Volumen XIII Número 3

REVISTA

DE LA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

(Miembro del patronato de la Mathematical Reviews)

ORGANO DE LA

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

□

BUENOS AIRES
1948

UNION MATEMATICA ARGENTINA

La U. M. A. reconoce cuatro categorías de miembros: honorarios, protectores, titulares y adherentes. El miembro protector paga una cuota anual de 100 $, por lo menos; el titular una cuota mensual de 5 $ o anual de 50 $; y el adherente una cuota anual de 10 $. Los pagos deberán efectuarse por cheque, giro u otro medio libre de gastos, a la orden de la Tesorera, Prof. Clotilde A. Bula, Lavalle 1115, Rosario.

Por ser la U. M. A. miembro del patronato de la Mathematical Reviews (sponsoring member), los socios de la U. M. A. tienen derecho a suscribirse a esa importante revista de bibliografía y crítica con 50 % de rebaja sobre el precio de suscripción que es de 13 dólares por año. Los socios de la U. M. A. pagarán por tanto sólo 6.50 dólares por año.

Los autores de trabajos reciben gratuitamente una tirada aparte de 50 ejemplares. Las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

JUNTA DIRECTIVA

Presidente, Alberto González Domínguez, Paraguay 1327, Buenos Aires. Vicepresidentes, J. C. Vignaux, E. H. Zarantonello. Secretario general, M. Valentinuzzi. Tesorera, Clotilde A. Bula. Protesorera, Juana M. Cardoso. Director de la Revista, J. Babini. Secretarios locales, R. A. Ricabarra (La Plata), P. L. Checchi (Córdoba). Elvira M. Tula (Cuyo), F. Gaspar (Rosario), Ilda C. Guglielmone (Tucumán).

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

La A. F. A., asociación privada de investigadores, profesores y estudiantes de física y de astronomía, tiene por objeto fomentar el progreso de la enseñanza de dichas materias por medio de reuniones científicas periódicas y de la publicación de trabajos originales.

Podrán ingresar como socios activos quienes hayan efectuado investigaciones originales; pueden ser socios adherentes los profesores que no cumplan este requisito; y socios estudiantes los que hayan aprobado el primer año de estudios de física o de astronomía.

Las solicitudes de ingreso, que deberán llevar la firma de dos socios activos o adherentes, habrán de dirigirse al secretario local que corresponda. Los socios activos abonarán una cuota mensual de 6 $, los adherentes de 4 $ y los estudiantes de 2 $. En estas cuotas están incluídas las suscripciones al órgano de la A. F. A. y a la revista "Ciencia e Investigación".

Los manuscritos destinados a la publicación deberán enviarse al delegado de la A. F. A. Mario Bunge, Instituto de Física, Perú 222, Bs. Aires; y la correspondencia administrativa deberá dirigirse al secretario local que corresponda o a la tesorera.

Para la redacción y presentación de los trabajos se agradecerá se tengan en cuenta las *Normas generales* distribuídas con esta revista en 1945.

COMISION DIRECTIVA

Presidente: Enrique Gaviola.
Tesorera: Estrella Mazzoli de Mathov, San Juan 1931, Buenos Aires.
Secretarios locales: Ernesto E. Galloni, Buenos Aires, Yerbal 1763.
Fidel Alsina Fuertes, La Plata, calle 44 Nº 717.
Guido Beck, Córdoba, Laprida 922.
José Würschmidt, Tucumán, Laprida 765.

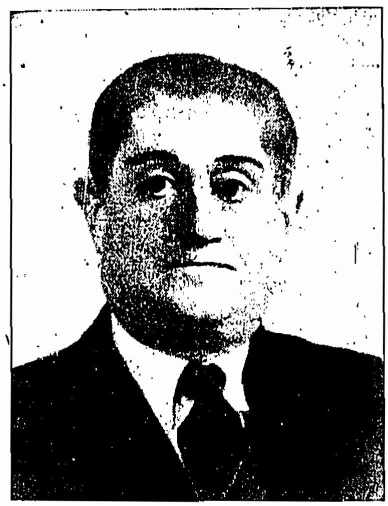
Abonnement annuel à l'etranger: 4.00 dollars (Etats-Unis).

Prière d'adresser toute la correspondance scientifique et administrative à l'adresse ci-dessous:

SR. SECRETARIO DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA
Dr. MÁXIMO VALENTINUZZI
Gascón 520, Buenos Aires (REP. ARGENTINA)

ALFREDO ROSENBLATT

(1880 — 1947)



El 8 de julio de 1947 falleció en Lima (Perú) Alfredo Rosenblatt. Nacido el 22 de junio de 1880 en Cracovia (Polonia), descendía de una antigua familia que, a través de seis generaciones, se vió honrada por varios intelectuales, habiendo sido su padre, José Rosenblatt, catedrático en la Facultad de Derecho de Cracovia. Inició sus estudios en el benemérito Colegio de Santa Ana, de su ciudad natal, destacándose en latín, griego y matemática. Desde su juventud cultivó con pasión los estudios matemáticos, en cuya dirección intervino uno de sus tíos. En Viena cursó ingeniería, a instancias de su padre; vuelto a Cracovia, se especializó como matemático en la Universidad de Yagiellovska, al lado de Radski, a quien admiraba. Doctorado en 1908, comenzó su carrera docente, en 1910, como jefe de trabajos prácticos de la Facultad de Ciencias de Cracovia, donde continuó luego como profesor hasta 1936. Después de visitar Roma, París, Lieja, Belgrado, Sofía, etc., y de haber pronunciado diversas conferencias, se trasladó al Perú, en dicho año, invitado por Godofredo García, entonces decano de la Facultad de Ciencias de San Marcos. Hallándose en Urbana (Illinois), Estados Unidos de América del Norte, en viaje de estudio y conferencias, contrajo una neumonía, de cuyas consecuencias dejó de existir tres meses más tarde.

M. Valentinuzzi

ON RESTRICTED PARTITIONS WITH A BASIS OF UNIQUENESS

by

AUREL WINTNER

1.- Let a set, S, of distinct positive integers be called a partitionable set, or shortly a π-set, if it possesses a basis, K, of *unique* restricted partitions, in the following sense: S consists of all integers representable as sums of distinct elements of a sequence,

$$K: \quad k_0 < k_1 < k_2 < \ldots, \qquad (k_0 \geqq 1), \tag{1}$$

of positive integers which has the property that a relation of the form

$$k'_1 + k'_2 + \ldots + k'_a = k''_1 + k''_2 + \ldots + k''_b,$$

where $k'_1 < k'_2 < \ldots$ and $k''_1 < k''_2 < \ldots$ are elements of K, holds only when

$$k'_1 = k''_1, \quad k'_2 = k''_2, \ \ldots, \ k'_a = k''_b; \quad a = b.$$

Every sequence K having the latter property determines a π-set S, having K as a basis. Conversely, if a π-set S is given, its basis K is uniquely determined by S. The latter fact can readily be verified by induction, viz., by first characterizing k_0, and then, if $k_0, \ldots, k_j$ in (1) are known, k_{j+1}, in terms of S alone. A formal rewording of this uniqueness proof can be based on the generating relation

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} s_n z^n = \prod_{j=0}^{\infty} (1 + z^{k_j}), \qquad |z| < 1, \tag{2}$$

where s_n denotes the characteristic function of S, i.e.,

(3) $s_n = 1$ or $s_n = 0$ according as n is or is not in S.

It is clear that a given set of integers k_j is a basis, K, if and only if the corresponding product (2) leads to a power series (2) in which no coefficient turns out to have a value distinct from 0 and 1, and that the set S generated by K is then defined by (3). This description of the situation makes clear enough the substantially implicit nature of the requirements involved.

Strictly speaking, (2) holds only if the sequence (1) is infinite, since otherwise the upper limit of the product in (2) must (whereas the upper limit of the sum in (2) may, but need not) be replaced by a finite limit. It is however clear that K is a finite set if and only if S is, and the following considerations deal with an asymptotic question concerning infinite mates, K, S. rather than with the question of enumeration presented by the case of finite mates K, S.

2. - If S is any set of distinct positive integers, let $N(n)$ denote the number of those elements of S which do not exceed n; so that

$$N(n)/n = (s_1 + \ldots + s_n)/n, \tag{4}$$

if s_n is defined by (3). If (4) tends, as $n \to \infty$, to a limit, then S is said to be measurable («in relative measure»), and the limit, which will be denoted by $|S|$, is called the measure of S. It is clear from (4) and (3) that, if

$$|S| = \lim_{n \to \infty} (s_1 + \ldots + s_n)/n \tag{5}$$

exists, then

$$0 \leqq |S| \leqq 1. \tag{6}$$

Since $s_n \geqq 0$, it follows from a Tauberian theorem of Hardy and Littlewood (cf. reference [1] at the end of this paper), that (5) is equivalent to

(7) $$|S|=\lim_{r\to 1}(1-r)\sum_{n=1}^{\infty} s_n r^n, \qquad (0<r<1).$$

By «equivalence» is meant that the existence of either of the limits (5), (7) implies the existence and the identity of both limits.

If this criterion is applied to the case of a π-set S, it follows that S is measurable, and has the measure $|S|$, if and only if the basis, (1), of S is such as to lead to the existence of the limit

(8) $$\lim_{r\to 1} f(r)=|S|,$$

where

(9) $$f(r)=\prod_{j=0}^{\infty}(1+r^{k_j})/(1+r^{2^j}).$$

This is clear from (2) and (7), if recourse is had to Euler's identity

(10) $$\sum_{n=0}^{\infty} z^n=\prod_{j=0}^{\infty}(1+z^{2^j}), \qquad |z|<1$$

(which, in view of the criterion (2), means that the set of all positive integers is a π-set, with

(11) $$1, 2, 4, 8, \ldots$$

as basis).

3. - It is clear that, if

(12) $$k_0^*<k_1^*<k_2^*<\ldots$$

is a subsequence of a sequence (1) and if (1) is a basis, then (12) is a basis and generates a π-set, S^*, contained in the π-set, S, generated by (1). Furthermore, if S is measurable, then S^* is measurable and has the measure

(13) $$|S^*|=|S|/2^h \quad \text{or} \quad |S^*|=0$$

according as just a finite number or an infinity of elements of

(1) are missing in (12), the exponent h in (13) being the number of those k-values which do not occur in (12). In fact, the truth of (13) is readily verified from the criterion (8), from the definition (9) and from the identity which results if a finite number of factors are omitted on the right of (10).

Let a K be called a 0-basis if the characteristic function, s_n, of the π-set, S, generated by K satisfies

$$(14) \qquad s_1 + \ldots + s_n = o(n) \qquad \text{(i. e., } |S| = 0).$$

For instance, (1) is a 0-basis if $k_n = 3^n$. If it were true that every basis which is not a 0-basis is a subsequence, (12), of Euler's basis, (11), it would follow from (13) that every π-set is measurable, those π-sets which are not of measure 0 having the measure $1/2^h$, where h is a certain positive integer (in fact, the basis (11) generates all positive integers, which form a set of measure 1). But the hypothesis of this conclusion is false. For, if ϑ is any value contained in the interval $0 < \vartheta < 1$ (hence, a value not necessarily of the form $1/2^h$), it is not difficult to construct a basis $K = K_\vartheta$ corresponding to which the π-set, $S = S_\vartheta$, is measurable and has the preassigned ϑ as its measure, $|S_\vartheta|$.

It will remain undecided *whether every or not every π-set is measurable.* What will be proved is a sufficient criterion, along with an explicit condition which can be obtained as a corollary of this criterion, for the measurability of a π-set.

4. - The criterion in question is «Abelian» in nature; it states that; *if* (1) *is a basis for which the limit*

$$(15) \qquad \lim_{n\to\infty} 2^n/k_n$$

exists, then the π-set generated by (1) *is measurable, and its measure is the limit* (15).

In view of the criterion (8), this assertion is equivalent to the statement that, if the existence of (15) is assumed, then the function (9) must tend, as $r \to 1$, to a limit, and that the latter has the same value as (15). Hence, more than the italicized assertion will be proved if it is shown that, whether the limits (8), (15) do or do not exist, the function (9) must satisfy the inequalities

$$(16) \qquad \liminf_{n\to\infty} 2^n/k_n \leqq \liminf_{r\to 1} f(r), \qquad \limsup_{r\to 1} f(r) \leqq \limsup_{n\to\infty} 2^n/k_n.$$

Put

$$(17) \qquad f_m(r) = \prod_{n=m}^{\infty} (1+r^{k_n})/(1+r^{2^n}), \qquad (r<1);$$

so that $f_0 = f$, by (9). Since, when n is fixed,

$$(18) \qquad (1+r^{k_n})/(1+r^{2^n}) \longrightarrow 1 \text{ as } r \longrightarrow 1,$$

it is clear that

$$(19) \qquad \limsup_{r\to 1} f(r) = \limsup_{r\to 1} f_m(r)$$

holds for every fixed m. On the other hand, if β denotes the upper limit on the right of the second of the inequalities (16), then either $\beta = \infty$, in which case the second of the assertions (16) is trivial, or else there belongs to every $\varepsilon > 0$ an m having the property that

$$k_n > 2^n/(\beta+\varepsilon) \text{ whenever } n \geqq m = m_\varepsilon.$$

Since $0<r<1$, this means that, if $q = q_\varepsilon$ is defined by

$$(21) \qquad q^{\beta+\varepsilon} = r, \text{ so that } 0<q<1,$$

then

$$r^{k_n} < q^{2^n} \text{ whenever } n > m = m_\varepsilon.$$

In view of (17), the last inequality implies that

$$\limsup_{r\to 1} f_m(r) \leqq \limsup_{r\to 1} \prod_{n=m}^{\infty} (1+q^{2^n})/(1+r^{2^n}),$$

where $q = q(r) \longrightarrow 1$ as $r \longrightarrow 1$, by (21). Since, corresponding to (18),

$$(1+q^{2^n})/(1+r^{2^n}) \longrightarrow 1 \text{ as } r \longrightarrow 1$$

holds for every fixed n, it follows that

$$\limsup_{r\to 1} f_m(r) \leqq \limsup_{r\to 1} \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^{2^n})/(1+r^{2^n}).$$

Hence, if (19) is applied on the left, and (10) twice on the right,

$$\limsup_{r\to 1} f(r) \leqq \limsup_{r\to 1} \sum_{n=1}^{\infty} q^n / \sum_{n=1}^{\infty} r^n.$$

Since, as $r \longrightarrow 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n / \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sim (1-r)/(1-q) \longrightarrow \beta + \varepsilon,$$

by (21), it follows that

$$\limsup_{r\to\infty} f(r) \leqq \beta + \varepsilon, \text{ and so } \limsup_{r\to\infty} f(r) \leqq \beta.$$

This proves the second of the inequalities (16), and the first is proved in the same way.

It is clear that the existence and the non-vanishing of the limit (15) imply that

(22) $$k_{n+1}/k_n \longrightarrow 2 \quad \text{as} \quad n \longrightarrow \infty.$$

It follows therefore from the italicized assertion, just proved, that, if (1) is a basis generating a π-set, S, which is measurable by virtue of the existence of (15), then the basis must satisfy (22) unless $|S|=0$.

5. - The (k', k'')-requirement, specified after (1), is obviously fulfilled by any sequence of positive integers $k_0, k_1, \ldots$ satisfying

(23) $$k_{n+1} > k_0 + \ldots + k_n \text{ for } n=0, 1, \ldots$$

Since $k_0 \geqq 1$, the inequalities

(24) $$k_n \geqq 2^n, \text{ where } n=0, 1, 2, \ldots,$$

are necessary for (23). In the inequalities (24), the sign of equality must fail to hold for one n at least, unless (1) is the sequence (11), the basis of all positive integers. Thus (11) appears as the (unique) extremal case of all bases satisfying (23).

A corollary of the italicized criterion is that, *if* $k_0, k_1, \ldots$ *is a sequence of positive integers satisfying* (23), *then it is a basis generating a measurable* π*-set*. In order to conclude this, it is sufficient to ascertain that the limit (15) must exist whenever (23) is satisfied. But this can be assured by, even though it is not explicitly contained in, the arguments applied by R. Salem and D. C. Spencer (cf. reference [2] below).

Since (23) implies the existence of the limit (15), it follows that, if a basis satisfies (23), then (22) must hold unless the π-set is of measure 0. Nevertheless, it is easy to see that, corresponding to every ϑ in the interval $0 < \vartheta < 1$, there exists a basis satisfying (23) and generating a (measurable) π-set the measure of which is ϑ.

The Johns Hopkins University.

REFERENCES

[1] J. Kamarata, *Ueber die Hardy-Littlewoodsche Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes*, Mathematische Zeitschrift, vol 32 (1930), pp. 319-320.

[2] R. Salem and D. C. Spencer, *On the influence of gaps on density of integers*, Duke Journal of Mathematics, vol. 9 (1942), pp. 855-872.

ACERCA DE UNA TRANSFORMACION CANONICA DEL CAMPO DE RADIACION

por José A. Balseiro
(Instituto de Física. - La Plata)

Summary. — It is shown that the canonical transformation, which leads from the variables p, q of a linear oscilator to the new variables N, ϑ (N, number of excitation, ϑ phase) does not fit with the ordinary scheme of transformation theory. A generalization of this scheme, suitable for the present case, is given.

§ 1. - *Introducción.*

El campo de radiación cuantificado se describe mediante un par de variables canónicas, p_r, q_r, correspondientes a cada onda definida por el índice r. En esta representación el hamiltoniano del campo es:

$$H = \frac{1}{2}\int (\vec{E}^{+} - i\vec{H}^{+})(\vec{E} + i\vec{H})\, d\tau = \Sigma\, \frac{1}{2}\,(p_r^2 + w_r^2\, q_r^2 - h v_r) \qquad (w_r = 2\pi v_r) \qquad (1.1)$$

Las funciones propias de (1.1) son, como es sabido, las funciones de Hermite $e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi_r)$, $(\xi_r = 2\pi\sqrt{\frac{v_r}{h}}\, q_r)$ y los valores propios de H sor $n_r h v_r$, siendo n_r números enteros y positivos.

El campo de radiación cuantificado puede describirse, también, mediante las variables complementarias N_r, ϑ_r. La primera es el número de fotones asociados al estado r y ϑ_r la variable de fase correspondiente a este estado. Cumplen la relación de conmutación:

$$N_r\,\vartheta_{r'} - \vartheta_{r'}\,N_r = i\delta_{r'r}. \tag{1.2}$$

El hamiltoniano (1.1) en esta representación, teniendo presente (1.2), es de la forma:

$$H = \Sigma\, h\nu_r N_r = i\, \Sigma\, h\nu_r \frac{\partial}{\partial\vartheta_r}. \tag{1.3}$$

Las funciones propias de (1.3) son, pues:

$$H\,\Gamma_n(\vartheta) = i\,h\nu_r \frac{\partial}{\partial\vartheta_r}\, e^{-in_r\vartheta_r} = n_r\, h\nu_r\, \Gamma_n(\vartheta) \qquad n_r = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$H\,\Gamma_{-n}(\vartheta) = i\,h\nu_r \frac{\partial}{\partial\vartheta_r}\, e^{+in_r\vartheta_r} = -\,n_r\, h\nu_r\, \Gamma_{-n}(\vartheta) \qquad n_r = 1, 2, 3, \ldots.$$

En este caso el sistema completo de las autofunciones es el conjunto $e^{-in_r\vartheta_r}$, $e^{+in_r\vartheta_r}$, de las cuales sólo las primeras conducen a valores positivos de la energía. Al pasar de la representación p, q a la N, ϑ los valores propios de N, que son números enteros positivos en la primera representación, se desdoblan en positivos y negativos en la última. En la representación N, ϑ no es posible, como a veces se hace, dejar de lado las funciones $\Gamma_{-n}(\vartheta)$, que conducen a los valores propios negativos, pues en esta forma se pierde la completidad del sistema de las autofunciones.

En el presente trabajo se discute, desde el punto de vista de las transformaciones canónicas, la transformación de la representación p, q a la representación N, ϑ. En esta forma es posible obtener las funciones $\Gamma_n(\vartheta)$ como las funciones transformadas de $e^{-\frac{\xi^2}{2}}\, \mathrm{H}_n(\xi)$. En cambio, $\Gamma_{-n}(\vartheta)$ se obtienen como transformadas de las soluciones de la ecuación de Hermite correspondiente a valores imaginarios de las variables q. Como consecuencia del formalismo desarrollado se obtiene que, en virtud de la necesidad de considerar el sistema completo $\Gamma_n(\vartheta)$, $\Gamma_{-n}(\vartheta)$, no puede prescindirse en la descripción N, ϑ de fotones de energía negativa. Esto es equivalente, en la representación p, q, a la necesidad de considerar las soluciones de la ecuación de Hermite, no sólo sobre el eje real de las variables q, sino, también, las soluciones sobre el eje imaginario.

§ 2. - *Transformaciones canónicas.*

La teoría de las transformaciones canónicas cuánticas fué desarrollada por Jordan (1) y Dirac (2). Para nuestro objeto necesitamos algunas relaciones que no figuran explícitamente en estos trabajos.

Sea dada una transformación entre las variables canónicas $p_1, p_2, \ldots q_1, q_2 \ldots$ y $P_1, P_1, \ldots Q_1, Q_2, \ldots$ que, naturalmente, satisfacen la relación de conmutación de Heisenberg. Podemos dar la transformación canónica que consideramos en la forma:

$$\begin{aligned} p &= p(Q, q) \\ P &= P(Q, q) \end{aligned} \tag{2.1}$$

en donde se han suprimido los subíndices. Si la transformación es dada en esta forma, deben considerarse como independientes a las variables Q y q, es decir $\frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{\partial q}{\partial Q} = 0$. Estas relaciones equivalen a:

$$\begin{aligned} pQ - Qp &= -\frac{ih}{2\pi} \frac{\partial Q}{\partial q} = 0 \\ Pq - qP &= -\frac{ih}{2\pi} \frac{\partial q}{\partial Q} = 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Las variables p conmutan, pues, con las Q, y las P con las q.

Si $W(q, Q)$ es la función generatriz de la transformación canónica, se cumple:

$$p_r = \frac{\partial W}{\partial q_r} \qquad P_s = -\frac{\partial W}{\partial Q_s}. \tag{2.3}$$

De aquí,

$$\frac{\partial p_r}{\partial Q_s} = -\frac{\partial P_s}{\partial q_r} = \frac{\partial^2 W}{\partial q_r \partial Q_s} \neq 0.$$

(1) P. JORDAN, Z. f. Physik, *37*, 383 (1926) y *38*, 513 (1926).
(2) P. A. M. DIRAC, Proc. Roy. Soc. London, 116, 633 (1927).

Luego:

$$pP - Pp = -i \frac{h}{2\pi} \frac{\partial P}{\partial q} = i \frac{h}{2\pi} \frac{\partial P}{\partial q} \neq 0. \tag{2.4}$$

Las variables p, P no conmutan. Teniendo esto presente, de la (2.1) se sigue que q y Q tampoco conmutan:

$$qQ - Qq \neq 0. \tag{2.5}$$

Dada una función $\psi(q)$ referida al sistema de variables p, q, se transforma en $F(Q)$ mediante:

$$F(Q) = \int S(q, Q)\, \psi(q)\, \sigma(q)\, dq \tag{2.6}$$

donde $S(q, Q)$ es la función de transformación y $\sigma(q)$ es una función de densidad. Recíprocamente:

$$\psi(q) = \int S^*(q, Q)\, F(Q)\, \rho(Q)\, dQ \tag{2.7}$$

siendo $\rho(Q)$ una función de densidad respecto de las variables Q.

Si $\psi_\lambda(q)$ forman un sistema ortogonal de funciones normalizadas con la función de densidad $\sigma(q)$

$$\int \psi_{\lambda'}^*(q)\, \psi_\lambda(q)\, \sigma(q)\, dq = \delta_{\lambda'\lambda} \tag{2.8}$$

puede demostrarse que las funciones transformadas en caso de variables, q, Q reales, forman también un sistema ortogonal con la función de densidad $\rho(Q)$:

$$\int F_{\lambda'}^*(Q)\, F_\lambda(Q)\, \rho(Q)\, dQ = \delta_{\lambda'\lambda}. \tag{2.9}$$

Por otra parte, considerando que

$$p = -i \frac{h}{2\pi} \frac{\partial}{\partial q} \qquad P = -i \frac{h}{2\pi} \frac{\partial}{\partial Q}$$

es posible demostrar que:

$$S(q, Q) = e^{-\frac{2\pi i}{h} W(q, Q)} . \tag{2.10}$$

Esta expresión permite determinar $S(q, Q)$ cuando se dá la transformación (2.1), pues por la propiedad (2.3) de $W(q, Q)$ se tiene:

$$dW = \sum_r \left(\frac{\partial W}{\partial q_r} dq_r + \frac{\partial W}{dQ_r} dQ_r \right) = \sum_r (p_r dq_r - P_r dQ_r).$$

Nos interesa, en forma especial, la ecuación diferencial a la cual satisface $S(q, Q)$, cuando la energía queda referida a los ejes principales, tanto en el sistema p, q como en el P, Q. Sea $H(p, q) = H\left(-\frac{ih}{2\pi} \frac{\partial}{\partial q}, q\right)$ el hamiltoniano en el sistema p, q y $\sqrt{\sigma(q)}\, \psi(q)$ sus autofunciones:

$$H\left(-\frac{ih}{2\pi} \frac{\partial}{\partial q}, q\right) \sqrt{\sigma(q)}\, \psi_\lambda(q) = \lambda \sqrt{\sigma(q)}\, \psi_\lambda(q). \tag{2.11}$$

Análogamente para el sistema P, Q:

$$\mathcal{H}\left(-\frac{ih}{2\pi} \frac{\partial}{\partial q}, Q\right) \sqrt{\rho(Q)}\, \Gamma_\lambda(Q) = \lambda \sqrt{\rho(Q)}\, \Gamma_\lambda(Q). \tag{2.12}$$

Multiplicando (2.11) por $\sqrt{\sigma(q)}\, S(q, Q)$ e integrando:

$$\int \sqrt{\sigma(q)}\, S(q, Q) \left[H\left(-\frac{ih}{2\pi} \frac{\partial}{\partial Q}, q\right) \sqrt{\sigma(q)}\, \psi_\lambda(q)\right] dq =$$

$$\lambda \int S(q, Q)\, \psi_\lambda(q)\, \sigma(q)\, dq =$$

$$= \lambda\, \Gamma_\lambda(Q) = \frac{1}{\sqrt{\rho(Q)}} \left[\mathcal{H}\left(-\frac{ih}{2\pi} \frac{\partial}{\partial Q}, Q\right) \sqrt{\rho(Q)}\, \Gamma_\lambda(Q)\right].$$

Integrando por partes la primera de estas integrales, llamando $\bar{H}\left(+\frac{ih}{2\pi} \frac{\partial}{\partial q}, q\right)$ a la forma diferencial adjunta de $H\left(-\frac{ih}{2\pi} \frac{\partial}{\partial q}, q\right)$ y considerando que en el límite de integración las funciones $\sqrt{\sigma(q)}\,\psi_\lambda(q)$ deben anularse, se obtiene:

$$\int [\bar{H}\Big(-\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial}{\partial q}, q\Big)\sqrt{\sigma(q)}\,S(q,Q)]\sqrt{\sigma(q)}\,\psi_\lambda(q)\,dq =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\rho(Q)}}[\mathcal{H}\Big(-\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial}{\partial Q}, Q\Big)\sqrt{\rho(Q)}\,F_\lambda(Q)] =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{\rho(Q)}}[\mathcal{H}\Big(-\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial}{\partial Q}, Q\Big)\sqrt{\rho(Q)}\,S(q,Q)]\,\psi_\lambda(q)\sigma(q)\,dq.$$

Puesto que esta relación se cumple para cualquier valor de Q y λ, se sigue que:

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma(q)}}[\bar{H}\Big(-\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial}{\partial q}, q\Big)\sqrt{\sigma(q)}\,S(q,Q)] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\rho(Q)}}[\mathcal{H}\Big(-\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial}{\partial Q}, Q\Big)\sqrt{\rho(Q)}\,S(q,Q)]. \qquad (2.13)$$

Esta es la ecuación diferencial a la cual satisface $S(q, Q)$.

Procediendo en forma análoga y partiendo de (2.12) se llega a:

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma(q)}}[H\Big(-\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial}{\partial q}, q\Big)\sqrt{\sigma(q)}\,S^*(q,Q)] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\rho(Q)}}[\bar{\mathcal{H}}\Big(-\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial}{\partial Q}, Q\Big)\sqrt{\rho(Q)}\,S^*(q,Q)]. \qquad (2.14)$$

§ 3. - *Transformación* $p, q \longrightarrow N, \vartheta$.

Los operadores de emisión a_r^+ y absorción a_r de un campo de radiación cuantificado están vinculados con las variables p_r, q_r y N_r, ϑ_r mediante las relaciones (3):

(3) Ver p. e. W. HEITLER, *The quantun theory of radiation*, § 7, Oxford Univ. Press, 1944.

$$a_r^+ = \frac{-i}{\sqrt{2hv_r}}(p_r + iw_r q_r) = \sqrt{N_r}\, e^{-i\vartheta_r}$$

$$a_r = \frac{i}{\sqrt{2hv_r}}(p_r - iw_r q_r) = e^{i\vartheta_r}\sqrt{N_r}. \qquad (3.1)$$

De (1. 2), si se define una nueva variable $\mathcal{N}_r = -\frac{h}{2\pi} N_r$, se tiene:

$$\mathcal{N}_r \vartheta_{r'} - \vartheta_{r'} \mathcal{N}_r = -i \frac{h}{2\pi} \delta_{rr'}.$$

$\mathcal{N}_r$ y ϑ_r son, en esta forma, variables canónicamente conjugadas. La (3. 1) es, pues, una transformación canónica entre las variables p, q y $\mathcal{N}_r, \vartheta_r$.

Respecto de la nomenclatura empleada anteriormente es $\mathcal{N} = P$ y $\vartheta = Q$.

Según (2. 2) las variables p conmutan con las ϑ y las N con las q. No así p con N ni q con ϑ.

De (3. 1) se obtiene:

$$\begin{aligned} e^{i\vartheta} q\, e^{-i\vartheta} - e^{-i\vartheta} q\, e^{i\vartheta} &= e^{2i\vartheta} q - q\, e^{2i\vartheta} \\ e^{i\vartheta} q\, e^{-i\vartheta} - e^{-i\vartheta} q\, e^{i\vartheta} &= q\, e^{-2i\vartheta} - e^{-2i\vartheta} q \end{aligned} \qquad (3.2)$$

y de aquí resulta

$$\cos^2\vartheta\, q = q \cos^2\vartheta.$$
$$\operatorname{sen}^2\vartheta\, q = q \operatorname{sen}^2\vartheta.$$

Derivando respecto de ϑ y mediante las (3. 2) se obtiene:

$$e^{2i\vartheta} q = q\, e^{2i\vartheta}$$

y de aquí se obtiene que q también conmuta con tag ϑ. Con estas relaciones sin mayor dificultad se encuentra que:

$$p = w\, q \operatorname{tag}\vartheta$$

$$\mathcal{N} = -\frac{h}{2\pi} N = -\frac{h}{2\pi}\left[\frac{1}{2hv}(p^2 + w^2 q^2 - hv)\right]$$
$$= -\frac{1}{2} w\, q^2 \frac{1}{\cos^2\vartheta} + \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}.$$

De (2. 3) se obtiene que la función generatriz es:

$$-\frac{2\pi i}{h} W = -\frac{i}{2} 4\pi^2 \frac{v}{h} q^2 \operatorname{tag} \vartheta + \frac{i}{2} \vartheta = -\frac{i}{2} \xi^2 \operatorname{tag} \vartheta + \frac{i}{2} \vartheta$$

$$(\xi = 2\pi \sqrt{\frac{v}{h}} q). \quad (3.3)$$

Finalmente la función de transformación, según la. (2. 10) es:

$$S(\xi, \vartheta) = e^{-i \frac{\xi^2}{2} \operatorname{tag} \vartheta + i \frac{\vartheta}{2}} \quad (3.4)$$

§ 4. - *Transformación de las funciones propias.*

Estando dados $H(-i\frac{h}{2\pi}\frac{\partial}{\partial q}, q), \mathcal{H}(-i\frac{h}{2\pi}\frac{\partial}{\partial Q}, Q)$ y $S(q, Q)$ las funciones de densidad $\sigma(q)$ y $\rho(Q)$ quedan determinadas mediante la ecuación (2. 13). Si se resuelve este problema, en general, no se encontrará un único par de funciones $\sigma(q)$, $\rho(Q)$, sino un sistema de soluciones $\sigma_1(q)$, $\rho_1(Q)$; $\sigma_2(q), \rho_2(Q) \ldots$ Conocidas en esta forma las funciones de densidad habrá que determinar a qué funciones $\psi(q)$ y $\Gamma(Q)$ corresponden.

Consideremos las funciones de densidad posibles cuando la función de transformación está dada por la (3. 4),

$$H(-i\frac{h}{2\pi}\frac{\partial}{\partial q}, q) = \frac{hv}{2}(-\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \xi^2 - 1)$$

y

$$\mathcal{H}(-\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial}{\partial Q}, Q) = ihv\frac{\partial}{\partial \vartheta}$$

En este caso la (2. 13) es:

$$\frac{1}{2\sqrt{\sigma(\xi)}}[(-\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \xi^2 - 1)\sqrt{\sigma(\xi)}\, e^{-\frac{i}{2}\xi^2 \operatorname{tg} \vartheta + \frac{i}{2}\vartheta}] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\rho(\vartheta)}}\, i\frac{\partial}{\partial \vartheta}[\sqrt{\rho(\vartheta)}\, e^{-\frac{i}{2}\xi^2 \operatorname{tg} \vartheta + \frac{i}{2}\vartheta}].$$

Efectuando operaciones se llega a:

$$-\frac{\sigma''(\xi)}{2\sigma(\xi)}+\left(\frac{\sigma'(\xi)}{2\sigma(\xi)}\right)^2+i\,\mathrm{tg}\,\vartheta\,[1+\frac{\sigma'(\xi)}{\sigma(\xi)}\xi]-i\frac{\rho'(\vartheta)}{\rho(\vartheta)}=0. \qquad (4.1)$$

Siendo ξ y ϑ variables independientes, la (4.1) admite solución cuando:

$$1+\frac{\sigma'(\xi)}{\sigma(\xi)}\,\xi=a=\mathrm{const.} \qquad (4.2)$$

$$i\,.\,a\,.\,\mathrm{tag}\,\vartheta-i\,\frac{\rho'(\vartheta)}{\rho(\vartheta)}=b=\mathrm{const.} \qquad (4.3)$$

$$-\frac{\sigma''(\xi)}{2\sigma(\xi)}+\left(\frac{\sigma'(\xi)}{2\sigma(\xi)}\right)^2=-b. \qquad (4.4)$$

De (4.2) se obtiene:

$$\sigma(\xi)=\mathrm{const.}\,\xi^{a-1}. \qquad (4.5)$$

Mediante la (4.4) se determinan los valores de a y b que satisfacen la (4.1). Sustituyendo en ésta el valor de $\sigma(\xi)$ dado por (4.5) se llega:

$$\frac{1}{2}(a-1)\left[\frac{1}{2}(a-1)-a+2\right]\xi^{-2}=-b.$$

De aquí:

$$a_1=1, \qquad a_2=3, \qquad b=0.$$

Existen, pues, dos funciones de densidad

$$\sigma_1(\xi)=\alpha_1=\mathrm{const.} \qquad \sigma_2(\xi)=\alpha_2\,\xi^2. \qquad (4.6)$$

a las cuales, según (4.3), corresponden, para $b=0$, las funciones:

$$\rho_1(\vartheta)=\frac{\beta_1}{\cos\vartheta} \qquad \rho_2(\vartheta)=\frac{\beta_2}{\cos^3\vartheta}. \qquad (4.7)$$

Con estos elementos estamos en condiciones de encontrar la transformación de las funciones $e^{-\frac{\xi^2}{2}}H_n(\xi)$ a las funciones $\Gamma_n(\vartheta)$:

$$\Gamma_n(\vartheta) = e^{i\frac{\vartheta}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i}{2}\xi^2 \operatorname{tag}\vartheta} \cdot e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi)\, \sigma(\xi)\, d\xi$$

$$= e^{i\frac{\vartheta}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2 s(\vartheta)}\, H_n(\xi)\, \sigma(\xi)\, d\xi \qquad (4.8)$$

con

$$S(\vartheta) = \frac{e^{i\vartheta}}{2\cos\vartheta} \qquad R[S(\vartheta)] = \frac{1}{2} > 0. \qquad (4.9)$$

Debemos astablecer, en primer término, cuándo corresponde emplear $\sigma_1(\xi) = \alpha_1$ o $\sigma_2(\xi) = \alpha_2\,\xi^2$. Según (2.8) se tiene:

para $\sigma_1(\xi) = \alpha_1$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}\, H_{n'}(\xi)\, H_n(\xi)\, \alpha_1\, d\xi = \alpha_1\, c_n\, \delta_{n'n}$.

para $\sigma_2(\xi) = \alpha_2\,\xi^2$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} \left(\frac{1}{\xi} H_{n'}(\xi)\right)\left(\frac{1}{\xi} H_n(\xi)\right) \alpha_2\, \xi^2\, d\xi =$

$$= \alpha_2\, c_n\, \delta_{n'n}.$$

Es decir, para $\sigma_2(\xi)$ debe considerarse la transformación de $\frac{1}{\xi} H_n(\xi)$.

Puesto que $H_{2n}(\xi)$ es un polinomio par y $H_{2n+1}(\xi)$ es impar, la (4.8) es distinta de cero para $n = 2m$ y $\sigma(\xi) = \alpha_1$ y cero cuando $\sigma(\xi) = \alpha_2\,\xi^2$. Recíprocamente es nula cuando $n = 2m+1$ y $\sigma(\xi) = \alpha_1$ y distinta de cero para $\sigma(\xi) = \alpha_2\,\xi^2$. En esta forma se tiene:

$$\Gamma_{2n}(\vartheta) = \alpha_1\, e^{i\frac{\vartheta}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2 s(\vartheta)}\, H_{2n}(\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{\alpha_1}{2}\, e^{i\frac{\vartheta}{2}} \int_{0}^{\infty} e^{-\eta\, s(\vartheta)} \frac{1}{\sqrt{\eta}} H_{2n}(\sqrt{\eta})\, d\eta \qquad (4.10)$$

$$\Gamma_{2n+1}(\vartheta) = \alpha_2 e^{i\frac{\vartheta}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2 s(\vartheta)} \frac{1}{\xi} H_{2n+1}(\xi)\, \xi^2 \, d\xi =$$

$$= \frac{\alpha_2}{2} e^{i\frac{\vartheta}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\eta s(\vartheta)} H_{2n+1}(\sqrt{\eta})\, d\eta. \quad (4.11)$$

$$(\eta = \xi^2)$$

Las (4.10) y (4.11) son las transformadas de Laplace de las funciones $\frac{1}{\sqrt{\eta}} H_{2n}(\sqrt{\eta})$ y $H_{2n+1}(\sqrt{\eta})$ respectivamente; las funciones transformadas son conocidas (4) cumpliéndose la condición de convergencia $R(S(\vartheta)) > 0$:

$$\Gamma_{2n}(\vartheta) = \frac{\alpha_1}{2} e^{i\frac{\vartheta}{2}} \sqrt{\pi} \frac{(2n)!}{n!} \frac{[1-S(\vartheta)]^n}{[S(\vartheta)]^{n+1/2}} =$$

$$= \alpha_1 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{n!} \cos^{1/2}\vartheta \, e^{-i2n\vartheta} \quad (4.12)$$

$$\Gamma_{2n+1}(\vartheta) = -\frac{\alpha_2}{2} e^{i\frac{\vartheta}{2}} \sqrt{\pi} \frac{(2n+1)!}{n!} \frac{[1-S(\vartheta)]^n}{[S(\vartheta)]^{n+3/2}} = -$$

$$= -\alpha_2 \sqrt{2\pi} \frac{(2n+1)!}{n!} \cos^{3/2}\vartheta \, e^{-i(2n+1)\vartheta}. \quad (4.13)$$

A las funciones $e^{-i2n\vartheta}$ les corresponde la función de densidad $\frac{\text{const}}{\cos\vartheta}$ y a las $e^{-i(2n+1)\vartheta}$ les corresponde $\frac{\text{const}}{\cos^3\vartheta}$. Estas son las funciones de densidad calculadas anteriormente y dadas por (4.6).

Estas funciones propias corresponden a valores propios positivos de la energía.

§5. - *Valores propios negativos.*

El sistema ortogonal completo de las funciones $e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi)$ se transforma, como hemos visto, en el sistema semicompleto de

---

(4) Ver G. Doetsch, *Theorie und Anwendung der Laplace Transformation*, pág. 403, Julius Springer, Berlin, 1937.

las funciones $e^{-in\vartheta}(n>0)$. Debemos ahora, con el objeto de poder disponer del sistema completo de estas funciones, hallar en qué condiciones se encuentran las funciones $e^{in\vartheta}$.

Consideremos la función de transformación

$$S(\zeta, \vartheta) = e^{+i\frac{\xi^2}{2}\operatorname{tag}\vartheta + i\frac{\vartheta}{2}} \tag{5.1}$$

Resulta

$$S^*(\vartheta) = \frac{e^{-i\vartheta}}{2\cos\vartheta}, \qquad R(S^*(\vartheta)) = \frac{1}{2} > 0,$$

con lo que las expresiones análogas a (4.12) y (4.13) que se obtienen son:

$$\alpha_1 \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{(2n)!}{n!}\cos^{1/2}\vartheta\, e^{+i(2n+1)\vartheta}$$

$$-\alpha_2\sqrt{2\pi}\,\frac{(2n+1)!}{n!}\cos^{3/2}\vartheta\, e^{+i(2n+2)\vartheta}.$$

Se obtiene, pues, que mediante la función de transformación (5.1) se transforma

$$e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_{n-1}(\zeta) \rightarrow e^{+in\vartheta}.$$

Ahora bien: se obtiene (5.1) a partir de (3.4) si establecemos que $\xi = i\zeta$. Por otra parte, la ecuación de Hermite:

$$\frac{d^2F_n(\xi)}{d\xi^2} - \xi^2 F_n(\xi) + (2n+1)\,F_n(\xi) = 0$$

$$(F_n(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi)) \tag{5.2}$$

para valores reales de ξ tiene por valores propios números enteros positivos. En cambio, para valores negativos de n:

$$\frac{d^2}{d\xi^2}F_{-n}(\xi) - \xi^2 F_{-n}(\xi) + (-2n+1)\,F_{-n}(\xi) = 0 \tag{5.3}$$

admite soluciones ortogonales que se anulan en el infinito si

$\xi = i\zeta$. En efecto, haciendo el cambio de variables se obtiene la ecuación

$$\frac{d^2 F_{-n}(i\zeta)}{d\zeta^2} - \zeta^2 F_{-n}(i\zeta) + (2n-1) F_{-n}(i\zeta) = 0,$$

cuyas soluciones son, si se compara esta ecuación, con la (5. 3)

$$F_{-n}(i\zeta) = e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_{n-1}(\zeta).$$

De lo dicho resulta que:

$$\Gamma_{-n}(\vartheta) = e^{i\frac{\vartheta}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\zeta^2}{2}\operatorname{tag}\vartheta} F_{-n}(i\zeta)\, \sigma(\zeta)\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2} e^{i\frac{\vartheta}{2}} \int_{0}^{\infty} e^{-\eta S^*(\vartheta)} H_n(\sqrt{\eta})\, \sigma(\sqrt{\eta})\, d\eta$$

$$(\eta = \zeta^2).$$

Se obtiene así, que la transformada de $e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_{n-1}(\zeta)$ es, como lo indica la (5, 2), la función $e^{in\vartheta}$. Estas funciones corresponden, ahora, a valores propios negativos de la energía.

Puede apreciarse, de lo dicho, en qué forma se corresponde el sistema completo de funciones $e^{-in\vartheta}$, $e^{+in\vartheta}$ con el sistema también completo de las funciones $e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi)$: El primer conjunto de las funciones $e^{-in\vartheta}$ se corresponde, mediante la transformación canónica $N, \vartheta \longrightarrow p, q$ con las soluciones de la ecuación de Hermite para valores reales de la variable q y conducen a valores propios positivos de la energía. En cambio, el conjunto de las funciones $e^{in\vartheta}$ se corresponde con las soluciones ortogonales de esta ecuación para valores imaginarios de q, y conducen a valores negativos de la energía.

En la descripción N, ϑ del campo de radiación resulta, pues, necesaria la introducción de fotones de energía negativa, lo que, en la descripción p, q implica la necesidad de considerar las soluciones de la ecuación del oscilador lineal sobre el eje imaginario del plano complejo de la variable q. Aunque en este último caso, si se prescinde de la representación N, ϑ, no resulta muy visible esta necesidad, debido a que unas y otras soluciones de aquella ecuación forman de por sí sistemas completos.

La generalización obtenida del esquema de las transformaciones canónicas no deja ver, sin embargo, cuál es el origen de la dificultad que tratamos. Pero el hecho es que la correspondencia biunívoca entre las autofunciones correspondientes a ambas representaciones, sólo se obtiene si se tienen en cuenta las soluciones de la ecuación del oscilador lineal en el eje imaginario. Esto equivale a considerar a las variables q como antihermitianas, en forma análoga a la empleada por W. Pauli (5) al aplicar a un sistema de osciladores lineales el método de cuantificación de Dirac (6). En el formalismo desarrollado aparece como natural la necesidad de considerar estos valores de q en el antiguo método de cuantificación del campo de radiación.

Agradezco al Prof. G. Beck el haber llamado mi atención sobre este punto y las discusiones mantenidas respecto de asuntos tratados en este trabajo, y al Prof. R. Gans su interés por el mismo.

José A. Balseiro

(5) W. PAULI, Rev. Mod. Phys. *15*, 176, (1943).
(6) P. A. M. DIRAC, Proc. Rey. Soc. *A180*, 1 (1942).

SOBRE LA DISTRIBUCION DE PLANOS EN EL ESPACIO

por L. A. Santaló

1. *Enunciado del teorema.* Derivado de un problema físico, Goudsmit ha estudiado el problema de hallar el valor medio del cuadrado del área de las regiones en que el plano queda dividido por rectas arbitrarias distribuídas de manera que el valor medio del área de dichas regiones valga la unidad (1).

Desde el punto de vista matemático puede ofrecer interés considerar el problema análogo en el espacio. Esto es lo que vamos a hacer en la presente nota.

El problema y resultado obtenido se pueden enunciar de la siguiente manera:

Supuesto el espacio dividido por planos arbitrarios en regiones cuyo volumen v tenga por valor medio la unidad, el valor medio de v^2 vale $\frac{4}{3}\pi^2$.

La demostración dada por Goudsmit para el caso del plano no es fácil de generalizar al espacio. Con ligeras variantes puede, sin embargo, hacerse esta generalización, si bien el método resulta largo y las consideraciones de probabilidad que es preciso utilizar no del todo convincentes.

Por esta razón vamos a seguir un método completamente distinto, que puede aplicarse también en el caso del plano para obtener el resultado de Goudsmit y que, posiblemente, puede también ser generalizado a un espacio de cualquier número de dimensiones.

2. *Demostración.* Consideremos primero una esfera S de radio R y un número finito n de planos que la cortan.

(1) S. Goudsmit, *Random distribution of lines in a plane,* Review of Modern Physics, vol. 17, pág. 321, 1945.

Supuestos los planos dados arbitrariamente, ellos dividirán a S en un cierto número de regiones. El *valor medio* de este número de regiones sabemos que vale [2]

$$\langle N \rangle = \binom{n}{3}\frac{\pi^4 V}{M^3} + \binom{n}{2}\frac{\pi^3 F}{4M^2} + n + 1 \qquad (1)$$

siendo V el volumen, F el área y M la integral de curvatura media de S, o sea,

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad F = 4\pi R^2, \quad M = 4\pi R. \qquad (2)$$

El valor medio del volumen de estas regiones será

$$\langle v \rangle = \frac{V}{\langle N \rangle}$$

y para que se cumpla la condición de que valga 1 debe ser

$$R = \left[\binom{n}{3}\frac{\pi}{4^3} + \frac{3}{4}\binom{n}{2}\frac{\pi}{16} + \frac{3}{4\pi}(n+1) \right]^{1/3}. \qquad (3)$$

Recordemos que la medida del conjunto de planos que cortan a un cuerpo convexo cualquiera es igual a la integral de curvatura media del mismo [3]. Por ejemplo, en los casos particulares de la esfera S y de un segmento de recta de longitud a, dicha medida vale, respectivamente,

$$\int_S dE = 4\pi R, \quad \int_a dE = \pi a \qquad (4)$$

siendo dE la «densidad de planos» y estando la primera integración extendida a todos los planos que cortan a S y la segunda a todos los que cortan al segmento.

---

[2] L. A. Santaló, *Valor medio del número de regiones en que un cuerpo del espacio es dividido por* n *planos arbitrarios.* Revista de la Unión Matemática Argentina, vol. 10, pág. 101, 1945.

[3] W. Blaschke, *Vorlesungen über Integralgeometrie,* Hamburger Mathemastische Einzelschriften, 1936 (pág. 66).

Consideremos dos puntos P_1 y P_2 interiores a S y sean dP_1, dP_2 los elementos de volumen correspondientes a los mismos.

Sean, además, $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$, n planos arbitrarios que cortan a S. Consideremos la integral múltiple

$$I = \int dP_1\, dP_2\, dE_1\, dE_2 \ldots dE_n \tag{5}$$

en la cual la integración está extendida, para cada plano E_i, a todas las posiciones en que corta a S pero no separa a los dos puntos P_1, P_2. La integración respecto estos puntos está extendida a todo el interior de S.

Fijando primero P_1 y P_2 y llamando a a la distancia entre los mismos, según (4) la integral de cada dE_i vale $(4\pi R - \pi a)$ y por tanto queda

$$I = \int (4\pi R - \pi a)^n\, dP_1\, dP_2. \tag{6}$$

Además, en un sistema de coordenadas polares de centro P_1, llamando $d\omega$ a la dirección del espacio según la cual se encuentra P_2, es $dP_2 = a^2\, da\, d\omega$. Fijada la dirección $d\omega$ y la distancia a, el elemento dP_1 puede entonces integrarse a todo el volumen común a la esfera S y a la que se obtiene por traslación de la misma de un segmento a. El volumen común a estas esferas vale

$$\frac{4}{3}\pi R^3 - \pi R^2 a + \frac{1}{12}\pi a^3. \tag{7}$$

Al hacer variar $d\omega$ a todas las direcciones este volumen no varía, de manera que la integral (6) queda reducida a la integral simple

$$I = \int_0^{2R} (4\pi R - \pi a)^4 \left(\frac{4}{3}\pi R^3 - \pi R^2 a + \frac{1}{12}\pi a^3\right) 4\pi\, a^2\, da. \tag{8}$$

Por otra parte, si en la primera expresión (5) de la integral I, para llevar a cabo la integración, se mantienen primero fijos los planos E_i, los puntos P_1, P_2 pueden entonces variar en el interior de cada una de las N regiones en que S es dividida por los planos. Llamando v_i $(i=1, 2, 3, \ldots, N)$ al volumen de estas regiones, es por tanto

$$I=\int (\sum_1^N v_i^2)\, dE_1\, dE_2 \ldots dE_n. \tag{9}$$

Siendo, por definición,

$$<v^2>_R=\frac{\int (\sum_1^N v_i^2)\, dE_1\, dE_2 \ldots dE_n}{<N>\int dE_1\, dE_2 \ldots dE_n} \tag{10}$$

donde $<v^2>_R$ indica el *valor medio del cuadrado* de v para el caso considerado de una esfera de radio R, teniendo en cuenta (4) y que el cociente $V/<N>$ vale 1, resulta

$$<v^2>_R=\frac{I}{(4\pi R)^n V}. \tag{11}$$

El problema se reduce por tanto a hallar el límite de este cociente cuando n y R, ligados por la relación (3), tienden a infinito, de manera que la esfera S pase a llenar todo el espacio.

Según (8) y (11) es

$$<v^2>_R=\int_0^{2R}\left(1-\frac{a}{4R}\right)^n\left(1-\frac{3}{4}\frac{a}{R}+\frac{1}{16}\frac{a^3}{R^3}\right) 4\pi\, a^2\, da. \tag{12}$$

Hagamos el cambio de variable

$$a=2Rt$$

con el cual la integral anterior queda

$$<v^2>_R=\int_0^1\left(1-\frac{t}{2}\right)^n\left(1-\frac{3}{2}\,t+\frac{1}{2}\,t^3\right) 32\pi\, R^3\, t^2\, dt \tag{13}$$

donde R está ligado con n por (3).

Observemos ahora que por integraciones por partes sucesivas se obtiene inmediatamente

$$\int_0^1 \left(1-\frac{t}{2}\right)^n t^2\, dt = \frac{16}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{A}{2^{n+1}}$$

$$\int_0^1 \left(1-\frac{t}{2}\right)^n t^3\, dt = \frac{32}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} + \frac{B}{2^{n+1}}$$

$$\int_0^1 \left(1-\frac{t}{2}\right)^n t^5\, dt = \frac{128}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)} + \frac{C}{2^{n+1}}$$

siendo A, B, C factores cuya forma explícita no interesa, pero que tienden a 0 al crecer n infinitamente.

Teniendo en cuenta estos valores y sustituyendo R por su valor en función de n dado por (3), de (13) se deduce

$$<v^2> = \lim_{n\to\infty} <v^2>_R = \frac{4}{3}\pi^2 \qquad (14)$$

que es el resultado enunciado.

N o t a. — Obsérvese que si en lugar de suponer los planos dados arbitrariamente, se supone que se dan independientemente 3 haces de planos perpendiculares a 3 ejes coordenados rectangulares, siendo para cada haz los planos dados también arbitrariamente, pero de manera que su distancia media sea la unidad, el valor medio de v^2 que se obtiene en este *caso régular,* no coincide con el anterior del caso general.

Procediendo como Goudsmit para el plano, se encuentra inmediatamente que en el caso regular es

$$<v^2> = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty (\xi\,\eta\,\zeta)^2\, e^{-(\xi+\eta+\zeta)}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = 8$$

valor inferior al del caso general considerado.

BUENOS AIRES, *Seminario Matemático de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.*

COEFICIENTES DE KUMMER

por PEDRO A. PIZÁ
San Juan de Puerto Rico

Con los primeros resultados de sus célebres investigaciones referentes a la ecuación de Fermat $x^n + y^n = a^n$ publicados en 1837, Kummer introdujo y utilizó cierta fórmula en la que aparecen todas las potencias pares o impares de $x+y=z$ (*). Esta fórmula debida a Kummer, fué demostrada posteriormente por Mention. Puede escribirse para cualquier exponente n como sigue:

$$x^n + y^n = z^n - n\,xyz^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2}\,x^2\,y^2\,z^{n-4}$$

$$-\frac{n(n-4)(n-5)}{3!}\,x^3\,y^3\,z^{n-6} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4!}\,x^4\,y^4\,z^{n-8}$$

$$-\frac{n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{5!}\,x^5\,y^5\,z^{n-10} + \ldots .$$

Con exponentes pares $n=2m$, el segundo miembro de esta igualdad contiene contiene $\frac{n}{2}+1=m+1$ términos. Con exponentes impares $n=2m+1$, el número de términos es de $(n+1)/2=m+1$. Para nuestros fines podemos designar convenientemente sus coeficientes, que alternan en signo, por $K_1{}^n=1$, $K_2{}^n=-n$, $K_3{}^n=n(n-3)/2$, $K_4{}^n=-n(n-4)\,(n-5)/6$, etc.

Es interesante computar una tabla de estos valores numéricos que resultan ser siempre números enteros y que llamaremos

(*) Véase DICKSON, *History of the Theory of Numbers*, vol. II, págs. 737 y 739, citas 25 y 43.

coeficientes de Kummer, para los primeros valores de n, con el fin de observar y estudiar sus propiedades interesantísimas. Tal tabla, calculada hasta $n=23$, sin tomar en cuenta que en las columnas pares los coeficientes son negativos, y positivos en las columnas impares, es como sigue:

K_1^n	$-K_2^n$	K_3^n	$-K_4^n$	K_5^n	$-K_6^n$	K_7^n	$-K_8^n$	K_9^n	$-K_{10}^n$	K_{11}^n	$-K_{12}^n$
1											
1	2										
1	3										
1	4	2									
1	5	5									
1	6	9	2								
1	7	14	7								
1	8	20	16	2							
1	9	27	30	9							
1	10	35	50	25	2						
1	11	44	77	55	11						
1	12	54	112	105	36	2					
1	13	65	156	182	91	13					
1	14	77	210	294	196	49	2				
1	15	90	275	450	378	140	15				
1	16	104	352	660	672	336	64	2			
1	17	119	442	935	1122	714	204	17			
1	18	135	546	1287	1782	1386	540	81	2		
1	19	152	665	1729	2717	2508	1254	285	19		
1	20	170	800	2275	4004	4290	2640	825	100	2	
1	21	189	952	2940	5733	7007	5148	2079	385	21	
1	22	209	1122	3740	8008	11011	9438	4719	1210	121	2
1	23	230	1311	4692	10948	16744	16445	9867	3289	506	23

Tabla de Coeficientes de Kummer

Tengamos presente que la notación K_c^n nos indica el coeficiente de Kummer correspondiente al exponente n que aparece en la fila o línea horizontal n y en la columna vertical c de esta tabla triangular escalonada, en analogía con la notación C_s^n usada generalmente para indicar los coeficientes en la expansión del binomio de Newton según aparecen asimismo en la tabla o triángulo de Pascal.

Por inspección de nuestra tabla podemos observar que existen las siguientes notables relaciones entre los coeficientes de Kummer:

(1) Cada número en cualquier columna es la suma del que le precede en la misma columna, más el que aparece diagonalmente arriba y a la izquierda de este último. En general observamos

$$K_c^n = K_c^{n-1} + K_{c-1}^{n-2}.$$

Ejemplo: $K_6^{19} = 2717 = K_6^{18} + K_5^{17} = 1782 + 935.$

(2) Si sumamos las diagonales descendentes comenzando con las unidades sucesivas de la primer columna, obtenemos $1+2=3$. $1+3+2=6$, $1+4+5+2=12$, $1+5+9+7+2=24$.

En general la n-ava diagonal comenzando con la unidad de la primer columna correspondiente a la fila n, contendrá $(n+1)$ sumandos y su suma será

$$K_1^n + K_2^{n+1} + K_3^{n+2} + K_4^{n+3} + \ldots + K_{n+1}^{2n} = 3 \,.\, 2^{n-1}.$$

(3) Si multiplicamos cualquier par de números consecutivos de la segunda columna, su producto será igual a la suma de los tres números que forman ángulo recto debajo y a la derecha del mayor factor. Tendremos $K_2^n\, K_2^{n+1} = K_2^{n+2} + K_3^{n+1} + K_3^{n+2}$, equivalente a la identidad

$$n(n+1) = (n+2) + \frac{(n+2)(n-1)}{2} + \frac{(n+1)(n-2)}{2}.$$

(4) Si tomamos cualquier grupo de cuatro números contiguos que formen un cuadrado en las columnas 2 y 3, su suma es siempre un número cuadrado. Tendremos generalmente

$$K_2^n + K_3^n + K_2^{n+1} + K_3^{n+1} = n^2,$$

que equivale a la identidad

$$n + \frac{n(n-3)}{2} + (n+1) + \frac{(n+1)(n-2)}{2} = n^2.$$

(5) La suma de los primeros n números contiguos en cualquier columna c (después de la primer columna), es igual al número que aparece en la tabla dos filas más abajo en la próxima columna a la derecha.

Nótese que en cada columna c hay $(2c-3)$ espacios vacantes antes de llegar al primer número de la columna que siempre es 2, siendo el tercero siempre el cuadrado de c.

Ejemplos: 3ª columna: $2+5+9=16$.

9ª columna: $2+17+81+285=385$.

Generalmente en cualquier columna c tendremos

$$\sum_{i=2}^{i=n} K_{c-2}^{\,i} = K_{c+1}^{\,i+2}.$$

El número total de espacios vacantes en la parte superior de la tabla hasta incluir la columna c, es de

$$1+3+5+7+\ldots=(c-1)^2.$$

Sin duda otras muchas propiedades numéricas de los coeficientes de Kummer en la tabla, podrán observarse y probarse en un estudio más extenso de la misma. Cada una de estas propiedades ilustrará una nueva propiedad número-teórica de los números enteros.

La propiedad general (1) nos permite computar recurrentemente los coeficientes correspondientes a cualquier fila n de la tabla, si ya conocemos las series de coeficientes de las filas $(n-1)$ y $(n-2)$.

Por ejemplo, la próxima fila 24 de la tabla consiste de los 13 números siguientes:

1, 24, 252, 1520, 5814, 14688, 24752, 27456, 19305, 8008, 1716, 144 y 2.

Con la relación (5) podremos desarrollar ciertas identidades de considerable interés numérico. Por ejemplo, todo número de la columna 3 nos dará

$$K_3^n=\frac{n(n-3)}{2}=2+3+4+5+\ldots+(n-2),$$

donde el segundo miembro contiene $(n-3)$ sumandos. Ejemplo:

$$K_3^9=2+3+4+5+6+7=27.$$

En general $K_3{}^n + 1 =$ a la suma de todos los números enteros positivos desde 1 al $(n—2)$ inclusive.

De igual modo cualquier número de la columna 4 es

$$K_4{}^n = \frac{n(n-4)(n-5)}{6} = 2 + 5 + 9 + 14 + \ldots + \frac{(n-2)(n-5)}{2}$$

que podemos nuevamente escribir por sumas parciales como sigue:

$$\begin{aligned}K_4{}^n = 2& \\ &+2+3 \\ &+2+3+4 \\ &+2+3+4+5 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+2+3+4+5+6+\ldots\ldots+(n-4).\end{aligned}$$

Sumando ahora por columnas empezando por la última, tendremos la relación o identidad

$$\begin{aligned}K_4{}^n = \frac{n(n-4)(n-5)}{6} = \quad &(n-4) \\ &+2(n-5) \\ &+3(n-6) \\ &+4(n-7) \\ &+5(n-8) \\ &+6(n-9) \\ &+\ldots\ldots\end{aligned}$$

donde el segundo miembro contiene $(n—5)$ sumandos. Esta relación es válida para cualquier valor de n mayor que 5. Un ejemplo numérico para $n = 10$ es

$$\begin{aligned}\frac{10 \,.\, 6 \,.\, 5}{6} = 50 &= 6 + 2 \,.\, 5 + 3 \,.\, 4 + 4 \,.\, 3 + 5 \,.\, 2 \\ &= 6 + 10 + 12 + 12 + 10 = 50.\end{aligned}$$

Es obvio que por la repetición de idéntico proceso, será posible expresar cualquier $K_5{}^n = n(n-5)(n-6)(n-7)/24$ como suma de los $K_4{}^i$ hasta incluir el $i = n - 2$. A su vez podremos expresar cada uno de estos $K_4{}^i$ en series de sumandos que son funciones lineales de n, como en el caso anterior.

En general cualquier $K_c{}^n$ lo podríamos expresar finalmente, por el mismo proceso de iteración, como *sumas de series que son funciones lineales de n.* Ya que un $K_c{}^n$ cualquiera es de por sí función de n de grado $c-1$, las sucesivas repeticiones nos permitirán expresar al fin estas funciones de n de grado algebraico $(c-1)$-vo, como sumas de sus funciones lineales (de grado algebraico 1).

Esto es posible que tenga aplicación útil en el estudio de la alta aritmética y del álgebra, cuyos principales objetivos son los de hallar paralelamente relaciones multiplicativas y aditivas en algún campo determinado de los números.

San Juan de Puerto Rico, 15 de noviembre de 1946.

NOTA SOBRE LOS COEFICIENTES DE KUMMER

por José Babini

En el trabajo anterior, el señor Pizá señala algunas propiedades de los coeficientes $\varphi(n,m)$ del desarrollo de Kummer $(z=x+y)$:

$$x^n+y^n=\sum_{m=0}^{m\leq\frac{n}{2}}(-1)^m\,\varphi(n,m)\,x^m\,y^m\,z^{n-2m}, \tag{1}$$

de la forma:

$$\varphi(0,0)=2$$

$$\varphi(n,m)=\frac{n(n-m-1)(n-m-2)\ldots(n-2m+1)}{m!},$$

$$0\leqq m\leqq\frac{n}{2}>0.$$

Es claro que esta última expresión puede escribirse

$$\varphi(n,m)=\frac{n}{n-m}\binom{n-m}{m}=\frac{n}{m}\binom{n-m-1}{m-1}=$$

$$=\binom{n-m}{m}+\binom{n-m-1}{m-1} \tag{2}$$

y aplicando a cada uno de estos números combinatorios la conocida relación de recurrencia, se obtiene la relación de recurrencia de los coeficientes de Kummer

$$\varphi(n,m)=\varphi(n-1,m)+\varphi(n-2,m-1) \tag{3}$$

que el señor Pizá comprueba, en su artículo, para casos numéricos, (propiedad 1).

La propiedad 5 del señor Pizá se deduce inmediatamente de la anterior escribiéndola

$$\varphi(n-2, m) = \varphi(n, m+1) - \varphi(n-1, m+1)$$

y sumando estas igualdades para n desde $2m+2$ a $p+2$. Será

$$\sum_{n=2m+2}^{p+2} \varphi(n-2, m) = \sum_{n=2m}^{p} \varphi(n, m) = \varphi(p+2, m+1) - \varphi(2m+1, m+1) =$$

$$\varphi(p+2, m+1)$$

pues $\varphi(2m+1, m+1) = 0$.

Para demostrar la propiedad 2 del señor Pizá consideremos el polinomio $P_n(x)$ $(n>0)$ cuyos coeficientes son los elementos de las diagonales descendentes de su cuadro. Ese polinomio será

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \varphi(n+m, m)\, x^m$$

y aplicando la expresión (2):

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m + \sum_{m=1}^{n} \binom{n-1}{m-1} x^m = (1+x)^n + x(1+x)^{n-1} =$$

$$= (1+2x)\,(1+x)^{n-1}.$$

que para $x=1$ da la propiedad indicada por el señor Pizá, pero que permite otras relaciones entre los coeficientes de Kummer. Así

$$P_n(-1) = \sum_{m=0}^{n} \varphi(n+m, m)\,(-1)^m = 0 \quad (n>1)$$

$$P_n\left(-\frac{1}{2}\right) = \sum_{m=0}^{n} \varphi(n+m, m)\,(-1)^m\, 2^{-m} = 0 \quad (n>0).$$

Muchas otras relaciones entre estos coeficientes pueden obtenerse. Así, consideremos la serie entera, convergente para $|x|<1$

$$S_m(x) = \sum_{n=2m} \varphi(n, m)\, x^{n-2m} = \sum_{n=0} \varphi(n+2m, m)\, x^n$$

que, utilizando la (2), permite calcularse fácilmente

$$S_m(x)=\sum_{n=0}\left[\binom{n+m}{m}+\binom{n+m-1}{m-1}\right]x^n=$$

$$=\frac{1}{(1-x)^{m+1}}+\frac{1}{(1-x)^m}=\frac{2-x}{(1-x)^{m+1}}$$

Así, por ejemplo

$$S_m\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=0}\varphi(n+2m,m)\,2^{-n}=3\,.\,2^m.$$

En forma semejante se obtiene al valor de la serie ($|x|<1$; $n>0$):

$$\sum_{m=0}\varphi(n+2m,m)\,x^m=\sum_{m=0}\left[\binom{n+m}{m}+\binom{n+m-1}{m-1}\right]x^m=$$

$$=\sum_{m=0}\binom{n+m}{m}x^m\left(1+x\right)=\frac{1+x}{(1-x)^{n+1}}$$

Relaciones entre los coeficientes de Kummer y los números combinatorios pueden obtenerse partiendo directamente del desarrollo (1). En efecto, si en él se sustituye z por $x+y$, de la identidad resultante se obtiene

$$\sum_{m=0}^{r}(-1)^m\,\varphi(n,m)\binom{n-2m}{r-m}=0\qquad 0<r\leqq\frac{n}{2},$$

expresión que también podría obtenerse directamente pues el primer miembro no es sino

$$\frac{n}{r!}\Delta^r\,(n-1)^{(r-1)}=0.$$

Una expresión del coeficiente $\varphi(n,m)$ como determinante cuyos elementos son números combinatorios, puede obtenerse como sigue. Si llamamos $x^r+y^r=\alpha_r$, se obtiene el desarrollo

$$(x+y)^p=z^p=\binom{p}{0}\alpha_p+\binom{p}{1}xy\,\alpha_{p-2}+\binom{p}{2}x^2y^2\,\alpha_{p-4}+\dots$$

y si de las igualdades que se obtienen haciendo $p=n,\ n-2,\ n-4, \ldots$, se elimina $\alpha_{n-2},\ \alpha_{n-4}, \ldots$ se llega después de algunas simples transformaciones a

$$\alpha_n = \begin{vmatrix} z^n & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots\cdots \\ z^{n-2}\,x\,y & \binom{n-2}{0} & \binom{n-2}{1} & \cdots\cdots \\ z^{n-4}\,x^2\,y^2 & 0 & \binom{n-4}{0} & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix}$$

que, teniendo en cuenta la (1) da, para $m \geqq 1$.

$$\varphi(n,m) = \begin{vmatrix} \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \cdots\cdots & \binom{n}{m-1} & \binom{n}{m} \\ \binom{n-2}{0} & \binom{n-2}{1} & \binom{n-2}{2} & \cdots\cdots & \binom{n-2}{m-2} & \binom{n-2}{m-1} \\ 0 & \binom{n-4}{0} & \binom{n-4}{1} & \cdots\cdots & \binom{n-4}{m-3} & \binom{n-4}{m-2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & \binom{n-2m+2}{0} & \binom{n-2m+2}{1} \end{vmatrix}$$

Por lo demás es fácil demostrar directamente esta expresión y con ello el desarrollo de Kummer. En efecto, el determinante anterior, para $m \geqq 1$, es un polinomio en n de grado m que se anula para $n=0$, por anularse todos los términos de la primera fila y para $n=m+k$; $k=1,2,3,\ldots,m-2$, por hacerse iguales los términos de la última columna con los de la columna k^{a}. De ahí que $\varphi(n,m) = Cn\,(n-m-1)^{(m-1}$.

Como para $n=m$ el determinante toma el valor $(-1)^{m-1}$; $C=\dfrac{1}{m!}$ y finalmente

$$\varphi(n,m) = \frac{n}{m!}(n-m-1)^{(m-1} = \frac{n(n-m-1)(n-m-2)\ldots(n-2m+1)}{m!}$$

CURVAS PARALELAS SOBRE SUPERFICIES DE CURVATURA CONSTANTE

por

E. VIDAL ABASCAL

1. - *Introducción.* — El objeto de esta nota es generalizar la definición de curvas paralelas sobre una superficie y obtener una expresión invariante para este paralelismo sobre las superficies de curvatura constante, que generaliza la conocida expresión

$$J = \left(F - \frac{2\pi}{K}\right)^2 + \left(\frac{L}{\sqrt{K}}\right)^2,$$

invariante para las curvas geodésicamente paralelas.

2. - *Curvas paralelas.* — Definición. - *Sobre una superficie de curvatura constante $x = x(v^1, v^2)$, llamamos curvas paralelas a otra dada C (continua, diferenciable y con las dos primeras derivadas continuas), según un ángulo ω, aquellas formadas por los puntos que se obtienen considerando en cada punto de la curva C la geodésica que forme con ella el ángulo ω y tomando sobre estas geodésicas una distancia constante ρ.* Como caso particular, cuando $\omega = \frac{\pi}{2}$, se obtienen las curvas llamadas geodésicamente paralelas.

Suponiendo la curva simple C cerrada, correspondiente a $v^1 = 0$, de longitud L y que limita un área F sobre una porción de superficie regular $x = x(v^1, v^2)$, siendo su curvatura función de v^2, $K(v^2)$, he demostrado, en otro trabajo (1), que el área limi-

(1) E. VIDAL ABASCAL, *Area engendrada sobre una superficie por un arco de geodésica cuando uno de sus extremos recorre una curva fija y longitud de la curva descrita por el otro extremo.* Rev. Mat. Hisp. Amer., T. VII, nº 3.

tada por la curva C y la que se obtiene cuando el ángulo que forma la geodésica con C es variable $\omega(0, v^2)$ y sobre ellas se toman las distancias, también variables, $\rho(v^2)$, se halla por la fórmula

$$(1)\quad F_\rho - F = \int_0^L \frac{\operatorname{sen}\omega(0,v^2)\operatorname{sen}[\rho(v^2)\sqrt{K(v^2)}]}{\sqrt{K(v^2)}}\, dv^2 -$$

$$-\int_0^L \frac{\varkappa_g(v^2)-\omega'(0,v^2)}{K(v^2)}\operatorname{sen}[\rho(v^2)\sqrt{K(v^2)}]\, dv^2.$$

Suponiendo ahora C_ρ paralela a C, según la definición dada, será $\omega = \text{const.}$, $\rho = \text{const.}$, $K = \text{const.}$, se deduce

$$(2)\qquad F_\rho - F = L\,\frac{\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}[\rho\sqrt{K}]}{\sqrt{K}} - \frac{\cos[\rho\sqrt{K}]-1}{K}\,(2\pi - KF)$$

con la condición de validez de que para todo v^2 y para v^1, tal que $0 \leqq v^1 \leqq \rho$, sea

$$\operatorname{sen}\omega\cos[v^1\sqrt{K}] + \frac{\varkappa_g(0,v^2)}{\sqrt{K}}\operatorname{sen}[v^1\sqrt{K}] > 0.$$

3. - *Longitud de la curva paralela.* — Si a partir de C_ρ, paralela a C, tomamos $-\rho$, sobre las mismas geodésicas, obtendremos la curva de partida C, (representando por $\omega(\rho, s)$, el ángulo variable en que encuentra la geodésica a C_ρ) se deduce de (1)

$$F = F_\rho - \frac{\operatorname{sen}[\rho\sqrt{K}]}{\sqrt{K}}\int_0^{L_\rho}\operatorname{sen}\omega(\rho,s)\,ds - (\cos[\rho\sqrt{K}]-1)\left(\frac{2\pi}{K} - F_\rho\right)$$

o sea

$$F = F_\rho\cos[\rho\sqrt{K}] - \frac{\operatorname{sen}[\rho\sqrt{K}]}{\sqrt{K}}\int_0^{L_\rho}\operatorname{sen}\omega(\rho,s)\,ds - \frac{2\pi}{K}(\cos[\rho\sqrt{K}]-1)$$

de donde

$$(3) \qquad F_\rho \cos[\rho\sqrt{K}] = F +$$

$$+\frac{\operatorname{sen}[\rho\sqrt{K}]}{\sqrt{K}}\int_0^{L_\rho} \operatorname{sen}\omega(s)\,ds + \frac{2\pi}{K}(\cos[\rho\sqrt{K}]-1)$$

De (2) y (3)

$$\frac{2\pi}{K}+\frac{\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}[\rho\sqrt{K}]}{\sqrt{K}}L-\frac{\cos[\rho\sqrt{K}]}{K}(2\pi-KF)=$$

$$=\frac{F}{\cos[\rho\sqrt{K}]}+\frac{\operatorname{sen}[\rho\sqrt{K}]}{K\cos[\rho\sqrt{K}]}\int_0^{L_\rho}\operatorname{sen}\omega(\rho,s)\,ds+\frac{2\pi}{K}\left(1-\frac{1}{\cos[\rho\sqrt{K}]}\right)$$

de donde

$$(4) \qquad \int_0^{L_\rho}\operatorname{sen}\omega(\rho,s)\,ds = L\operatorname{sen}\omega\cos[\rho\sqrt{K}]+\frac{(2\pi-KF)\operatorname{sen}[\rho\sqrt{K}]}{\sqrt{K}}$$

por el teorema del valor medio $\int_0^{L_\rho}\operatorname{sen}\omega(\rho,s)\,ds = L_\rho\operatorname{sen}\omega^*$ sustituyendo este valor en (4), se obtiene

$$(5) \qquad L_\rho = \frac{L\operatorname{sen}\omega\cos[\rho\sqrt{K}]}{\operatorname{sen}\omega^*}+\frac{(2\pi-KF)\operatorname{sen}[\rho\sqrt{K}]}{\sqrt{K}\operatorname{sen}\omega^*}.$$

4. *Invariante paralelo*. De (2) y (5), se deduce

$$F_\rho-\frac{2\pi}{K}=\left(F-\frac{2\pi}{K}\right)\cos[\rho\sqrt{K}]+\frac{L\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}[\rho\sqrt{K}]}{\sqrt{K}}$$

$$\frac{L_\rho\operatorname{sen}\omega^*}{\sqrt{K}}=-\left(F-\frac{2\pi}{K}\right)\operatorname{sen}[\rho\sqrt{K}]+\frac{L}{\sqrt{K}}\operatorname{sen}\omega\cos[\rho\sqrt{K}]$$

de donde, elevando al cuadrado y sumando,

$$\left(F_\rho-\frac{2\pi}{K}\right)^2+\frac{L_\rho^2\operatorname{sen}^2\omega^*}{K}=\left(F-\frac{2\pi}{K}\right)^2+\frac{L^2\operatorname{sen}^2\omega}{K}$$

expresión que generaliza el llamado invariante paralelo J, correspondiente a $\omega = \frac{2\pi}{K}$, ya que en este caso $\omega^* = \omega$.

5. - *Consecuencias.* — 1. El paralelismo que hemos definido no es recíproco; tomando a partir de C_ρ sobre las geodésicas que forman con ella el ángulo constante ω, la distancia ρ, no se obtiene, en general, la curva C, o sea, si C_ρ es paralela a C, C no es paralela a C_ρ.

La condición para que el paralelismo sea recíproco es que

$$\cos \omega(\rho, v^2) = \cos \omega \tag{6}$$

o sea, teniendo en cuenta que $\cos \omega(v^1, v^2) = \frac{\cos \omega}{\sqrt{g_{22}(v^1, v^2)}}$ ha de ser $\sqrt{g_{22}(v^1, v^2)} = 1$, pero

$$\sqrt{g_{22}} = \frac{\operatorname{sen} \omega \cos [\rho \sqrt{K}]}{\operatorname{sen} \omega(\rho, v^2)} + \frac{\varkappa_g(0, v^2) \operatorname{sen} [\rho \sqrt{K}]}{\sqrt{K} \operatorname{sen} \omega(\rho, v^2)}$$

de donde por (6)

$$\cos [\rho \sqrt{K}] + \varkappa_g \frac{\operatorname{sen} [\rho \sqrt{K}]}{\sqrt{K} \operatorname{sen} \omega} = 1$$

la condición será, por lo tanto,

$$\varkappa_g = (1 - \cos [\rho \sqrt{K}]) \frac{\sqrt{K} \operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen} [\rho \sqrt{K}]} = \sqrt{K} \operatorname{tg} \frac{\rho \sqrt{K}}{2} \operatorname{sen} \omega.$$

2. El área limitada por la curva C' paralela a C, será por la fórmula (2)

$$F_\rho - L_\rho \frac{\operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} [\rho \sqrt{K}]}{\sqrt{K}} - \frac{\cos [\rho \sqrt{K}] - 1}{K} (2\pi - K F_\rho) =$$

$$= - L_\rho \frac{\operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} [\rho \sqrt{K}]}{\sqrt{K}} - \frac{\cos [\rho \sqrt{K}] - 1}{K} 2\pi + F_\rho \cos [\rho \sqrt{K}]$$

sustituyendo los valores de F_ρ y de L_ρ, se encuentra

$$F + \left(F + \frac{2\pi}{K} + L \frac{\operatorname{sen} \omega \cos [\rho \sqrt{K}] \operatorname{sen} [\rho \sqrt{K}]}{\sqrt{K}}\right) \left(1 - \frac{\operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen} \omega^*}\right).$$

SECCIÓN MATEMÁTICA
Observatorio de la Universidad de Santiago, España.

(²) E. VIDAL, *loc. cit.*

CRONICA

Dr. ALEJANDRO TERRACINI

Acaba de alejarse de la Argentina el Prof. Alejandro Terracini para reintegrarse a sus funciones en Italia. Llegó al país en el mes de octubre de 1940 contratado como Profesor Extraordinario por la Universidad Nacional de Tucumán. Tuvo a su cargo las *Cátedras de Matemática Superior y Metodología de las Matemáticas.* Posteriormente dictó *Complementos de Geometría Analítica y Proyectiva.*

Fué fundador y co-director de la Revista de Matemática y Física Teórica de la Universidad Nacional de Tucumán y, en 1945, fué elegido Presidente de la Unión Matemática Argentina. Dió conferencias sobre temas de su especialidad en Rosario y Tucumán.

Simultáneamente con su labor docente en Tucumán dió a conocer los siguientes trabajos que se publicaron en la mencionada revista: ''Superficies con proyecciones parabólicas'', ''Sobre la ecuación diferencial: $y''' = G(xyy')y''+H(xyy')y''^2$'', ''Aportes al estudio geométrico de la Ecuación diferencial: $y''' = G(xyy')y'' + H(xyy')y''$'', ''Los S_3 osculadores a las curvas de una variedad y nueva caracterización de una clase de variedades'', ''Nuevos puntos de vista geométricos vinculados con los elementos superficiales y las ecuaciones en derivadas parciales de 2º orden'', ''Las variedades de Grassmman y las ecuaciones en derivadas parciales de 1er. orden en el caso de más variable independientes'', ''Variedades focales directrices de absorción anormal en las variedades desarrollables'' y ''Observaciones sobre un trabajo de los señores Kasner y De Cicco''.

Cabe destacar que, en el Dr. Terracini, están aunadas en alto grado las dos cualidades que muy raras veces es dado hallar en un hombre de ciencia: las del investigador y las del didacto. Sus publicaciones certifican lo primero; lo segundo lo puso de manifiesto especialmente en la manera sencilla y clara de exponer temas de índole superior y en los consejos dados a los alumnos del profesorado sobre la manera de conducirse frente al estudiante secundario.

Entre los alumnos formados bajo su dirección se destacan el Dr. Félix Eduardo Herrera, profesor titular de Análisis Matemático de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, y la señora Mónica Sage de Romaña. profesora adjunta de Matemática Superior.

Regresó a Italia en el mes de enero de 1948 por haber sido reintegrado como Profesor Ordinario de la Cátedra de Geometría Superior de la Universidad de Turín. En reconocimiento a sus méritos científicos, el actual Gobierno Italiano ha considerado como servicios prestados en Italia los años que el Profesor Terracini estuvo vinculado a la Universidad de Tucumán.

Con motivo de su viaje a Italia fué objeto de múltiples manifestaciones de simpatía. En Tucumán. los miembros del Centro de Cultura Italiana ofrecieron un lunch en su honor. Además, colegas y alumnos se reunieron en un hotel céntrico donde notamos la presencia de las siguientes personas: Dr. José Würschmidt, Dr. Félix E. Herrera, Ing. Custodio Soria Bravo, Ing. Salomón Freiberg, Ing. Dardo Escalante, Ing. Ricardo Castellano, Lic. Augusto Battig, Orlando Bravo, Profesoras Estela Frontini, María A. Dip, Lela N. Bachur, Carmen Carullo de Torrente, Leda Toldo, Adriana Escalante, Ilda Guglielmone y A. Maldonado y otros amigos. Igualmente, en Buenos Aires, sus colegas y amigos le ofercieron el 7 de enero del corriente año un copetín de amistad. Asistieron: G. Turrin, M. Cotlar, Y. Frenkel de Cotlar, E. de Césare, J. C. Vignaux, R. Scarfiello, M. Valentinuzzi y Sra., P. Pi Calleja y Sra., J. Rey Pastor, J. Bosch, G. Klimovsky, E. O. Roxin, J. Diharce, A. Gonzáles Domínguez, A. Cicchini, A. A. Ricabarra, y los colegas paraguayos A. Riveros y H. Campos Cervera.

Ilda C. Guglielmone

EL CURSILLO DEL PROFESOR ZYGMUND

El 19 de agosto de 1948, en el local del Instituto Radiotécnico, se inauguró un cursillo del profesor Antoni Zygmund, de la Universidad de Chicago, sobre: *Integrales de Fourier con aplicaciones al cálculo de probabilidades.*

Dicho cursillo, que se clausuró el 28 del mismo mes, se desarrolló de acuerdo al siguiente programa: 1. Introducción elemental a la integral de Fourier. 2. La fórmula de inversión de Fourier. 3. El teorema de Plancherel. 4. Transformadas de Fourier-Stieltjes. 5. Variables aleatorias. 6. El teorema límite central.

PUBLICACIONES DE LA U. M. A.

Vol. I (1936-1937), Vol. II (1938-1939), Vol. VII (1940-1941), Vol. VIII (1942), Vol. IX (1943), Vol. X (1944-1945), Vol. XI (1945-1946), Vol. XII (1946-1947).

Notas y memorias de J. BABINI, M. BALANZAT, J. BALSEIRO, J. BARRAL SOUTO, A. BATTIG, G. BECK, C. BIGGERI, G. BIRKHOFF, U. BROGGI, C. A. BULA, M. BUNGE, H. E. CALCAGNO, F. CERNUSCHI, A. W. CONWAY, E. COROMINAS, C. CRESPO, E. A. DE CESARE, J. DE CICCO, J. A. DEL PERAL, J. FAVET, E. FERRARI, V. y A. FRAILE, Y. FRENKEL, R. FRUCHT, E. GASPAR, E. GAVIOLA, A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ, A. J. GUARNIERI, J. E. HERRERA, E. KASNER, G. KNIE, N. KRIVOSHEIN, T. LEVI-CIVITA, W. LUYTEN, W. MÄCHLER, J. L. MASSERA, L. NACHBIN, M. PETROVICH, M. M. PEIXOTTO, A. PETRACCA, E. R. RAIMONDI, J. J. REBELLA, J. REY PASTOR, S. RÍOS, P. ROSSELL SOLER, M. SADOSKY, R. SAN JUAN, L. A. SANTALÓ, M. SCHÖNBERG, S. SISPANOV, A. TERRACINI, P. THUILLEN, F. TORANZOS, J. V. USPENSKY, G. VALIRON, G. WATAGHIN, J. WÜRSCHMIDT.

Informes de las reuniones de la Asociación Física Argentina.

Soluciones de temas propuestos. Bibliografía, Crónica, etc.

Vol. III (1938-1939). Vol. IV (1939). Vol. V (1940). Vol. VI (1940-1942).

Fascículos separados

Nº 1. GINO LORIA. *Le Matematiche in Ispagna e in Argentina.* — Nº 2. A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre las series de funciones de Hermite.* — Nº 3. MICHEL PETROVICH. *Remarques arithmétiques sur une équation differentielle du premier ordre.* — Nº 4. A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Una nueva demostración del teorema límite del Cálculo de Probabilidades. Condiciones necesarias y suficientes para que una función sea integral de Laplace.* — Nº 5. NIKOLA OBRECHKOFF. *Sur la sommation absolue par la transformation d'Euler des séries divergentes.* — Nº 6. RICARDO SAN JUAN. *Derivación e integración de series asintóticas.* — Nº 7. Resolución adoptada por la U. M. A. en la cuestión promovida por el Sr. Carlos Biggeri. — Nº 8. F. AMODEO. *Origen y desarrollo de la Geometría Proyectiva.* — 9. CLOTILDE A. BULA. *Teoría y cálculo de los momentos dobles.* — Nº 10. CLOTILDE A. BULA. *Cálculo de superficies de frecuencia.* — Nº 11. R. FRUCHT. *Zur Geometria auf einer Fläche mit indefiniter Metrik (Sobre la Geometría de una superficie con métrica indefinida).* — Nº 12. A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre una memoria del Prof. J. C. Vignaux.* — Nº 13. E. TORANZOS. *Sobre las singularidades de las curvas de Jordan.* — Nº 14. M. BALANZAT. *Fórmulas integrales de la intersección de conjuntos.* — Nº 15. G. KNIE. *El problema de varios electrones en la mecánica cuantista.* — Nº 16. A. TERRACINI. *Sobre la existencia de superficies cuyas líneas principales son dadas.* — Nº 17. L. A. SANTALÓ. *Valor medio del número de partes en que una figura convexa es dividida por n rectas arbitrarias.* — Nº 18. A. WINTNER. *On the iteration of distribution functions in the calculus of probability (Sobre la iteración de funciones de distribución en el cálculo de probabilidades).* — Nº 19. E. FERRARI. *Sobre la paradoja de Bertrand.* — Nº 20. J. BABINI. *Sobre algunas propiedades de las derivadas y ciertas primitivas de los polinomios de Legendre.* — Nº 21. R. SAN JUAN. *Un algoritmo de sumación de series divergentes.* — Nº 22. A. TERRACINI. *Sobre algunos lugares geométricos.* — Nº 23. V. y A. FRAILE y C. CRESPO. *El lugar geométrico y lugares de puntos áreas en el plano.* — Nº 24. R. FRUCHT. *Coronas de grupos y sus subgrupos, con una aplicación a los determinantes.* — Nº 25. E. R. RAIMONDI. *Un problema de probabilidades geométricas sobre los conjuntos de triángulos.*

En 1942 la U. M. A. ha iniciado la publicación de una nueva serie de "Memorias y monografías" de las que han aparecido hasta ahora las siguientes:

Vol. I; Nº 1. — GUILLERMO KNIE, *Mecánica ondulatoria en el espacio curvo.* Nº 2. — GUIDO BECK, *El espacio físico.* Nº 3. — JULIO REY PASTOR, *Integrales parciales de las funciones de dos variables en intervalo infinito.* Nº 4. — JULIO REY PASTOR, *Los últimos teoremas geométricos de Poincaré y sus aplicaciones.* Homenaje póstumo al Prof. G. D. BIRKHOFF.

Vol. II; Nº 1. — YANNY FRENKEL, *Criterios de bicompacidad y de H-completidad de un espacio topológico accesible de Frechet-Riesz.* Nº 2. — GEORGES VALIRON, *Fonctions entières.*

Además han aparecido tres cuadernos de *Miscelánea matemática*

SUMARIO

UNION MATEMATICA ARGENTINA

MIEMBROS HONORARIOS

Tulio Levi-Civita (†); Beppo Levi; Alejandro Terracini; George D. Birkhoff (†); Marshall H. Stone; Georges Valiron.

REPRESENTANTES EN EL EXTRANJERO

Ing. Rafael Laguardia (Uruguay). Ing. José Luis Massera (Uruguay). Dr. Sergio Sispánov (Paraguay). Dr. Godofredo García (Perú). Dr. Leopoldo Nachbin (Brasil). Dr. Roberto Frucht (Chile). Dr. Peter Thullen (Ecuador). Dr. Mario González (Cuba). Dr. Alfonso Nápoles Gandara (México).

Contribuyen especialmente al sostenimiento de las publicaciones de la UNION MATEMATICA ARGENTINA los siguientes

MIEMBROS PROTECTORES

COMPAÑÍA INDUSTRIAL DEL NORTE DE SANTA FE. INGENIO AZUCARERO "ARNO" (Villa Ocampo. F. C. S. F.). — JULIO REY PASTOR (Buenos Aires). — EMILIA J. DE DOMÍNGUEZ (Buenos Aires). — TRICERRI HNOS. (Rosario). — MANUEL GUITARTE (Buenos Aires). — CLOTILDE A. BULA (Rosario). — ELBA R. RAIMONDI (Buenos Aires). — FERNANDO L. GASPAR (Rosario).