

REVISTA DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

(MIEMBRO DEL PATRONATO DE LA MATHEMATICAL REVIEWS)

ORGANO DE LA
ASOCIACION FISICA ARGENTINA

REDACTADA por

J. Babini (Director); J. Rey Pastor, L. A. Santaló y E. Gaviola (Delegado de la A. F. A.)



MIEMBROS TITULARES DE LA U. M. A.

J. BABINI (Santa Fe) (fundador) — M. BALANZAT (San Luis). — J. BARRAL SOUTO (B. Aires) (fundador). — C. A. BULA (Rosario) (fundador). — E. COROMINAS (Mendoza). — E. CHICHIZOLA (Rosario). — C. DIEULEFAIT (Rosario) (fundador). — A. DURAÑONA Y VEDIA (B. Aires). — FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS FÍSICAS Y NATURALES (B. Aires) (fundador). — FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS (Rosario) (fundador). — FACULTAD DE QUÍMICA INDUSTRIAL (Santa Fe) (fundador). — A. FARENGO DEL CORRO (B. Aires). — Y. FRENKEL (B. Aires). — E. GASPAR (Rosario) (fundador). — F. L. GASPAR (Rosario) (fundador). — J. GIANNONE (Rosario) (fundador). — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ (Buenos Aires) (fundador). — J. GONZÁLEZ GALÉ (Buenos Aires) (fundador). — M. GUITARTE (Buenos Aires) (fundador). — W. S. HILL (Montevideo) (fundador). — C. ISELLA (Rosario) (fundador). — H. MAGLIANO (La Plata). — OBSERVATORIO ASTRONÓMICO (La Plata). — A. LASCURAIN (B. Aires). — J. OLGUIN (Rosario) (fundador). — D. PAPP (B. Aires). — P. PÍ CALLEJA (San Juan). — E. R. RAIMONDI (Buenos Aires) (fundador). — J. E. REYNAL (Buenos Aires). — J. REY PASTOR (Buenos Aires) (fundador). — A. E. SAGASTUME BERRA (La Plata). — E. L. SAMATÁN (Buenos Aires) (fundador). — J. SORTHEIX (Tucumán) (fundador). — D. T. A. DE SPELUZZI (Buenos Aires) (fundador). — E. TERRADAS (La Plata) (fundador). — F. TORANZOS (La Plata). — C. A. TREJO (La Plata). — J. C. VIGNAUX (Buenos Aires). — E. H. ZARANTONELLO (La Plata).



BUENOS AIRES

1947

UNION MATEMATICA ARGENTINA

MIEMBROS HONORARIOS

Tullio Levi-Civita (†); Beppo Levi; Alejandro Terracini; George D. Birkhoff (†); Marshall H. Stone; Georges Valiron.

JUNTA DIRECTIVA

Presidente, Alberto González Domínguez, Paraguay 1327, Buenos Aires
Vicepresidentes, J. C. Vignaux, E. H. Zarantonello. Secretario general, M. Valentínuzzi. Tesorera, Clotilde A. Bula. Protesorera, Juana M. Cardoso. Director de la Revista, J. Babini. Secretarios locales, R. A. Ricabarra (La Plata), P. L. Choceli (Córdoba), Elvira M. Tula (Cuyo), F. Gaspar (Rosario), Ilda C. Guglielmo (Tucumán).

REPRESENTANTES EN EL EXTRANJERO

Ing. Rafael Laguardia (Uruguay). Ing. José Luis Massera (Uruguay).
Dr. Sergio Sispánov (Paraguay). Dr. Godofredo García (Perú). Dr. Leopoldo Nachbin (Brasil). Dr. Roberto Frucht (Chile). Dr. Peter Thullen (Ecuador).
Dr. Mario González (Cuba). Dr. Alfonso Nápoles Gandara (México).

Para ingresar como miembro titular de la Unión Matemática Argentina, es necesaria la presentación del solicitante por dos socios fundadores, la admisión por la Junta, y el pago de una cuota de \$ 5. — m/n. mensuales o de \$ 50. — anuales.

Para ingresar como miembro adherente (con derecho a la Revista y a las Memorias en fascículos separados) es necesario el pago de una cuota de \$ 10. — anuales. Los pagos deberán efectuarse por cheque, giro u otro medio libre de gastos, a la orden de la Tesorera, Prof. Clotilde A. Bula, Lavalle 1115, Rosario.

Los señores miembros adherentes domiciliados en la Ciudad de Buenos Aires podrán, si lo prefieren, efectuar su pago en doce cuotas mensuales de \$ 1.00 m/n. cada una, que serán cobradas a domicilio.

Por ser la U. M. A. miembro del patronato de la Mathematical Reviews (sponsoring member), los socios de la U. M. A. tienen derecho a suscribirse a esa importante revista de bibliografía y crítica con 50 % de rebaja sobre el precio de suscripción que es de 13 dólares por año. Los socios de la U. M. A. pagarán por tanto sólo 6.50 dólares por año.

Los trabajos originales enviados para su publicación serán previamente analizados por un ponente, quien emitirá dictamen acerca de la novedad y corrección de sus resultados.

La impresión de las tiradas aparte, y las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

Abonnement annuel à l'étranger: 4.00 dollars (Etats-Unis).

Prière d'adresser toute la correspondance scientifique et administrative à l'adresse ci-dessous:

Sr. SECRETARIO DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

Dr. MÁXIMO VALENTINUZZI

Gascón 520, Buenos Aires (REP. ARGENTINA)

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

Para ingresar a la Asociación Física Argentina debe abonarse una cuota mensual de \$ 5. — m/n. Los estudiantes de física y de astronomía pagarán una cuota mensual de \$ 1. — m/n.

Presidente: Enrique Gaviola

Tesorera: Estrella Mazzoli de Mathov, Buenos Aires, San Juan 1931.

Secretarios Locales: Ernesto E. Galloni, Buenos Aires, Yermal 1763.

Fidel Alsina Fuertes, La Plata, calle 44, N° 717.

Guido Beck, Córdoba, Laprida 922.

José Würschmidt, Tucumán, Laprida 765.

IMPULSO ANGULAR DEL CAMPO DE RADIACION

por JOSÉ A. BALSEIRO

Observatorio Astronómico. - Córdoba

(Entregado el 6 de marzo de 1947)

II. CAMPO MESOTRÓNICO VECTORIAL

§ 8. — Introducción.

El formalismo aplicado al campo de radiación electromagnético puede ser extendido inmediatamente al campo mesotrónico vectorial, que aparece como una generalización del primero, en el sentido que le está asociado una partícula de masa en reposo no nula⁽¹⁾. Las ecuaciones de campo:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{G} + \kappa^2 \vec{U} &= \frac{\partial \vec{F}}{\partial x_0} & \text{div } \vec{G} &= 0 \\ \text{rot } \vec{F} &= -\frac{\partial \vec{G}}{\partial x_0} & \text{div } \vec{F} + \kappa^2 \vec{U} &= 0 \quad \text{con } x_0 = ct \end{aligned} \quad (8.1)$$

se reducen a las ecuaciones de Maxwell con $\kappa = \frac{2\pi mc}{h} = 0$. Las

funciones $\vec{U}$ y U_0 corresponden, respectivamente, a los potenciales vector y escalar y $\vec{F}$ y $\vec{G}$ están dados como en el caso del campo electromagnético por:

$$\vec{G} = \text{rot } \vec{U} \quad \vec{F} = -\frac{\partial \vec{U}}{\partial x_0} - \text{grad } U_0 \quad (8.2)$$

(1) A. PROCA. *J. Phys. et Radium*, 7, 347 (1936). 8, 23 (1937).

cumpléndose, además,

$$\text{div } \vec{U} + \frac{\partial U_0}{\partial x_0} = 0. \quad (8.3)$$

La teoría general de los campos de las partículas elementales da como expresión de la energía total del campo:

$$W = \int [\vec{F}^* \vec{F} + \vec{G}^* \vec{G} + \kappa^2 (\vec{U}^* U + U_0^* U_0)] d\tau \quad (8.4)$$

y del impulso angular total:

$$\vec{J} = \frac{1}{2c} \int [r \times (\vec{F}^* \times \vec{G} + \kappa^2 \vec{U} \cdot U_0 + \text{conj})] d\tau. \quad (8.5)$$

La representación matricial de W y $\vec{J}$ puede hacerse en forma análoga a la expuesta en I § 2 usando las soluciones esféricas de las ecuaciones de campo. Existen, sin embargo, diferencias entre ambos casos: En primer término porque las ecuaciones (8.1) admiten como solución ondas longitudinales ($\text{div } \vec{F} \neq 0$), además de las dos soluciones de ondas transversales equivalentes a las (E) y (M) del campo electromagnético. En segundo lugar, debido a que es posible definir el impulso de espín del campo.

Si se considera al impulso orbital en forma que sea la generalización cuadrivectorial del impulso orbital del campo escalar, se obtiene para el impulso de espín una expresión que es integral de movimiento.

§ 9. — Soluciones esféricas de las ecuaciones de campo.

Las ecuaciones de campo (8.1) admiten, para un sistema de referencia dado, tres clases de soluciones. Dos transversales con $U_0 = 0$ ($\text{div } \vec{F} = 0$) y una longitudinal ($\vec{G} = 0$) que en ondas planas se derivan de:

$$\begin{aligned} \vec{U}^{(1)} &= \sum_k \alpha_k \vec{e}^{(1)} e^{i(k, r - k_0 x_0)} & U_0^{(1)} &= 0 \\ \vec{U}^{(2)} &= \sum_k \beta_k \vec{e}^{(2)} e^{i(k, r - k_0 x_0)} & U_0^{(2)} &= 0 \\ \vec{U}^{(k)} &= \sum_k \gamma_k \vec{e}^{(k)} e^{i(k, r - k_0 x_0)} & U_0^{(k)} &= \sum_k \frac{|k|}{k_0} e^{i(k, r - k_0 x_0)} \end{aligned} \quad (9.1)$$

con

$$k_0^2 = k^2 + \kappa^2 \quad k_0 = \frac{2\pi E}{hc} \quad \vec{k} = \frac{2\pi}{h} \vec{p} \quad \kappa = \frac{2\pi mc}{h}$$

$\vec{e}^{(1)}$ y $\vec{e}^{(2)}$ son dos vectores complejos unitarios (que dan las soluciones $\vec{U}^{(1)}$ y $\vec{U}^{(2)}$ polarizadas circularmente) y $\vec{e}^{(k)} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ (solución $\vec{U}^{(k)}$ polarizada linealmente) que cumplen:

(9.2)

$$\begin{aligned} \vec{e}^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{\varepsilon}^{(1)} + i \vec{\varepsilon}^{(2)}) & \vec{e}^{*(1)} \vec{e}^{(2)} &= 0 & \vec{e}^{(1)} \times \vec{e}^{(k)} &= i \vec{e}^{(1)} \\ & & \vec{e}^{*(1)} \vec{e}^{(1)} &= 1 & \vec{e}^{(2)} \times \vec{e}^{(k)} &= -i \vec{e}^{(2)} \\ \vec{e}^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{\varepsilon}^{(1)} - i \vec{\varepsilon}^{(2)}) & \vec{e}^{*(1)} \vec{e}^{(k)} = \vec{e}^{*(2)} \vec{e}^{(k)} &= 0 & \vec{e}^{(2)} \times \vec{e}^{(1)} &= i \vec{e}^{(k)} \end{aligned}$$

En ondas esféricas las dos primeras son análogas a las soluciones (E) y (M) de las ecuaciones de Maxwell (Apén. II (T. 1) y (T. 2)). La solución longitudinal se obtiene teniendo presente que $\text{rot } \vec{U} = \vec{G} = 0$ con

$$\vec{U} = i k_0 \text{grad } N \quad U_0 = k^2 N$$

N es un escalar que satisface a la ecuación

$$\Delta N + k^2 N = 0.$$

cuya solución en coordenadas esféricas es:

$$N = X_l(kr) P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

$$X_l(kr) = \sqrt{\frac{k}{r}} J_{l+1/2}(kr).$$

Las soluciones esféricas del campo (Apén. II (T. 1), (T. 2) y (L) están normalizadas de modo a obtener para el campo de una partícula descripta por cada una de ellas el valor de la energía (8.4):

$$W = k_0 \frac{h}{2\pi} c = E. \quad (9.3)$$

Las soluciones son ortogonales en el espacio, de modo que no existen elementos de transición de energía entre las distintas soluciones. Además, la matriz de energía es diagonal.

§ 10. — Impulsos angulares.

Los elementos de transición de impulso angular total (8.5) entre las distintas soluciones son nulos. Para una partícula descripta por cada una de ellas se encuentra que el impulso angular total admite una representación matricial idéntica a la obtenida en el caso del campo electromagnético. Se encuentra, también, en igual forma, el impulso angular del campo de un número arbitrario de mesotrones.

El formalismo general desarrollado por Belinfante⁽²⁾ y Pauli⁽¹⁾ conduce a una división del impulso angular total en impulso orbital e impulso de espín de la forma:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} = \int \left[\sum_{s=1}^3 F_s^* (\vec{r} \times \text{grad}) U_s + \text{conj} \right] d\tau + \int [\vec{F}^* \times \vec{U} + \text{conj}] d\tau. \quad (10.1)$$

El impulso orbital, así definido, no es la generalización cuadvectorial del que se obtiene para el campo escalar:

$$\vec{L} = - \int \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial x_0} (\vec{r} \times \text{grad}) \psi + \text{conj} \right] d\tau. \quad (10.2)$$

Sin embargo, puede obtenerse una expresión del impulso orbital generalización cuadvectorial de la (10.2), a partir del tensor energía impulso del campo que estamos considerando:

$$\mathfrak{g}_{ik} = U_{ir}^* U_{kr} + \kappa^2 U_i^* U_k + \text{conj} - \delta_{ik} \left(\frac{1}{2} U_{rs}^* U_{rs} + \kappa^2 U_r^* U_r \right) \quad (10.3)$$

en donde

$$\begin{aligned} U_4 &= i U_0 & U_4^* &= i U_0^* \\ U_{4i} &= i F_i & U_{12} &= G_3, \text{ etc.} \end{aligned} \quad U_{ir} = \frac{\partial U_r}{\partial x_i} - \frac{\partial U_i}{\partial x_r}.$$

Mediante las ecuaciones de campo es expresable en la forma:

$$\mathfrak{g}_{ik} = U_{kr}^* \frac{\partial U_r}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_r} (U_{kr}^* U_i) + \text{conj} - \delta_{ik} \left(\frac{1}{2} U_{rs}^* U_{rs} + \kappa^2 U_r^* U_r \right) \quad (10.4)$$

Se obtiene de aquí la forma (10.1).

Teniendo presente la definición de U_{4r} y (8.3), integrando por partes y considerando que en el límite de integración las funciones de campo se anulan se llega a:

$$\begin{aligned} M_{i4} = \int (x_i \mathfrak{g}_{j4} - x_j \mathfrak{g}_{i4}) d\tau = \int \sum_{r=1}^3 \left[\frac{\partial U_r^*}{\partial x_0} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - \right. \right. \\ \left. \left. - x_j \frac{\partial x_i}{\partial} \right) U_r + \text{conj} \right] d\tau + \int \left[\frac{\partial U_4}{\partial x_4} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - \right. \right. \\ \left. \left. - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right) U_4^* + \text{conj} \right] d\tau + \int [U_4^* U_{ji} + \text{conj}] d\tau. \end{aligned}$$

El tensor de impulso angular total puede escribirse, pues:

$$\begin{aligned} M_{ij4} = \int \sum_{r=1}^4 \left\{ \frac{\partial U_r^*}{\partial x_4} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right) U_r + \text{conj} \right\} d\tau + \\ + \int [U_{4i}^* U_j + U_{j4}^* U_i - U_{ij}^* U_4 + \text{conj}] d\tau. \quad (10.5) \end{aligned}$$

El espín total del campo es también expresable en la forma:

$$S_{ij,4} = \int [U_{4i}^* U_j + U_{j4}^* U_i + U_{ji}^* U_4 + \text{conj}] d\tau = \\ \int \left[\frac{\partial U_i^*}{\partial x_4} U_j - \frac{\partial U_j^*}{\partial x_4} U_i + \text{conj} \right] d\tau.$$

La densidad de impulso de espín es la parte temporal de un tensor de tercer rango:

$$\sigma_{ij,k} = \frac{\partial U_i^*}{\partial x_k} U_j - \frac{\partial U_j^*}{\partial x_k} U_i + \frac{\partial U_i}{\partial x_k} U_j^* - \frac{\partial U_j}{\partial x_k} U_i^*$$

que por las ecuaciones de campo satisface la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{ij,k} = 0.$$

En la separación (10.5) el espín total del campo aparece como integral de movimiento.

El impulso orbital y el de espín expresados vectorialmente tienen la forma:

$$\vec{L} = - \int \sum_{r=1}^4 \left\{ \frac{\partial U_r^*}{\partial x_0} (\vec{r} \times \text{grad}) U_r + \text{conj} \right\} d\tau. \quad (10.6)$$

$$\vec{S} = \int [\vec{F}^* \times \vec{U} - \vec{G}^* U_0 + \text{conj}] d\tau = \\ = \int [\vec{U}^* \times \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_0} + \text{conj}] d\tau. \quad (10.7)$$

En la representación matricial de $\vec{S}$, mediante las soluciones esféricas, los elementos de matriz correspondientes a la solución (L) son nulos. Existen, además, elementos de transición no nulos entre las soluciones (T. 1) y (T. 2), (T. 1) y (L), (T. 2) y (L).

En esta representación el impulso total está sobre ejes principales; no así, el impulso orbital y el impulso de espín.

El factor $\frac{k_0}{\kappa}$ afecta a los elementos de transición entre las soluciones (T. 1) y (L) y (T. 2) y (L), y su aparición se debe a las propiedades de transformación de las componentes de $\vec{S}$. Este factor desaparece si (L) se da en la aproximación no relativista

$$\frac{E}{c} \approx m c \left(1 + \frac{P^2}{2m^2 c^2} \right) \approx m c$$

$$\vec{F} = -i \kappa \vec{U} \quad \vec{U} = \text{grad } N$$

$$\Delta N + \frac{8\pi^2 m_0 E}{h} N = 0.$$

§ 11. — Operador de espín.

Si el campo es cuantificado la (10.7) permite definir el operador de espín del campo. Resulta, ahora, más simple emplear las soluciones dadas en ondas planas (9.1). Normalizados los operadores de amplitud

$$a_k = \sqrt{\frac{4\pi k_0}{hc}} \alpha_k, \quad b_k = \sqrt{\frac{4\pi k_0}{hc}} \beta_k, \quad c_k = \sqrt{\frac{2}{k_0}} \kappa \gamma_k.$$

cumpléndose

$$a_k a_{k'}^\dagger - a_{k'}^\dagger a_k = b_k b_{k'}^\dagger - b_{k'}^\dagger b_k = c_k c_{k'}^\dagger - c_{k'}^\dagger c_k = \delta_{kk'}. \quad (11.1)$$

Considerando, ahora, la solución:

$$\vec{U} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\sqrt{2k_0} \vec{U}^{(1)} + \sqrt{2k_0} \vec{U}^{(2)} + \sqrt{\frac{2}{k_0}} \kappa \vec{U}^{(k)} \right]$$

se obtiene el operador de energía:

$$W = \sum_k (a_k^\dagger a_k + b_k^\dagger b_k + c_k^\dagger c_k) E_k. \quad (11.2)$$

De (10.7) se obtiene el operador de espín

$$\begin{aligned} \vec{S} = \frac{h}{2\pi} \sum_k (a_k^\dagger a_k - b_k^\dagger b_k) \vec{e}^{(k)} + \frac{k_0}{\kappa} (b_k^\dagger c_k - c_k^\dagger a_k) \vec{e}^{(1)} + \\ + \frac{k_0}{\kappa} (c_k^\dagger b_k - a_k^\dagger c_k) \vec{e}^{(2)} \end{aligned} \quad (11.3)$$

cuyas componentes según $\vec{e}^{(k)}$, $\vec{e}^{(1)}$ y $\vec{e}^{(2)}$ son:

$$\begin{aligned} S_k &= \frac{h}{2\pi} \sum_k (a_k^\dagger a_k - b_k^\dagger b_k) \\ S^{(1)} &= \frac{h}{2\pi} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{k_0}{\kappa} (c_k^\dagger b_k - a_k^\dagger c_k + b_k^\dagger c_k - c_k^\dagger a_k) \\ S^{(2)} &= \frac{h}{2\pi} \sum_k \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{k_0}{\kappa} (b_k^\dagger c_k - c_k^\dagger a_k - c_k^\dagger b_k + a_k^\dagger c_k). \end{aligned} \quad (11.4)$$

S_k es diagonal y tiene los valores propios $+1$, -1 y 0 .
El factor

$$\frac{k_0}{\kappa} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

aparecer en las componentes transversales debido a las propiedades de transformación relativista de $\vec{S}$.

Teniendo presente las reglas de conmutación (11.1) se obtiene inmediatamente de (11.2) y (11.3) que

$$[W, \vec{S}] = W \vec{S} - \vec{S} W = 0.$$

Nuevamente, se llega a que el espín total es integral de movimiento.

Calculando el impulso orbital (10.6) se comprueba, igualmente, que conmuta con las componentes (11.4) de $\vec{S}$. Ade-

más, se comprueba, que en la aproximación $\frac{k_0}{\kappa} \approx 1$, se cumplen las reglas de conmutación:

$$[S_1, S_2] = i \frac{h}{2\pi} S_3$$

$$[S_3, S_1] = i \frac{h}{2\pi} S_2$$

$$[S_2, S_3] = i \frac{h}{2\pi} S_1.$$

Considerando el campo de una partícula en aproximación no relativista se obtienen la representación matricial de las (11.4)

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{h} S_z &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \frac{2\pi}{h} S_x &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} \\ \frac{2\pi}{h} S_y &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} & & \end{aligned} \quad (11.5)$$

Mediante la transformación unitaria

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -i & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} \quad \varepsilon = T e \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \vec{\varepsilon}^{(1)} \\ \vec{\varepsilon}^{(2)} \\ \vec{\varepsilon}^{(k)} \end{pmatrix} \quad e = \begin{pmatrix} \vec{e}^{(1)} \\ \vec{e}^{(2)} \\ \vec{e}^{(k)} \end{pmatrix}$$

se obtiene:

$$\vec{\zeta} = T \vec{S} \tilde{T} \quad (11.6)$$

donde $\vec{\zeta}$ son las matrices dadas por Proca⁽⁷⁾ y Yukawa⁽⁸⁾

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{h} \zeta_x &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{vmatrix} & \frac{2\pi}{h} \zeta_y &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \frac{2\pi}{h} \zeta_z &= \begin{vmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (11.7)$$

mediante las cuales se escribe:

$$\frac{\partial \vec{U}^*}{\partial x_0} \times \vec{U} = -i \frac{\partial \mathcal{U}^+}{\partial x_0} \vec{\zeta} \vec{\mathcal{U}} = -i \left(\frac{\partial \mathcal{U}^+}{\partial x_0} T \right) \vec{S} (\tilde{T} \mathcal{U}) \quad (11.8)$$

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}. \quad (11.9)$$

La transformación T permite pasar de la representación de polarización lineal a la de polarización circular. Las funciones propias se transforman:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (U_1 + i U_2) \\ V_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (U_1 - i U_2) \\ V_3 &= U_3 \end{aligned} \quad (11.10)$$

En la aproximación no relativista $U_0 \cong 0$, y por ello pueden considerarse las matrices $\vec{\zeta}$ o $\vec{S}$ como el operador de espín equivalente al de la teoría del espín del electrón de Pauli.

(*) H. YUKAWA, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*, 20, 720, (1938).

§ 12. — *Influencia de un campo magnético.*

Consideremos un mesotróon en un campo magnético constante $\vec{H}$.

Las ecuaciones de campo se obtienen substituyendo el operador ⁽¹⁾:

$$D_k \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{2\pi ie}{hc} A_k$$

donde A_k es el cuadvivector potencial del campo exterior. Se cumple:

$$D_i D_k - D_k D_i = -\frac{2\pi ie}{hc} f_{ik} \quad f_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \quad (12.1)$$

Las ecuaciones (8.2) se escriben:

$$U_{ik} = D_i U_k - D_k U_i \quad (12.2)$$

y las (8.1)

$$D_k U_{ik} + \kappa^2 U_i = 0. \quad (12.2')$$

De aquí se obtiene la equivalente a la (8.3):

$$D_i U_i = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi ie}{\kappa^2 hc} f_{ik} U_{ik}. \quad (12.3)$$

Aplicando a (12.2) D_i y sumando sobre i , mediante la (12.1) y (12.3) se obtiene:

$$\left[\sum_{k=1}^4 D_k^2 - \kappa^2 \right] U_i = \frac{\pi ie}{\kappa^2 hc} D_i [f_{ik} U_{ik}] - \frac{2\pi ie}{hc} f_{ik} U_k.$$

La transición a la aproximación no relativista se logra substituyendo

$$D_4^2 \text{ por } \kappa^2 + \frac{4\pi im}{h} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{2\pi ie}{hc} \Phi \right) \quad \Phi = -i A_4$$

obteniéndose para $\Phi=0$ y $H=(f_{23}, f_{31}, f_{12})$

$$\frac{i\hbar}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} U_i = \left[-\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \sum_{k=1}^3 D_k^2 U_i \right] + \frac{i\hbar e}{4\pi m c} [\vec{H} \times \vec{U}]_i$$

expresiones que mediante las matrices (11.7) y la representación (11.8) pueden darse en la forma:

$$\frac{i\hbar}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U} = \left[-\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \sum_{k=1}^3 D_k^2 - \frac{e\hbar}{4\pi m c} (\vec{H} \cdot \vec{\zeta}) \right] \mathcal{U}. \quad (12.4)$$

Los términos entre corchetes representa el hamiltoniano, en el cual aparece el término adicional

$$\frac{e\hbar}{4\pi m c} (\vec{H} \cdot \vec{\zeta}) = \mu (\vec{H} \cdot \vec{\zeta})$$

atribuible a la energía potencial debida al espín del mesotróon.

En el caso particular en que $H=H_z$, $H_x=0$, $H_y=0$, mediante la transformación T , el espín se transforma sobre ejes principales.

En el caso general en que H forme un ángulo ϑ con la dirección z se logra expresar al espín sobre ejes principales mediante una rotación de coordenadas dada por los ángulos ϑ , φ , ψ siendo los dos últimos los otros dos ángulos de Euler. Referidos al nuevo sistema serán:

$$H' = R H \quad H'_x = H'_y = 0 \quad H'_z = H \quad (12.5)$$

$$\begin{aligned} H &= \tilde{R} H' & H_x &= \sin \varphi \sin \vartheta H; & H_y &= -\cos \varphi \sin \vartheta H \\ H_z &= \cos \vartheta H \end{aligned} \quad (12.6)$$

donde R es la matriz unitaria:

$$R = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta \\ -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \sin \psi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta & \sin \psi \sin \vartheta \\ -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta & \cos \psi \sin \vartheta \\ -\cos \varphi \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo (12.6) en (12.4) se obtiene:

$$\frac{i\hbar}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U} = \left[-\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \sum_{k=1}^3 D_k^2 - \mu H \sigma_3 \right] \mathcal{U}$$

donde

$$\sigma_3 = \tilde{R} \zeta_3 R.$$

Aplicando la transformación

$$\tilde{T} R$$

$$\begin{aligned} \frac{i\hbar}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{T} R T) \tilde{T} \mathcal{U} -] &= \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \sum_{k=1}^3 D_k^2 - \\ &- \mu H (\tilde{T} R \sigma_3 \tilde{R} T) (\tilde{T} R T) \tilde{T} \mathcal{U} \end{aligned}$$

$$\frac{i\hbar}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} V' = \left[-\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \sum D_k^2 - \mu H \cdot S_3 \right] V' \quad (12.7)$$

$$V' = \tilde{T} R T \cdot V \text{ siendo } V = \tilde{T} \mathcal{U}. \quad (12.8)$$

Las componentes de V' están dadas por las combinaciones lineales que resultan de (12.8). El cuadrado de los coeficientes α_{ik} de estas combinaciones lineales dan la probabilidad que estando orientado el espín según V_k por efecto de un campo magnético $H = H_z$, $H_x = H_y = 0$, se oriente por acción del un nuevo campo magnético que sustituye al primero y cuya dirección forma un ángulo ϑ con z , según la componente V'_z :

	$V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (U_1 + iU_2)$	$V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (U_1 - iU_2)$	$V_3 = U_3$
V'_1	$\text{sen}^4 \frac{\vartheta}{2}$	$\text{cos}^4 \frac{\vartheta}{2}$	$\frac{1}{2} \text{sen}^2 \vartheta$
V'_2	$\text{cos}^4 \frac{\vartheta}{2}$	$\text{sen}^4 \frac{\vartheta}{2}$	$\frac{1}{2} \text{sen}^2 \vartheta$
V'_3	$\frac{1}{2} \text{sen}^2 \vartheta$	$\frac{1}{2} \text{sen}^2 \vartheta$	$\text{cos}^2 \vartheta$

Los valores propios de la energía dados por (12.7) según (11.5) son:

$$E_1 = E_0 - \mu H$$

$$E_2 = E_0 + \mu H$$

$$E_3 = E_0$$

donde E es la energía en ausencia del campo magnético y H el valor absoluto del campo magnético. Hay una adición de energía $\mp \mu H$ según las componente V'_1 y V'_2 . La energía según la componente V'_3 permanece invariable.

Deseo expresar mi reconocimiento al Prof. Dr. G. Beck por haberme propuesto el tema, por su permanente asesoramiento, y por sus útiles discusiones; y al Prof. Dr. E. Gaviola, por haber hecho posible la realización de este trabajo.

APÉNDICE II

Soluciones esféricas del campo mesotrónico vectorial:

(T. 1)

$$U_r = 0.$$

$$G_r = -i C_1^{l,m} \frac{l(l+1)}{r^2} \psi_l(kr) P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

$$U_\vartheta = C_1^{l,m} \frac{m}{r \text{sen} \vartheta} \psi_l(kr) P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

$$G_{\vartheta} = -i C_1^{l,m} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \psi_l(kr) \frac{d}{d\vartheta} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

$$U_{\varphi} = C_1^{l,m} \frac{i}{r} \psi_l(kr) \frac{d}{d\vartheta} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

$$G_{\varphi} = C_1^{l,m} \frac{m}{r \sin \vartheta} \frac{d}{dr} \psi_l(kr) P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

$$\vec{F} = -i k_0 \vec{U} \quad U_0 = 0.$$

(T. 2)

$$U_r = C_2^{l,m} \frac{l(l+1)}{r^2} \psi_l(kr) P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

$$G_r = 0$$

$$U_{\vartheta} = C_2^{l,m} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \psi_l(kr) \frac{d}{d\vartheta} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

$$G_{\vartheta} = C_2^{l,m} \frac{ik^2 m}{r \sin \vartheta} \psi_l(kr) P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

$$U_{\varphi} = C_2^{l,m} \frac{im}{r \sin \vartheta} \frac{d}{dr} \psi_l(kr) P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

$$G_{\varphi} = C_2^{l,m} \frac{k^2}{r} \psi_l(kr) \frac{d}{d\vartheta} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

$$\vec{F} = -i k_0 \vec{U} \quad U_0 = 0.$$

(L)

$$U_r = C_L^{l,m} i k_0 \frac{d}{dr} X_l(kr) P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

$$\vec{F} = C_L^{l,m} \frac{\kappa^2}{i k_0} \vec{U}$$

$$U_{\vartheta} = C_L^{l,m} i k_0 \frac{1}{r} X_l(kr) \frac{d}{d\vartheta} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

$$\vec{G} = 0$$

$$U_{\varphi} = -C_L^{l,m} \frac{k_0 m}{r \sin \vartheta} X_l(kr) P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

$$U_0 = C_L^{l,m} k^2 X_l(kr) P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}.$$

Con:

$$\psi_l(kr) = \sqrt{kr} J_{l+1/2}(kr), \quad X_l(kr) = \sqrt{\frac{k}{r}} J_{l+1/2}(kr)$$

$$C_1^{l,m} = \left[\frac{hc}{8\pi^2 R k_0} \cdot \frac{(2l+1)(l-m)!}{l(l+1)(l+m)!} \right]^{1/2}$$

$$C_2^{l,m} = \left[\frac{hck^2}{8\pi^2 R k_0^3} \cdot \frac{(2l+1)(l-m)!}{l(l+1)(l+m)!} \right]^{1/2}$$

$$C_L^{l,m} = \left[\frac{hc}{8\pi^2 R} \cdot \frac{1}{k^2 \kappa^2 k_0} \cdot \frac{(2l+1)(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2}$$

Los elementos de matriz del espín se calculan en la representación dada por las soluciones esféricas teniendo presente las relaciones:

$$\frac{d}{dr} \psi_l(kr) = -\frac{l}{r} \psi_l(kr) + k \psi_{l-1}(kr) = \frac{l+1}{r} \psi_l(kr) - k \psi_{l+1}(kr)$$

$$\frac{d}{dr} X_l(kr) = -\frac{l+1}{r} X_l(kr) + k X_{l-1}(kr) = \frac{l}{r} X_l(kr) - k X_{l+1}(kr)$$

$$\frac{d}{d\vartheta} P_l^m(\cos \vartheta) = -P_l^{m+1}(\cos \vartheta) + m \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} P_l^m(\cos \vartheta)$$

$$\sin \vartheta P_l^{m-1}(\cos \vartheta) = \frac{1}{2l+1} [P_{l+1}^m(\cos \vartheta) - P_{l-1}^m(\cos \vartheta)]$$

$$\cos \vartheta P_l^m(\cos \vartheta) = \frac{l-m+1}{2l+1} P_{l+1}^m(\cos \vartheta) + \frac{l+m}{2l+1} P_{l-1}^m(\cos \vartheta).$$

NOTAS SOBRE FUNCIONES DETERMINANTES

por el Prof. Dr. UGO BROGGI

I. — Una generalización de la función logaritmo

1. Demostraba en un trabajo anterior (1), entre otras cosas, que, si

$$\varphi(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n(t) \quad [1]$$

donde t es una variable real positiva y

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t} t^n)$$

es el polinomio de *Laguerre* de orden n , y

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c_0 + c_1 + \dots + c_n)^2 < \infty \quad [2]$$

Se verifica:

A) la serie (1) converge y la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c_0 + c_1 + \dots + c_n) [L_n(t) - L_{n+1}(t)]$$

converge uniformemente en todo intervalo completo finito de $(0, \infty)$ y es

(1) *Contributo allo studio degli sviluppi in serie di polinomi di LAGUERRE.*
Annali di Matematica pura e applicata, IV, XIX. (1940), pp. 141-150.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_0 + c_1 + \dots + c_n) [L_n(t) - L_{n+1}(t)]$$

La propiedad (A) y la limitación de Szegő:

$$|L_n(t)| < e^{1/2} \quad \text{si } t > 0$$

NOTAS SOBRE FUNCIONES DETERMINANTES
así como

por el Prof. Dr. Ugo Bergani

$$\sum_{n=0}^N (c_0 + c_1 + \dots + c_n) [L_n(t) - L_{n+1}(t)] =$$

$$= \sum_{n=0}^N c_n L_n(t) - (c_0 + c_1 + \dots + c_N) L_{N+1}(t)$$

I. Demostremos en un trabajo anterior (1), entre otras cosas, que si N es bastante grande para que pueda suponerse

$$[1] \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (c_0 + c_1 + \dots + c_n) [L_n(t) - L_{n+1}(t)] \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$e^{1/2} |c_0 + c_1 + \dots + c_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

en correspondencia de valores de t pertenecientes al intervalo $0 \leq t_0 \leq t \leq T$ es también

$$[2] \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n |L_n(t)| < \varepsilon$$

donde $\varepsilon > 0$ es cualquiera.

Análogamente, si la serie (1) converge y la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c_0 + c_1 + \dots + c_n) < \infty$$

se sigue que para el intervalo completo $[0, T]$ podemos suponer N' tal que

(1) Contributo allo studio delle funzioni determinanti. Annali di Matematica pura e applicata, VI, 1911, pp. 141-150.

de que *E. Laguerre* estudiara los polinomios que llevan su nombre:

$$\frac{1}{s} \left(\frac{s-1}{s} \right)^n = \int_0^{\infty} e^{-ts} L_n(t) dt \quad (Rs > 0) \quad (3)$$

3. Como 1 es punto singular de la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^r}$ donde es supuesto $r > 1$ y por consiguiente satisfecha A_2 ,

$$f_r(s) = \int_0^{\infty} e^{-ts} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} L_n(t) dt \quad (4)$$

es singular en el infinito.

Si

$$\Gamma'(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} \ln t dt$$

es la constante de *Mascheroni-Euler*, es

$$\frac{\Gamma'(1)}{s} - \frac{\ln s}{s} = \int_0^{\infty} e^{-ts} \ln t dt \quad (Rs > 0)$$

mientras

$$\frac{1}{s} \ln s = \frac{1}{s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{s-1}{s} \right)^n \quad \left(Rs > \frac{1}{2} \right)$$

$\sum \frac{1}{n} L_n(t)$ es el desarrollo formal de $\Gamma'(1) - \ln t$ en serie de polinomios de *Laguerre*: la abscisa de convergencia de la integral que expresa $f_r(s)$ no es mayor que la que corresponde a $\int_0^{\infty} e^{-ts} \ln t dt$ ni, como se ve sin más, menor que 0: es por tanto 0 la abscisa de convergencia de (4) y llamando

$$F_r(s) = s f_r(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{s-1}{s} \right)^n$$

es en el semiplano $Rs > \frac{1}{2}$:

$$F_r(1+s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} s^n (1+s)^{-n}$$

y por lo tanto, en un cierto entorno de $s=0$,

$$F_r(1+s) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ 1 - \binom{n}{1} \frac{1}{2^r} + \binom{n}{2} \frac{1}{3^r} - \dots + (-1)^n \frac{1}{(n+1)^r} \right\} s^{n+1} \quad (5)$$

y en un cierto entorno de $s=1$:

$$F_r(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ 1 - \binom{n}{1} \frac{1}{2^r} + \binom{n}{2} \frac{1}{3^r} - \dots + (-1)^n \frac{1}{(n+1)^r} \right\} (s-1)^{n+1}$$

Si

$$H_r = 1 - \binom{n}{1} \frac{1}{2^r} + \dots + (-1)^n \frac{1}{(n+1)^r}$$

es también, cualquiera sea r positivo y entero

$$H_r > 0$$

mientras que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} H_r = 1$$

se tiene en realidad, si $0 \leq t \leq 1$, $r=2, 3, \dots$

$$H_1(t) = \frac{1}{t} \int_0^t (1-t)^n dt, \quad H_r(t) = \frac{1}{t} \int_0^t H_{r-1}(t) dt$$

$$H_r = H_r(1) > 0$$

$$H_1 = \frac{1}{n+1} \left\{ \binom{n+1}{1} - \binom{n+1}{2} + \dots + (-1)^n \binom{n+1}{n+1} \right\} = \frac{1}{n+1}$$

$$F_1(1+s) = \ln(1+s).$$

(5) generaliza la serie logarítmica y tiene, como ésta, el radio de convergencia 1. Y como O_s es punto singular de $\ln s$ lo es también de $r(s)$, cualquiera que sea r , positivo entero: el teorema de Vivanti, desde $\frac{1}{2} < \frac{1}{r} < 1$, es independiente de él el hecho de que $F_r(s)$ como $f_r(s)$ es regular en $Rs > 0$ permiten afirmarlo. Sobre el círculo de convergencia $|s-1|=1$ del desarrollo de $F_r(s)$ no podría no hallarse por lo menos un punto singular de la suma de la serie, regular en todos los demás puntos, interiores al semiplano de convergencia $Rs > 1$.

La pregunta: Si 0 e ∞ son los únicos puntos singulares de $F_r(s)$ así como ellos lo son de $\ln s$, exige que se prolongue analíticamente $f_r(s)$ en $Rs \leq 0$.

El desarrollo en serie de Taylor de $f_r(s)$ nos permitirá alcanzar todos los puntos de $Rs \leq 0$ pertenecientes al semiplano real negativo y demostrar su regularidad.

Es sabido que si en $\frac{1}{s} = \frac{1}{1-s} - 1$ $\sum_{n=0}^{\infty} (1-s)^n = \frac{1}{1-s}$

$$1 + n(1-s) \left\{ \frac{1}{1-s} \right\}^n = \int_0^{\infty} e^{-ts} \varphi(t) dt$$

es también en el mismo semiplano, idénticamente respecto de n :

$$\frac{1}{1 + n(1-s)} = \frac{1}{(-1)^n} \int_0^{\infty} e^{-ts} \varphi(t) dt$$

orden y ordeno y sea semiplano, idénticamente

y por consiguiente que el desarrollo en serie de Taylor resulta ser

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(s-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-ts} t^n \varphi(t) dt$$

..., $s=1$, $s \geq 0$ es, habiéndose en

idénticamente en $Rs > \mu$.

Es interesante el hecho de que el desarrollo de $Q(t)$ en serie de polinomios de Laguerre permite reemplazar las integrales del segundo miembro por series de polinomios de las potencias negativas enteras de s_0 ; de manera idéntica si, como vamos a suponer, aquí es $Rs_0 \neq 1$, y previa una inmediata transformación de variable en caso contrario. Si $Rs > 0$, $m=0, 1, 2, \dots, k$ real es:

$$(s+1) \varphi = (s+1) \varphi$$

El radio de convergencia por la serie correspondiente a un valor finito arbitrario de k es $\sqrt{1+k^2}$, puesto que el
 Es evidente que no podría ser $\sqrt{1+k^2} > \sqrt{1+k^2}$, puesto que el
 punto O es singular. Si fuera por el contrario, el círculo de convergencia de la serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)}{h^n} e^{-ikt}$ sería interior a los círculos correspondientes a valores de $|k|$ bastante grandes. Y la serie regular en todo punto de $|s-1| < \sqrt{1+k^2}$.
 No resulta posible por el contrario alcanzar a los puntos del semieje real negativo, y queda sin contestación la pregunta que concierne a su regularidad.

$$\int_0^{\infty} e^{-t} e^{-ikt} L_n(t) dt = \frac{1}{(1+ik)^{n+1}} \left(1 - \frac{1}{(1+ik)^{n+1}} \right)$$

La serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)}{h^n} e^{-ikt}$ converge en la zona $|s-1| < \sqrt{1+k^2}$.
 Si la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)}{h^n} e^{-ikt}$ es uniforme en la zona $|s-1| < \sqrt{1+k^2}$, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)}{h^n} e^{-ikt}$ converge en la zona $|s-1| < \sqrt{1+k^2}$.
 El radio de convergencia del desarrollo de $f_r(s)$ es

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n^z} \left(1 - \frac{1}{(1+ik)^{n+1}} \right) \right|^{1/m} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$$

Si $k \rightarrow \infty$, entonces $\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \rightarrow 0$.
 Si $k \rightarrow 0$, entonces $\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \rightarrow 1$.
 El radio de convergencia del desarrollo de $f_r(s)$ es $\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$.

El radio de convergencia ρ_k de la serie, correspondiente a un valor finito arbitrario de k es $\sqrt{1+k^2}$.

Es evidente que no podría ser $\rho_k > \sqrt{1+k^2}$, puesto que el punto O es singular. Si fuera por el contrario $\rho_k < \sqrt{1+k^2}$ el círculo de convergencia de centro $1+ik$ y del cual ρ_k es el radio, sería interior a los círculos correspondientes a valores de $|k|$ bastante grandes, y la suma de la serie sería regular en todo punto de $|s-1-ik|=\rho_k$.

No resulta posible por el contrario alcanzar a los puntos del semieje real negativo, y queda sin contestación la pregunta, que concierne a su regularidad.

II. — Funciones de Bessel y polinomios de Laguerre.

Formulaba yo en la nota anterior (1) el teorema según el cual la serie de polinomios de Laguerre $\sum c_n L_n(t)$ converge uniformemente en todo intervalo cerrado finito de $(0, \infty)$, si $\sum |c_n| < \infty$.

Si la condición está satisfecha, un teorema de Bromwich (2) permite deducir de ella y de

$$\int_0^{\infty} |e^{-ts}| dt < \infty \quad (Rs > 0)$$

que

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-ts} \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n(t) dt \quad (Rs > 0)$$

$$f(s) = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{s-1}{s} \right)^n \quad \left(Rs > \frac{1}{2} \right).$$

Es pues, no únicamente

$$\frac{1}{s} e^{-\alpha^2/4s} = \frac{1}{s} e^{-\alpha^2/4} e^{\alpha^2/4 \frac{s-1}{s}} = e^{-\alpha^2/4}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ts} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^{2n} \frac{1}{n!} L_n(t) dt \quad (Rs > 0).$$

(1) Una generalización de la función logaritmo.

(2) BROMWICH, An Introduction to the theory of infinite series (1926) (p. 499 y 500).

sino también, desde que, como es sabido, el desarrollo $(1-x)^\mu$ converge absolutamente en todo punto de $|x|=1$ si $R_\mu > 0$ (3), y converge absolutamente la serie producto de dos series absolutamente convergentes, si $\nu > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^\nu}{2^\nu s^{1+\nu}} e^{-\alpha^2/4s} &= \left(\frac{\alpha}{2}\right)^\nu e^{-\alpha^2/4s} \frac{1}{s} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2n} \frac{1}{n!} \left(\frac{s-1}{s}\right)^n\right) \\ &= \left(\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{\nu}{r} \left(\frac{s-1}{s}\right)^r\right) \left(\frac{\alpha}{2}\right)^\nu e^{-\alpha^2/4s} \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2n} - \right. \\ &\quad \left. \binom{\nu}{1} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2n-2} + \dots + (-1)^n \binom{\nu}{n} \right] \left(\frac{s-1}{s}\right)^n = \\ &= \left(\frac{\alpha}{2}\right)^\nu e^{-\alpha^2/4s} \int_0^\infty e^{-ts} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\nu}{r} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2(n-r)}\right] L_n(t) dt \end{aligned}$$

o, si $\alpha = 2\sqrt{x}$

$$\frac{1}{s^{1+\nu}} e^{-x/s} = e^{-x} \int_0^\infty e^{-ts} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\nu}{r} \frac{x^{n-r}}{(n-r)!}\right) L_n(t) dt \quad (Rs > 0)$$

La función de *Bessel* de orden 0

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

y $t^{\nu/2} J_\nu(2\sqrt{xt})$, donde

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

es la función de *Bessel* de orden ν , siendo las funciones generatrices de las determinantes $\frac{1}{s} e^{-x/s}$ respectivamente $\frac{1}{s^{1+\nu}} e^{-x/s}$, se tiene, por el teorema de unicidad de la teoría de las funciones determinantes, que si $\binom{0}{0} = 1$ y si $r > 0$, $\binom{0}{r} = 0$, $\nu \geq 0$,

$$t^{\nu/2} J_\nu(2\sqrt{xt}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\nu}{r} \frac{x^{n-r}}{(n-r)!}\right) L_n(t), \quad (\text{I})$$

(^a) Cfr. p. e. K. KNOPP. Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen (1922), p. 410.

sobre la recta $Rs = v$. Si $v = (\alpha - \beta)$, ($\alpha > 0, \beta \geq 0$) la función

$$(s + \beta) f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{s - \alpha}{s + \beta} \right)^n$$

admite un desarrollo de radio de convergencia 1, así como si

$\frac{s - \alpha}{s + \beta} = u$, es 1 el radio de convergencia de

$$F(u) = f\left(\frac{\alpha + \beta u}{1 - u}\right) = \frac{1}{\alpha + \beta} \left[c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (c_n - c_{n-1}) u^{n+1} \right]$$

El principio de mínimo de *Phragmen-Lindelöf*, que extiende el principio de mínimo de *Cauchy* al caso en el cual sobre el contorno se hallan puntos singulares de la función expresa (2):

«Si $\psi(z)$ es regular y $|\psi(z)|$ uniforme en un dominio finito D y, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$ y en una cierta vecindad interior de todo punto ζ del contorno (dependiente de ζ) es $|\psi(z)| < M + \varepsilon$ es $|\psi(z)| \leq M$ en todo punto interior y la igualdad en cualquier punto interior significa que $\psi(z)$ es constante en D ». Este principio permite afirmar que

«Si es μ la abscisa de convergencia de la función determinante $f(s)$, y $|f(s)| < M + \varepsilon$ sobre $Rs = \mu$ y en una cierta vecindad de $Rs = \mu$, interior al semiplano de convergencia, o $|f(s)| < M$ sobre $Rs = v > \mu$, es $|f(s)| < M$ en el semiplano $Rs > \mu$ o bien $Rs > v$ respectivamente».

Si $f(s)$ no es regular al mismo tiempo en los puntos de $Rs = v$ y en el infinito, el teorema es una consecuencia inmediata del principio de *Phragmen-Lindelöf*; a $u = 1$ corresponde $s = \infty$, a $|u| = 1$ $Rs = v$, mientras $F(u)$ nos da la representación conforme sobre el círculo $|u| < 1$ de $f(s)$ en el semiplano $Rs > v$. Si $F(u)$ es limitada en $|u| < 1$, $f(s)$ lo es en $Rs > v$.

Si por el contrario $f(s)$ es regular en el ∞ y es $v > \mu$, y $k > 0$ es bastante grande para que

$$\Phi(s) = \frac{1}{s + k} \ln(s + k)$$

tenga una abscisa de convergencia menor que v , el teorema sub-

(2) E. PHRAGMEN ET E. LINDELÖF. Sur une extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier. Acta Math. v. 31 pag. 381-406.

siste para $f(s) + \phi(s)$ y para $\phi(s)$ y por lo tanto también para la diferencia de las dos funciones, de módulo a lo más igual a la suma de los módulos de éstas (3).

2. El teorema de *Nevanlinna* (4) que da las condiciones necesarias y suficientes para que sea: $|\varphi(z)| < 1$ en el círculo $|z| < 1$, a saber:

$$|\varphi_n(0)| \leq 1 \quad (n=0, 1, \dots)$$

donde (si $\bar{a}$ es el número complejo conjugado de a)

$$\varphi_0(z) = \varphi(z), \quad \varphi_n(z) = \frac{\bar{\varphi}_{n-1}(z) - \varphi_{n-1}(0)}{1 - \bar{\varphi}_{n-1}(0)\varphi_{n-1}(z)} \cdot \frac{1}{z}$$

da al mismo tiempo las condiciones para que la función determinante $f(s)$, de abscisa de convergencia μ sea de módulo menor que 1 en $Rs > \nu \geq \mu$, si $f(s)$ no es regular en el infinito y para que sea de módulo menor que 1 en $Rs > \mu$, si $f(s)$ es regular en el infinito.

Si es

$$f(s) = \frac{1}{s+\beta} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{s-\alpha}{s+\beta} \right)^n \quad (Rs > \nu = \frac{1}{2}(\alpha-\beta))$$

$$\varphi(z) = f\left(\frac{\alpha+\beta z}{1-z}\right) = \frac{1}{\alpha+\beta} \left[c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - c_{n-1}) z^n \right]$$

es también

$$|f(s)| < 1 \quad \text{en } Rs > \nu$$

si es

$$|\varphi(z)| < 1 \quad \text{en } |z| < 1.$$

(3) Si, como hace G. DÖRSCH (*Theorie und Anwendungen der Laplace-Transformation*), se preinde de la representación del semiplano sobre el círculo y se opera análogamente con el tema de *Phragmen-Lindelöf*, concerniente a las funciones $f(s)$ regulares en un ángulo $2\alpha \leq 2\pi$, queda excluida la posibilidad de la consideración de funciones limitadas en los puntos de la recta de convergencia y se precisa además, para la demostración de la proposición concerniente a funciones limitadas en los puntos de una recta paralela a la recta de convergencia e interior al semiplano de convergencia, recurrir a otros temas de carácter más particular.

(4) R. NEVANLINNA, *Ueber beschränkte Funktionen*, Ann. Soc. Fennicae v. 13 pag. 1-71.

las funciones de Green de la ecuación de Klein-Gordon. En el teorema de Weyl, se demuestra que las condiciones de contorno en el infinito se satisfacen para las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon. En el teorema de Weyl, se demuestra que las condiciones de contorno en el infinito se satisfacen para las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon.

LAS FUNCIONES DE GREEN DE LA ECUACIÓN (DE KLEIN - GORDON)

por
MARIO SCHÖNBERG

Departamento de Física, San Pablo (Brasil)

(Recibido el 1 de noviembre de 1946)

Abstract: The Green functions of the Klein-Gordon equation and other functions related to the Green functions, like the fundamental solution, defined according to Hadamard's general method and the Riesz method of integration, that which correspond to the meson mass are discussed, and the considered as Green functions for complex integration.

The solutions which describe the meson field with frequencies below that which correspond to the meson mass are discussed, and the consideration of these solutions allow to describe satisfactorily the transition from a general meson field to a static one. This transition presents some new features in the case when the rest mass of the field quanta is not zero.

Finally, the behaviour of the Green functions of the retarded and advanced fields in relation to the value of the variable in regard to the light cone is discussed.

1. — Introducción.

En la mecánica cuántica relativista, la relación entre la energía y el impulso de una partícula libre

se expresa como sigue: $E = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2}$ (1)

donde m es la masa en reposo de la partícula, p es el vector de impulso

m = masa en reposo de la partícula,

E = energía de la partícula

soluciones; y otros tipos de funciones que están relacionadas con las funciones de Green, tales como la solución fundamental definida de acuerdo al método general de Hadamard y la función que aparece en el método de integración de Riesz⁽⁷⁾. Se examinan las relaciones entre las funciones de Green y las diferentes funciones mencionadas, y se demuestra que algunas de ellas pueden ser consideradas como funciones de Green en el dominio de la integración compleja.

Se discuten las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon que describen el campo mesónico creado por densidades de nucleones que vibran con frecuencias inferiores a la que corresponde a la masa del mesón. Estas soluciones ya fueron consideradas por Schrödinger⁽⁵⁾, pero la comparación que hace de las fuerzas nucleares y las fuerzas de Coulomb, no está completamente justificada y no conduce a una interpretación satisfactoria de aquellas soluciones. Las vibraciones de una distribución nucleónica, con frecuencias menores que la correspondiente a la masa en reposo del mesón, son muy interesantes porque están relacionadas con la teoría de los isobaros de los nucleones. Llamamos a estas frecuencias, frecuencias isobáricas y a las vibraciones correspondientes, vibraciones isobáricas. La consideración de las vibraciones isobáricas nos permite describir satisfactoriamente la transición de un campo mesónico general a uno estático; esta transición presenta algunos aspectos nuevos en el caso en el cual la masa en reposo del cuanto de campo no es cero.

Cuando se considera la ecuación de Klein-Gordon referida a un campo de ondas de electrones, es conveniente examinar la parte que desempeñan las ondas de energía positiva y negativa. Este punto de vista conduce a la consideración de dos funciones que indicaremos con $D^{(+)}$ y $D^{(-)}$. Estas funciones están relacionadas con la bien conocida función D , que es tan importante en la teoría de las reglas de conmutación relativistas; y está también estrechamente relacionada con la función de Green de la ecuación de Klein-Gordon. Por combinación lineal de las funciones $D^{(+)}$ y $D^{(-)}$, obtenemos otra función D_1 , bien conocida, que está relacionada con la solución fundamental de la ecuación de Klein-Gordon V . Tanto V como D_1 , pueden ser usados para deducir las soluciones avanzadas y retardadas de la ecuación de Klein-Gordon; basta tratar el tiempo como una variable compleja. Demostraremos que es posible obtener estas formas de

la solución partiendo de la ecuación diferencial de derivadas parciales elíptica

$$\sum_{\mu=0}^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_{\mu}^2} - \chi^2 \right) \psi = -4\pi\rho. \quad (7)$$

La consideración de las ondas con energía positiva y negativa es también importante en la teoría del campo mesónico. Pauli⁽⁸⁾ extendió el método de Dirac de la cuantización del campo con fotones negativos, a los campos mesónicos. Schönberg⁽⁹⁾ demostró que los fotones con energía negativa que fueran introducidos por Dirac, pueden ser obtenidos sin ningún método especial de cuantización, teniendo presente que el campo de radiación de un sistema de partículas eléctricas contiene ondas retardadas y avanzadas, que dan origen a fotones positivos y negativos, respectivamente. Las mismas consideraciones pueden ser extendidas al campo mesónico, como se demostrará en otra parte. El análisis de las funciones $D^{(+)}$ y $D^{(-)}$ indica inmediatamente que el campo de radiación contiene ondas con energías positiva y negativa.

Las relaciones entre las funciones de Green y los campos creados por fuentes puntuales, se examinarán en la sección 18; se demuestra allí que es equivalente conocer la función de Green para un tipo dado de solución o la solución de este tipo creado por una fuente puntual en movimiento. En el caso de un campo estático, no hay diferencia entre la función de Green y el campo de una fuente puntual, pero esto no sigue siendo cierto en el caso dinámico general. Es interesante hacer notar que las funciones de Green dinámicas son funciones simbólicas, pero las soluciones correspondientes a fuentes puntuales son funciones comunes.

Las funciones de Green de los campos retardados y avanzados $G_{re}(x, x')$ y $G_{av}(x, x')$, desaparecen cuando el punto de universo (x') está fuera del cono de luz de (x) ; hay otras funciones de Green que no desaparecen en este caso. Hay también una función de Green que desaparece cuando (x') está dentro del cono de luz de (x) ; esta función de Green permite formar soluciones que describen acciones con velocidad de propagación mayor que c . Llamaremos funciones de Green externas a las funciones de Green que no desaparecen cuando (x') está fuera del cono de luz de (x) . Serán estudiadas en las secciones 21

y 22. Es notable que las funciones de Green que desaparecen en el interior del cono de luz, no son las más simples.

En la definición usual de la solución fundamental, no es necesario tratar por separado las ecuaciones diferenciales de derivadas parciales elíptica e hiperbólica, de segundo orden. Sin embargo es dudoso si esto es siempre conveniente. La función πD_1 tiene todas las propiedades esenciales de la solución fundamental de Hadamard, y es una generalización más adecuada de la solución fundamental de D'Alembert. Parece más satisfactorio tomar πD_1 como la solución fundamental de la ecuación de Klein-Gordon, en lugar de la función de Hadamard $V(x, x')$. Tal vez el único inconveniente de esta elección sería la pérdida de la relación con la solución fundamental de la ecuación elíptica (7).

2. — Relación entre las funciones de Green, de Bhabha y Schönberg.

Dirac⁽¹⁰⁾ introdujo en la teoría del positrón una función $D(x)$, definida por las condiciones

$$(\square + \chi^2) D(x) = 0 \quad (8)$$

$$D(x) = 0 \quad \text{para} \quad x_0 = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0} D(x) = 2\pi \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3) \quad \text{para} \quad x_0 = 0. \quad (10)$$

Se ve fácilmente que

$$D(x) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp. [i(\vec{K} \cdot \vec{r})] \frac{\sin k_0 x_0}{k_0} d_3 \vec{K} \quad (11)$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$k_0 = \sqrt{\vec{K}^2 + \chi^2}. \quad (12)$$

Dirac dió también una expresión de $D(x)$ en función de funciones de Bessel

$$D(x) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} F(r, x_0) \quad (13)$$

$$F(r, x_0) = \begin{cases} \frac{1}{2} J_0(\chi \sqrt{x_0^2 - r^2}) & x_0 > r \\ 0 & r > x_0 > -r \\ -\frac{1}{2} J_0(\chi \sqrt{x_0^2 - r^2}) & -r > x_0 \end{cases} \quad (14)$$

Podemos obtener una expresión más «condensada» de $F(r, x_0)$, usando la función discontinua $\text{sgn}(u)$

$$\text{sgn}(u) = \begin{cases} +1 & u > 0 \\ -1 & u < 0 \end{cases} \quad (15)$$

$$F(r, x_0) = \frac{1}{4} [\text{sgn}(x_0 + r) + \text{sgn}(x_0 - r)] J_0(\chi \sqrt{x_0^2 - r^2}). \quad (16)$$

Teniendo presente que

$$\frac{d}{du} \text{sgn}(u) = 2\delta(u) \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} J_0(0) &= 1 \\ J'_0(0) &= -J_1(0) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

obtenemos

$$D(x) = \frac{\delta(x_0 - r) - \delta(x_0 + r)}{2r} - \chi \frac{\text{sgn}(x_0 - r) + \text{sgn}(x_0 + r)}{4\sqrt{x_0^2 - r^2}} J_1(\chi \sqrt{x_0^2 - r^2}). \quad (19)$$

El método de Schönberg⁽⁶⁾ conduce a la función de Green

$$G(x, x') = \text{sgn}(x_0 - x'_0) D(x - x'). \quad (20)$$

Tenemos

$$(\square + \chi^2) G(x, x') = 2\delta'(x_0 - x'_0) D(x - x') + \\ + 4\delta(x_0 - x'_0) \frac{\partial}{\partial x_0} D(x - x'). \quad (21)$$

Teniendo presente la identidad

$$\delta'(u - a) f(u) = \delta'(u - a) \cdot f(a) - \delta(u - a) f'(a) \quad (22)$$

que es válida para cualquier función continua $f(u)$ con derivada continua, obtenemos de (21)

$$(\square + \chi^2) G(x, x') = 4\pi\delta(x_0 - x'_0) \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \delta(x_3 - x'_3). \quad (23)$$

Por lo tanto $G(x, x')$ es una función de Green de la ecuación de Klein-Gordon.

De (13) y (16) resulta que

$$G(x, x') = \delta(\{x^\mu - x'^\mu\} [x_\mu - x'_\mu]) - \\ - \chi J_1 (\chi \sqrt{(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)}) \\ \left| \frac{2 + \text{sgn}(\{x_0 - x'_0\} - |\vec{r} - \vec{r}'|) - \text{sgn}(\{x_0 - x'_0\} + |\vec{r} - \vec{r}'|)}{4\sqrt{(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)}} \right|. \quad (24)$$

En el caso particular de masa en reposo nula del cuanta de campo, $\chi = 0$ y

$$G(x, x') = \delta(\{x_\mu - x'^\mu\} [x_\mu - x'_\mu]) = \delta(x, x'). \quad (25)$$

Como $\delta(x, x')$ es la función de Green para las soluciones semi-retardada semi-avanzada de la ecuación inhomogénea de D'Alembert, vemos que $G(x, x')$ es la función de Green para las soluciones semi-retardada semi-avanzada de la ecuación inhomogénea de Klein-Gordon. Esto se ve también en la expresión de $G(x, x')$ derivada de (11)

$$G(x, x') = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i (\vec{K} \cdot \vec{r} - r')] \frac{\text{sen } k_0 |x_0 - x'_0|}{k_0} d_3 \vec{K}. \quad (26)$$

que muestra la simetría de $G(x, x')$ con respecto al pasado y al futuro.

Las funciones de Green para las soluciones avanzada y retardada son

$$G_{rel}(x, x') = G(x, x') + D(x - x'). \quad (28)$$

$$G_{av}(x, x') = G(x, x') - D(x - x'). \quad (27)$$

$G_{rel}(x, x')$ desaparece salvo que el punto de universo (x') esté dentro o sobre el cono del pasado de (x) ; $G_{av}(x, x')$ desaparece salvo que (x') esté dentro o sobre el cono del futuro de (x) . Obtenemos de las ecuaciones (19) y (24)

$$G_{rel}(x, x') = [1 + \text{sgn}(x_0 - x'_0)] \delta(x, x') - \frac{1 + \text{sgn}(x_0 - x'_0 - |\vec{r} - \vec{r}'|)}{2 \sqrt{(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)}} \chi J_1(\chi \sqrt{(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)}). \quad (29)$$

$$G_{av}(x, x') = [1 - \text{sgn}(x_0 - x'_0)] \delta(x, x') - \frac{1 - \text{sgn}(x_0 - x'_0 + |\vec{r} - \vec{r}'|)}{2 \sqrt{(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)}} \chi J_1(\chi \sqrt{(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)}). \quad (30)$$

Estas son las funciones de Green obtenidas por Bhabha.

G_{rel} y G_{av} pueden ser expresadas como integrales

$$G_{rel}(x, x') = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i (\vec{K} \cdot \vec{r} - r')] \frac{\text{sen } k_0 |x_0 - x'_0| + \text{sen } k_0 (x_0 - x'_0)}{k_0} d_3 \vec{K} \quad (31)$$

$$G_{av}(x, x') = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i (\vec{K} \cdot \vec{r} - r')] \dots$$

$$\frac{\text{sen } k_0 |x_0 - x'_0| - \text{sen } k_0 (x_0 - x'_0)}{k_0} d_3 \vec{K}. \quad (32)$$

3. — El campo de radiación del mesón.

De las definiciones de G_{rel} y G_{av} resulta que

$$G(x, x') = \frac{1}{2} [G_{rel}(x, x') + G_{av}(x, x')] \quad (33)$$

$$D(x - x') = \frac{1}{2} [G_{rel}(x, x') - G_{av}(x, x')]. \quad (34)$$

Consideremos un campo mesónico pseudoescalar creado por una distribución nucleónica. El campo ψ del mesón está determinado por una ecuación de la siguiente forma

$$(\square + \chi^2) \psi = 4\pi\rho, \quad (35)$$

donde ρ está definido por la distribución nucleónica. Las cantidades ψ_{lig} y ψ_{irr} :

$$\psi_{lig}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, x') \rho(x') d_4 x' \quad (36)$$

$$\psi_{irr}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} D(x - x') \rho(x') d_4 x' \quad (37)$$

son respectivamente análogos a los potenciales ligado e irradiado introducidos por Leite Lopes y Schönberg⁽¹¹⁾ en la teoría del electrón. Las llamaremos campos mesónicos ligado e irradiado. ψ_{lig} es una solución de la ecuación (35) y ψ_{irr} una solución de la ecuación homogénea de Klein-Gordon:

$$(\square + \chi^2) \psi_{lig} = 4\pi\rho \quad (38)$$

$$(\square + \chi^2) \psi_{irr} = 0. \quad (39)$$

Consideremos las integrales de Fourier que representan $\text{sen } k_0 |x_0|$ y $\text{sen } k_0 x_0$,

$$\text{sen } k_0 |x_0| = \frac{k_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i K_0 x_0} \frac{dK_0}{k_0^2 - K_0^2} \quad (40)$$

$$\text{sen } k_0 x_0 = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i K_0 x_0} [\delta(k_0 - K_0) - \delta(k_0 + K_0)] dK_0. \quad (41)$$

Introduciendo estas expresiones en las integrales que representan $G(x, x')$ y $D(x, x')$, obtenemos

$$G(x, x') = \frac{1}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i K^\mu (x_\mu - x'_\mu)] \frac{d_4 K}{k_0^2 - K_0^2} \quad (42)$$

$$D(x - x') = \frac{i}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i K^\mu (x_\mu - x'_\mu)] \frac{\delta(k_0 - K_0) - \delta(k_0 + K_0)}{k_0} d_4 K. \quad (43)$$

Las expresiones bajo el signo integral en el miembro derecho de la ecuación (43) se anulan, salvo que

$$K_0 = \pm \sqrt{\vec{K}^2 + \chi^2}. \quad (44)$$

Pero esta es precisamente la condición a que debe satisfacer K_0 para que $\frac{h}{2\pi} c K_0$ sea la energía de un mesón con impulso $\frac{h}{2\pi} \vec{K}$ ($\vec{K}$ es el trivector con componentes K^1, K^2, K^3).

Con ayuda de (42) y (43) podemos obtener las integrales de Fourier para ψ_{lig} y ψ_{irr} ,

$$\psi_{lig}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i K^\mu x_\mu] \varphi(K) \frac{d_4 K}{k_0^2 - K_0^2} \quad (45)$$

$$\psi_{irr}(x) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i K^\mu x_\mu] \varphi(K) \frac{\delta(k_0 - K_0) - \delta(k_0 + K_0)}{k_0} d_4 K. \quad (46)$$

$\varphi(K)$ es la transformada de Fourier de $\rho(x)$

$$\varphi(K) = \frac{1}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[iK_\mu x'_\mu] \rho(x') \cdot d_4 x'. \quad (47)$$

Las ecuaciones (45) y (46) muestran claramente las diferencias esenciales entre los campos mesónicos ligado e irradiado; las frecuencias y los números de onda de las ondas planas que aparecen en el desarrollo de Fourier de ψ_{irr} están correlacionados, mientras que no existe una tal correlación para las frecuencias y los números de onda de las ondas del campo ligado.

Resulta de (44) que

$$|K_0| \geq \chi. \quad (48)$$

Por lo tanto:

«En el desarrollo de Fourier del campo de radiación no hay ondas con frecuencias isobáricas».

Llamaremos frecuencias isobáricas aquellas que corresponden a energías con valor absoluto menor que la masa en reposo del cuanto de campo

$$c \frac{h}{2\pi} |K_0| < mc^2 \quad (49)$$

o

$$|K_0| < \chi. \quad (50)$$

4. — *Análisis de Fourier de las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon.*

Consideremos las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon de forma

$$\psi = e^{iK_0 x_0} \vec{u}(x) \quad (51)$$

en la cual u depende solamente de las coordenadas espaciales x_1, x_2, x_3 . u es una solución de la ecuación

$$\Delta u + (K_0^2 - \chi^2) u = 0. \quad (52)$$

Si K_0 no corresponde a una frecuencia isobárica, la ecuación (52) es la bien conocida ecuación de oscilación (Schwingungsgleichung)

$$\Delta u + K^2 u = 0 \quad (K^2 = K_0^2 - \chi^2). \quad (53)$$

Cuando K_0 corresponde a una frecuencia isobárica, obtenemos, en lugar de (53), la ecuación estática de Yukawa

$$\Delta u - K^2 u = 0, \quad (K^2 = \chi^2 - K_0^2). \quad (54)$$

Ahora podemos entender por qué las ondas con frecuencias isobáricas no aparecen en la expresión del campo de radiación: estas ondas están relacionadas con el campo estático y pertenecen al campo ligado, que es la generalización relativista del campo estático.

La ecuación (53) admite las dos soluciones elementales

$$V_1 = \frac{e^{iKr}}{r} \quad V_2 = \frac{e^{-iKr}}{r} \quad (55)$$

$$\Delta V + K^2 V = -4\pi \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3), \quad (56)$$

que son ambas oscilatorias y tienden hacia cero en el infinito. Por medio de V_1 y V_2 formamos las funciones $V(+)$ y $V(-)$

$$V(+)=\frac{1}{2}(V_1+V_2)=\frac{\cos kr}{r} \quad (57)$$

$$V(-)=\frac{1}{2i}(V_1-V_2)=\frac{\sin kr}{r}. \quad (58)$$

$V(+)$ es también una solución elemental de (53), es decir, una solución de (56); $V(-)$ es finita en el origen. Necesitaremos a $V(+)$ para formar $G(x, x')$ y $V(-)$ para formar $D(x-x')$.

La solución elemental de (54) que corresponde a V_1 y V_2 son w_1 y w_2

$$w_1 = \frac{e^{-Kr}}{r}, \quad w_2 = \frac{e^{Kr}}{r} \quad (59)$$

$$\Delta w + K^2 w = -4\pi \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3). \quad (60)$$

w_1 tiende hacia cero en el infinito, pero w_2 diverge en el infinito. Por esto es inútil considerar las funciones $w^{(+)}$ y $w^{(-)}$

$$w^{(+)} = \frac{1}{2} (w_1 + w_2) \quad (61)$$

$$w^{(-)} = \frac{1}{2} (w_1 - w_2), \quad (62)$$

ya que ambas divergen en el infinito. Podemos pues obtener una solución elemental w_1 de (54), que tiende hacia cero en el infinito, pero no una solución similar a $V^{(-)}$ que está limitada en el infinito. Esto es en esencia la razón matemática para excluir las frecuencias isobáricas del campo de radiación, como veremos.

Consideremos la ecuación (35). Para obtener la solución retardada representemos $\rho(x)$ por la integral de Fourier

$$\rho(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(\vec{x}, K_0) e^{-iK_0 x_0} dK_0, \quad (63)$$

y $\psi_{rel}(x)$ por la integral de Fourier

$$\psi_{rel}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{rel}(\vec{x}, K_0) e^{-iK_0 x_0} dK_0. \quad (64)$$

La función $\varphi_{rel}(\vec{x}, K_0)$ es una solución de la ecuación

$$(\Delta + K^2) \varphi_{rel}(\vec{x}, K_0) = -4\pi \sigma(\vec{x}, K_0) \quad |K_0| \geq \chi \quad (65)$$

$$K^2 = K_0^2 - \chi^2 \quad (65a)$$

o de la ecuación

$$(\Delta - K^2) \varphi_{rel}(\vec{x}, K_0) = -4\pi \sigma(\vec{x}, K_0); \quad |K_0| < \chi \quad (66)$$

$$K^2 = \chi^2 - K_0^2. \quad (66a)$$

Por razones obvias debemos usar la solución elemental w_1 para resolver (66), de manera que

$$\varphi_{rel}(\vec{x}, K_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(\vec{x}', K_0) \frac{e^{-K\vec{r}}}{\vec{r}} d_3 \vec{x}'; \quad |K_0| < \chi \quad (67)$$

$$\vec{r} = \sqrt{(\vec{x} - \vec{x}')^2}. \quad (68)$$

Para obtener la solución retardada de (35) debemos usar la solución elemental V_1 para valores positivos de K_0 y V_2 para valores negativos

$$\varphi_{rel}(\vec{x}, K_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(\vec{x}', K_0) \frac{e^{+iK\vec{r}}}{\vec{r}} d_3 \vec{x}' \quad K_0 \geq \chi \quad (69a)$$

$$\varphi_{rel}(\vec{x}, K_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(\vec{x}', K_0) \frac{e^{-iK\vec{r}}}{\vec{r}} d_3 \vec{x}' \quad K_0 \leq -\chi \quad (69b)$$

porque la solución retardada está formada por ondas emergentes.

En forma similar podemos obtener la solución avanzada de (35) considerando su integral de Fourier

$$\psi_{av} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{av}(\vec{x}, K_0) e^{-iK_0 x_0} dK_0. \quad (70)$$

La $\varphi_{av}(\vec{x}, K_0)$ de una frecuencia isobárica es

$$\varphi_{av}(\vec{x}, K_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(\vec{x}', K_0) \frac{e^{-K\vec{r}}}{\vec{r}} d_3 \vec{x}'; \quad |K_0| < \chi. \quad (71)$$

El mismo razonamiento que nos condujo a (67) y (69) nos da ahora

$$\varphi_{av}(\vec{x}, K_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(\vec{x}', K_0) \frac{e^{-iK\vec{r}}}{r} d_3 \vec{x}' \quad K_0 \geq \chi \quad (72a)$$

$$\varphi_{av}(\vec{x}, K_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(\vec{x}', K_0) \frac{e^{-iK\vec{r}}}{r} d_3 \vec{x}' \quad K_0 \leq -\chi. \quad (72b)$$

Se ve de (67) y (71) que las frecuencias isobáricas dan la misma contribución al campo retardado como al avanzado, ya que

$$\varphi_{re}(\vec{x}, K_0) = \varphi_{av}(\vec{x}, K_0) \quad |K_0| < \chi. \quad (73)$$

Esto es una consecuencia de la necesidad de usar la solución elemental w_1 para obtener la contribución de las frecuencias isobáricas tanto en el campo avanzado como en el retardado. Por lo tanto tenemos

$$\psi_{irr}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{irr}(\vec{x}, K_0) e^{-iK_0 x_0} dK_0 \quad (74)$$

$$\varphi_{irr}(\vec{x}, K_0) = 0 \quad |K_0| < \chi \quad (75a)$$

$$\varphi_{irr}(\vec{x}, K_0) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(\vec{x}', K_0) \frac{\text{sen } K\vec{r}}{r} d_3 \vec{x}'; \quad K_0 \geq \chi \quad (75b)$$

$$\varphi_{irr}(\vec{x}, K_0) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(\vec{x}', K_0) \frac{\text{sen } K\vec{r}}{r} d_3 \vec{x}'; \quad K_0 \leq -\chi. \quad (75c)$$

Para los potenciales ligados obtenemos

$$\psi_{lig}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{lig}(\vec{x}, K_0) e^{-iK_0 x_0} dK_0 \quad (76)$$

$$\varphi_{lig}(\vec{x}, K_0) = \varphi_{re}(\vec{x}, K_0) = \varphi_{av}(\vec{x}, K_0) \quad |K_0| < \chi \quad (76a)$$

$$\varphi_{lig}(\vec{x}, K_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(\vec{x}', K_0) \frac{\cos K \vec{r}}{\vec{r}} d_3 \vec{x}' \quad |K_0| \geq \chi. \quad (76b)$$

Schrödinger⁽⁵⁾ observó que la división en dos partes del campo del mesón creado por una distribución nucleónica, una de las cuales correspondería a una masa en reposo nula del cuanto de campo y la otra que se anula cuando $\chi=0$, no tiene sentido físico, porque no separa las acciones a corto alcance de las de largo alcance. Una división tal se obtiene de las expresiones (29) y (30) de las funciones de Green para los campos retardados, y de la expresión (19) de $D(x)$. La fórmula (19) no indica en forma explícita que realmente no hay una parte correspondiente a acciones de corto alcance en el campo de radiación, como resulta de la ecuación (75a) (véase sección 7).

Un caso muy importante es aquél en el cual

$$\sigma(\vec{x}, K_0) = 0 \quad \text{para} \quad |K_0| \geq \chi. \quad (77)$$

Este caso incluye como otro particular el campo estático que corresponde a

$$\sigma(\vec{x}, K_0) = \sigma(\vec{x}) \cdot \delta(K_0). \quad (78)$$

Resulta de (77) que

$$\begin{aligned} \varphi_{lig}(\vec{x}, K_0) &= \varphi_{re}(\vec{x}, K_0) = \varphi_{av}(\vec{x}, K_0) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(\vec{x}', K_0) \frac{e^{-K \vec{r}}}{\vec{r}} d_3 \vec{x}' \end{aligned} \quad (79)$$

$$\psi_{li}(x) = \psi_{re}(x) = \psi_{av}(x) =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(\vec{x}', K_0) \exp. [-iK_0 x_0 - \sqrt{\chi^2 - K_0^2} \vec{r}] \frac{1}{\vec{r}} dK_0 d_3 \vec{x}' \quad (80)$$

$$\psi_{irr}(x) = 0. \quad (81)$$

Cuando

$$\sigma(\vec{x}, K_0) = \sigma(\vec{x}) \delta\left(K_0 - \frac{w}{c}\right) \quad (82)$$

$$\psi_{li\eta}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\rho(x')]_{x_0' \rightarrow x_0} \frac{e^{-\chi' r}}{r} d_3 x' \quad (83)$$

$$\chi' = \sqrt{\chi^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (84)$$

La ecuación (83) contiene como caso particular la expresión de Yukawa de los campos estáticos. Conduce a una conclusión interesante:

«El alcance del campo estático debido a un isobaro excitado aumenta con la excitación del isobaro».

En realidad el alcance del campo es $(\chi')^{-1}$, y la excitación del isóbaro es $\frac{h}{2\pi}\omega$.

5. — Apliquemos las fórmulas (67)-(69) y (71) y (72) al caso en el cual

$$\rho(x) = \delta(x_0 - x'_0) \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \delta(x_3 - x'_3). \quad (85)$$

Ahora

$$\sigma(\vec{x}, K_0) = \frac{1}{2\pi} e^{iK_0 x'_0} \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \delta(x_3 - x'_3) \quad (86)$$

$$\varphi_{rel}(\vec{x}, K_0) = \varphi_{av}(\vec{x}, K_0) =$$

$$\frac{1}{2\pi r} \exp[iK_0 x'_0 - \sqrt{\chi^2 - K_0^2} r], \quad |K_0| < \chi \quad (87)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{rel}(\vec{x}, K_0) &= \frac{1}{2\pi r} \exp[iK_0 x'_0 + i\sqrt{K_0^2 - \chi^2} r] \\ \varphi_{av}(\vec{x}, K_0) &= \frac{1}{2\pi r} \exp[iK_0 x'_0 - i\sqrt{K_0^2 - \chi^2} r] \end{aligned} \right\} K_0 \geq \chi \quad (88)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{rel}(x, K_0) &= \frac{1}{2\pi r} \exp [iK_0 x'_0 - i \sqrt{K_0^2 - \chi^2} \bar{r}] \\ \varphi_{av}(x, K_0) &= \frac{1}{2\pi r} \exp [iK_0 x'_0 + i \sqrt{K_0^2 - \chi^2} \bar{r}] \end{aligned} \right\} K_0 \leq -\chi. \quad (89)$$

Las funciones de Green de la ecuación de Klein-Gordon son las soluciones de (35) con

$$\rho(x) = \delta(x_0 - x'_0) \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \delta(x_3 - x'_3).$$

Por lo tanto las partes de las funciones de Green $G(x, x')$, $G_{rel}(x, x')$ y $G_{av}(x, x')$ que provienen de las frecuencias isobáricas son las mismas; designaremos estas partes con $G_{is}(x, x')$:

$$\begin{aligned} G_{is}(x, x') &= \frac{1}{2\pi r} \int_{-\chi}^{+\chi} \exp [-iK_0(x_0 - x'_0) - \sqrt{\chi^2 - K_0^2} \bar{r}] dK_0 = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \int_{-\chi}^{+\chi} \exp [-iK_0(x_0 - x'_0) - \sqrt{\chi^2 - K_0^2} \bar{r}] \frac{dK_0}{\sqrt{\chi^2 - K_0^2}} \end{aligned} \quad (90)$$

Las partes de $G(x, x')$, $G_{rel}(x, x')$ y $G_{av}(x, x')$ que provienen de las frecuencias no isobaras las designaremos con $\Gamma(x, x')$, $\Gamma_{rel}(x, x')$ y $\Gamma_{av}(x, x')$, respectivamente.

$$\Gamma(x, x') = \frac{1}{2} [\Gamma_{rel}(x, x') + \Gamma_{av}(x, x')] \quad (91)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{rel}(x, x') &= \frac{1}{2\pi r} \int_{-\infty}^{-\chi} \exp [-iK_0(x_0 - x'_0) - i \sqrt{K_0^2 - \chi^2} \bar{r}] dK_0 + \\ &+ \frac{1}{2\pi r} \int_{\chi}^{\infty} \exp [-iK_0(x_0 - x'_0) + i \sqrt{K_0^2 - \chi^2} \bar{r}] dK_0. \end{aligned} \quad (92)$$

$$\Gamma_{av}(x, x') = \frac{1}{2\pi r} \int_{-\infty}^{-\chi} \exp [-iK_0(x_0 - x'_0) + i \sqrt{K_0^2 - \chi^2} \bar{r}] dK_0 +$$

$$+ \frac{1}{2\pi\bar{r}} \int_{\chi}^{\infty} \exp[-iK_0(x_0-x'_0) + i\sqrt{K_0^2 - \chi^2}\bar{r}] dK_0. \quad (93)$$

Evidentemente tenemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{rel}(x, x') = & \\ = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left\{ \int_{\chi}^{\infty} \exp[-iK_0(x_0-x'_0) + i\sqrt{K_0^2 - \chi^2}\bar{r}] \frac{dK_0}{\sqrt{K_0^2 - \chi^2}} \right. & \\ \left. - \int_{-\infty}^{+\chi} \exp[-iK_0(x_0-x'_0) - i\sqrt{K_0^2 - \chi^2}\bar{r}] \frac{dK_0}{\sqrt{K_0^2 - \chi^2}} \right\}. & \quad (94) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{av}(x, x') = & \\ = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left\{ \int_{\chi}^{\infty} \exp[-iK_0(x_0-x'_0) - i\sqrt{K_0^2 - \chi^2}\bar{r}] \frac{dK_0}{\sqrt{K_0^2 - \chi^2}} \right. & \\ \left. - \int_{-\infty}^{-\chi} \exp[-iK_0(x_0-x'_0) + i\sqrt{K_0^2 - \chi^2}\bar{r}] \frac{dK_0}{\sqrt{K_0^2 - \chi^2}} \right\}. & \quad (95) \end{aligned}$$

La división de las funciones de Green en partes provenientes de las frecuencias isobaras y no isobaras no es relativísticamente invariante, pero es muy conveniente para muchos fines, como veremos. Los desarrollos de Fourier de las funciones de Green nos permite computarlas fácilmente. Así, por ejemplo, calculemos $G_{rel}(x, x')$ para valores positivos de s^2

$$s^2 = (x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu) = (x_0 - x'_0)^2 - \bar{r}^2. \quad (96)$$

Podemos elegir el sistema de referencia de Lorentz de tal manera que

$$\bar{r} = 0, \quad s^2 = (x_0 - x'_0)^2. \quad (97)$$

Como $G_{rel}(x, x')$ es invariante, puede depender solamente de s^2 y del signo de $(x_0 - x'_0)$, porque suponemos que $s^2 > 0$. Por lo tanto, si fijamos el signo de la diferencia $(x_0 - x'_0)$,

$G_{rel}(x, x')$ será una función de la variable s , de manera que obtenemos de (90) y (94)

$$G_{rel}(x, x') = \frac{1}{s} \frac{d}{ds} I'_{rel}(s) \quad (98)$$

$$\begin{aligned} I_{rel}(s) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\chi}^{\chi} \exp[-iK_0(x_0-x'_0) - \sqrt{\chi^2 - K_0^2} r] \frac{dK_0}{\sqrt{\chi^2 - K_0^2}} + \\ & + \frac{i}{2\pi} \int_{\chi}^{\infty} \exp[-iK_0(x_0-x'_0) + i\sqrt{K_0^2 - \chi_0^2} r] \frac{dK_0}{\sqrt{K_0^2 - \chi^2}} - \\ & - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\chi} \exp[-iK_0(x_0-x'_0) - i\sqrt{K_0^2 - \chi_0^2} r] \frac{dK_0}{\sqrt{K_0^2 - \chi^2}}. \quad (99) \end{aligned}$$

En el sistema de referencia especificado por (97), $I_{rel}(s)$ es

$$\begin{aligned} I_{rel}(s) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\chi}^{\chi} \exp[-iK_0(x_0-x'_0)] \frac{dK_0}{\sqrt{\chi^2 - K_0^2}} + \\ & + \frac{i}{2\pi} \int_{\chi}^{\infty} \exp[-iK_0(x_0-x'_0)] \frac{dK_0}{\sqrt{K_0^2 - \chi^2}} - \\ & - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\chi} \exp[-iK_0(x_0-x'_0)] \frac{dK_0}{\sqrt{K_0^2 - \chi^2}}. \quad (100) \end{aligned}$$

Cambiamos las variables en las integrales del miembro derecho de la ecuación (100). Poniendo

$$K_0 = \chi z \quad (101)$$

en estas integrales obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\chi}^{\chi} \exp[-iK_0(x_0-x'_0)] \frac{dK_0}{\sqrt{\chi^2 - K_0^2}} &= \int_{-1}^{+1} \exp[-i\chi(x_0-x'_0)z] \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \\ &= \pi J_0(\chi(x_0-x'_0)) \quad (102) \end{aligned}$$

$$\int_{\chi}^{\infty} \exp[-iK_0(x_0-x'_0)] \frac{dK_0}{\sqrt{K_0^2-\chi^2}} = \int_1^{\infty} \exp[-i\chi(x_0-x'_0)z] \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{i\pi}{2} H_0^{(2)}(\chi(x_0-x'_0)) & \text{para } x_0-x'_0 > 0 \\ \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(\chi(x_0-x'_0)) & \text{para } x_0-x'_0 < 0 \end{cases} \quad (103)$$

$$\int_{-\infty}^{-\chi} \exp[-iK_0(x_0-x'_0)] \frac{dK_0}{\sqrt{K_0^2-\chi^2}} = \int_{-\infty}^{-1} \exp[-i\chi(x_0-x'_0)z] \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} =$$

$$= \begin{cases} \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(\chi(x_0-x'_0)) & \text{para } x_0-x'_0 > 0 \\ -\frac{i\pi}{2} H_0^{(2)}(\chi(x_0-x'_0)) & \text{para } x_0-x'_0 < 0. \end{cases} \quad (104)$$

$H_0^{(1)}$ y $H_0^{(2)}$ son funciones de Hankel de orden cero. Por lo tanto

$$I_{rel}(s) = \frac{1}{2} J_0(\chi(x_0-x'_0)) \pm \frac{1}{4} [H_0^{(1)}(\chi(x_0-x'_0)) +$$

$$+ H_0^{(2)}(\chi(x_0-x'_0))] = J_0(\chi(x_0-x'_0)) \frac{1+\text{sgn}(x_0-x'_0)}{2}; \quad (s^2 > 0) \quad (105)$$

De donde

$$\left. \begin{aligned} G_{rel}(x, x') &= -\frac{\chi}{s} J_1(\chi s), \quad x_0 > x'_0, \quad s^2 > 0 \\ G_{rel}(x, x') &= 0 \quad x_0 < x'_0, \quad s^2 > 0 \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

Cuando s^2 es negativo, elegimos un sistema de referencia en el cual

$$x_0 - x'_0 = 0, \quad s = i\bar{r}. \quad (107)$$

En este sistema de referencia

$$\begin{aligned}
 I_{rel}(s) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\chi}^{+\chi} \exp[-\sqrt{\chi^2 - K_0^2} \bar{r}] \frac{dK_0}{\sqrt{\chi^2 - K_0^2}} + \\
 & + \frac{i}{2\pi} \int_{\chi}^{\infty} \exp[i\sqrt{K_0^2 - \chi^2} \bar{r}] \frac{dK_0}{\sqrt{K_0^2 - \chi^2}} - \\
 & - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\chi} \exp[-i\sqrt{K_0^2 - \chi^2} \bar{r}] \frac{dK_0}{\sqrt{K_0^2 - \chi^2}}. \quad (108)
 \end{aligned}$$

Ahora no es más necesario fijar el signo de $x - x'_0$, porque no es más invariante. Introduciendo la variable z de la ecuación (101) obtenemos

$$\int_{-\chi}^{+\chi} \exp[-\sqrt{\chi^2 - K_0^2} \bar{r}] \frac{dK_0}{\sqrt{\chi^2 - K_0^2}} = \int_{-1}^{+1} \exp[-\chi \sqrt{1 - z^2} \bar{r}] \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} \quad (109)$$

$$\int_{\chi}^{\infty} \exp[i\sqrt{K_0^2 - \chi^2} \bar{r}] \frac{dK_0}{\sqrt{K_0^2 - \chi^2}} = \int_1^{\infty} \exp[i\chi \sqrt{z^2 - 1} \bar{r}] \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} \quad (110)$$

$$\int_{-\infty}^{-\chi} \exp[-i\sqrt{K_0^2 - \chi^2} \bar{r}] \frac{dK_0}{\sqrt{K_0^2 - \chi^2}} = \int_{-\infty}^{-1} \exp[-i\chi \sqrt{z^2 - 1} \bar{r}] \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}}. \quad (111)$$

Resulta de (109), (110) y (111) que $I_{rel}(s)$ puede ser expresado como una integral compleja

$$I_{rel}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_L \exp[-\chi \bar{r} \sqrt{1 - z^2}] \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}, \quad s^2 < 0. \quad (112)$$

L es el camino de integración representado en la figura 1. Se ve fácilmente que la integral compleja (112) se anula

$$I_{rel}(x, x') = 0, \quad s^2 < 0. \quad (113)$$

La función de Green $G_{av}(x, x')$ puede ser estimada en la misma manera que $G_{rel}(x, x')$, introduciendo la integral $I_{av}(x, x')$

$$G_{av}(x, x') = \frac{1}{s} \frac{d}{ds} I_{av}(s) \quad (114)$$

$$\begin{aligned} I_{av}(s) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\chi}^{\chi} \exp[-iK_0(x_0 - x'_0) - \sqrt{\chi^2 - K_0^2} r] \frac{dK_0}{\sqrt{\chi^2 - K_0^2}} + \\ & + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\chi} \exp[-iK_0(x_0 - x'_0) + i\sqrt{K_0^2 - \chi^2} r] \frac{dK_0}{\sqrt{K_0^2 - \chi^2}} - \\ & - \frac{i}{2\pi} \int_{\chi}^{\infty} \exp[-iK_0(x_0 - x'_0) - i\sqrt{K_0^2 - \chi^2} r] \frac{dK_0}{\sqrt{K_0^2 - \chi^2}}. \end{aligned} \quad (115)$$

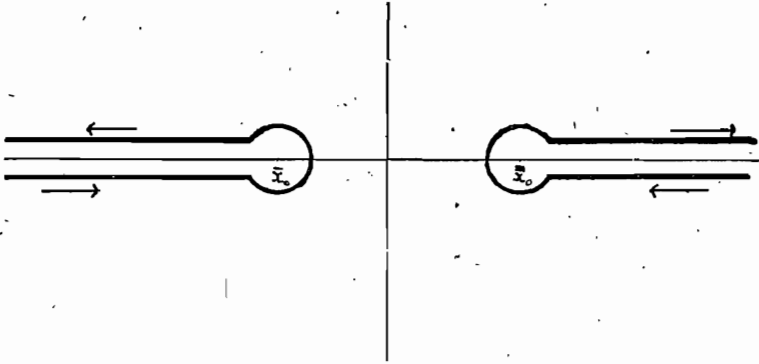


Fig. 1.

Se ve inmediatamente, comparando (115) y (99) que

$$\left. \begin{aligned} G_{av}(x, x') &= 0, & x_0 > x'_0, \quad s^2 > 0 \\ G_{av}(x, x') &= -\frac{\chi}{s} J_1(\chi s), & x_0 < x'_0, \quad s^2 > 0 \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

$$I_{av}(s) = I_{rel}(s) = 0, \quad s^2 < 0. \quad (117)$$

Por lo tanto

$$G_{rel}(x, x') = G_{av}(x, x') = 0, \quad s^2 < 0. \quad (118)$$

Resulta de (106), (116) y (118) que

$$G(x, x') = -\frac{\chi}{2s} J_1(\chi s), \quad s^2 > 0 \quad (119)$$

$$G(x, x') = 0, \quad s^2 < 0. \quad (120)$$

Como las frecuencias isobaras dan la misma contribución a G_{rel} y G_{av} tenemos

$$D(x-x') = \frac{1}{2} [\Gamma_{rel}(x, x') - \Gamma_{av}(x, x')]. \quad (121)$$

Y por lo tanto, la diferencia entre Γ_{rel} y Γ_{av} , es invariante.

Ahora debemos investigar el comportamiento de las funciones de Green cuando (x') está sobre el cono de luz del punto (x) . Esto se puede hacer fácilmente investigando el comportamiento de $I_{rel}(s)$ e $I_{av}(s)$ sobre este cono de luz. $I_{rel}(s)$ tiene una discontinuidad simple sobre el semicono del pasado e $I_{av}(s)$ tiene una discontinuidad similar sobre el semicono del futuro. Por lo tanto

$$G_{rel}(x, x') = \frac{\delta(x_0 - x'_0 - r)}{r} - \frac{\chi}{s} J_1(\chi s), \quad s^2 \geq 0, \quad x_0 > x'_0 \quad (122)$$

$$G_{rel}(x, x') = 0, \quad x_0 - x'_0 < r. \quad (123)$$

y

$$G_{av}(x, x') = \frac{\delta(x_0 - x'_0 + r)}{r} - \frac{\chi}{s} J_1(\chi s), \quad s^2 \leq 0, \quad x_0 < x'_0 \quad (124)$$

$$G_{av}(x, x') = 0, \quad x_0 - x'_0 < r. \quad (125)$$

Así hemos obtenido todos los resultados de la sección 2 por medio de los desarrollos de Fourier.

6. — $G_{ii}(x, x')$ es una solución de la ecuación

$$(\square + \chi^2) G_{ii}(x, x') = 4 \frac{\sin \chi(x_0 - x'_0)}{x_0 - x'_0} \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \delta(x_3 - x'_3). \quad (126)$$

Esto resulta del hecho que la parte de

$$4\pi \delta(x_0 - x'_0) \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \delta(x_3 - x'_3)$$

que proviene de las frecuencias isobaras es la cantidad que está en el miembro derecho de (126), ya que

$$\delta(x_0, x'_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-iK_0(x_0 - x'_0)] dK_0. \quad (127)$$

La función $\psi_i(x)$

$$\psi_{is}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{is}(x, x') \rho(x') d_4 x' \quad (128)$$

es una solución de la ecuación

$$(\square + \chi^2) \psi_{is}(x, x') = 4\pi \bar{\rho}(x) \quad (129)$$

$$\bar{\rho}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \chi(x_0 - x'_0)}{x_0 - x'_0} \rho(x'_0, x_1, x_2, x_3) dx'_0. \quad (130)$$

$\bar{\rho}(x)$ se obtiene de $\rho(x)$ por una especie de promedio en el tiempo en un intervalo aproximadamente igual a $\frac{2\pi}{c\chi}$. Llamaremos distribuciones nucleónicas cuasiestáticas a aquellas cuyos desarrollos de Fourier contienen solamente frecuencias isobaras. Para estas distribuciones

$$\psi_{rel}(x) = \psi_{av}(x) = \psi_i(x), \quad (131)$$

$$\psi_{irr}(x) = 0. \quad (132)$$

La ecuación (131) muestra que $G_{is}(x, x')$ puede ser considerada como una función de Green para los campos creados por distribuciones cuasiestáticas.

7. — Alcance y velocidad de propagación de las acciones.

Las singularidades de las funciones de Green sobre el cono de luz del punto (x) son muy importantes, porque dan origen a acciones con velocidad de propagación igual a c . Efectivamente, obtenemos de (122) y (123) la fórmula de Stückelberg⁽⁴⁾ y Bhabha⁽⁵⁾

$$\psi_{rel}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\rho(x')]_{(x'_0=x_0-\bar{r})} \frac{d_3 x'}{r} - \\ - \chi \int_{-\infty}^{x_0} dx'_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x') \frac{J_1(\chi \sqrt{(x_0-x'_0)^2-r^2})}{\sqrt{(x_0-x'_0)^2-r^2}} d_3 x'. \quad (133)$$

La existencia de acciones con velocidad de propagación igual a c en un campo cuyo cuanto tiene una masa en reposo finita es muy notable. Estas acciones están representadas por la primera integral del miembro derecho de (133), la segunda integral no depende de los valores de $\rho(x')$ sobre el cono de luz, que es una variedad tridimensional. Las acciones que provienen de la primera integral de (133) son de largo alcance, ya que son de la misma forma que las acciones retardadas en un campo con cuanto de masa cero. Schrödinger⁽⁵⁾ ha criticado la separación de las dos clases de acciones dadas por (133), que no muestran claramente el efecto del alcance. La fórmula de Schrödinger

$$\psi_{rel}(x) = \int_{-\infty}^{x_0} dx'_0 \int_0^{x_0-x'_0} \bar{r} \int \frac{\partial}{\partial \bar{r}} [r \rho(x')] J_0(\chi \sqrt{(x_0-x'_0)^2-r^2}) d\Omega \quad (134)$$

($d\Omega$ es el ángulo sólido elemental referido al punto (x)) no presenta el mismo inconveniente. (134) resulta inmediatamente de (13) y (20). Tenemos

$$G(x, x') = -\text{sgn}(x'_0 - x_0) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} F(\bar{r}, x_0 - x'_0) \quad (135)$$

de donde

$$G_{ret}(x, x') = -[1 + \text{sgn}(x_0 - x'_0)] \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} F(\bar{r}, x_0 - x'_0) \quad (136)$$

$$G_{av}(x, x') = -[-1 + \text{sgn}(x'_0 - x_0)] \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} F(\bar{r}, x_0 - x'_0). \quad (137)$$

Teniendo presente (136) obtenemos

$$\psi_{rel}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x') G_{rel}(x, x') d_4 x' =$$

$$= -2 \int_{-\infty}^{x_0} dx'_0 \int_0^{\infty} r \, dr \int \rho(x') \frac{\partial}{\partial r} F(r, x_0 - x'_0) d\Omega. \quad (138)$$

(134) resulta de (138) por integración parcial de la integral del miembro derecho con respecto a r . De (137) obtenemos una expresión de $\psi_{av}(x)$ similar a la (134)

$$\psi_{av}(x) = \int_{x_0}^{+\infty} dx'_0 \int_0^{x'_0 - x_0} dr \int \frac{\partial}{\partial r} [r \rho(x')] J_0(\chi \sqrt{(x_0 - x'_0)^2 - r^2}) d\Omega. \quad (139)$$

En el caso dinámico, los efectos del alcance no son tan nítidos como en el caso estático o en el de una vibración isobárica de densidad $\rho(x)$. Hemos visto en la sección 4 que las vibraciones con k_0 mayor que χ generan campos que no presentan efecto de alcance, pero todas las vibraciones isobaras con $k_0 > 0$ generan campos con alcances mayores que el alcance estático χ^{-1} y que tienden hacia ∞ cuando k_0 tiende a χ . Es físicamente evidente que no hay efecto de alcance para el campo total cuando hay emisión de ondas mesónicas: Para obtener un flujo saliente de energía las cantidades del campo mesónico que corresponden a las intensidades del campo electromagnético, deben variar como r^{-1} en el infinito, siendo r la distancia del punto donde se calcula el campo a un punto fijo en el interior de la distribución nucleónica (suponemos que la distribución nucleónica tiene una extensión espacial finita). Las fórmulas (69) y (72) muestran que $\varphi_{rel}(x, K_0)$ y $\varphi_{av}(x, K_0)$ varían realmente como r^{-1} en el infinito.

Es interesante hacer notar que las frecuencias no isobaras también pueden contribuir a la existencia de efectos de alcance. Esto se ve fácilmente si consideramos un punto fuente que está en reposo en un sistema de referencia de Lorentz. En cualquier otro sistema de referencia del mismo tipo, el punto fuente se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme y la correspondiente densidad puede tomarse proporcional a $\delta(x_1 - V x_0)$, siendo V una constante, por una conveniente elección del sistema de coordenadas espacial. El desarrollo de Fourier de $\rho(x)$ en este sistema de referencia de Lorentz, no contiene frecuencias isobaras, como resulta del desarrollo de Fourier de la función δ de Dirac (véase ecuación (127)). Así tenemos un campo con efectos de alcance que no contiene frecuencias isobaras.

(Continuará).

PUBLICACIONES DE LA U. M. A.

Vol. I (1936-1937), Vol. II (1938-1939), Vol. VII (1940-1941), Vol. VIII (1942), Vol. IX (1943), Vol. X (1944-1945), Vol. XI (1945-1946)

Notas y memorias de J. BABINI, M. BALANZAT, J. BARRAL SOUTO, A. BATTIG, G. BECK, C. BIGGERI, G. BIRKHOFF, C. A. BULA, M. BUNGE, H. E. CALCAGNO, F. CERNUSCHI, A. W. CONWAY, C. CRESPO, E. A. DE CESARE, J. DE CICCO, J. A. DEL PERAL, J. FAVET, E. FERRARI, V. y A. FRAILE, Y. FRENKEL, R. FRUCHT, E. GASPÁR, E. GAVIOLA, A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ, A. J. GUARNIERI, J. E. HERRERA, E. KASNER, G. KNIE, N. KRIVOSHEIN, T. LEVI-CITTA, W. MÄCHLER, J. L. MASSERA, M. PETROVICH, M. M. PEIXOTTO, A. PETRACCA, E. R. RAIMONDI, J. J. REBELLA, J. REY PASTOR, S. RÍOS, P. ROSSELL SOLER, M. SADOSKY, R. SAN JUAN, L. A. SANTALÓ, S. SISÁNOV, A. TERRACINI, P. THUILLÉN, F. TORANZOS, J. V. USPENSKY, J. WÜRSCHMIDT.

Informes de las reuniones de la Asociación Física Argentina.

Soluciones de temas propuestos. Bibliografía, Crónica, etc.

Vol. III 1938-1939). Vol. IV (1939). Vol. V (1940). Vol. VI (1940-1942)

Fascículos separados

- Nº 1. — GINO LORIA. *Le Matematiche in Ispagna e in Argentina.*
- » 2. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre las series de funciones de Hermite.*
- » 3. — MICHEL PETROVICH. *Remarques arithmétiques sur une équation différentielle du premier ordre.*
- » 4. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Una nueva demostración del teorema límite del Cálculo de Probabilidades. Condiciones necesarias y suficientes para que una función sea integral de Laplace.*
- » 5. — NIKOLA OBRECHKOFF. *Sur la sommation absolue par la transformation d'Euler des séries divergentes.*
- » 6. — RICARDO SAN JUAN. *Derivación e integración de series asintóticas.*
- » 7. — Resolución adoptada por la U. M. A. en la cuestión promovida por el Sr. Carlos Biggeri.
- » 8. — F. AMODEO. *Origen y desarrollo de la Geometría Projectiva.*
- » 9. — CLOTILDE A. BULA. *Teoría y cálculo de los momentos dobles.*
- » 10. — COTILDE A. BULA. *Cálculo de superficies de frecuencia.*
- » 11. — R. FRUCHT. *Zur Geometria auf einer Fläche mit indefiniter Metrik (Sobre la Geometría de una superficie con métrica indefinida).*
- » 12. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre una memoria del Prof. J. C. Vignaux.*
- » 13. — F. TORANZOS. *Sobre las singularidades de las curvas de Jordan.*
- » 14. — M. BALANZAT. *Fórmulas integrales de la intersección de conjuntos.*
- » 15. — G. KNIE. *El problema de varios electrones en la mecánica cuantista.*
- » 16. — A. TERRACINI. *Sobre la existencia de superficies cuyas líneas principales son dadas.*
- » 17. — L. A. SANTALÓ. *Valor medio del número de partes en que una figura convexa es dividida por n rectas arbitrarias.*
- » 18. — A. WINTNER. *On the iteration of distribution functions in the calculus of probability (Sobre la iteración de funciones de distribución en el cálculo de probabilidades).*
- » 19. — E. FERRARI. *Sobre la paradoja de Bertrand.*
- » 20. — J. BABINI. *Sobre algunas propiedades de las derivadas y ciertas primitivas de los polinomios de Legendre.*
- » 21. — R. SAN JUAN. *Un algoritmo de sumación de series divergentes.*
- » 22. — A. TERRACINI. *Sobre algunos lugares geométricos.*
- » 23. — V. y A. FRAILE y C. CRESPO. *El lugar geométrico y lugares de puntos áreas en el plano.*
- » 24. — R. FRUCHT. *Coronas de grupos y sus subgrupos, con una aplicación a los determinantes.*
- » 25. — E. R. RAIMONDI. *Un problema de probabilidades geométricas sobre los conjuntos de triángulos.*

En 1942 la U. M. A. ha iniciado la publicación de una nueva serie de "Memorias y monografías" de las que han aparecido hasta ahora las siguientes:

Vol. I; Nº 1. — GUILLERMO KNIE, *Mecánica ondulatoria en el espacio curvo.* Nº 2. — GUIDO BECK, *El espacio físico.* Nº 3. — JULIO REY PASTOR, *Integrales parciales de las funciones de dos variables en intervalo infinito.* Nº 4. — JULIO REY PASTOR, *Los últimos teoremas geométricos de Poincaré y sus aplicaciones.* Homenaje póstumo al Prof. G. D. BIRKHOFF.

Vol. II; Nº 1. — YANNY FRENKEL, *Criterios de bicompatidad y de H-completitud de un espacio topológico accesible de Frechet-Riesz.*

Además han aparecido tres cuadernos de *Miscelánea matemática.*

S U M A R I O

	Pág.
Impulso angular del campo de radiación. II. Campo mesotrónico vectorial, por J. A. Balséiro	209
Notas sobre funciones determinantes, por U. Broggi	225
Las funciones de Green de la ecuación de Klein-Gordon, por M. Schönberg	238

*

Contribuyen especialmente al sostenimiento de las publicaciones de
la UNIÓN MATEMÁTICA ARGENTINA los siguientes

MIEMBROS PROTECTORES

COMPANÍA INDUSTRIAL DEL NORTE DE SANTA FE. INGENIO AZUCARERO "ARNO"
(Villa Ocampo. F. C. S. F.). — JULIO REY PASTOR (Buenos Aires). — T. G.
BERLENGIERI y CIA. (Rosario). — TRICERRI HNOS. (Rosario). — MANUEL GUI-
TARTE (Buenos Aires). — CLOTILDE A. BULA (Rosario). — ELBA R. RAIMONDI
(Buenos Aires). — FERNANDO L. GASPAR (Rosario). — CARLOS ISELLA (Ro-
sario). — PEDRO J. TRICERRI (Rosario).