANJERO

Ing. Rafael Laguardia (Uruguay). Ing. José Luis Massera (Uruguay). Dr. Sergio Sispánov (Paraguay). Dr. Godofredo García (Perú). Dr. Leopoldo Nachbin (Brasil). Dr. Roberto Frucht (Chile). Dr. Peter Thullen (Ecuador). Dr. Mario González (Cuba). Dr. Alfonso Nápoles Gandara (México).

Para ingresar como miembro titular de la Unión Matemática Argentina, es necesaria la presentación del solicitante por dos socios fundadores, la admisión por la Junta, y el pago de una cuota de $ 5. — m/n. mensuales o de $ 50.— anuales.

Para ingresar como miembro adherente (con derecho a la Revista y a las Memorias en fascículos separados) es necesario el pago de una cuota de $ 10.— anuales. Los pagos deberán efectuarse por cheque, giro u otro medio libre de gastos, a la orden de la Tesorera, Prof. Clotilde A. Bula, Lavalle 1115, Rosario.

Los señores miembros adherentes domiciliados en la Ciudad de Buenos Aires podrán, si lo prefieren, efectuar su pago en doce cuotas mensuales de $ 1.00 m/n. cada una, que serán cobradas a domicilio.

Por ser la U. M. A. miembro del patronato de la Mathematical Reviews (sponsoring member), los socios de la U. M. A. tienen derecho a suscribirse a esa importante revista de bibliografía y crítica con 50 % de rebaja sobre el precio de suscripción que es de 13 dólares por año. Los socios de la U. M. A. pagarán por tanto sólo 6.50 dólares por año.

Los trabajos originales enviados para su publicación serán previamente analizados por un ponente, quien emitirá dictamen acerca de la novedad y corrección de sus resultados.

La impresión de las tiradas aparte, y las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

Abonnement annuel à l'étranger: 4.00 dollars (Etats-Unis).

Prière d'adresser toute la correspondance scientifique et administrative à l'adresse ci-dessous:

SR. SECRETARIO DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA
Dr. MÁXIMO VALENTINUZZI
Gascón 520, Buenos Aires (REP. ARGENTINA)

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

Para ingresar a la Asociación Física Argentina debe abonarse una cuota mensual de $ 5.— m/n. Los estudiantes de física y de astronomía pagarán una cuota mensual de $ 1.— m/n.

Presidente: Enrique Gaviola

Tesorera: Estrella Mazzolli de Mathov, Buenos Aires, San Juan 1931.

Secretarios Locales: Ernesto E. Galloni, Buenos Aires, Yerbal 1763.
Fidel Alsina Fuertes, La Plata, calle 44, Nº 717.
Guido Beck, Córdoba, Laprida 922.
José Würschmidt, Tucumán, Laprida 765.

GENERALITÉS SUR LES FONCTIONS ENTIÈRES (*)

por GEORGES VALIRON
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

On appelle fonction entière une fonction holomorphe en tout point à distance finie, qui ne se reduit pas à un polynôme. Elle est déterminée par son développement en série entière

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

qui doit converger quel que soit z, ce qui entraîne que l'on doit avoir

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0;$$

c'est une condition nécessaire et suffisante. Weierstrass a étendu à ces fonctions le théorème de la décomposition en facteurs des polynômes. Si la fonction $f(z)$ n'a pas de zéros, c'est une exponentielle $e^{g(z)}$, où $g(z)$ est un polynôme ou une fonction entière. Si $f(z)$ a un nombre fini de zéros, elle est le produit d'un polynôme admettant ces zéros avec le même ordre de multiplicité, et ces zéros seulement, et d'une fonction entière sans zéros, elle est de la forme

$$P(z)\, e^{g(z)}.$$

Lorsque $f(z)$ a une infinité de zéros, ces zéros n'ont aucun point d'accumulation à distance finie, on peut les classer par ordre de modules non décroissants en faisant figurer chaque zéro un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité. Soit

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots; \qquad |a_{n+1}| \geqq |a_n|, \qquad \lim |a_n| = \infty,$$

la suite de ces zéros non nuls. Si $f(0) = 0$, on peut mettre en facteur dans $f(z)$ une puissance de z, on a

$$f(z) \equiv z^m f_1(z), \quad f_1(0) \neq 0,$$

(*) Primera clase (27 de mayo de 1946) del cursillo sobre *Funciones enteras* dictado en el Instituto de Matemática de la Universidad de Buenos Aires.

ce qui ramène au cas d'une fonction différente de zéro à l'origine. Weierstrass forme une fonction entière admettant les zéros a_n; généralisant un procédé d'Euler, il prend comme facteur s'annulant pour $z = a_n$, l'expression

$$E(z, a_n, p_n) = \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \ldots + \frac{z^{p_n}}{p_n a_n^{p_n}}},$$

où p_n est un entier dépendant en général de n. L'exposant est formé des p_n premiers termes du développement de $\log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$ (en supposant $\left|\frac{z}{a_n}\right| < 1$) de telle sorte que, lorsque $\left|\frac{z}{a_n}\right|$ est inférieur à 1, on peut écrire l'expression sous forme exponentiele et le premier terme dans l'exposant est alors

$$\frac{z^{p_n+1}}{(p_n+1)\, a_n^{p_n+1}}$$

On en déduit que le produit infini

$$\prod_1^\infty E(z, a_n, p_n)$$

est absolument convergent quel que soit z et définit une fonction entière s'annulant aux points a_n pourvu que la série

$$\Sigma \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1}$$

converge quel que soit r. On peut toujours s'arranger pour qu'il en soit ainsi, on pourra prendre par exemple $p_n = n$.
(Voir Goursat, II, chap. XV, Valiron I, n°. 209).

On a dans ce cas

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_1^\infty E(z, a_n, p_n).$$

Un cas simple est celui où les p_n peuvent être pris égaux à un nombre fixe et où $g(z)$ est un polynôme, on dit alors avec

Laguerre que la fonction est de genre fini, le genre étant le plus grand des nombres p_n et du degré de $g(z)$ lorsque ces nombres sont pris aussi petits que possible. Poincaré donna des conditions nécessaires que doivent vérifier les coefficients c_n du développement taylorien pour que le genre soit fini; Hadamard donna les réciproques, ce qui lui permit d'étudier une fonction introduit par Riemann et d'obtenir ultérieurement la formule donnant la valeur asymptotique du n-ième nombre premier.

Il est aujourd'hui commode d'introduire la notion d'ordre due à Borel. Soit $M(z)$ le maximum de $|f(re^{i\varphi})|$ lorsque φ varie de 0 à 2π; on écrira aussi $M(r,f)$ lorsqu'on aura à spécifier que cette fonction est relative à $f(z)$. On sait d'après Cauchy qui $M(r)$ est une fonction de z qui croît avec r et qui croît plus vite que toute puissance de r (Goursat, II, XIV; Valiron, I, n°. 184). Borel compare $M(r)$ à e^r, donc $\log M(r)$ à r^k; L'ordre ρ de $f(z)$ est le nombre

$$\rho = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log(\log M(r))}{\log r},$$

il peut être nul, fini positif ou infini. Il ne change pas si l'on ajoute à $f(z)$ une constante ou même un polynôme, ou si $f(0)$ étant nul, on remplace $f(z)$ par $\frac{f(z)}{z}$. Si ρ est fini positif, on a, si petit que soit ε positif

$$M(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}} \quad \text{pour} \quad r > r_\varepsilon,$$
$$M(r) > e^{r^{\rho-\varepsilon}} \quad \text{pour des } r \text{ aussi grand que l'on veut.}$$

Le nombre des zéros d'une fonction entière s'étudie au moyen de la formule de Jensen. Si $f(0) \neq 0$, on a

$$(1)\quad \log|f(0)| + \sum_1^n \log \frac{r}{|a_j|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi, \quad |a_n| \leqq r < |a_{n+1}|.$$

Cette formule peut s'obtenir par le calcul des résidus (Voir Goursat, II, XIV, ou Valiron I, n°. 207). On peut aussi la déduire de la formule de Cauchy donnant le nombre des zéros d'une fonction holomorphe dans un contour. Si $n(x)$ est le nombre des

zéros de $f(z)$ dans le cercle $|z| \leqq x$, on obtient la formule (1) en intégrant de 0 à r la fonction $\frac{n(x)}{x}$, on a

$$\sum_1^n \log \frac{r}{|a_j|} = \int_0^r \frac{n(x)}{x}\, dx \qquad (f(0) \neq 0),$$

la formule de Jensen s'écrit donc assi

$$\log|f(0)| + \int_0^r \frac{n(x)}{x}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})|\, d\varphi, \tag{2}$$

De la formule de Jensen (1), on déduit l'inégalité de Jensen

$$\frac{|f(0)|r^n}{|a_1 a_2 \ldots a_n|} < M(r)$$

dans laquelle il n'est plus nécessaire de supposer r compris entre $|a_n|$ et $|a_{n+1}|$, elle a lieu quels que soient r et n. Cette inégalité, ou celle déduite de (2)

$$|f(0)|e^{\int_0^r \frac{n(x)dx}{x}} < M(r),$$

donne une borne de $\frac{1}{|a_n|}$ (ou de $n(x)$ dans la seconde inégalité). On en déduit que, si $f(z)$ est d'ordre fini ρ, la série

$$\sum_1^\infty \frac{1}{|a_n|^{\rho+\varepsilon}}$$

est convergente pourvu que $\varepsilon > 0$, si petit que soit ε. On peut prendre pour p_n un nombre fixe. Si ρ n'est pas entier, on peut prendre $p_n =$ partie entière de ρ, soit $p = E(\rho)$; si ρ est entier, on peut prendre $p_n = p = \rho$ ou $p_n = p = \rho - 1$ suivant que

$$\sum_1^\infty \frac{1}{|a_n|^\rho}$$

diverge ou converge. Alors

$$(3) \qquad f(z)=e^{g(z)}\prod\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\cdots+\frac{z^p}{pa_n^p}}.$$

En particulier, si $\rho<1$, on a

$$(4) \qquad f(z)=e^{g(z)}\prod_1^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right).$$

Hadamard a montré que $g(z)$ est un polynôme de degré au plus égal à l'ordre ρ. Sa méthode consistait à résoudre l'égalité (3) par rapport à $e^{g(z)}$ et à chercher le minimum de produit canonique du second membre de (3) sur certains cercles $|z|=\text{const.}$ Il en déduisait une borne du module de l'exponentiele $e^{g(z)}$, donc de la partie reélle de $g(z)$, puis de $|g(z)|$ (Voir Borel, Leçons sur les fonctions entières).

On peut, en utilisant un procédé de Landau (Math. Z, 1926), ne pas recourir au théorème sur le minimum du module. On s'appuyera uniquement sur le théorème sur la partie réelle d'une fonction holomorphe (Voir Valiron I, n°. 184).

Si $g(z)$ est holomorphe pour $|z|<R$, $g(0)=0$, et si la partie réelle de $g(z)$ est inférieure à A dans ce cercle, on a

$$(5) \qquad M(r)=\max|g(re^{i\varphi})|\leqq\frac{2Ar}{R-r}, \qquad r<R,$$

l'égalité n'ayant lieu que si $g(z)$ est de la forme

$$\frac{2Ahz}{R+hz}, \qquad |h|=1.$$

On le voit en faisant une transformation conforme du plan Z où l'on représente les valeurs de $g(z)$, tels que le demi-plan $\mathcal{R}\,Z<A$ soit représenté sur un cercle de rayon 1 centré à l'origine: on pose donc

$$G(z)=\frac{g(z)}{2A-g(z)}.$$

La fonction $G(z)$ est holomorphe pour $|z|<R$, $G(0)=0$, et son

module est au plus égal à 1. On applique à cette fonction le lemme de Schwarz, ce qui conduit au résultat indiqué.

La formule précise (5) est due à Carathéodory. Si l'on suppose maintenant que $A(r)$ désignant le maximum de la partie réelle d'une fonction entière $g(z)$ pour $|z|=r$, on ait

$$\lim_{r=\infty} \frac{A(r)}{r^k}=0, \qquad k \text{ positif fixe},$$

la formule (5) montre que $g(z)$ est un polynôme de degré inférieur à k (Valiron, I, n°. 184).

Revenons alors à la démonstration du théorème d'Hadamard. Supposons d'abord l'ordre ρ inférieur à 1. Résolvons la formule (4) par rapport à l'exponentielle et définissons l'entier m par la condition $|a_m| \leqq 2|z| < a_{m+1}$. On peut écrire

$$e^{g(z)} = \frac{f(z)}{\prod_1^m (1-\frac{z}{a_n})} \cdot \frac{1}{\prod_{m+1}^{\infty} (1-\frac{z}{a_n})}. \tag{6}$$

Dans le second facteur du second membre, on a $u=\left|\frac{z}{a_n}\right| < \frac{1}{2}$, et comme dans ces conditions

$$\frac{1}{1-u} < 1+2u < e^{2u},$$

le logaritme du module de ce facteur est au plus égal à

$$2\sum_{m+1}^{\infty} \left|\frac{z}{a_n}\right| = 2|z| \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} < \varepsilon|z|$$

pourvu que $|z|$, donc m soit assez grand, puisque le série $\sum \frac{1}{|a_n|}$ converge. Le premier terme du second membre de (6) est une fonction entière, le maximum de son module pour $|z|=r$ est inférieur au maximum de ce module pour $|z|=4r$, or pour $|z|=4r$, $\left|\frac{z}{a_n}\right|$ est supérieur ou égal à 2, le dénominateur est plus grand que 1 en module. Par suite

$$|e^{g(z)}| < e^{\varepsilon r} M(4r) < e^{\varepsilon r + r^\rho} < e^{\varepsilon' r^\rho}$$

puisque $\rho < 1$. Il en découle que $g(z)$ est une constante puisque

$$\lim_{r=\infty} \frac{\mathcal{R}g(z)}{r} = 0.$$

Le théorème d'Hadamard est ainsi démontré pour $\rho < 1$. Dans le cas général, on a la formule (3) avec $p \leqq \rho$ et

$$g(z) = d_0 + d_1 z + \ldots + d_s z^s + \ldots$$

il s'agit de montrer que $d_s = 0$ si $s > \rho$. On introduit la fonction

$$F(z^s) = f(z)\, f(z\omega) \ldots f(z\omega^{s-1}), \qquad \omega = e^{\frac{2i\pi}{s}}$$

$$= e^{s\, d_s z^s + \ldots} \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^s}{a_n{}^s}\right) . f(0)^s.$$

C'est une fonction entière de z^s et on voit que son ordre est au plus $\frac{\rho}{s} < 1$, donc $d_s = 0$. Le théorème d'Hadamard est démontré (Pour plus de détails, Voir Valiron I, n°. 210).

Toute fonction entière $f(z)$ d'ordre fini ρ ayant une infinité de zéros est de la forme

$$f(z) = C\, z^m e^{Q(z)} \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \ldots + \frac{z^p}{p\, a_n{}^p}},$$

avec $p \leqq \rho$; $Q(z)$ est un polynôme de degré ρ au plus.

L'ordre se détermine à partir du développement taylorien. Hadamard a donné une méthode qu'il a présentée sous forme géométrique (Bulletin de la Soc. Math., t. 24; voir aussi Borel, Leçons sur les séries à termes positifs). La traduction analytique d'une partie des résultats est souvent utile.

Posons $C_n = |c_n|$, $|z| = r$, la suite des nombres

$$C_0,\ C_1 r,\ \ldots,\ C_n r^n,\ \ldots$$

admet pour chaque r un ou plusieurs termes maxima. Si $\mu(r)$

est la valeur de ces termes, on a, d'après les inégalités de Cauchy,

$$\mu(r) < M(r) \leqslant \sum_0^\infty C_n r^n.$$

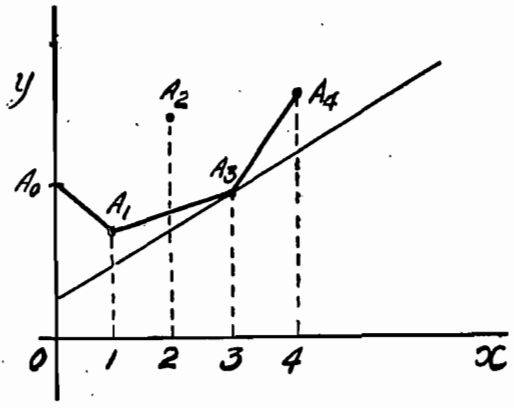
Posons

$$\log C_n = -g_n,$$

on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{g_n}{n} = +\infty$$

puisque $\sqrt[n]{C_n}$ tend vers zéro. Il s'ensuit que, si l'on marque les points A_n de coordonnées n, g_n, on peut, avec ces points, construire un polygone de Newton $\Pi(f)$ convexe vers le bas et laissant les



puints A_n au-dessus ou sur ses côtes, les sommets étant certains des points A_n. Si n est le rang du terme maximum correspondant à $\mu(r)$, on a, pour $m \neq n$,

$$g_m - m \log r \geqq g_n - n \log r,$$

ou

$$g_m \geqq g_n + (m-n) \log r.$$

La droite de pente $\log r$ passant par A_n laisse les autres points A_m au-dessus d'elle (ou sur elle), c'est une «tangente» à $\Pi(f)$.

Soit G_n le point d'abscisse m de $\Pi(f)$; on a $G_m \leqq g_m$, donc

$$W(r) = \sum_0^\infty e^{-G_n r^n}$$

majore $M(r)$; pour toutes les fonctions admettant le même polygone $\Pi(f)$ cette majorante est la même. On peut poser

$$R_n = e^{G_n - G_{n-1}}, \quad n = 0, 1, \ldots, \ (C_0 \neq 0)$$

$\log R_n$ est la pente du côté de $\Pi(f)$ entre les abscisses n et $n-1$, elle ne décroît pas lorsque n croît et tend vers l'infini avec n. Si $\nu(r)$ désigne le rang du terme maximum de plus haut rang correspondant à la valeur r, on a

$$\mu(r) = C_0 \frac{r^{\nu(r)}}{R_1 R_2 \ldots R_{\nu(r)}} \qquad (\text{si } C_0 \neq 0)$$

donc aussi

$$\log \mu(r) = \log C_0 + \int_0^r \frac{\nu(x)}{x} dx.$$

Du point de vue géométrique, $\log \mu(r)$ est l'ordonnée à l'origine changée de signe de la tangente à $\Pi(f)$ dont la pente est $\log r$. D'autre part, si $p > \nu(r)$, on peut écrire

$$W(r) = \sum_0^{p-1} e^{-G_n r^n} + \sum_p^{\infty} e^{-G_n r^n} < p\,\mu(r) + \mu(r) \sum_{q=p}^{\infty} \left(\frac{r}{R_p}\right)^{q-p+1}$$

à la condition que $R_p > r$. La somme de la série est $\frac{r}{R_p - r}$. On peut prendre

$$p = \nu\left(r + \frac{r}{\nu(r)}\right) + 1$$

donc

$$R_p \geqq r + \frac{r}{\nu(r)}$$

et l'on a finalement, les inégalités

$$\mu(r) \leqq M(r) < \mu(r)\left[2\nu\left(r + \frac{r}{\nu(r)}\right) + 1\right]$$

$$\log \mu(r) = \int_0^r \frac{\nu(x)}{x}\, dx.$$

Dans le cas de l'ordre fini ρ, l'inégalité $\mu(r) < M(r)$ analogue à l'inégalité de Jensen donne

$$\nu(x) < x^{\rho+\varepsilon}$$

si petit que soit ε, pourvu que x soit assez grand. On a dans ce cas

$$\mu(r) < M(r) < \mu(r)\, r^{\rho+\varepsilon}$$

et puisque $M(r)$ croît plus vite que toute puissance de r, on a a fortiori

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log M(r)}{\log \mu(r)} = 1.$$

Inversement, si $\nu(x) < x^{\rho+\varepsilon}$ si petit que soit le nombre positif ε, pourvu que x soit assez grand, on aura de suite

$$\log M(r) < k r^{\rho+\varepsilon}$$

k étant fini, l'ordre sera ρ au plus. Donc, pour que l'ordre soit ρ, il faut et il suffit que

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log \nu(r)}{\log r} = \rho.$$

ou, ce qui est la même chose

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log n}{\log R_n} = \rho.$$

En passant à $e^{G_n} = R_1 R_2 \ldots R_n$ (si $C_0 = 1$), on obtient

$$e^{G_n} > n^{\frac{n}{\rho+\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0,\ n > n_\varepsilon$$

et, il faut et il suffit que, si petit que soit $\varepsilon > 0$, on ait, à partir d'une valeur de n l'inégalité précédente, tandis que pour une pour une suite infinie de n,

$$e^{G_n} < n^{\frac{n}{\rho+\varepsilon}}.$$

finalement, pour que l'ordre soit ρ, el faut et il suffit que

$$|c_n| < \frac{1}{n^{\frac{n}{\rho}(1-\varepsilon)}} \quad \text{si } n > n_\varepsilon,$$

$$|c_n| > \frac{1}{n^{\frac{n}{\rho}(1+\varepsilon)}} \quad \text{pour une suite infinie de } n.$$

Autrement dit, il faut et il suffit que

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{-\log|c_n|}{n \log n} = \frac{1}{\rho}.$$

Pour préciser ces inégalités, on a cherché à faire une comparaison plus serrée entre $\log M(r)$ et les puissances de r. On a supposé d'abord que

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r)}{r^\rho (\log r)^{\rho_1} \ldots (\log_q r)^{\rho_1}}$$

est un nombre fini positif. Mais ceci ne peut pas permettre l'étude de toute fonction d'ordre fini. On peut introduire l'ordre précisé. C'est une fonction de r, continue, dérivable à gauche et à droite, et telle que

$$\lim_{r=\infty} \rho(r) = \rho, \qquad \lim_{r=\infty} \rho'(r)\, r \log r = 0.$$

A toute fonction d'ordre fini positif ρ correspond une fonction $\rho(r)$, jouissant de ces propriétés et telle que

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r)}{r^{\rho(r)}} = 1.$$

Pour en obtenir une, il suffit de considérer les nombres $r_1, r_2, \ldots, r_p, \ldots$ tels que, par exemple,

$$\log M(r_{p+1}) = \left(1+\frac{1}{p}\right)\log M(r_p)$$

qui sont indéfiniment croissants, d'associer à chaque r_p la fonction

$$y_p(r) = \frac{\log M(r_p)}{\log r_p} + \log_z r - \log_z r_p \qquad \text{pour } r_1 < r \leqq r_p$$

$$y_p(r) = \frac{\log M(r_p)}{\log r_p} + \log_z r_p - \log_z r \qquad \text{pour } r \geqq r_p$$

et de prendre pour chaque $r \geqq r_1$ le maximum des nombres $y_p(r)$ et d'une fonction constante par intervalles tendant vers ρ par valeurs moindres que ρ et convenablement choisie. On définit ainsi $\rho(r)$ pour $r \geqq r_1$, on la prend constante pour $r < r_1$, r_1 étant par exemple le nombre 25.

Grace à ses propriétés, la fontion $\rho(r)$ permet le calcul asymptotique d'intégrales de la forme

$$\int_{r_0}^{r} \frac{x^{\rho(x)}}{x}dx; \int_{r_0}^{r} \frac{x^{\rho(x)}}{x^{\alpha+1}}dx, \ (0<\alpha<\rho); \int_{r}^{\infty} \frac{x^{\rho(x)}}{x^{\beta}}dx, \ (\beta>\rho+1)$$

lorsque r croît indéfiniment. Une égalité asymptotique de la forme

$$\int_0^r \frac{\nu(x)}{x}dx \sim r^{\rho(r)} ,$$

où $\nu(x)$ est une fonction non-décroissante, se résout sous la forme

$$\nu(r) \sim \rho r^{\rho(r)}.$$

Il s'ensuit que, si

$$\log M(r) \sim r^{\rho(r)} \tag{7}$$

on a

$$n \sim \rho R_n^{\rho(R_n)}. \tag{8}$$

Si l'on désigne par $y = x^{\omega(x)}$ la fonction inverse de $x = y^{\rho(y)}$, on a

$$\lim_{x=\infty} \omega(x) = \frac{1}{\rho}, \quad \lim_{x=\infty} \omega'(x)\, x \log x = 0;$$

et l'égalité (8) s'écrit

$$R_n \sim \frac{n^{\omega(n)}}{\rho^{\frac{1}{\rho}}}.$$

On passe de R_n à e^{G_n}. Pour que (7) ait lieu, il faut et il suffiit que

$$e^{G_n} \sim \left(\frac{n}{\rho e}\right)^{\omega(n)}$$

Le polygone $\Pi(f)$ sera compris entre deux courbes convexes. On en déduit finalement que pour que (7) ait lieu, il faut et il suffit que

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \left\{ \sqrt[n]{|c_n|} \left(\frac{n}{\rho e}\right)^{\omega(n)} \right\} = 1.$$

et que, pour une suite de valeurs n_p telles que $\frac{n_{p+1}}{n_p}$ tende vers 1, on ait

$$\lim_{p=\infty} \left\{ \sqrt[n_p]{|c_{n_p}|} \left(\frac{n_p}{\rho e}\right)^{\omega(n_p)} \right\} = 1.$$

Si l'on suppose seulement que, $\rho(r)$ étant un ordre précisé, on a

$$\log M(r) > k\, r^{\rho(r)}, \qquad k < 1, \quad r > r_0,$$

on trouve une condition nécessaire et suffisante qui se traduit par le fait que le polygône $\Pi(f)$ est compris entre deux courbes convexes, mais cette condition ne se traduit pas facilement sous forme analytique.

EN TORNO DEL FOTON EN UN MEDIO MATERIAL

por J. WÜRSCHMIDT
Instituto de Física, Universidad de Tucumán

SUMMARY: It is confirmed that one has to atribute to a photon in a material medium the energy $h\nu$ and the momentum $h\nu/v$, where v denotes the velocity of light in the medium. — It is not indispensable to atribute to the photon a velocity larger than the velocity of light, nor an imaginary mass, if we distinguish between the total energy $h\nu$, the "cinetic" energy $E = h\nu\ n^2$ and the potential energy $h\nu\ (1 - n^2)$. The apparent mass of the photon becomes than n^2 larger than it is in vacuum, its velocity being the same as the one of wave propagation in the medium.

I. *Reflexión de un corpúsculo y de un fotón en un espejo móvil.*

Investigando la reflexión de una masa m, de gran velocidad v, en un espejo que se mueve con la velocidad u (ángulo entre u y la normal de incidencia en el lado del corpúsculo incidente: χ), se encontró la siguiente ley de reflexión (1):

$$(1,1) \qquad (v_1)_x = v_1 \cos\varphi_1 = \frac{v_x + 2u_x + \beta_x^2\, v_x}{1 + \frac{2\,u_x\,v_x}{c^2} + \beta_x^2}$$

$$(v_1)_y = v_1 \operatorname{sen}\varphi_1 = \frac{v_y(1-\beta_x^2)}{1 + \frac{2\,u_x\,v_x}{c^2} + \beta_x^2}$$

significando φ el ángulo de incidencia, φ_1 el ángulo de reflexión y v_1 la velocidad después de la reflexión.

Despreciando los términos con c^2 en el denominador y $\beta_x^2 = \frac{u_x^2}{c^2}$, tenemos la *ley balística* de reflexión, mientras que para $v \to c$ resulta la ley de reflexión de la luz en el vacío que se puede escribir en la forma de *Titow*:

$$(1,2) \qquad \frac{1+\beta_x \cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{1-\beta_x \cos\varphi_1}{\operatorname{sen}\varphi_1}$$

o también en la forma de *Laue*:

$$(1,3) \qquad \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} = \frac{1-\beta_x}{1+\beta_x}.$$

Con respecto a la luz que se propaga en un medio material con una velocidad $v = \frac{c}{n}$ siendo n el índice de refracción del mismo, encontré en un trabajo del año 1945 (2) en el cual se estudiaba el efecto *Doppler* en su relación con la aberración de la luz. y la presión de la radiación, que la velocidad v_2 de la luz reflejada y el ángulo de reflexión φ_2 se determinan por:

$$(1,4) \qquad \frac{(v_2)_x}{{v_2}^2} = \frac{1}{v_2} \cos\varphi_2 = \frac{\frac{v_x}{v^2} + \frac{2u_x}{c^2} + {\beta_x}^2 \frac{v_x}{v^2}}{1 + \frac{2u_x v_x}{v^2} + {\beta_x}^2}$$

$$\frac{(v_2)_y}{{v_2}^2} = \frac{1}{v_2} \operatorname{sen}\varphi_2 = \frac{\frac{v_y}{v^2}(1-{\beta_x}^2)}{1 + \frac{2u_x v_x}{v^2} + {\beta_x}^2}.$$

La comparación de los dos casos, de una radiación *corpuscular* y de una *fotónica*, ambas de la misma velocidad v, las cuales, antes de ser reflejadas, llenan un cilindro de la sección S y de la altura l, dió las expresiones análogas para la energía reflejada, la densidad de energía y la presión de radiación; mencionaré sólo las para la energía reflejada:

$$(1,5) \qquad W_1 = W \frac{1 + \frac{2u_x v_x}{c^2} + {\beta_x}^2}{1-{\beta_x}^2} \quad \text{(Corp.)}$$

$$W_2 = W \frac{1 + \frac{2u_x v_x}{v^2} + {\beta_x}^2}{1-{\beta_x}^2} \quad \text{(Fot.)}$$

Se demostró en el trabajo citado (y más detalladamente en una publicación en prensa) (3) que el concepto fotónico es aplicable también para la luz que se propaga en un medio material. En el caso de la luz en el *vacío* se halla la ley de reflexión, aplicando sencillamente los teoremas de la conservación de la energía y del impulso, escribiéndose:

$$h\nu_2 - h\nu = F\,\Delta s \cos\chi$$

$$\frac{h\nu_2}{c}\cos\varphi_2 + \frac{h\nu}{c}\cos\varphi = F\,\Delta t$$

$$\frac{h\nu_2}{c}\operatorname{sen}\varphi_2 - \frac{h\nu}{c}\operatorname{sen}\varphi = 0.$$

Con $\frac{\Delta s}{\Delta t}\cos\chi = u_x$, se elimina F y φ_2, y se encuentra inmediatamente la frecuencia de la luz reflejada:

$$\nu_2 = \nu\,\frac{1+2\beta_x\cos\varphi+\beta_x^2}{1-\beta_x^2} \tag{1,6}$$

y calculando φ_2, se halla la ley de la relatividad restringida (1, 2) o (1, 3).

En el caso del *corpúsculo*:

$$E = mc^2$$

$$p = mv$$

las ecuaciones correspondientes no son suficientes para calcular m_1, v_1 y φ_1, sino se necesita además la conocida invariante de la transformación de *Lorentz*:

$$m\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = m_1\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}} = m_0, \tag{1,7}$$

para encontrar la masa reflejada m_1 y la ley de reflexión (1, 1).

Finalmente, en el caso del *fotón en el medio material*, era de suponer que la energía del mismo fuera, como en el vacío, $h\nu$

mientras que su impulso fuera expresado por $\frac{h\nu}{v}$, de acuerdo con la longitud de onda más corta en el medio material; con:

$$E = h\nu$$

$$p = \frac{h\nu}{v}$$

se llegará, aplicando los teoremas de conservación, a la ley de reflexión (1, 4), agregando como cuarta ecuación:

$$\frac{h\nu}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{h\nu_2}{v_2}\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c_2}}; \tag{1,8}$$

pudiera llamarse esta magnitud «impulso de reposo», si esta expresión no implicaría una contradicción.

II. *El fotón con una masa de reposo imaginaria y una velocidad mayor que la luz.*

Relacionando el concepto fotónico y las fórmulas obtenidas con las expresiones correspondientes de la teoría electromagnética de la luz, *A. Battig* (4) ha publicado este año un estudio sobre «el movimiento de fotones en un medio material», llegando a la última consecuencia del hecho de que el fotón en el medio material tiene la energía $h\nu$ y el impulso $h\nu/v$, es decir la de atribuir al mismo la *masa imaginaria de reposo*:

$$m_0 = i\frac{h\nu}{c^2}\sqrt{n^2-1}. \tag{2,1}$$

En efecto, usando la conocida ecuación de la mecánica relativista:

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2\, c^2, \tag{2,2}$$

tendríamos que distinguir los tres casos posibles:

1. Corpúsculo: Masa de reposo >0
2. Fotón en el vacío: Masa de reposo $=0$
3. Fotón en el medio material: Masa de reposo imaginaria.

En consecuencia, *Battig* se siente obligado a atribuir a este fotón una velocidad mayor que la de la luz, igual a nc. El autor de la presente comunicación ya en 1938 ha demostrado (5) que el efecto *Doppler*, observado en luz que se propaga en un medio material, se explica perfectamente bajo el punto de vista quántico, si se admite tal velocidad grande para los fotones, sin llegar a la conclusión de la masa de reposo imaginaria.

Otro resultado interesante de *Battig* es el siguiente, que reproduciremos en forma simplificada. Suponiendo que v sea la velocidad de la onda luminosa y que forme el ángulo ϑ con el eje (x), tenemos:

$$E = h\nu$$

$$p_x = \frac{h\nu}{v}\cos\vartheta$$

$$p_y = \frac{h\nu}{v}\operatorname{sen}\vartheta,$$

y en un sistema $S'(x', y')$ que se mueve con la velocidad u en la dirección de (x):

$$E' = \frac{E - up_x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$p'_x = \frac{p_x - \frac{u}{c^2}E}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$p'_y = p_y$$

es decir:

$$(2,3) \qquad E' = h\nu'' = h\nu\,\frac{1-\frac{u}{v}\cos\vartheta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$p'_x = \frac{h\nu''}{v''} \cos \vartheta'' = \frac{h\nu}{v} \frac{\cos \vartheta - \frac{uv}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$p'_y = \frac{h\nu''}{v''} \operatorname{sen} \vartheta'' = \frac{h\nu}{v} \operatorname{sen} \vartheta.$$

La primera de las ecuaciones (2, 3) representa el efecto *Doppler*; la magnitud v'' de la segunda y tercera ecuación es la velocidad de la onda en el sistema S', mientras que la velocidad del fotón en el mismo será $\frac{c^2}{v''}$. *Battig* considera ahora el caso especial de que la velocidad u del sistema S' sea igual a $\frac{v}{\cos \vartheta}$. Se obtiene no sólo para la velocidad v'', sino también para la energía E' el valor cero; además resulta:

(2, 4) $$p' = \frac{h\nu}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

es decir, igual a la invariante (1, 8); así la expresión «impulso de reposo» parece en cierto sentido justificada. El cono: $\cos \vartheta = \frac{v}{u}$ sobre el cual se anula la velocidad v'' determina la dirección de la radiación de *Cherenkow* emitida por un electrón en reposo en este sistema.

III. *Una nueva interpretación del fotón en el medio material.*

Punto de partida para una nueva interpretación del fotón en el medio material del índice de refracción $n = \frac{c}{v}$, que evita la masa de reposo imaginaria y la velocidad mayor que la de la luz — que en el caso investigado por *Battig* se haría infinita —, es «la analogía entre las ecuaciones fundamentales de la Mecánica para un punto material que se mueve en un campo, y las ecuaciones fundamentales de la Optica Geométrica de un cuerpo isótropo dispersante para un rayo casi simplemente periódico» que

en su última consecuencia ha conducido a la ya clásica ecuación de *Schroedinger* y sus distintas expresiones (relativista, dependiente del tiempo, etc.).

Escribimos una onda monocromática plana en el medio material del índice de refracción $n = \frac{c}{v}$:

$$\Phi = a \,.\, \exp.\, 2\pi\, i\, \nu \left[t - n \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c} \right]$$

y tenemos para la fase:

$$\vartheta = 2\pi\nu \left[t - n \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c} \right]$$

las dos ecuaciones:

(3, 1)
$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 2\pi\nu$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial s} = -2\pi \frac{n}{c} \nu.$$

Por otra parte, considerando un punto material de la masa m y de la velocidad V que se mueve en un campo y cuya energía *total* W es igual a la suma de su energía *cinética* (más energía de reposo) E y de su *energía potencial* U, tenemos, siendo S la función de acción de *Hamilton*:

(3, 2)
$$\frac{\partial S}{\partial t} = -W$$

$$\frac{\partial S}{\partial s} = mV,$$

siendo $p = mV$ el impulso del punto material. Teniendo S la dimensión de una acción, mientras que ϑ no tiene dimensión, podemos poner:

$$S = -\frac{h}{2\pi} \vartheta$$

y ganamos así las dos ecuaciones siguientes:

$$W = h\nu \tag{3,3}$$

$$p = \frac{h\nu}{v} \tag{3,4}$$

Por otra parte tenemos:

$$W = E + U \tag{3,5}$$

$$E = mc^2 \tag{3,6}$$

$$p = mV. \tag{3,7}$$

Se deducen de estas ecuaciones también las siguientes:

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{(W-U)^2 - m_0{}^2 c^4} \tag{3,8}$$

$$v = c\,\frac{W}{\sqrt{(W-U)^2 - m_0{}^2 c^4}} \tag{3,9}$$

$$V = c\,\frac{\sqrt{(W-U)^2 - m_0{}^2 c^4}}{W-U} \tag{3,10}$$

y por lo tanto también:

$$Vv = c^2\,\frac{W}{W-U}. \tag{3,11}$$

Siendo $v = \frac{\nu}{N}$ (N = número de ondas $= \frac{1}{\lambda}$) la velocidad de fase de la onda asociada a la masa m con la velocidad (mecánica) V, se demuestra fácilmente que su velocidad de grupo $v_g = \frac{d\nu}{dN}$ es igual a V. Especial interés merece (3,11); para $U = 0$, obtenemos la conocida relación de las ondas de materia; la ecuación enseña además que con elección conveniente de U se puede con-

seguir distintos valores de la velocidad v de la onda asociada.

Viceversa, suponiendo dada una onda electromagnética de determinada frecuencia ν y velocidad v, le podemos asociar una partícula de cualquier velocidad V; eligiendo convenientemente el valor de U. Expresando ahora la masa de reposo en función de ν, v y V, encontraremos:

$$(3,12) \qquad m_0 = \frac{h\nu}{vV}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

y se ve que con la suposición $V=\frac{c^2}{v}$ resulta la masa de reposo imaginaria de *Battig*; además: $U=0$. Suponiendo por otra parte que la velocidad de las partículas sea igual a la velocidad de la onda: $V=v$, se obtiene:

$$(3,13) \qquad m_0 = \frac{h\nu}{v^2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

es decir, la masa del fotón en el medio material es:

$$(3,14) \qquad m = \frac{h\nu}{v^2};$$

además sigue:

$$(3,15) \qquad E = h\nu\frac{c^2}{v^2}$$

$$(3,16) \qquad U = h\nu\left(1-\frac{c^2}{v^2}\right).$$

Al entrar un fotón del vacío en un medio material, la suma de su «energía cinética» $E=h\nu\frac{c^2}{v^2}$ y de su «energía potencial» $U=h\nu\left(1-\frac{c^2}{v^2}\right)$ queda igual a su «energía total» $W=h\nu$, en el vacío; sin poder explicar el significado de U, interpretamos así: el fotón, de la energía $h\nu$, absorbe del medio la energía

$G = -U$, y adquiere así el valor $E = W + G$. En este proceso la velocidad del fotón se reduce a la n-ava parte de c o al valor v, la masa aparente será n^2 veces mayor, el impulso n veces. Tenemos así:

(3, 17)
$$E = mc^2$$
$$p_x = mv \cos \vartheta$$
$$p_y = mv \cos \vartheta.$$

En el sistema S' que se mueve con la velocidad u en la dirección de (x) tendremos con la transformación de *Lorentz*:

$$E' = \frac{E - up_x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$p'_x = \frac{p_x - \frac{u}{c^2}E}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$p'_y = p_y,$$

llamando el impulso nuevo e', en vez de p':

(3, 18)
$$E' = m' c^2 = m c^2 \frac{1 - \frac{uv}{c^2} \cos \vartheta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$e'_x = m' v' \cos \vartheta' = m \frac{v \cos \vartheta - u}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$e'_y = m' v' \operatorname{sen} \vartheta' = mv \operatorname{sen} \vartheta.$$

La velocidad del fotón en el sistema S' es igual a v'; al impulso e' llamaremos: *impulso cinético*.

La energía $G = h\nu \left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)$, energía del medio que en el sistema S se halla en reposo, en el sistema S' posee un impulso que llamaremos g', pues posee la velocidad $-u$. Tendremos por lo tanto en S':

(3, 19)
$$G' = \frac{G}{\sqrt{1-\beta^2}} = h\nu \frac{\frac{c^2}{v^2} - 1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$g'_x = \frac{-\frac{u}{c^2}G}{\sqrt{1-\beta^2}} = h\nu \frac{-\frac{u}{v^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$g'_y = 0.$$

Formando ahora:

$$W' = E' - G'$$

$$p'_x = e'_x - g'_x$$

$$p'_y = e'_y - g'_y$$

ganamos las relaciones:

$$(3,20) \qquad W' = h\nu \frac{1-\frac{u}{v}\cos\vartheta}{\sqrt{1-\beta^2}} = h\nu''$$

$$p'_x = \frac{h\nu}{v} \frac{\cos\vartheta - \frac{uv}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{h\nu''}{v''}\cos\vartheta''$$

$$p'_y = \frac{h\nu}{v}\operatorname{sen}\vartheta = \frac{h\nu''}{v''}\operatorname{sen}\vartheta'',$$

es decir, los valores de la energía total y del impuso total que hemos admiitido en un principio y que corresponderían a una velocidad mayor que la de la luz.

Consideraciones análogas pueden hacerse para el caso de la reflexión de la luz en el espejo móvil, poniendo en cuenta el impulso que recibe la energía absorbida del medio por parte del espejo.

BIBLIOGRAFIA

1) J. Würschmidt: Rev. Mat. y Fís. Teór., Un. Nac. de Tucumán, *6*. 79, 1942.
2) J. Würschmidt: Rev. de la Un. Mat. Arg., *11*, 47, 1945.
3) J. Würschmidt: Rev. Mat. y Fís. Teór., Un. Nac. de Tucumán, en prensa.
4) A. Battig: Rev. de la Un. Mat. Arg., *11*, 126, 1946.
5) J. Würschmidt: Publ. Dep. de Fís. Nº 13, Un. Nac. de Tucumán, 1938.

SOBRE EL AXIOMA DE LAS SUCESIONES NO CONVERGENTES EN ALGUNOS ESPACIOS TOPOLOGICOS LINEALES (*)

por LEOPOLDO NACHBIN

Résumé. Parmi les axiomes les plus importants de la théorie des espaces topologiques, où la notion fondamentale est celle de limite d'une suite dénombrable, on trouve l'axiome suivant: si une suite de points ne converge pas vers un point, elle contient une certaine sous-suite dont aucune sous-suite ultérieure ne converge vers ce point. En considérant l'ensemble des notions de limite, qu'on peut introduire dans un même espace abstrait, comme un système partiellement ordonné à la façon usuelle, on trouve que cet axiome est complètement multiplicatif; et, toutefois, qu'il n'est pas additif. En employant un théorème démontré dans un autre article [Référence (5)], donnant une condition nécessaire et suffisante pour que cet axiome soit satisfait par la topologie union d'une suite dénombrable de topologies normées dans un même espace linéaire [Théorèmes 1 et 2], on trouve une condition nécéssaire et suffisante (Théorème 3] et des conditions suffisantes [Théorèmes 4 et 5] pour que cet axiome soit satisfait dans une certaine catégorie d'espaces topologiques linéaires dont les points sont des suites de nombres [Cette catégorie comprend l'espaçe des fonctions holomorphes sur un cercle fermé donné; l'espace des fonctions entières de type exponentiel plus petit qu'une valeur positive donnée; l'espace des fonctions entières d'ordre plus petit qu'une valeur positive donnée]. On considère aussi l'espace des fonctions holomorphes sur un ensemble fermé donné [Théorème 6].

1. *Introducción.* Consideremos un espacio lineal E sobre el cuerpo de los números (reales o complejos) (1). Por una *norma* en E entenderemos una función $\phi(x)$ unívoca, definida en E, con valores en el intervalo cerrado $0 - +\infty$ (2), tal que:

(*) Trabajo recibido por la Unión Matemática Argentina el día 22 de Julio de 1946.

(1) Sobre los axiomas de un tal espacio, ver S. BANACH, *Théorie des operations linéaires*, p. 26, Warszawa, 1932.

(2) Usualmente (BANACH, loc. cit. p. 53) se consideran *normas propias*, es decir, normas que tomen solamente valores no vegativos finitos. Esta restricción es superflua para nuestro objeto.

1. $\phi(\vartheta)=0, \quad \phi(x)>0$ si $x \neq \vartheta$,

2. $\phi(x_1+x_2) \leqq \phi(x_1)+\phi(x_2)$,

3. $\phi(ax)=|a|\,\phi(x)$ si $a \neq 0, \quad x \neq \vartheta$,

donde x_1, x_2, x son puntos de E, ϑ es un origen de E y a es un número. Toda norma $\phi(x)$ en E induce una topología límite T en E (es decir, una noción de «una sucesión de puntos de E tiende según T hacia un punto de E») definida del modo usual: siendo $x_m \in E$ $(m=0,1,2,\ldots)$, $x \in E$, entonces $x_m \to x$ según T si y solamente si $\phi(x_m - x) \to 0$ cuando $m \to \infty$. Una tal topología límite se dice *normable*. Una sucesión $\{x_m\}$, $m=0,1,2,\ldots$ de puntos de E se dice limitada según la topología normable T, definida por la norma $\phi(x)$, cuando y solamente cuando la sucesión numérica $\{\phi(x_m)\}$ sea limitada (3).

Consideremos tres topologías normables T, T', T'' en el mismo espacio lineal E, definidas respectivamente por las normas $\phi(x), \phi'(x), \phi''(x)$. Diremos entonces que una topología T *contiene* al par ordenado de topologías T', T'', y escribiremos:

$$T > [T', T''] \tag{1}$$

siempre que estas topologías satisfagan la condición siguiente: toda sucesión de puntos del espacio E que es limitada según T' y que converja hacia el origen ϑ según T'' es necesariamente convergente hacia el origen según T. Si definimos $\varphi(\varepsilon)$ como el extremo superior, finito o no, de $\phi(x)$ para todo $x \in E$ tal que $\phi'(x) \leqq 1$, $\phi''(x) \leqq \varepsilon$, donde $0 < \varepsilon < +\infty$, se verifica inmediatamente que la condición (1) es equivalente a la $\varphi(\varepsilon) \to 0$ para $\varepsilon \to 0$.

Entre los axiomas más importantes que debe satisfacer una topología T en E, normable o no, está el siguiente, llamado «axioma de las sucesiones no convergentes» (4):

---

(3) Un número finito de términos de esta sucesión puede ser igual a $+\infty$ Como se sabe, la noción de sucesión limitada solamente depende de la topología normable y no propiamente de la norma que induce esta topología; es decir, dos normas inducen la misma topología siempre que ellas definan una misma noción de sucesión limitada.

(4) Ver C. Kuratowski, *Topologie I*, p. 77, Warszawa, 1933.

Si una sucesión $[x_m]$, $m=0,1,2,\ldots$ *de puntos de* E *no converge hacia un punto* $x \in E$ *según* T, *entonces existe una cierta subsucesión de ella, tal que toda subsucesión ulterior de la misma tampoco converge hacia* x *según* T.

Toda topología límite normable en E, como toda topología límite matrizable en E, obviamente satisfacen a este axioma.

Consideremos una sucesión T_n $(n=0,1,2,\ldots)$ de topologías normables en E, y también una *topología límite unión*:

$$T=U_0^{\vee} T_n$$

la cual es definida del siguiente modo: siendo $x_m \in E$ $(m=0, 1,2,\ldots)$, $x \in E$, diremos que $x_m \to x$ según T cuando y solamente cuando exista por lo menos un entero $n \geqq 0$ tal que $x_m \to x$ según T_n.

Esta topología límite unión T no es necesariamente normable, ni tampoco satisface necesariamente al axioma de las sucesiones no-convergentes. Este último aspecto de la cuestión da lugar a los dos teoremas siguientes (5):

Teorema 1. *Para que una topología límite unión* T *satisfaga al axioma de las sucesiones no convergentes es necesario y suficiente que a cada entero* $n \geqq 0$ *sea posible asociar un entero* $N=N(n) \geqq 0$ *tal que sea*

$$T_N > [T_r, T_s]$$

para $r=0,1,2,\ldots,n$ *y* $s=0,1,2,\ldots,n,\ldots$

Teorema 2. *Si* $T_n \subset T_{n+1}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ (6), *para que una topología límite unión* T *satisfaga al axioma de las sucesiones no convergentes es necesario y suficiente que a cada entero* $n \geqq 0$ *sea posible asociar un entero* $N=N(n)>n$ *tal que sea*

(5) Para una demostración ver el artículo del autor: *On the union of a sequence of normed topologies, Summa Brasiliensis Mathematicae*, vol. 1, 1946.

(6) Esta notación indica que la primera topología es subtopología de la segunda, es decir, que a toda sucesión de puntos convergente según la primera hacia un punto, es necesariamente convergente hacia el mismo punto con la segunda topología.

$$T_N > [T_n, T_s]$$

para $s = N+1, N+2, \ldots$

Una condición suficiente es que sea

$$T_N > [T_r, T_s]$$

cualesquiera que sean los enteros no negativos N, r, s *tales que* $r < N < s$ (7).

En este artículo deseamos aplicar estos teoremas sobre espacios topológicos lineales a una cierta categoría de espacios topológicos lineales de sucesiones (§ 2), —que comprende como casos particulares el espacio de las funciones holomorfas sobre un círculo cerrado, el espacio de las funciones enteras de tipo exponencial menor que un cierto valor positivo fijado, y el espacio de las funciones enteras de orden menor que un cierto valor positivo dado—, así como al espacio de las funciones holomorfas sobre un conjunto cerrado dado (§ 4).

2. *Una categoría de espacios topológicos lineales de sucesiones* (8). Designemos con E un espacio euclidiano (real o complejo) de una infinidad numerable de dimensiones, es decir, un espacio cuyos puntos sean sucesiones numerables de números. Los puntos de este espacio se indicarán con una notación del tipo $[x_m]_m$ o simplemente $[x_m]$ si no hay lugar a confusión, o con la misma letra x que se usa para sus coordenadas. Consideremos E como un espacio lineal del modo usual, donde se define

$$x + y = [x_m + y_m], \qquad ax = [ax_m],$$

siendo a un número y $x = [x_m]$, $y = [y_m]$ puntos de E.

---

(7) Esta condición suficiente, aunque no necesaria, es "casi necesaria" en el sentido siguiente: para que una topología unión de una sucesión monótona satisfaga a dicho axioma es necesario y suficiente que de la sucesión dada se pueda extraer una subsucesión, necesariamente monótona, que satisfaga esta condición.

(8) Un estudio más detallado de esta categoría de espacios, así como de otras categorías análogas y de las transformaciones lineales de una infinidad de variables en estos espacios, se encontrarán en un trabajo del autor que va a ser publicado en otra Revista.

Definiremos también un producto entre los puntos de E por:

$$xy = [x_m\, y_m]$$

y un cociente por

$$\frac{x}{y} = \left\{\frac{x_m}{y_m}\right\},$$

siempre que todas las coordenadas de y fueran distintas de cero.

Consideremos también la norma siguiente (9)

$$\|x\| = \sup_{m \geq 0} |x_m|$$

que posee obviamente las propiedades: $\|xy\| \leqq \|x\| \,.\, \|y\|$, excepto cuando uno de los dos puntos tenga norma nula y el otro norma infinita. De esta manera, E es por tanto el anillo normado que se obtiene como el producto directo numerable de la recta euclidiana por sí misma, concebida como un anillo normado de la manera usual.

Evidentemente para todo punto a de E cuyas coordenadas sean todas diferentes de cero, la función $\|ax\|$ de $x \in E$ goza de las propiedades de una norma. Indicaremos con [a] el subconjunto de E constituído por todos los puntos $x \in E$ tales que $\|ax\| < +\infty$. Entonces [a] es un subespacio lineal de E (es decir, [a] es cerrado con relación a la suma de puntos y a la multiplicación de un número por un punto) y $\|ax\|$ es una norma propia sobre [a].

Sea

$$A = [a_m{}^n] \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots)$$

una matriz infinita cuyos elementos sean números reales positivos. Pongamos

$$a_n = [a_m{}^n]_m \in E, \qquad [A] = U_0{}^{\infty}\, [a_n],$$

(9) Con este símbolo indicamos el extremo superior, finito o no, de un conjunto numérico o de una sucesión numérica; si el conjunto consta de dos números u, v usaremos entonces sup (u, v); análogamente para el extremo inferior.

donde U indica la unión de los conjuntos $[a_n]$; es decir [A] es el conjunto de todos los puntos $x \in E$ tales que $\|a_n x\| < +\infty$ por lo menos para un entero $n \geqq 0$.

[A] es un subespacio lineal de E si y solamente si a todo par de enteros $p, q \geqq 0$ es posible asociar un entero $N = N(p, q) \geqq 0$ tal que

$$\left\| \frac{a_N}{a_p} \right\| < +\infty, \quad \left\| \frac{a_N}{a_q} \right\| < +\infty. \tag{2}$$

En efecto, [A] es siempre cerrado en relación a la multiplicación de un número por un punto. Supongamos satisfecha la relación expresada por las (2); si $x, y \in [A]$, es decir, si existen dos enteros $p, q \geqq 0$ tales que

$$\|a_p x\| < +\infty, \qquad \|a_q y\| < +\infty,$$

determinando el entero $N \geqq 0$ de acuerdo con (2), tendremos

$$\|a_N (x+y)\| \leqq \|a_p x\| \cdot \left\| \frac{a_N}{a_p} \right\| + \|a_q x\| \cdot \left\| \frac{a_N}{a_q} \right\| < +\infty,$$

y por lo tanto $x+y \in [A]$ y por consiguiente [A] es lineal. Recíprocamente, si [A] es lineal, dados dos enteros $p, q \geqq 0$, como

$$\left\| a_p \frac{1}{a_p} \right\| = \left\| a_q \frac{1}{a_q} \right\| = 1 < +\infty,$$

donde 1 es el punto unitario de E, esto es, el punto cuyas coordenadas son todas iguales a la unidad, resulta que los puntos $1/a_p$, $1/a_q$ pertenecen a [A]; luego la suma de los mismos también pertenece a [A], o sea existe un entero $N \geqq 0$ tal que

$$\left\| a_N \left(\frac{1}{a_p} + \frac{1}{a_q} \right) \right\| < +\infty,$$

relación que equivale a la (2). En particular, la condición (2) es satisfecha toda vez que sea

$$\left\| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\| < +\infty \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

o, más particularmente, toda vez que

$$a_m{}^n \geqq a_m{}^{n+1} \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

puesto que entonces basta tomar $N = \sup(p, q)$. Supondremos siempre que A satisface a las condiciones necesarias y suficientes para que [A] sea un subespacio lineal de E.

Cada $\|a_n x\|$ es una norma (no necesariamente propia) en [A] y por tanto induce una topología normable T_n en [A]. Consideremos la topología límite unión:

$$T = U_0{}^{\infty} T_n$$

en [A]. La cuestión que vamos ahora a examinar puede ser enunciada en los términos siguientes: dada la matriz infinita A que determina un subespacio lineal [A] y sobre éste una topología límite T, ¿cuál es la condición necesaria y suficiente a que debe satisfacer A para que T satisfaga al axioma de las sucesiones no convergentes?

Con este objetivo, consideremos tres enteros no negativos N, r s y definamos

$$\varphi_{Nrs}(\varepsilon) = \sup_{(x)} \|a_N x\|$$

para todo $x \in [A]$ tal que

$$\|a_r x\| \leqq 1, \quad \|a_s x\| \leqq \varepsilon, \tag{5}$$

donde $0 \leq \varepsilon < +\infty$. Vamos en primer lugar a probar que

$$\varphi_{Nrs}(\varepsilon) = \sup_{m \geq 0} \left\{ \text{inf.} \left(\frac{a_m{}^N}{a_m{}^r}, \quad \frac{\varepsilon a_m{}^N}{a_m{}^s} \right) \right\}. \tag{6}$$

En efecto, si $x = [x_m]_m \in E$ satisface (5), será

$$|x_m| \leqq \frac{1}{a_m{}^r}, \quad \frac{\varepsilon}{a_m{}^s} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

donde

$$|a_m{}^N x_m| \leqq \text{inf.} \left(\frac{a_m{}^N}{a_m{}^r}, \quad \frac{\varepsilon a_m{}^N}{a_m{}^s}\right) \quad (m=0,1,2,\ldots)$$

y tomando el extremo superior con relación a $m \geqq 0$ y después con relación a x, que satisface (5), constatamos que (6) es verdadera con el signo $\leqq$. Por otro lado, considerando el punto

$$x^* = [x_m^*], \text{ donde } x_m^* = \text{inf.} \left(\frac{1}{a_m{}^r}, \quad \frac{\varepsilon}{a_m{}^s}\right) \quad (m=0,1,2,\ldots)$$

se ve que $\|a_r x^*\| \leqq 1$, $\|a_s x^*\| \leqq \varepsilon$ y por consiguiente $x^* \epsilon [A]$, y $\|a_N x^*\|$ es igual al segundo miembro de (6), de donde se sigue que (6) es verdadera con el signo $\geqq$. Por tanto (6) está probada.

Para poder aplicar el Teorema 1, tenemos interés en verificar cuándo es que la condición

$$T_N > [T_r, T_s], \text{ o sea, } \varphi_{Nrs}(\varepsilon) \longrightarrow 0 \text{ para } \varepsilon \longrightarrow 0$$

es satisfecha. Teniendo en cuenta la fórmula (6) es natural introducir las consideraciones que siguen.

Consideremos dos sucesiones $[\alpha_m]$, $[\beta_m]$ de números positivos y definamos

$$\varphi(\varepsilon) = \sup_{m \geq 0} \left\{ \text{inf} \left(\alpha_m, \frac{\varepsilon}{\beta_m} \right) \right\},$$

donde $0 < \varepsilon < +\infty$. Diremos entonces que la primera sucesión es *subinfinitésima* con relación a la segunda si, o bien es imposible extraer de la segunda sucesión otra sucesión que sea convergente hacia cero, o bien, en caso contrario, cualquiera que sea la sucesión creciente $[m_k]$ de enteros no negativos tal que $\beta_{m_k} \longrightarrow 0$ cuando $k \longrightarrow \infty$, necesariamente sea $\alpha_{m_k} \longrightarrow 0$ cuando $k \longrightarrow \infty$. Observemos que, si $\alpha_m \longrightarrow 0$ cuando $k \longrightarrow \infty$, entonces $[\alpha_m]$ es subinfinitésima con relación a cualquier otra sucesión $[\beta_m]$. Utilizando esta noción, vamos a demostrar el lema siguiente:

Lema 1. *Para que* $\varphi(\varepsilon) \longrightarrow 0$ *cuando* $\varepsilon \longrightarrow \infty$ *es necesario y suficiente que* $[\alpha_m]$ *sea subinfinitésima con relación a* $[\beta_m]$. *Una*

condición suficiente es que $\{\alpha_m\}$ *sea una sucesión infinitésima.*

En efecto, supongamos que $\varphi(\varepsilon) \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$, y sea $\{m_k\}$ una sucesión creciente, supuesto existente, de enteros no negativos tal que $\beta_{m_k} \to 0$ cuando $k \to \infty$. Como

$$\inf(\alpha_{m_k},\ 1) \leqq \varphi(\beta_{m_k}) \to 0 \qquad (k \to \infty),$$

concluimos que $\alpha_{m_k} \to 0$ cuando $k \to \infty$: por tanto la primera sucesión es subinfinitésima con relación a la segunda. Recíprocamente, supongamos que $\varphi(\varepsilon)$ no converja hacia cero cuando $\varepsilon \to 0$. Puesto que $\varphi(\varepsilon)$ es monótona, existe el límite siguiente

$$\lambda = \lim_{\varepsilon \to 0} \varphi(\varepsilon)$$

el cual es positivo. Pongamos también

$$\varphi_m(\varepsilon) = \sup_{M \geq m} \left\{ \inf \left(\alpha_M, \frac{\varepsilon}{\beta_M} \right) \right\} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Se reconoce inmediatamente que estas funciones son monótonas y que

$$\lambda = \lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_m(\varepsilon) \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Eligiendo un δ en el intervalo abierto $0 \text{–} \lambda$, tendremos

$$\varphi_m(\varepsilon) > \delta \qquad (\varepsilon > 0;\ m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

De aquí resulta, por recurrencia, que existe una sucesión creciente $\{m_k\}$ de enteros no negativos tal que

$$\inf \left(\alpha_{m_k},\ \frac{1/k}{\beta_{m_k}} \right) > \delta \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

En efecto, basta definir $m_1 = 0$, y en seguida, suponiendo ya definido m_k, definir m_{k+1} como uno de los valores, por ejemplo el menor, del entero M tal que

$$M > m_k, \qquad \inf \left(\alpha_M,\ \frac{1/k}{\beta_M} \right) \geq \delta;$$

la existencia de por lo menos un entero M en estas condiciones es una consecuencia de la desigualdad (7) cuando en ella se hace $m=m_k+1$ y $\varepsilon=1/k$. Ahora bien, (8) equivale a

$$\beta_{m_k}<\frac{1}{k\delta}, \qquad \alpha_{m_k}>\delta \qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

lo que prueba que $\{\alpha_m\}$ no es subinfinitésima con relación a $\{\beta_m\}$: la primera parte del enunciado del Lema está, por consiguiente, probada. La segunda parte es, entonces, evidente.

Comparando ahora el enunciado del Teorema 1 con la fórmula (6) y con la primera parte del enunciado del Lema 1, obtenemos el teorema 3 que sigue. El teorema 4 se obtiene utilizando la segunda parte del enunciado del Lema 1. El teorema 5 es una especialización del teorema 4 obtenida cuando es posible tomar el entero $N(n)$, que figura en el enunciado de este último, igual a $n+1$. Si en lugar del teorema 1, utilizamos el teorema 2 obtenemos enunciados análogos que suprimimos: conviene únicamente notar que la monotonía de la sucesión de topologías normables es, en este caso, precisamente expresada por la condición (3), o implicada en la condición (4).

Teorema 3. *Para que la topología límite T en el espacio lineal* [A] *satisfaga al axioma de las sucesiones no convergentes es necesario y suficiente que a cada entero $n\geqq 0$ sea posible asociar un entero $N=N(n)\geqq 0$ tal que la sucesión*

$$\left\{\frac{a_m{}^N}{a_m{}^r}\right\}_m \tag{9}$$

sea subinfinitésima con relación a la sucesión

$$\left\{\frac{a_m{}^s}{a_m{}^N}\right\}_m \tag{10}$$

para todo $r=0,1,2,\ldots,n$ y $s=0,1,2,\ldots,n,\ldots$

Teorema 4. *Para que la topología T en el espacio lineal* [A] *satisfaga al axioma de las sucesiones no convergentes es su-*

ficiente que a cada entero $n \geqq 0$ *sea posible asociar un entero* $N = N(n) > n$ *tal que*

$$\frac{a_m{}^N}{a_m{}^r} \longrightarrow 0 \text{ cuando } m \longrightarrow \infty$$

para $r = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Teorema 5. *Para que la topología límite* T *en el espacio lineal* [A] *satisfaga al axioma de las sucesiones no convergentes es suficiente que*

$$\frac{a_m{}^{n+1}}{a_m{}^n} \longrightarrow 0 \text{ cuando } m \longrightarrow \infty \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Antes de terminar este párrafo, vamos a hacer algunas consideraciones que, aunque no serán utilizadas en este artículo, tienen un cierto interés.

En primer lugar observemos que las condiciones necesarias y suficientes del teorema 3 implican las condiciones (2), necesarias y suficientes para que [A] sea lineal; en efecto, haciendo $s = r$ en el teorema 3, y teniendo en cuenta que una sucesión $\{\alpha_m\}$ de números positivos es subinfinitésima con relación a $\{1/\alpha_m\}$ si y solamente si $\{\alpha_m\}$ es limitada, concluimos que

$$\left\| \frac{a_N}{a_r} \right\| < +\infty \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

que es una forma equivalente de la condición (2). Esta condición (2) es, por otra parte, necesaria y suficiente para otras propiedades: en primer lugar ella traduce que $T_p \subset T_N$, $T_q \subset T_N$ o bien (como se acostumbra a decir en la teoría de los sistemas parcialmente ordenados) que la sucesión de topologías $\{T_n\}$ es un sistema dirigido (*directed system*); en segundo lugar, suponiendo E real e introduciendo un orden parcial $x \leqq y$ entre los puntos $x = \{x_m\}$, e $y = \{y_m\}$ de E, definida por $x_m \leqq y_m$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$) con lo cual E es una estructura (*lattice*), (2) expresa que [A] es una subestructura (*sub-lattice*) de E. Un tercer hecho expresado por (2) está enunciado más adelante.

Consideremos dos matrices infinitas

$$A=[a_m{}^n], \quad B=[b_m{}^n] \qquad (m,n=0,1,2,\ldots)$$

cuyos elementos sean números positivos: diremos que estas matrices son *equivalentes* y escribiremos $A\sim B$ siempre que $[A]=[B]$, es decir, siempre que ellas definan el mismo subconjunto de E. Vamos a demostrar que, en este caso, las topologías límites, que indicaremos con $T(A)$, $T(B)$, obtenidas en $\Omega=[A]=[B]$ por medio de A y B, respectivamente, son idénticas. Para esto vamos a probar, primeramente, que $A\sim B$ cuando y solamente cuando, a cada entero $n\geqq 0$ es posible asociar dos enteros $p=p(n)$, $q=q(n)$ tales que

$$\left\|\frac{b_p}{a_n}\right\|<+\infty, \quad \left\|\frac{a_q}{b_n}\right\|<+\infty. \tag{11}$$

En efecto, suponiendo estas condiciones satisfechas, y dado $x\in[A]$, existe un entero $n\geqq 0$ tal que $\|a_n x\|<+\infty$, de donde

$$\|b_p x\|\leqq\|a_n x\| \cdot \left\|\frac{b_p}{a_n}\right\|<+\infty,$$

y por tanto $x\in[B]$. Por consiguiente $[A]\subset[B]$. Análogamente se demuestra la inclusión contraria, lo que prueba que debe ser $A\sim B$. Recíprocamente, si es $A\sim B$, dado un entero $n\geqq 0$, como obviamente es $1/a_n\in[A]$, será $1/a_n\in[B]$, lo que implica la primera de las relaciones (11). La segunda se prueba de manera idéntica.

Supongamos ahora que sea $A\sim B$. Indicando con $T_n(A)$ y $T_n(B)$ las topologías normables inducidas en Ω por $\|a_n x\|$ y $\|b_n x\|$ $(n=0,1,2,\ldots)$ respectivamente, de (11) resulta que

$$T_n(A)\subset T_p(B)\subset T(B)$$
$$T_n(B)\subset T_q(A)\subset T(A)$$

de donde $T(A)=T(B)$. Este hecho sirve para aclarar que la topología T depende del conjunto $[A]$ y no propiamente de la matriz A utilizada en la construcción de este conjunto.

Vamos ahora a probar que la condición (2) es necesaria y suficiente para que A sea equivalente a por lo menos una matriz

B que satisfaga la condición (3), o la condición (4) (bien entendido: con la sustitución de los elementos de A por los de B). Como, en efecto, si $A \sim B$ y B satisface (3), de la relación

$$[A] = U_0^{\infty} [b_n], \qquad [b_n] \subset [b_{n+1}] \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

podemos concluir que [A], como unión de una sucesión monótona de subespacios lineales de E, es también un subespacio lineal. Luego (2) es satisfecha. Recíprocamente, supongamos (2) satisfecha e introduzcamos la matriz B cuyos elementos sean definidos por

$$b_m{}^n = \inf_{0 \leq r \leq n} a_m{}^r \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Esta matriz satisface desde luego a (4). Vamos ahora a probar que $A \sim B$, para lo cual bsata constatar las (11). Para la primera de las (11), basta tomar $p(n) = n$. En cuanto a la segunda, definamos por recurrencia, de acuerdo con (2),

$$N_0 = 0, \qquad N_k = N(N_{k+1}, k), \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Poniendo enconces $q(n) = N_n$, de (2) se deduce por recurrencia,

$$\left\| \frac{a_q}{a_k} \right\| < +\infty \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

que es precisamente equivalente a la segunda de las (11); queda, por tanto, probado el enunciado.

Para probar que el teorema 3 no es «vacío», es decir, para probar que las condiciones necesarias y suficientes que figuran en su enunciado no son obligatoriamente satisfechas, vamos a dar un ejemplo de una matriz A que, aun satisfaciendo a la condición restrictiva (4), determina un subespacio lineal [A], y sobre éste una topología T que no satisface al axioma de las sucesiones no convergentes. Designemos con I el conjunto de los enteros $0, 1, 2, \ldots$ y sea I_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ una sucesión fija de subconjuntos de I tal que cada término de esta sucesión contenga el término siguiente y la diferencia entre estos dos términos sea un subconjunto infinito de I. Definamos los elementos de la matriz A por recurrencia del modo siguiente.

$$a_m{}^0 = 1 \quad \text{para} \quad m \in I$$

$$a_m{}^n \begin{cases} a_m{}^{n-1} & \text{para} \quad m \in I_n \\ & (n = 1, 2, \ldots) \\ \dfrac{a_m{}^{n-1}}{m+1} & \text{para} \quad m \in I - I_n \end{cases}$$

Esta matriz satisface evidentemente la condición (4) y, para demostrar que una topología T sobre [A] no satisface a dicho axioma, será suficiente, de acuerdo con el teorema 3, demostrar que, cualesquiera que sean los enteros no negativos tales que $r < N < s$, necesariamente la sucesión (9) no es subinfinitésima con relación a la sucesión (10). En efecto. en este caso, poniendo $J = I_N - I_s$, como $J \supset I_N - I_{N+1}$, entonces J es un subconjunto infinito de I y por tanto tiene sentido hacer que un entero m variable en J, tienda a infinito. Ahora bien, si m pertenece a J, entonces m no pertenece a I_s, de donde

$$\frac{a_m{}^s}{a_m{}^N} = \frac{a_m{}^{s-1}/(m+1)}{a_m{}^N} \leqq \frac{1}{m+1} \to 0 \quad (m \to \infty, \ m \in J)$$

y por otra parte m pertenece a I_N, de donde

$$\frac{a_m{}^N}{a_m{}^r} = 1 \qquad (m \in J)$$

lo que prueba la afirmación hecha.

Finalmente, para terminar este párrafo, vamos a indicar dos cuestiones interesantes para ser examinadas y que todavía dejaremos de lado.

La primera es la siguiente. Se verifica fácilmente que, dada una matriz A, no siempre es posible sustituirla por otra B equivalente que satisfaga la condición suficiente del teorema 5; igual que una topología T sobre [A] satisfaga al axioma aquí discutido. Un ejemplo está dado por la matriz cuyos elementos sean todos iguales a la unidad: el espacio y la topología correspondiente son, en este caso, el espacio (m) de las sucesiones li-

mitadas con su topología métrica usual (10). Además se demuestra fácilmente que la condición necesaria y suficiente respecto A para que exista una matriz equivalente B que satisfaga a la condición suficiente del Teorema 5 (sin alterar la cuestión podemos también exigir que B satisfaga la condición (4)), es que A satisfaga la condición suficiente del Teorema 4. Entonces, ¿cuál es el significado topológico del hecho de que el espacio [A] y su topología T sean definidos por medio de una matriz A que satisfaga la condición suficiente del Teorema 5?

La segunda cuestión consiste en re-examinar las cuestiones abordadas en este párrafo utilizando, en lugar de la norma introducida anteriormente en el espacio E, la norma definida del siguiente modo

$$\|x\| = (\sum_0^\infty |x_m|^p)^{1/p},$$

donde $p \geqq 1$ es un número real.

3. *Algunos ejemplos.* En este párrafo vamos a indicar algunos ejemplos bien conocidos de espacios topológicos lineales que entran en la categoría estudiada en el párrafo precedente.

Primer ejemplo. Espacio de las funciones holomorfas sobre un círculo cerrado (11). Sean: R un número no negativo, δ_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ una sucesión monótona decreciente de números positivos que convergen hacia cero, y definamos los elementos de la matriz A por:

$$a_m{}^n = (R + \delta_n)^m \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Se reconoce inmediatamente que [A] es el conjunto de todos los puntos $x = [x_m] \in E$ tales que

$$\limsup_{m \to \infty} |x_m|^{1/m} \leqq 1/R,$$

esto es, tales que el círculo abierto de convergencia de la serie de potencias

(10) BANACH, *loc. cit.*, p. 11.

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} x_m z^m \qquad (12)$$

contiene al círculo cerrado $|z| \leqq R$ en el plano de la variable compleja z.

Sea $\mathcal{V}(R)$ un conjunto de estas series de potencias. considerado como un espacio lineal del modo usual. La correspondencia que a cada $x \in [A]$ asocia $f(z) \in \mathcal{V}(R)$ definida por (12) es un isomorfismo, en el sentido de la teoría de los espacios lineales, entre [A] y $\mathcal{V}(R)$. Introduzcamos ahora en $\mathcal{V}(R)$ una topología límite $T(R)$, la llamada topología de convergencia uniforme, definida del siguiente modo: si $f(z)$, $f_m(z) \in \mathcal{V}(R)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ se dice que $f_m(z) \to f(z)$ según $T(R)$ cuando y solamente cuando existe un δ positivo tal que las series de potencias $f(z)$, $f_m(z)$ sean convergentes en el círculo $|z| \leqq R + \delta$ y $f_m(z) \to f(z)$ uniformemente en este círculo en el sentido usual. Considerando entonces [A] como una topología T y $\mathcal{V}(R)$ como una topología $T(R)$, se ve fácilmente que la correspondencia así definida es bicontinua y por lo tanto [A] con la topología T es, a menos de un isomorfismo en el sentido de la teoría de los espacios topológicos lineales, el propio espacio de las funciones holomorfas sobre un círculo cerrado con la topología de convergencia uniforme.

Aplicando el teorema 5 se ve que en el caso actual el axioma de las sucesiones no convergentes es satisfecho.

Segundo ejemplo. Espacio de las funciones enteras de tipo exponencial menor que un número positivo dado. Sean: c un número positivo, que puede ser igual a $+\infty$, c_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ una sucesión monótona creciente de números positivos que convergen a c y definamos los elementos de la matriz A por

$$a_m{}^n = \frac{m!}{(c_n)^m} \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots).$$

[A] es el conjunto de todos los puntos x de E tales que

$$\limsup_{m \to \infty} |m!\, x_m|^{1/m} < c,$$

esto es, tales que la serie de potencias definida por (12) representa una función entera de tipo exponencial $< c$ [12].

Sea $\mathcal{C}(c)$ el conjunto de estas series de potencias considerado como un espacio lineal de la manera usual. La correspondencia definida por (12) es un isomorfismo en el sentido de la teoría de los espacios lineales entre [A] y $\mathcal{C}(c)$. Definamos en $\mathcal{C}(c)$ una topología límite $T(c)$ del sguiente modo: si $f(z)$, $f_m(z) \in \mathcal{C}(c)$ $(m=0,1,2,\ldots)$, se dice que $f_m(z) \to f(z)$ según $T(c)$ si y solamente si $f_m(z) \to f(z)$ uniformemente en el sentido usual en todo conjunto limitado y cerrado del plano complejo y, además de esto, las funciones $[f_m(z)]$ son uniformemente de tipo exponencial $< c$, es decir, existen dos números positivos K y $C \leq c$ tales que

$$|f_m(z)| \leqq K \exp.(Cr) \qquad (r=|z|;\ m=0,1,2,\ldots),$$

Considerando [A] con la topología T y $\mathcal{C}(c)$ con la topología $T(c)$, se verifica que la correspondencia así definida es bicontinua, y por tanto [A] con la topología T es, a menos de un isomorfismo en el sentido de los espacios topológicos lineales, el propio espacio de las funciones enteras de tipo exponencial menor que un número positivo dado con la topología antes indicada.

Aplicando el teorema 5 se encuentra que el axioma de las sucesiones no convergentes es satisfecho en el caso actual.

Tercer ejemplo. Espacio de las funciones enteras de orden menor que un número positivo dado. Sean: c un número pisitivo, que puede ser $+\infty$, c_n $(n=0,1,2,\ldots)$ una sucesión monótona creciente de números positivos que convergen hacia c y definamos los elementos de la matriz A por

$$a_m{}^n = m^{m/c_n} \qquad (m,n=0,1,2,\ldots).$$

[A] es el conjunto de todos los puntos x de E tales que

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{\log|x_m|}{m \log m} < -\frac{1}{c}$$

(12) Ver. L. BIEBERBACH, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, Bd. 2, pág. 234.

es decir, tales que la serie de potencias definida por (12) represente una función entera de orden $< c$ (13).

Sea $\bar{O}(c)$ el conjunto de estas series de potencias considerado como un espacio lineal del modo usual. La correspondencia definida por (12) es un isomorfismo en el sentido de la teoría de los espacios lineales entre [A] y $\bar{O}(c)$. Introduzcamos una topología $T(c)$ en $\bar{O}(c)$ del siguiente modo: si $f(z), f_m(z) \in \bar{O}(c)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, diremos que $f_m(z) \to f(z)$ según $T(c)$ si y solamente si $f_m(z) \to f(z)$ uniformemente en el sentido usual en todo conjunto limitado y cerrado del plano complejo y, además de esto, las funciones $\{f_m(z)\}$ sean uniformemente de orden $< c$, es decir. existen dos números positivos K y $C < c$ tales que

$$|f_m(z)| \leqq K \cdot \exp.(r^c) \quad (r = |z|;\ m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Considerando [A] con la topología T y $\bar{O}(c)$ con la topología $T(c)$, se demuestra que la correspondencia definida es bicontinua y, por tanto, [A] con la topología T es, a menos de un isomorfismo en el sentido de la teoría de los espacios topológicos lneales, el propio espacio de las funciones enteras de orden menor que un número positivo dado con la topología indicada.

Aplicando el teorema 5, se demuestra que en el ejemplo actual el axioma de las sucesiones no convergentes, también es satisfecho.

Análogamente puede ser considerado el espacio de las funciones de orden dado y de tipo menor que un número dado(13); así como ciertos espacios de funciones analíticas representadas por series de Dirichlet que satisfacen a la condición de Valirón para que las abscisas de convergencia simple y absoluta sean idénticas.

Como los tres ejemplos que acaban de ser estudiados, así como sus respectivas topologías, son espacios no metrizables, se ve que la unión de una sucesión monótona de topologías normables puede muy bien satisfacer al axioma de las sucesiones no convergentes sin con ello ser normable ni metrizable.

4. *El espacio de las funciones holomorfas sobre un conjunto cerrado dado* (14). Sea Ω el conjunto de todas las funciones com-

(13) BIEBERBACH, *loc. cit.*, p. 234 y siguientes.

(14) El espacio de las funciones holomorfas ha sido objeto de estudio, des-

plejas $f(z)$, finitas y unívocas, de la variable compleja z, cada una definida y holomorfa en un conjunto abierto $\mathcal{A}(f)$, no vacío, de la esfera de Gauss de esta variable compleja. Indiquemos con F un subconjunto propio no vacío, cerrado, de esta esfera: si el punto $z=\infty$ pertenece a F, efectuaremos el cambio de variable definido por $z'=1/(z-\zeta)$, donde ζ indica un punto de la esfera de z no perteneciente a F, y entonces F se cambia topológicamente en un conjunto cerrado F' de la esfera de z' que no contiene $z'=\infty$.

Podemos, por tanto, sin perder la generalidad, suponer que el conjunto dado F no contiene $z=\infty$, es decir, es un subconjunto limitado y cerrado del plano de la variable z. Designemos con $\Omega(F)$ el conjunto de todas las $f(z)\in\Omega$ tales que $\mathcal{A}(f)\supset F$, es decir, el conjunto de todas las funciones de Ω holomorfas sobre F. Vamos a introducir en $\Omega(F)$ una relación de equivalencia $\sim$ módulo F definida del siguiente modo: si $f_1(z)$, $f_2(z)\in\Omega(F)$, diremos que $f_1(z)\sim f_2(z)$ (mód. F) cuando y solamente cuando exista un conjunto abierto $\mathcal{A}$ tal que

1. $F\subset\mathcal{A}\subset\mathcal{A}(f_1)\frown\mathcal{A}(f_2)$.
2. $f_1(z)\equiv f_2(z)$ para $z\in\mathcal{A}$.

Esta definición de equivalencia es evidentemente reflexiva, simétrica y transitiva. Sea $\Omega[F]$ el espacio cociente de $\Omega[F]$ por esta relación de equivalencia, es decir, el conjunto de las clases de equivalencia determinadas en $\Omega(F)$ por $\sim$. Para indicar que dos funciones de $\Omega(F)$ pertenecen a la misma clase de equivalencia módulo F, es costumbre decir que una es la prolongación analítica de la otra módulo F; además de esto, dada $f_1(z)\in\Omega(F)$ y dado un conjunto abierto de la esfera $\mathcal{A}$ que contiene F, diremos que $f_1(z)$ es prolongable analíticamente en $\mathcal{A}$, módulo F, siempre que exista $f_2(z)\in\Omega(F)$ tal que sea $f_1(z)\sim f_2(z)$ (mód. F) y $\mathcal{A}(f_2)\supset\mathcal{A}$.

Podemos convertir $\Omega[F]$ en un espacio lineal de la manera usual: si a indica un número y $\mathcal{F}\in\Omega[F]$, indicaremos con $a\mathcal{F}$

---

de varios puntos de vista, por parte de distintos autores. Ver principalmente: L. FANTAPPIE: a) *I funzionali analitici*, Mem. R. Accad. dei Lincei, vol. 3, Serie 6, fasc. 11, 1930; b) *Überblick über die Theorie der analytischen Funktionalen und ihre Anwendungen*, Jahresber. der Deutschen Mathem. Ver Bd. 43, pp. 1-25, 1933; c) *Lo spazio funzionale analitico come spazio topologico* T_0, Rend. Mat. R. Universita di Roma, vol. 1, Serie 5, pp. 84-90, 1940.

la clase de equivalencia módulo F determinada por la función $af(z)$, $z \in \mathcal{A}(f)$, donde $f(z)$ es una función de la clase $\mathcal{F}$, y si $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2 \in \Omega[F]$, indicaremos con $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$ la clase de equivalencia módulo F determinada por la función $f_1(z) + f_2(z)$, $z \in \mathcal{A}(f_1) \frown \mathcal{A}(f_2)$, donde $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son funciones de las clases $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ respectivamente. Es obvio que estas operaciones lineales están «bien definidas módulo F».

Podemos también introducir una topología límite $T(F)$ en $\Omega[F]$ del siguiente modo: si $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_m \in \Omega[F]$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ diremos que $\mathcal{F}_m \to \mathcal{F}$ según $T(F)$ si y solamente si existen funciones $f(z) \in \mathcal{F}$, $f_m(z) \in \mathcal{F}_m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ y un conjunto abierto $\mathcal{A}$ tales que:

1. $F \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{A}(f)$.
2. $F \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{A}(f_m)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$.
3. $f_m(z) \to f(z)$ uniformemente para $z \in \mathcal{A}$.

De esta manera $\Omega[F]$ pasa a ser un espacio topológico lineal (en el sentido de la teoría de los espacios límites) no metrizable.

Para cada $\delta > 0$, sea $F(\delta)$ el conjunto de los puntos z del plano complejo tales que: dist. $(z, F) \leqq \delta$. Además de eso, para cada $\delta > 0$ y cada $\mathcal{F} \in \Omega[F]$ definamos $\phi(\mathcal{F}; \delta)$ del siguiente modo:

1. $\phi(\mathcal{F}; \delta) = +\infty$ si no existe $f(z) \in \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{A}(f) \supset F(\delta)$.

2. $\phi(\mathcal{F}; \delta) = \sup_{z \in F(\delta)} |f(x)|$ si existe por lo menos una $f(z) \in \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{A}(f) \supset F(\delta)$.

Evidentemente cada $\phi(\mathcal{F}; \delta)$ es una norma en el espacio lineal $\Omega[F]$, sobre el cual ella induce la topoogía límite $T(\delta)$. Para simplificar la notación, no está indicado que $\phi(\mathcal{F}; \delta)$ y $T(\delta)$ dependen de F. Es también inmediato que:

$$T(F) = \bigcup_{\delta > 0} T(\delta),$$

o también que:

$$T(F) = U_0^{\infty} T(\delta_n), \tag{13}$$

donde δ_n $(n=0,1,2,\ldots)$ indica una sucesión decreciente de números positivos tales que $\delta'>\delta>\delta''$. Vamos a probar que

$$T(\delta)>[T(\delta'),T(\delta'')]. \tag{14}$$

En efecto, en virtud del teorema de los tres círculos de Hadamard (15), tenemos

$$\phi(\mathcal{F};\delta)\leqq[\phi(\mathcal{F};\delta')]^{\alpha}[\phi(\mathcal{F};\delta'')]^{\beta},\quad \mathcal{F}\in\Omega[F],$$

donde

$$\alpha=\frac{\log(\delta'/\delta)}{\log(\delta'/\delta'')},\quad \beta=\frac{\log(\delta/\delta'')}{\log(\delta'/\delta'')}.$$

Indicando con $\varphi(\varepsilon)$ el extremo superior de $\phi(\mathcal{F};\delta)$ para todo $\mathcal{F}\in\Omega[F]$ tal que $\phi(\mathcal{F};\delta')\geqq 1$, $\phi(\mathcal{F};\delta'')\leqq\varepsilon$, donde $0<\varepsilon<+\infty$, obtenemos

$$\varphi(\varepsilon)\leqq\varepsilon^{\beta}\to 0\qquad(\varepsilon\to 0)$$

lo que prueba (14). Las relaciones (13) y (14), el hecho de que las topologías que figuran en el segundo miembro de (13) constituyen una sucesión monótona y el Teorema 2 permite afirmar que el espacio $\Omega[F]$ con la topología $T(F)$ satisface al axioma de las sucesiones no convergentes.

Una circunstancia curiosa es que el teorema de los tres círculos de Hadamard es exactamente el instrumento necesario para constatar la relación ternaria entre topologías normables expresada por «una topología contiene el par ordenado de otras dos topologías».

Podemos, por tanto, concluir con el siguiente

Teorema 6. *Sean* $f(z)$, $f_m(z)\in\Omega(F)$ $(m=0,1,2,\ldots)$. *Si de toda sucesión de esta sucesión es posible extraer una subsucesión ulterior* Σ *tal que exista un conjunto abierto* $\mathcal{A}$ *conteniendo* F *para el cual* $f(z)$ *y los términos de* Σ *puedan ser prolongados analíticamente módulo* F *de manera que las pro-*

(15) Bieberbach, *loc. cit.*, p. 126. Siendo $f(z)$ una función holomorfa sobre el conjunto cerrado F, r un número positivo menor que la distancia de este conjunto a la frontera del conjunto abierto en que esta función está definida, y $M(r)$ el módulo máximo de $f(z)$ en $F(r)$ entonces $M(r)$ satisface a la misma desigualdad que en el caso en que F se reduce a un punto.

longaciones de los términos de Σ sean uniformemente convergentes en $\mathcal{A}$ hacia la prolongación de $f(z)$, entonces existe un conjunto abierto fijo $\mathcal{A}^*$ conteniendo F para el cual $f(z)$ y los términos de la sucesión dada pueden ser prolongados analiticamente módulo F de modo que las prolongaciones de estos términos sean uniformemente convergentes en $\mathcal{A}^*$ hacia la prolongación de $f(z)$.

NÚCLEO DE MATEMÁTICA
FUNDAÇAO GETULIO VARGAS
RIO DE JANEIRO, BRASIL.

BIBLIOGRAFIA

PEDRO PÍ CALLEJA. *Introducción al álgebra vectorial.* Publicación de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Cuyo. Buenos Aires 1945.

Como dice muy bien el Dr. Rey Pastor, en el breve y jugoso prólogo del libro que comentamos, el profesor Pí Calleja da en él mucho más de lo que promete con su título, no sólo por que hace un estudio casi completo del álgebra vectorial, e incluye también el álgebra tensorial, sino por que en todo él se abren ventanas hacia las más elevadas especulaciones de la matemática y de la física contemporáneas.

La idea esencial del libro es, según las propias palabras del autor: "aunar la interpretación física y geométrica del concepto de vector que da una visión sintética y directa de gran parte de la Matemática útil a la Física elemental y a la Técnica, con el profundo significado que para la Matemática pura y la Física teórica moderna tiene el concepto abstracto de vector".

El capítulo I, dedicado al concepto de vector, se inicia con un estudio de los sistemas de coordenadas cartesianas, definiendo con precisión no habitual las orientaciones de los ejes; sigue con un estudio preciso y riguroso del concepto de igualdad, y da la definición clásica de vector en el espacio ordinario, así como la distinción entre vectores libres, axiales y fijos. Entra a continuación en la definición axiomática de los vectores, dando en una introducción, en forma concisa y clara, la esencia y sentido, de la axiomatización de una teoría matemática, y de la interpretación concreta y aplicación de la misma; el espacio vectorial abstracto se define mediante catorce axiomas, dando las interpretaciones de algunos de ellos para la anterior definición de los vectores, e igualmente se dan ejemplos de operaciones matemáticas que no verifican algunos de esos axiomas. Define a continuación la independencia lineal de los vectores, para poder introducir los axiomas de la dimensión para la recta, el plano, el espacio ordinario y el espacio n-dimensional. A partir de ese momento todo el cálculo vectorial se desarrolla como una serie de consecuencias lógicas de los axiomas. Define después las coordenadas vectoriales mediante vectores linealmente independientes, e introduce axiomáticamente el espacio puntual y

las relaciones entre puntos y vectores. El capítulo termina con un estudio de las multiplicidades vectoriales lineales, limitándose a la recta y al plano del espacio multidimensional. Las cualidades de claridad y precisión en el lenguaje, características de la obra que analizamos, alcanzan su máximo en la exposición de este primer capítulo.

El capítulo II está dedicado al producto interno o escalar. Se inicia con la definición a partir de los axiomas y de los conceptos de distancia y ángulo; luego se define el producto escalar y se estudian sus propiedades. A continuación se estudian las transformaciones ortogonales, probando la invariancia del producto escalar, de la distancia y del ángulo en todos los sistemas ortogonales de coordenadas. Estudia después la ortogonalización de vectores, y termina el capítulo con el estudio le las ecuaciones normales de la recta y del plano.

El capítulo III se denomina área y volumen: se define, mediante sus propiedades características, el volumen determinado en el espacio n-dimensional por un grupo de n vectores. En este capítulo se utiliza el concepto de determinante y se muestra como éstos pueden estudiarse, sea partiendo de la clásica definición polinómica, sea de su definición mediante sus propiedades características. Se estudia también con mucho cuidado y precisión el signo de las áreas y volúmenes.

El capítulo IV está dedicado al producto vectorial o externo, y a los productos compuestos o mixtos; el estudio se limita al caso del espacio tridimensional y se dan una serie de aplicaciones de estos conceptos a la geometría y a la física. Entre estas aplicaciones figura el resultado clásico de que un sistema de vectores deslizantes se reduce a un vector y a un par. Creemos que, dada su importancia, este punto debiera haber merecido un examen más detallado.

El capítulo V, titulado: "Los espacios lineales y las multiplicidades vectoriales en el estudio de las magnitudes físicas", se inicia con un estudio muy resumido y elegante de los espacios abstractos y de la utilidad y necesidad de estos en la física contemporánea. Es claro que al dar en ocho páginas tal resumen tienen que presentarse forzosamente algunas lagunas, en particular nos parece que no ha sido puesto suficientemente en relieve la importancia básica del concepto de punto de acumulación. Creemos, por otra parte que hubiera sido conveniente estudiar en este capítulo, con mayor detalle los ejemplos de espacios vectoriales de infinitas dimensiones con lo que se hubiera puesto más en claro el interés del método axiomático. Sigue después el capítulo con el estudio de las multiplicidades vectoriales de m dimensiones en el espacio vectorial n-dimensional; estudia a continuación, utilizando la interpretación vectorial de los sistemas de ecuaciones lineales, la referencia de las multiplicidades a bases distintas. Termina el capítulo con un estudio del álgebra vectorial de las magnitudes físicas de gran interés por la forma muy clara y rigurosa en que se trata el problema de los sistemas de unidades en física.

El capítulo VI se titula Tensores; se inicia con la definición del tensor en el espacio tridimensional como una función vectorial lineal homogénea de la dirección, y se muestra el origen de este concepto en los problemas de la resistenria de materiales; se definen a continuación la suma de tensores, el producto de un escalar por un tensor y el prodncto de un tensor por un vector,

de acá se muestra como puede también definirse el tensor como un operador lineal entre vectores. Luego se estudia el tensor obtenido mediante la derivación en un campo vectorial y se pasa a la definición de tensor de rango n. Se trata después la forma bilineal correspondiente a un tensor y se demuestra la descomposición de un tensor cualquiera en la suma de un tensor simétrico y otro antisimétrico. Se estudia luego el tensor en el espacio n-dimensional, como operador lineal y se da para ello un estudio elegante y resumido del cálculo de matrices. Termina el capítulo con un breve resumen de la sistematización de la geometría mediante la teoría de grupos, estudiándose en particular las geometrías métrica, afín y proyectiva en el espacio n-dimensional.

Al final de cada uno de los capítulos hay un grupo de ejercicios que, en muchos casos, no son solo aplicaciones de las teorías expuestas sino ampliaciones y complementos de las mismas. Termina el libro con una completa y bien ordenada bibliografía. Se debe también hacer resaltar la ventaja de haber adoptado una notación vectorial muy sencilla.

En resumen se trata de una obra, cuya lectura es recomendable aún para aquellos que ya conozcan ampliamente el tema y de indiscutible interés científico.

Pero si el interés científico del libro es indiscutible, es posible que sea discutido por algunos su valor didáctico. El autor es profesor universitario en la Escuela de Ingeniería de San Juan, y se trasluce claramente que ha escrito el libro con una finalidad esencialmente didáctica.

Es posible que el libro sea considerado difícil por esa parte del estudiantado que desea únicamente conocer lo menos posible con el mínimo de esfuerzo, y que, al estudiar una teoría, sólo les interesa el saber si será o no pregunta de exámen es posible también que no sea adecuado para aquellos profesionales que sólo quieren conocer lo inmediatamente utilizable en problemas técnicos de menor cuantía, pero, en cambio, es útil, adecuado e interesante para los estudiantes universitarios que vayan a las aulas movidos esencialmente por el afán de aprender y para aquellos profesionales que se den cuenta de la necesidad de ampliar su bagaje de conocimientos matemáticos para poder profundizar en los problemas, cada vez más intrincados, de la técnica moderna. Para los que creemos que la misión esencial de la enseñanza universitaria es la de selección y no la nivelación por lo bajo, el libro del profeosr Pí Calleja cumple su finalidad didáctica.

Los lectores que ya tengan conocimientos de matemática universitaria, podrán perfectamente abordar el libro en lectura aislada. En cambio es posible que esta lectura sea difícil para los alumnos que se inicien en la enseñanza universitaria, y desde luego no sirve para aquellos que asisten rara vez a las aulas y "preparan" el exámen en quince días de lecturas precipitadas, pero puede muy bien servir de libro de iniciación si se lo estudia simultáneamente con las explicaciones del profesor, y como ésta es la única forma seria de trabajar en la Universidad, esto nos afirma en la idea de que el libro cumple plenamente su finalidad didáctica de carácter formativo y no informativo.

Sólo nos queda felicitar al autor y a la Universidad de Cuyo por la aparición de esta obra, una de las aportaciones más serias a la bibliografía matemática en lengua castellana de los últimos tiempos.

Manuel Balanzat

PUBLICACIONES DE LA U. M. A.

Vol. I (1936-1937), Vol. II (1938-1939), Vol. VII (1940-1941), Vol. VIII (1942), Vol. IX (1943), Vol. X (1944-1945), Vol. XI (1945-1946)

Notas y memorias de J. Babini, M. Balanzat, J. Barral Souto, A. Battig, G. Beck, C. Biggeri, G. Birkhoff, C. A. Bula, M. Bunge, H. E. Calcagno, F. Cernuschi, A. W. Conway, C. Crespo, E. A. de Cesare, J. de Cicco, J. A. del Peral, J. Favet, E. Ferrari, V. y A. Fraile, Y. Frenkel, R. Frucht, E. Gaspar, E. Gaviola, A. González Domínguez, A. J. Guárnieri, J. E. Herrera, E. Kasner, G. Knie, N. Krivoshein, T. Levi-Citta, W. Mächler, J. L. Massera, M. Petrovich, M. M. Peixotto, A. Petracca, E. R. Raimondi, J. J. Rebella, J. Rey Pastor, S. Ríos, P. Rossell Soler, M. Sadosky, R. San Juan, L. A. Santaló, S. Sispánov, A. Terracini, P. Thuillen, F. Toranzos, J. V. Uspensky, J. Würschmidt.

Informes de las reuniones de la Asociación Física Argentina.

Soluciones de temas propuestos. Bibliografía, Crónica, etc.

Vol. III 1938-1939). Vol. IV (1939). Vol. V (1940). Vol. VI (1940-1942)

Fascículos separados

Nº 1. — Gino Loria. *Le Matematiche in Ispagna e in Argentina.*
» 2. — A. González Domínguez. *Sobre las series de funciones de Hermite.*
» 3. — Michel Petrovich. *Remarques arithmétiques sur une équation differentielle du premier ordre.*
» 4. — A. González Domínguez. *Una nueva demostración del teorema límite del Cálculo de Probabilidades. Condiciones necesarias y suficientes para que una función sea integral de Laplace.*
» 5. — Nikola Obrechkoff. *Sur la sommation absolue par la transformation d'Euler des séries divergentes.*
» 6. — Ricardo San Juan. *Derivación e integración de series asintóticas.*
» 7. — Resolución adoptada por la U. M. A. en la cuestión promovida por el Sr. Carlos Biggeri.
» 8. — F. Amodeo. *Origen y desarrollo de la Geometría Proyectiva.*
» 9. — Clotilde A. Bula. *Teoría y cálculo de los momentos dobles.*
» 10. — Cotilde A. Bula. *Cálculo de superficies de frecuencia.*
» 11. — R. Frucht. *Zur Geometria auf einer Fläche mit indefiniter Metrik (Sobre la Geometría de una superficie con métrica indefinida).*
» 12. — A. González Domínguez. *Sobre una memoria del Prof. J. C. Vignaux.*
» 13. — F. Toranzos. *Sobre las singularidades de las curvas de Jordan.*
» 14. — M. Balanzat. *Fórmulas integrales de la intersección de conjuntos.*
» 15. — G. Knie. *El problema de varios electrones en la mecánica cuantista.*
» 16. — A. Terracini. *Sobre la existencia de superficies cuyas líneas principales son dadas.*
» 17. — L. A. Santaló. *Valor medio del número de partes en que una figura convexa es dividida por n rectas arbitrarias.*
» 18. — A. Wintner. *On the iteration of distribution functions in the calculus of probability (Sobre la iteración de funciones de distribución en el cálculo de probabilidades).*
» 19. — E. Ferrari. *Sobre la paradoja de Bertrand.*
» 20. — J. Babini. *Sobre algunas propiedades de las derivadas y ciertas primitivas de los polinomios de Legendre.*
» 21. — R. San Juan. *Un algoritmo de sumación de series divergentes.*
» 22. — A. Terracini. *Sobre algunos lugares geométricos.*
» 23. — V. y A. Fraile y C. Crespo. *El lugar geométrico y lugares de puntos áreas en el plano.*
» 24. — R. Frucht. *Coronas de grupos y sus subgrupos, con una aplicación a los determinantes.*
» 25. — E. R. Raimondi. *Un problema de probabilidades geométricas sobre los conjuntos de triángulos.*

En 1942 la U. M. A. ha iniciado la publicación de una nueva serie de "Memorias y monografías" de las que han aparecido hasta ahora las siguientes:

Vol. I; Nº 1. — Guillermo Knie, *Mecánica ondulatoria en el espacio curvo.* Nº 2. — Guido Beck, *El espacio físico.* Nº 3. — Julio Rey Pastor, *Integrales parciales de las funciones de dos variables en intervalo infinito.* Nº 4. — Julio Rey Pastor, *Los últimos teoremas geométricos de Poincaré y sus aplicaciones.* Homenaje póstumo al Prof. G. D. Birkhoff.

Vol. II; Nº 1. — Yanny Frenkel, *Criterios de bicompacidad y de H-completidad de un espacio topológico accesible de Frechet-Riesz.*

Además han aparecido tres cuadernos de *Miscelánea matemática.*

SUMARIO

PÁG.

Generalités sur les fonctions entières, par G. Valiron 105

En torno del fotón en un medio material, por J. Würschmidt..... 119

Sobre el axioma de las sucesiones no convergentes en algunos espacios topológicos lineales, por L. Nachbin 129

Bibliografía. Pedro Pi Calleja, Introducción al álgebra vectorial (M. Balanzat) 150

Contribuyen especialmente al sostenimiento de las publicaciones de la UNION MATEMATICA ARGENTINA los siguientes:

MIEMBROS PROTECTORES

COMPAÑÍA INDUSTRIAL DEL NORTE DE SANTA FE. INGENIO AZUCARERO "ARNO" (Villa Ocampo. F. C. S. F.). — JULIO REY PASTOR (Buenos Aires). — T. G. BERLENGIERI y CIA. (Rosario). — TRICERRI HNOS. (Rosario). — MANUEL GUITARTE (Buenos Aires). — CLOTILDE A. BULA (Rosario). — ELBA R. RAIMONDI (Buenos Aires). — FERNANDO L. GASPAR (Rosario). — CARLOS ISELLA (Rosario). — PEDRO J. TRICERRI (Rosario).