

REVISTA DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

(MIEMBRO DEL PATRONATO DE LA MATHEMATICAL REVIEWS)

ORGANO DE LA

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

Director: José Babini

Delegado de la A. F. A.: Mario Bunge

Redactores de la U. M. A.: Julio Rey Pastor, Luis A. Santaló, Mischa Cotlar

Redactores de la A. F. A.: Enrique Gaviola, Richard Gans, Guido Beck



MIEMBROS TITULARES DE LA U. M. A.

J. BABINI (Santa Fe) (fundador). — M. BALANZAT (San Luis). — J. BARRAL SOUTO (B. Aires) (fundador). — C. A. BULA (Rosario) (fundador). — E. COROMINAS (Mendoza). — A. DURAÑONA Y VEDIA (B. Aires). — FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES (B. Aires) (fundador). — FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS (Rosario) (fundador). — FACULTAD DE QUÍMICA INDUSTRIAL (Santa Fe) (fundador). — A. FARENGO DEL CORRO (B. Aires). — Y. FRENKEL (B. Aires). — E. GASPAR (Rosario) (fundador). — F. L. GASPAR (Rosario) (fundador). — J. GIANNONE (Rosario) (fundador). — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ (Buenos Aires) (fundador). — J. GONZÁLEZ GALÉ (Buenos Aires) (fundador). — W. S. HILL (Montevideo) (fundador). — OBSERVATORIO ASTRONÓMICO (La Plata). — A. LASCURAIN (Buenos Aires). — J. OLGUIN (Rosario) (fundador). — D. PAPP (Buenos Aires). — P. PÍ CALLEJA (San Juan). — E. R. RAIMONDI (Buenos Aires) (fundador). — J. E. REYNAL (Buenos Aires). — J. REY PASTOR (Buenos Aires) (fundador). — A. E. SAGASTUME BERRA (La Plata). — E. L. SAMATÁN (Buenos Aires) (fundador). — J. SORTHEIX (Tucumán) (fundador). — D. T. A. DE SPELUZZI (Buenos Aires) (fundador). — F. TORANZOS (Mendoza). — C. A. TREJO (La Plata). — J. C. VIGNAUX (Buenos Aires). — E. H. ZARANTONELLO (La Plata).



BUENOS AIRES

1949



PUBLICACIONES DE LA U. M. A.

Vol. I (1936-1937). Vol. II (1938-1939), Vol. VII (1940-1941), Vol. VIII (1942), Vol. IX (1943), Vol. X (1944-1945), Vol. XI (1945-1946), Vol. XII (1946-1947), Vol. XIII (1948)

Notas y memorias de J. BABINI, M. BALANZAT, J. BALSEIRO, J. BARRAL SOUZO, A. BATTIG, G. BECK, C. BIGGERI, G. BIRKHOFF, U. BROGGI, C. A. BULA, M. BUNGE, H. E. CALCAGNO, F. CERNUSCHI, A. W. CONWAY, E. COROMINAS, C. CRESPO, E. A. DE CESARE, J. DE CICCO, J. A. DEL PERAL, M. FASSINA, J. FAVET, E. FERRARI, V. y A. FRAILE, Y. FRENKEL, R. FRUCHT, E. GASPAR, E. GAVIOLA, A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ, B. GROSS, A. J. GUARNIERI, H. HADWIGER, J. E. HERRERA, E. KASNER, G. KNIE, N. KRIVOSHEIN, T. LEVI-CIVITA, W. LUYTEN, W. MÄCHLER, J. L. MASSERA, L. NACHBIN, G. PALAMÀ, M. PETROVICH, M. M. PEIXOTO, A. PETRACCA, P. A. PIZÀ, E. R. RAIMONDI, J. J. REBELLA, J. REY PASTOR, S. RÍOS, P. ROSSELL SOLER, M. SADOSKY, R. SAN JUAN, L. A. SANTALÓ, M. SCHÖNBERG, S. SISPANOV, K. SITTE, A. TERRACINI, P. THUILLLEN, F. TORANZOS, J. V. USPENSKY, G. VALIRON, E. VIDAL ABASCAL, G. WATAGHIN, A. WINTNER, J. WÜRSCHMIDT.

Informes de las reuniones de la Asociación Física Argentina.

Soluciones de temas propuestos. Bibliografía, Crónica, etc.

Vol. III (1938-1939). Vol. IV (1939). Vol. V (1940). Vol. VI (1940-1942).

Fascículos separados

Nº 1. GINO LORIA. *Le Matematiche in Ispagna e in Argentina*. — Nº 2. A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre las series de funciones de Hermite*. — Nº 3. MICHEL PETROVICH. *Remarques arithmétiques sur une équation différentielle du premier ordre*. — Nº 4. A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Una nueva demostración del teorema límite del Cálculo de Probabilidades. Condiciones necesarias y suficientes para que una función sea integral de Laplace*. — Nº 5. NIKOLA OBRECHKOFF. *Sur la sommation absolue par la transformation d'Euler des séries divergentes*. — Nº 6. RICARDO SAN JUAN. *Derivación e integración de series asintóticas*. — Nº 7. Resolución adoptada por la U. M. A. en la cuestión promovida por el Sr. Carlos Biggeri. — Nº 8. F. AMODEO. *Origen y desarrollo de la Geometría Proyectiva*. — 9. CLOTILDE A. BULA. *Teoría y cálculo de los momentos dobles*. — Nº 10. CLOTILDE A. BULA. *Cálculo de superficies de frecuencia*. — Nº 11. R. FRUCHT. *Zur Geometria auf einer Fläche mit indefiniter Metrik (Sobre la Geometría de una superficie con métrica indefinida)*. — Nº 12. A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre una memoria del Prof. J. C. Vignaux*. — Nº 13. E. TORANZOS. *Sobre las singularidades de las curvas de Jordan*. — Nº 14. M. BALANZAT. *Fórmulas integrales de la intersección de conjuntos*. — Nº 15. G. KNIE. *El problema de varios electrones en la mecánica cuantista*. — Nº 16. A. TERRACINI. *Sobre la existencia de superficies cuyas líneas principales son dadas*. — Nº 17. L. A. SANTALÓ. *Valor medio del número de partes en que una figura convexa es dividida por n rectas arbitrarias*. — Nº 18. A. WINTNER. *On the iteration of distribution functions in the calculus of probability (Sobre la iteración de funciones de distribución en el cálculo de probabilidades)*. — Nº 19. E. FERRARI. *Sobre la paradoja de Bertrand*. — Nº 20. J. BABINI. *Sobre algunas propiedades de las derivadas y ciertas primitivas de los polinomios de Legendre*. — Nº 21. R. SAN JUAN. *Un algoritmo de sumación de series divergentes*. — Nº 22. A. TERRACINI. *Sobre algunos lugares geométricos*. — Nº 23. V. y A. FRAILE y C. CRESPO. *El lugar geométrico y lugares de puntos áreas en el plano*. — Nº 24. R. FRUCHT. *Coronas de grupos y sus subgrupos, con una aplicación a los determinantes*. — Nº 25. E. R. RAIMONDI. *Un problema de probabilidades geométricas sobre los conjuntos de triángulos*.

En 1942 la U. M. A. ha iniciado la publicación de una nueva serie de "Memorias y monografías" de las que han aparecido hasta ahora las siguientes:

Vol. I; Nº 1. — GUILLERMO KNIE, *Mecánica ondulatoria en el espacio curvo*. Nº 2. — GUIDO BECK, *El espacio físico*. Nº 3. — JULIO REY PASTOR, *Integrales parciales de las funciones de dos variables en intervalo infinito*. Nº 4. — JULIO REY PASTOR, *Los últimos teoremas geométricos de Poincaré y sus aplicaciones. Homenaje póstumo al Prof. G. D. BIRKHOFF*.

Vol. II; Nº 1. — YANNY FRENKEL, *Criterios de bicompatidad y de H -completitud de un espacio topológico accesible de Frechet-Riesz*. Nº 2. — GEORGES VALIRON, *Fonctions entières*.

Además han aparecido tres cuadernos de *Miscelánea matemática*.

REVISTA
DE LA
UNION MATEMATICA ARGENTINA
(MIEMBRO DEL PATRONATO DE LA MATHEMATICAL REVIEWS)
ORGANO DE LA
ASOCIACION FISICA ARGENTINA

VOLUMEN XIV
1949

BUENOS AIRES
1949

DEDUCCION SENCILLA DE LA TEORIA DEL EICONAL

por RICARDO GANS
(Instituto de Física — La Plata)

En la óptica geométrica, tanto en la propiamente dicha como en la electrónica, el eiconal desempeña un importante papel, pues es la función mediante la cual se deducen de la manera más sencilla las fallas de un objetivo. A continuación deduciremos las fórmulas pertinentes basándonos únicamente en los elementos del análisis y de la teoría de las ecuaciones diferenciales.

Hay varios eiconales. Preferiremos el de Seidel, pues la interpretación de las variables que llevan su nombre es particularmente sencilla.

Supondremos que el medio óptico sea inhomogéneo, vale decir, que el índice de refracción N sea función de las coordenadas. El caso de la óptica propiamente dicha, en que N es constante por partes, resulta entonces como límite, y es matemáticamente menos sencillo que el caso de la inhomogeneidad.

1. — *Los fundamentos*

Partimos del principio de Fermat, según el cual el tiempo de la propagación de la luz entre dos puntos fijos p_0 y p_1 es estacionario, y como la velocidad $v=c/N$ (c es la velocidad de la luz en el vacío) y $dt=ds/v$, resulta

$$\delta \int_{p_0}^{p_1} N ds = 0. \quad (1)$$

Tomemos z como variable independiente, de manera que $(x'=dx/dz, y'=dy/dz)$,

$$\delta \int_{z_0}^{z_1} N(x, y, z) \cdot \sqrt{1 + x'^2 + y'^2} \cdot dz = 0 \quad (1')$$

o, con la abreviación

$$F = N \cdot \sqrt{1 + x'^2 + y'^2}, \quad (2)$$

$$\delta \int_{z_0}^{z_1} F \cdot dz = 0 \quad (1'')$$

esto es,

$$\int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \delta y + \frac{\partial F}{\partial x'} \cdot \delta x' + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \delta y' \right) dz = 0. \quad (3)$$

Como la variación y la diferenciación conmutan, tenemos

$$\delta x' = \frac{d}{dz} \delta x, \quad \delta y' = \frac{d}{dz} \delta y.$$

Introduciendo estas relaciones en la (3) y aplicando integración por partes, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{z_1} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial x'} \right) \delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y \right] dz + \\ + \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right)_{z_0}^{z_1} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

De esta ecuación concluimos, en virtud de la arbitrariedad de δx y δy ,

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

y

$$\delta x_1 = \delta y_1 = \delta x_0 = \delta y_0 = 0. \quad (6)$$

Las ecuaciones (5) son las ecuaciones de Euler de la teoría de las variaciones. Las (6) expresan que los dos extremos, p_0 y p_1 , de la curva, quedan invariados.

Primer corolario: Si en un dominio del espacio N es constante de manera que, según la (2), $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$, resulta de las (5) que $\frac{\partial F}{\partial x'} = \text{const.}$, $\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}$, o, en virtud de la (2), $\frac{dx}{ds} = \text{const.}$, $\frac{dy}{ds} = \text{const.}$, vale decir, la dirección del haz no varía; o bien, en un medio homogéneo la propagación de la luz es rectilínea.

Segundo corolario: Admitimos que N sea discontinuo en una superficie. No restringimos la generalidad si ponemos el eje z normalmente a esta superficie en un punto de la misma. Si integramos las ecuaciones (5) respecto de z desde un punto p_1 situado en una orilla de la superficie hasta el punto p_2 situado frente a p_1 en la otra orilla, obtenemos

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)_{p_1}^{p_2} = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_{p_1}^{p_2} = 0$$

o, por el significado de F (véase la (2)),

$$N_2 \left(\frac{dx}{ds}\right)_2 = N_1 \left(\frac{dx}{ds}\right)_1, \quad N_2 \left(\frac{dy}{ds}\right)_2 = N_1 \left(\frac{dy}{ds}\right)_1. \quad (7)$$

Estas dos ecuaciones expresan la ley de refracción de Snellius.

2. — Los grados de aproximación

Nos limitaremos al caso más importante de la óptica: aquél en que el sistema tenga un eje óptico, es decir, que N sea simétrico alrededor de este eje; tomando este eje como eje z , N será una función de $r^2 = x^2 + y^2$ y z .

Si desarrollamos N según potencias de r , resulta

$$N = n - \frac{p}{2} \cdot (x^2 + y^2) + q (x^2 + y^2)^2 + \dots, \quad (8)$$

donde $n, p, q, \dots$ son funciones de z . El hecho de que en (8) no figuran las potencias impares de r es consecuencia de la suposición de que N no posee irregularidades en el eje de las z .

De esto podemos darnos cuenta también de la siguiente manera: si desarrollamos N en serie de x e y — con coeficientes que son, por supuesto, funciones de z — deben anularse los coeficientes de las potencias impares de x y aquellos de y , porque N permanece invariante al cambiar x por $-x$ e y por $-y$. Además, no debe variar N al cambiar x por y , y al mismo tiempo y por $-x$, pues este cambio corresponde a la rotación del sistema de coordenadas en $\pi/2$ y, en virtud de la simetría supuesta de N , éste no debe variar en tal transformación. Esto da la igualdad de los coeficientes de x^2 e y^2 , como también la de los coeficientes de x^4 e y^4 . Así resulta

$$N = n - \frac{P}{2} (x^2 + y^2) + q (x^4 + y^4) + 2q' x^2 y^2 + \dots$$

Finalmente, debe ser $q' = q$ pues introduciendo coordenadas polares mediante $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, N no debe depender de φ en virtud de la simetría de rotación. Por consiguiente, resulta la (8).

Además vale

$$\sqrt{1 + x'^2 + y'^2} = 1 + \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2) - \frac{1}{8} (x'^2 + y'^2)^2 + \dots \quad (9)$$

La condición de convergencia $x'^2 + y'^2 < 1$ no es prácticamente ninguna restricción porque solamente nos interesan ángulos relativamente pequeños entre el haz y el eje.

De la (2) resulta, pues, teniendo en cuenta las (8) y (9),

$$F = n + \frac{n}{2} (x'^2 + y'^2) - \frac{P}{2} (x^2 + y^2) + q (x^2 + y^2)^2 - \frac{n}{8} (x'^2 + y'^2)^2 - \frac{P}{4} (x^2 + y^2) (x'^2 + y'^2) + \dots = F_0 + F_2 + F_4, \quad (10)$$

en que

$$F_0 = n(z)$$

$$F_2 = \frac{n}{2} (x'^2 + y'^2) - \frac{p}{2} (x^2 + y^2) \quad (11)$$

$$F_4 = q(x^2 + y^2)^2 - \frac{n}{8} (x'^2 + y'^2)^2 - \frac{p}{4} (x^2 + y^2) (x'^2 + y'^2).$$

3. — La óptica geométrica gaussiana

Si las distancias entre un punto del haz y el eje óptico, como también los ángulos entre los mismos, son tan pequeños que podemos limitarnos en F a F_0 y F_2 , despreciando F_4 y los términos de orden mayor, resulta la óptica gaussiana o paraxial.

De las (5) obtenemos en este caso

$$\frac{d}{dz} (nx') + px = 0 \quad (12)$$

$$\frac{d}{dz} (ny') + py = 0.$$

Ambas ecuaciones, en las que n y p son funciones de z , son ecuaciones diferenciales de segundo orden, lineales y homogéneas. Si $U(z)$ y $V(z)$ son dos soluciones particulares de ellas, $u = aU + bV$, $v = cU + eV$ también son soluciones, con valores arbitrarios de las constantes a, b, c y e . Podemos determinar estas constantes de tal manera que en el plano z_0 , al que llamaremos plano objeto,

$$u(z_0) = 1, \quad u'(z_0) = 0; \quad v(z_0) = 0, \quad v'(z_0) = 1. \quad (13)$$

Estas soluciones particulares sean el fundamento de nuestros razonamientos.

$$x = lu + \lambda v \quad (14)$$

$$y = mu + \mu v$$

es entonces la solución más general del sistema (12), siendo l, λ, m, μ constantes de integración.

Para el plano objeto $z=z_0$, resulta de las (14), mediante las (13)

$$x_0=l, \quad y_0=m; \quad x'_0=\lambda, \quad y'_0=\mu \quad (15)$$

vale decir, l, m son las coordenadas del haz en el plano objeto; λ, μ los ángulos entre el haz y el eje óptico en este plano.

Si $v(z)$ se anula no solamente para $z=z_0$ (véase la (13)) sino también para otro valor z_1 (*), el plano $z=z_1$ es el plano conjugado del plano $z=z_0$, pues cualesquiera que sean los valores λ y μ , es decir, todos los haces que salen del punto l, m en el plano objeto, se reúnen, en virtud de la propiedad $v(z_1)=0$ en el plano imagen $z=z_1$ en el mismo punto

$$x=l \cdot u(z_1), \quad y=m \cdot u(z_1);$$

y $u(z_1)$ significa el aumento lateral.

Para todos los rayos que salen del punto en que el eje óptico corta al plano objeto z_0 , vale $l=m=0$, y por la (14) son

$$x=\lambda v, \quad y=\mu v$$

las ecuaciones de esta familia de haces. Los ángulos de los mismos con el eje son

$$x'=\lambda \cdot v', \quad y'=\mu \cdot v',$$

es decir, en el plano objeto, teniendo en cuenta la última relación (13),

$$x'_0=\lambda, \quad y'_0=\mu,$$

y en el plano imagen

$$x'_1=\lambda v'(z_1), \quad y'_1=\mu \cdot v'(z_1).$$

(*) En un medio inhomogéneo puede haber más de un valor z_1 para el cual $v(z_1)=0$, pero esto no nos interesa.

Por consiguiente, $v'(z_1)$ significa el aumento angular. De esta manera hemos determinado los sencillos significados de $u(z_1)$ y $v'(z_1)$.

Finalmente deduciremos una integral que nos hará falta a continuación. Las funciones u y v obedecen, según las (12), a las ecuaciones

$$\frac{d}{dz}(n u') + p u = 0$$

$$\frac{d}{dz}(n v') + p v = 0.$$

Multiplicando la segunda por u , la primera por $-v$ y sumándolas, resulta, por integración por partes,

$$n(uv' - vu') = \text{const.}$$

Por las (13) se determina la constante, obteniéndose

$$n(uv' - vu') = n_0. \quad (16)$$

Aplicando esta ecuación al plano imagen $z = z_1$, donde $v = 0$, resulta

$$n_1 u_1 v'_1 = n_0 = n_0 u_0 v'_0. \quad (17)$$

En palabras: el producto del índice de refracción por el aumento lateral y por el aumento angular es un invariante de la representación (teorema de los senos).

4. — Una aproximación superior

En aproximación gaussiana nos hemos limitado al segundo orden en F , y por consiguiente al primer orden en x e y como funciones de l, λ, m, μ . Si tenemos en cuenta F_4 , resultarán x e y hasta el tercer orden inclusive.

Según las (5) valen, con $F = F_0 + F_2 + F_4$,

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x'} \right) - \frac{\partial F_2}{\partial x} = - \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial F_4}{\partial x'} \right) - \frac{\partial F_4}{\partial x} \right]$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial F_2}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F_2}{\partial y} = - \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial F_4}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F_4}{\partial y} \right]$$

o, por la (11),

$$\frac{d}{dz} (nx') + px = - \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial F_4}{\partial x'} \right) - \frac{\partial F_4}{\partial x} \right] \quad (18)$$

$$\frac{d}{dz} (ny') + py = - \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial F_4}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F_4}{\partial y} \right],$$

y si consideramos las ecuaciones en primera aproximación como resueltas, es decir, si conocemos $x(z)$ e $y(z)$ como soluciones de las (12), sustituyendo estos valores en la función F_4 definida por la (11), los segundos miembros de las (18) serán funciones conocidas de z , es decir, tenemos que integrar dos ecuaciones diferenciales de segundo orden, lineales e inhomogéneas, de la forma

$$x'' + Px' + Qx = \varphi(z), \quad (19)$$

en que

$$\varphi(z) = \frac{1}{n} \left[\frac{\partial F_4}{\partial x} - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial F_4}{\partial x'} \right) \right]. \quad (20)$$

Si u y v son soluciones particulares de la ecuación (19) homogeneizada, la solución de la inhomogénea (19) es

$$x = Au + Bv + \int_{z_0}^z \varphi(\xi) \cdot \frac{u(\xi)v(z) - v(\xi)u(z)}{u(\xi)v'(\xi) - v(\xi)u'(\xi)} \cdot d\xi,$$

con las constantes de integración A y B .

Sustituyendo φ por la (20), resulta, teniendo en cuenta la (16),

$$x = Au + Bv + \frac{1}{n_0} \int_{z_0}^z \left[\frac{\partial F_4}{\partial x} - \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\partial F_4}{\partial x'} \right) \right] [u(\xi) v(z) - v(\xi) u(z)] d\xi \quad (21)$$

y una ecuación equivalente para y .

Aplicando integración por partes al segundo término del primer paréntesis obtenemos

$$\begin{aligned} x &= Au + Bv + \frac{1}{n_0} \int_{z_0}^z \frac{\partial F_4}{\partial x} [u(\xi) v(z) - v(\xi) u(z)] d\xi \\ &+ \frac{1}{n_0} \cdot \int \frac{\partial F_4}{\partial x'} \cdot [u'(\xi) v(z) - v'(\xi) u(z)] d\xi + \\ &\quad - \frac{1}{n_0} \left[\frac{\partial F_4}{\partial x'} (u(\xi) v(z) - v(\xi) u(z)) \right]_{\xi=z_0}^{\xi=z} \\ &= Au + Bv + \frac{1}{n_0} \left(\frac{\partial F_4}{\partial x'} \right)_{z_0} \cdot v(z) + \frac{1}{n_0} \int_{z_0}^z \frac{\partial F_4}{\partial x} [u(\xi) v(z) - v(\xi) u(z)] d\xi \\ &\quad + \frac{1}{n_0} \int_{z_0}^z \frac{\partial F_4}{\partial x'} \cdot [u'(\xi) v(z) - v'(\xi) u(z)] d\xi \end{aligned}$$

Aquí hemos utilizado las relaciones $u(z_0)=1$, $v(z_0)=0$ (cif. (13)).

Si reunimos los factores de $u(z)$ y los de $v(z)$ obtenemos

$$\begin{aligned} x &= \left[A - \frac{1}{n_0} \int_{z_0}^z \left(\frac{\partial F_4}{\partial x} v + \frac{\partial F_4}{\partial x'} v' \right) d\xi \right] u(z) + \left[B + \frac{1}{n_0} \left(\frac{\partial F_4}{\partial x'} \right)_{z_0} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n_0} \int_{z_0}^z \left(\frac{\partial F_4}{\partial x} u + \frac{\partial F_4}{\partial x'} u' \right) d\xi \right] v(z) \end{aligned}$$

vale decir, la solución se presenta en la forma

$$z = lu + \lambda v \quad (22)$$

siendo

$$l = A - \frac{1}{n_0} \cdot \int_{z_0}^z \left(\frac{\partial F_4}{\partial x} v + \frac{\partial F_4}{\partial x'} v' \right) d\xi$$

$$\lambda = B + \frac{1}{n_0} \cdot \left(\frac{\partial F_4}{\partial x'} \right)_{z_0} + \frac{1}{n_0} \int_{z_0}^z \left(\frac{\partial F_4}{\partial x} u + \frac{\partial F_4}{\partial x'} u' \right) d\xi$$
(23)

funciones de z . Esta es la única diferencia entre la solución de las ecuaciones inhomogénea y homogénea (variación de las constantes). De las (23) resulta

$$l_1 - l_0 = -\frac{1}{n_0} \cdot \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{\partial F_4}{\partial x} v + \frac{\partial F_4}{\partial x'} v' \right) d\xi$$

$$\lambda_1 - \lambda_0 = +\frac{1}{n_0} \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{\partial F_4}{\partial x} u + \frac{\partial F_4}{\partial x'} u' \right) d\xi.$$
(24)

De la misma manera se deduce

$$y = m u + \mu v,$$
(22')

con

$$m_1 - m_0 = -\frac{1}{n_0} \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{\partial F_4}{\partial y} v + \frac{\partial F_4}{\partial y'} v' \right) d\xi$$

$$\mu_1 - \mu_0 = +\frac{1}{n_0} \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{\partial F_4}{\partial y} u + \frac{\partial F_4}{\partial y'} u' \right) d\xi.$$
(24')

Multipliquemos las (24) y (24') por $-\delta\lambda, +\delta l, -\delta\mu, +\delta m$ respectivamente y supongamos que estas variaciones no depen-

den de z pero que, por lo demás, sean arbitrarias. Por esta constancia de las variaciones podemos ponerlas bajo el signo integral. Sumando las ecuaciones después de estas multiplicaciones, y teniendo en cuenta que

$$\delta x = u \cdot \delta l + v \cdot \delta \lambda$$

$$\delta y = u \cdot \delta m + v \cdot \delta \mu$$

y que en la aproximación paraxial

$$x' = lu' + \lambda v'$$

$$y' = mu' + \mu v',$$

de manera que

$$\delta x' = u' \cdot \delta l + v' \cdot \delta \lambda$$

$$\delta y' = u' \cdot \delta m + v' \cdot \delta \mu,$$

resulta

$$-(l_1 - l_0) \delta \lambda + (\lambda_1 - \lambda_0) \delta l - (m_1 - m_0) \delta \mu + (\mu_1 - \mu_0) \delta m \\ = \frac{1}{n_0} \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{\partial F_4}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F_4}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F_4}{\partial x'} \delta x' + \frac{\partial F_4}{\partial y'} \delta y' \right) d\xi = \frac{1}{n_0} \cdot \delta \int_{z_0}^{z_1} F_4 \cdot d\xi$$

o introduciendo la función

$$S = \frac{1}{n_0} \cdot \int_{z_0}^{z_1} F_4 \cdot d\xi, \quad (25)$$

$$-(l_1 - l_0) \delta \lambda + (\lambda_1 - \lambda_0) \delta l - (m_1 - m_0) \delta \mu + (\mu_1 - \mu_0) \delta m = \delta S. \quad (26)$$

Por la (11), la F_4 está dada como función de 4.º grado de las x, y, x', y' , y si sustituimos en ella

$$x = lu + \lambda v; \quad x' = lu' + \lambda v' \\ y = mu + \mu v; \quad y' = mu' + \mu v', \quad (27)$$

porque las l, λ, m, μ son constantes en la aproximación deseada, y si calculamos las integrales cuyos integrandos son funciones de 4.º grado de las funciones conocidas $u, v, u'v'$, resulta S en la forma

$$S = C_0(l^2 + m^2)^2 + C_1(l^2 + m^2)(\lambda^2 + \mu^2) + C_2(l^2 + m^2)(l\lambda + m\mu) + C_3(\lambda^2 + \mu^2)(l\lambda + m\mu) + C_4(l\lambda + m\mu)^2 + C_5(\lambda^2 + \mu^2)^2, \quad (28)$$

es decir, como función de 4.º grado de las l, λ, m, μ y como función particularmente sencilla, puesto que en ella sólo figuran las combinaciones $l^2 + m^2, \lambda^2 + \mu^2$ y $l\lambda + m\mu$. Esto lo hubiéramos podido prever sin cálculo, porque solamente ellas son invariantes respecto de una rotación del sistema de coordenadas alrededor del eje z , es decir, sólo ellas corresponden a la simetría rotatoria de nuestro sistema óptico. C_0 y C_5 , por ejemplo, tienen los valores

$$C_0 = \frac{1}{n_0} \int_{z_0}^{z_1} q(\xi) u^4 d\xi, \quad C_5 = \frac{1}{n_0} \int_{z_0}^{z_1} q(\xi) v^4 d\xi.$$

Por la forma (28) resulta

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial l} \cdot \delta l + \frac{\partial S}{\partial \lambda} \cdot \delta \lambda + \frac{\partial S}{\partial m} \cdot \delta m + \frac{\partial S}{\partial \mu} \cdot \delta \mu,$$

y comparando los factores de las variaciones en los dos miembros de la (26) obtenemos

$$\begin{aligned} l_1 - l_0 &= -\frac{\partial S}{\partial l}; & m_1 - m_0 &= -\frac{\partial S}{\partial m} \\ \lambda_1 - \lambda_0 &= +\frac{\partial S}{\partial \lambda}; & \mu_1 - \mu_0 &= +\frac{\partial S}{\partial \mu}. \end{aligned} \quad (29)$$

Estas sencillas relaciones nos dan las variaciones de las constantes mediante la (28). Las «constantes» tienen en el plano objeto z_0 los valores $l_0, \lambda_0, m_0, \mu_0$ y varían con z para tomar en el plano objeto z_1 los valores $l_1, \lambda_1, m_1, \mu_1$. Pero para un

haz paraxial son verdaderas constantes, vale decir, tienen también en el plano imagen los valores $l_0, \lambda_0, m_0, \mu_0$, de manera que las coordenadas en el plano z_1 del haz real son, en virtud de la (27),

$$X_1 = l_1 u_1 + \lambda_1 v_1$$

$$Y_1 = m_1 u_1 + \mu_1 v_1.$$

En cambio, las coordenadas del haz correspondiente paraxial son

$$x_1 = l_0 u_1 + \lambda_0 v_1$$

$$y_1 = m_0 u_1 + \mu_0 v_1.$$

Ambos pares de ecuaciones se simplifican más por $v_1 = 0$, dando

$$X_1 = l_1 u_1, \quad x_1 = l_0 u_1$$

$$Y_1 = m_1 u_1, \quad y_1 = m_0 u_1,$$

de modo que las diferencias que nos interesan toman los valores

$$\Delta x_1 = (l_1 - l_0) u_1 \tag{30}$$

$$\Delta y_1 = (m_1 - m_0) u_1.$$

Resulta que para el cálculo de estas diferencias precisamos solamente las dos primeras ecuaciones (29). Por esta razón no nos interesa la constante C_0 en (28), pues el primer término de esa ecuación no depende de λ ni de μ . Las otras cinco constantes dan las fallas de un objetivo y cada una de ellas es característica de una de las cinco fallas elementales siguientes: aberración esférica, coma, astigmatismo, curvatura de la imagen y distorsión.

Las variables de Seidel son particularmente sencillas porque en aproximación paraxial son constantes, las constantes de integración (el astrónomo diría los elementos de la trayectoria). Por esta razón la función S (la función de perturbación del astrónomo) es de 4.º grado.

NOTA SOBRE LOS VALORES LIMITES DE FUNCIONES ANALITICAS

A. P. CALDERÓN, A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ, A. ZYGMUND

1. Es bien sabido que en un producto de Blaschke de n factores

$$w = B_n(z) = \prod_{k=1}^n \frac{\overline{a_k}}{|a_k|} \frac{a_k - z}{1 - \overline{a_k}z},$$

el afijo de $B_n(e^{i\vartheta})$ recorre n veces la circunferencia $|w|=1$, cuando ϑ varía de 0 a 2π . Es, pues, natural preguntarse si algo análogo sucede en el caso de que el producto tenga infinitos factores. En el Teorema II de esta nota demostramos que efectivamente el afijo del primer miembro toma en tal caso todos los valores de la circunferencia unitaria infinitas veces; y esta propiedad es válida para una categoría mucho más amplia de funciones, según queda establecido en el Teorema I, del cual es el II inmediato corolario.

2. El Teorema I generaliza resultados ya conocidos que pasamos a enunciar.

Sea $w = f(z)$ una función regular en el interior del círculo unidad que cumple las condiciones:

$$|f(z)| < 1 \quad \text{para} \quad |z| < 1,$$

$$|f(e^{i\vartheta})| = \lim_{r \rightarrow 1} |f(re^{i\vartheta})| = 1,$$

para casi todo ϑ de $(0, 2\pi)$. Hössjer⁽¹⁾ demostró que en tales hipótesis, los afijos de $f(e^{i\vartheta})$ cubren toda la circunferencia con la posible excepción de un conjunto de medida nula.

⁽¹⁾ G. HÖSSJER, *Ueber die Randwerte beschränkter Funktionen*; Acta Lit-

Nevanlinna⁽²⁾ generalizó el teorema anterior en los términos siguientes. Sea $w=f(z)$ una función regular en $|z|<1$, tal que

$$|f(z)|<1 \text{ para } |z|<1; |f(e^{i\vartheta})|=\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\vartheta})=1$$

para casi todo ϑ del arco $\alpha<\vartheta<\beta$.

En tales condiciones, o bien los afijos de $f(e^{i\vartheta})$ ($\alpha<\vartheta<\beta$), cubren la circunferencia $|w|=1$ con la posible excepción de un conjunto de medida nula, o $f(z)$ es prolongable analíticamente a través del arco.

Finalmente, Seidel y Doob⁽³⁾ generalizaron el resultado de Nevanlinna, mostrando que el conjunto de medida nula que figura en el enunciado del teorema, es vacío. Es decir, que los afijos de $f(e^{i\vartheta})$ cubren toda la circunferencia $|w|=1$, sin excepción.

3. *Teorema I.* Sea $f(z)$ una función regular y de módulo menor que 1 en el círculo $|z|<1$, tal que

$$|f(e^{i\vartheta})|=\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\vartheta})=1$$

para casi todo ϑ del arco $(\alpha; \beta)$ de la circunferencia $|z|=1$. En tales hipótesis, o bien los afijos de $f(e^{i\vartheta})$, $\alpha<\vartheta<\beta$, cubren toda la circunferencia $|w|=1$ infinitas veces, o $f(z)$ es prolongable analíticamente a través del arco $(\alpha; \beta)$.

Demostración. Sea γ un complejo cualquiera de módulo 1; demostraremos que existen infinitos ϑ pertenecientes al arco $(\alpha; \beta)$, para los cuales se verifica la relación $f(e^{i\vartheta})=\gamma$; o que, en caso contrario, la función es prolongable a través del arco. Supondremos, lo cual no restringe la generalidad, que $\gamma=1$.

La función

$$\Phi(z)=\frac{f(z)+1}{f(z)-1},$$

terarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Franciscus-Josephinae, 5, (1930) pág. 55.

(2) R. NEVANLINNA, *Ueber beschränkte analytische Funktionen*, Commentationes in honorem Ernesti Leonardi Lindelöf, 1929, pág. 28.

(3) W. SEIDEL, *On the distribution of values of bounded analytic functions*, Transactions of the American Mathematical Society, 36, (1934), pág. 208.

tiene parte real negativa en $|z| < 1$, y por lo tanto admite la representación

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} d\psi(\vartheta),$$

con $\psi(\vartheta)$ acotada no decreciente. Es bien sabido que la parte real de $\Phi(z)$ tiende radialmente hacia la derivada simétrica $\psi'(\vartheta)$, en todo punto donde dicha derivada, finita o infinita, existe.

Por lo tanto se verificará, para casi todo ϑ de $(\alpha; \beta)$,

$$\lim_{r \rightarrow 1} R[\Phi(re^{i\vartheta})] = R \left[\frac{f(e^{i\vartheta}) + 1}{f(e^{i\vartheta}) - 1} \right] = \psi'(\vartheta).$$

Pero, como por hipótesis es $|f(e^{i\vartheta})| = 1$ para casi todo ϑ de $(\alpha; \beta)$, resulta, para $f(e^{i\vartheta}) \neq 1$,

$$\psi'(\vartheta) = R \left[\frac{f(e^{i\vartheta}) + 1}{f(e^{i\vartheta}) - 1} \right] = 0.$$

En caso de que sea $f(e^{i\vartheta}) = 1$ para infinitos valores de ϑ , el teorema está demostrado. Si así no sucede, es $\psi'(\vartheta) = 0$ en casi todo punto de $(\alpha; \beta)$; y como $\psi(\vartheta)$ es no decreciente, caben dos posibilidades:

- a) $\psi(\vartheta)$ tiene infinitos puntos de crecimiento;
- b) $\psi(\vartheta)$ tiene sólo un número finito de puntos de crecimiento.

En el primer caso hay infinitos puntos donde la derivada simétrica es infinita. Se verificará por lo tanto en esos puntos

$$\lim_{r \rightarrow 1} R[\Phi(re^{i\vartheta})] = \infty$$

y por lo tanto

$$\lim_{r \rightarrow 1} \Phi(re^{i\vartheta}) = \infty.$$

Pero como es

$$f(z) = \frac{\Phi(z) + 1}{\Phi(z) - 1}, \quad [1]$$

resulta

$$\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\vartheta}) = f(e^{i\vartheta}) = 1$$

para infinitos valores de ϑ de $(\alpha; \beta)$.

En el segundo caso, $\psi(\vartheta)$ es una función en escalera con un número finito de puntos de discontinuidad; la función $\phi(z)$ es regular, y tiene parte real nula, en todos los arcos de constancia de $\psi(\vartheta)$, y tiene polos simples en los puntos de discontinuidad de $\psi(\vartheta)$. Pero $f(z)$ (véase la fórmula 1) es regular, tanto en los puntos en que $\phi(z)$ es regular y distinta de 1, como en los puntos en que $\phi(z)$ tiene polos simples. Resulta, en definitiva, que $f(z)$ es regular en todos los puntos del arco $(\alpha; \beta)$, y por lo tanto prolongable analíticamente a través de él, con lo cual el teorema queda demostrado.

4. Cuando $f(z)$ es un producto de Blaschke con infinitos ceros, se cumplen las hipótesis del teorema anterior, siendo el arco $(\alpha; \beta)$ la circunferencia completa $|z|=1$. Como, además, por lo menos un punto de la circunferencia es punto de acumulación de ceros, tal punto es necesariamente singular, quedando excluida la segunda posibilidad del teorema. Resulta entonces el

Teorema II. Sea $B(z)$, un producto de Blaschke con infinitos ceros

$$w = B(z) = e^{i\alpha} z^m \prod_0^{\infty} \frac{\bar{a}_k}{|a_k|} \frac{a_k - z}{1 - \bar{a}_k z};$$

$$|a_k| < 1; \quad \sum_0^{\infty} (1 - |a_k|) < \infty.$$

Se verifica entonces que los afijos de

$$B(e^{i\vartheta}) = \lim_{r \rightarrow 1} B(re^{i\vartheta})$$

cubren infinitas veces la circunferencia $|w|=1$.

SOBRE LA TRANSFORMACION DE HILBERT

por OSCAR A. VARSAVSKY

Es objeto de esta nota señalar la relación existente entre la conocida transformación de Hilbert: $H\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \oint \frac{\varphi(t)dt}{t-x}$ (el símbolo $\oint$ significa integral a valores principales) y el operador signo: $S\varphi(x) = \text{sgn}(x) \varphi(x)$, lo que permite volver a encontrar de una manera sencilla y que no depende de la teoría de funciones analíticas, las propiedades de dicha transformación. Se verá que los resultados sólo se demuestran aquí para un conjunto de funciones denso en L^2 , pero esta restricción en las funciones queda compensada por una amplia generalización en sus argumentos.

I. - El operador signo.

Sea S un operador definido para toda función compleja de variable real $\varphi(x)$ mediante la fórmula:

$$S\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{para } x > 0, \\ -\varphi(x) & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

(en el origen puede tomarse cualquiera de ambas posibilidades, o el valor cero, como al multiplicar por la función $\text{sgn}(x)$).

1) S es lineal y acotado. $\varphi(x) \in L^p$ implica $S\varphi(x) \in L^p$, pues $|\varphi(x)| = |S\varphi(x)|$. En este sentido S es una transformación continua de cada espacio L^p en sí mismo. Pero en lo sucesivo supondremos exclusivamente que $\varphi(x) \in L^2$, es decir, tomamos funciones de un espacio de Hilbert.

2) $S^2 = I$ (= identidad), o sea $S = S^{-1}$.

Si (φ, ψ) representa el producto interno de dos funciones, es decir $(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cdot \bar{\psi}(x) dx$, se verifica $(S\varphi, \psi) = (\varphi, S\psi)$ o sea, S es autoadjunto: $S = S^*$ (en sentido estricto, pues su dominio es todo el espacio), y unitario: $S^* = S^{-1}$.

3) La ecuación característica, $S\varphi = a\varphi$ se satisface para $a = \pm 1$.

Al autovalor $+1$ corresponden las funciones nulas para $x < 0$ (según la definición de S adoptada en el origen habrá o no que añadir este punto); al autovalor -1 corresponden las funciones nulas para $x > 0$ (con la misma salvedad).

Llamando P y P' a los operadores proyección cuyas multitudes m_P y $m_{P'}$ están formadas por las funciones nulas a la izquierda y a la derecha del origen, respectivamente, se cumple:

$$P + P' = I; \quad P - P' = S$$

$$S = 2P - I \text{ (Ecuación de las involuciones).}$$

4) En m_P las funciones de Laguerre $l_n(x)$ forman un sistema ortonormal completo, y lo mismo ocurre en $m_{P'}$ con las $l_n(-x)$. Por lo tanto entre ambos sistemas se obtiene una base invariante para el operador S , que indicaremos con $\{l_n(x)\}$; $n = \dots -1, 0, 1, \dots$; $l_{-n}(x) = l_n(-x)$.

II. El operador de Fourier.

Sea F el operador definido para las funciones complejas de variable real $\varphi(x) \in L^2$ mediante la fórmula

$$F\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{ixt} dt$$

(en promedio cuadrático. Si se necesita convergencia puntual puede

adoptarse como definición: $F\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \frac{e^{ixt} - 1}{it} dt$).

1) F es unitario:

$$F^* \varphi(x) = F^{-1} \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-ixt} dt.$$

Sus autovalores son ± 1 , $\pm i$; y las funciones de Hermite $h_n(x)$ son autofunciones.

2) Cuando se lo define en grupos topológicos transforma funciones del grupo en funciones del correspondiente grupo dual o de caracteres (en el caso de la recta ambos coinciden). Esta propiedad es esencial.

3) $F^2\varphi(x) = \varphi(-x)$, en L^2 . $F^2 = F^{-2}$ es unitario y autoadjunto. Sus autovalores son 1 (corresponde a las funciones pares), y -1 (para las impares).

III. El operador de Hilbert.

Sea H' el operador conjugado de S mediante F , es decir: $H' = F^{-1}SF$. Llamaremos operador de Hilbert a $H = -iH'$.

$$1) H\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)dt}{t-x}$$

en el siguiente sentido:

$$\begin{aligned} H\varphi(x) &= -iF^{-1}SF\varphi(x) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-ixt} F\varphi(t) dt - \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^0 e^{-ixt} F\varphi(t) dt \right\} = \frac{-i}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) [e^{it(u-x)} - e^{-it(u-x)}] dt du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) \sin t(u-x) dt du. \end{aligned}$$

Esta última expresión es la «integral aliada» (de la similar con coseno en lugar de seno, llamada fórmula de la integral de Fourier). Para $\varphi(x) \in L^1$ es sumable (C, α) , $\alpha > 0$ a

$$\frac{1}{\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)dt}{t-x}$$

en casi todo punto (ver, p. ej. [5], teor. 107).

Como $L^1 \cap L^2$ es denso en L^2 , no nos preocupa extender la equivalencia de ambas expresiones a todo el espacio L^2 .

Este resultado parecería contradecir el teorema de v. Neumann, que dice: «Condición necesaria y suficiente para que un operador autoadjunto en L^2 pueda representarse mediante un operador integral, es que cero sea punto de acumulación de su espectro», [4], pues H' no satisface esta condición. Pero $\frac{i}{\pi}$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)dt}{t-x}$ no es un verdadero operador integral, sino el límite

de la suma de dos operadores integrales: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{i}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \right\} \frac{\varphi(t)dt}{t-x}$

$$2) S = FH'F^{-1} = iFHF^{-1}.$$

$FH = -iSF$. Este resultado se ha utilizado en la demostración de varios teoremas (ver [5], fórmula 5.1.8 y teors. 90 y 91).

3) Por ser conjugado unitario de S , H' es también unitario y autoadjunto y tiene los mismos autovalores: ± 1 . Los de H son, respectivamente $\mp i$.

4) Si $f(x)$ es autofunción de S , $F^{-1}f(x)$ lo es de H' y H .

Si $\varphi(x)$ es autofunción de H' (y por lo tanto de H), $F\varphi(x)$ lo es de S .

Es decir $H\varphi = -i\varphi$ y $PF\varphi = F\varphi$ son condiciones equivalentes (lo mismo vale para $H\varphi = i\varphi$ y $P'F\varphi = F\varphi$).

Esto corresponde al importante teorema: «Son condiciones equivalentes: a) que la transformada de Fourier de una función de L^2 se anule a la izquierda (o a la derecha) del origen, y b) que sus partes real e imaginaria sean transformadas de Hilbert una de otra». (Ver p. ej. [5], teor. 95).

Pues si $\varphi(x) = f(x) + ig(x)$ es autofunción de H del autovalor $-i$, se tendrá:

$$H\varphi = Hf + iHg = -i(f + ig).$$

y como $Hf(x)$ es real si lo es $f(x)$; como lo muestra la propiedad 1), podemos igualar partes reales e imaginarias:

$$Hf(x) = g(x)$$

$$Hg(x) = -f(x);$$

y por otra parte $PF\varphi = F\varphi$ significa que $F\varphi \in m_p$, es decir, es nula a la izquierda del origen. Lo análogo (con un cambio de signo en las fórmulas de transformación) vale para el otro autovalor.

5) Como las funciones $l_n(x)$, ver I, 4), constituyen un sistema ortonormal completo de autofunciones de S , sus transformadas de Fourier

$$F^{-1}l_n(x) = k_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(x-i)^n}{(x+i)^{n+1}}; \quad n = \dots -1, 0, 1, \dots$$

formarán un sistema ortonormal completo invariante con respecto a H y H' .

Este es un resultado de Hille [3].

6) Así como S , H' puede representarse mediante $H' = 2N - I$, siendo N un operador proyección definido por:

$$N\varphi(x) = \frac{1}{2}(I + H')\varphi(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{i}{2\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)dt}{t-x}$$

y si representamos al operador unidad mediante la delta de Dirac obtendremos:

$$N\varphi(x) = \frac{1}{2} \oint_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \left[\delta(t-x) + \frac{i}{\pi} \frac{1}{t-x} \right] dt,$$

cuyo núcleo es la delta compleja (ver [1]).

Si definimos

$$N'\varphi(x) = \frac{1}{2} \oint_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \left[\delta(t-x) - \frac{i}{\pi} \frac{1}{t-x} \right] dt = \frac{1}{2}[I - H']$$

valdrá:

$$N' + N = I; \quad N - N' = H'.$$

Como es evidente, $N = F^{-1} P F$, de modo que la aplicación de la delta compleja a una función, equivale, en el espacio conjugado según F , a igualar a cero la función en el semieje negativo (positivo para N').

Como cero es punto de acumulación del espectro N y N' , el teorema de v. Neumann antes citado indica que, previa una transformación unitaria apropiada, ha de ser posible expresar a estos operadores como integrales.

Por el mismo camino seguido en III, 1 para H , se obtiene para N la siguiente representación:

$$N\varphi(x) = \frac{i}{2\pi} \oint_0^\infty \left[\frac{\varphi(u)}{u-x} - \frac{\varphi(-u)}{u+x} \right] du = \frac{i}{2\pi} \left\{ \oint_0^\infty \frac{x[\varphi(u) + \varphi(-u)]}{u^2 - x^2} du + \oint_0^\infty \frac{u[\varphi(u) - \varphi(-u)]}{u^2 - x^2} du \right\}$$

es decir, una combinación de las fórmulas de Hilbert para funciones pares e impares.

7) Introduzcamos los operadores autoadjuntos X y D definidos por:

$$X\varphi(x) = x\varphi(x); \quad D\varphi(x) = i \frac{d\varphi(x)}{dx}$$

y cuyos dominios son densos en L^2 .

Como es sabido, se cumple $D = F^{-1} X F$, y entonces:

$$H' D = F^{-1} S F D = F^{-1} S X F$$

$$D H' = F^{-1} X F H' = F^{-1} X S F.$$

Como es inmediato que $SX = XS$, resulta que H' y H conmutan con la derivación, lo cual era de preverse por la forma del núcleo de la transformación de Hilbert (ver p. ej. [6]).

La relación de conmutación con X puede obtenerse utilizando la fórmula $SF^{\pm 2} = -F^{\pm 2}S$, que se deduce fácilmente recordando (ver II, 3)) que $F^2\varphi(x) = F^{-2}\varphi(x) = \varphi(-x)$.

Entonces:

$$H'X = F^{-1} S F^2 D F^{-1} = -F S D F^{-1}$$

$$XH' = F D F^2 S F = -F D S F^{-1}.$$

Ahora bien; $DS\varphi(x) = SD\varphi(x)$ para $x \neq 0$, pero no en el origen, a menos que la función sea allí nula. Sólo entonces podrá deducirse $HX = XH$.

La fórmula de Hilbert nos indica por otra parte:

$$H'X\varphi(x) = \frac{i}{\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{u\varphi(u)}{u-x} du = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) du + \frac{ix}{\pi}$$

$$\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(u)du}{u-x} = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) du + XH'\varphi(x).$$

o sea, la condición de conmutación es: $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) du = 0$, pero esto

también es exigido por la continuidad de la transformación de Fourier cuando $\varphi(x) \in H^1 \cap H^2$ (clases de Hardy). (Pues $\varphi(x) = N\varphi(x) + N'\varphi(x)$: $FN\varphi(x) = 0$ para $x < 0$, y por continuidad para $x = 0$; $FN'\varphi(x) = 0$ para $x > 0$, y por continuidad para $x = 0$;

es decir $F(N+N')\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) du = 0$).

Nótese que esta condición equivale a que en el espacio conjugado según F las funciones sean nulas en el origen, o sea el criterio de conmutación para S y D .

8) Del hecho que el operador signo da el mismo resultado aplicado a un producto o a uno solo de sus factores:

$$S[f(x) \cdot g(x)] = g(x) \cdot Sf(x) = f(x) \cdot Sg(x),$$

se deduce la misma propiedad para el operador de Hilbert con respecto al producto transformado, o sea la convolución:

$$H[f(x) * g(x)] = f * Hg = g * Hf,$$

$$(f(x) * g(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z-t) \cdot g(t) dt.$$

En efecto, recordando que el teorema de la convolución expresa:

$$F[f * g] = Ff \cdot Fg, \text{ o también: } F^{-1}[f * g] = F^{-1}f \cdot F^{-1}g,$$

se tendrá:

$$\begin{aligned} H[f * g] &= HF^{-1}[Ff \cdot Fg] = -iF^{-1}S[Ff \cdot Fg] = \\ &= -iF^{-1}[SFf \cdot Fg] = -iF^{-1}SFf * g = Hf * g. \end{aligned}$$

Este resultado se halla p. ej. en [5], no restringido al espacio L^2 como aquí ([5] teor. 104). En cambio podemos generalizarlo automáticamente para más de dos factores:

$$H[f_0 * f_1 * \dots * f_n] = Hf_0 * f_1 * \dots * f_n = f_0 * Hf_1 * \dots * f_n = \dots$$

donde

$$\begin{aligned} f_0' * f_1 * \dots * f_n &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(u_n) du_n \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} f_{n-1}(u_{n-1}) du_{n-1} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u_1) f_0(x - u_1 - \dots - u_n) du_1. \end{aligned}$$

Corolario:

$$Hf * Hg = -f * g; Hf * Hg * Hk = -H[f * g * k], \text{ etc.}$$

IV. - El operador de Hilbert generalizado.

1) Sea S_λ el operador definido por:

$$S_\lambda \varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{para } x > \lambda \\ -\varphi(x) & \text{para } x < \lambda \end{cases}$$

con las mismas consideraciones para $x = \lambda$ que para S en el origen.

Para todo λ , $-\infty < \lambda < \infty$, S_λ tiene propiedades análogas a las de S (al que ahora llamaríamos S_0), aunque por supuesto sus autofunciones están «corridas» en λ . Sus multiplicidades lineales características, m_{P_λ} y $m_{P'_\lambda}$ están determinadas por dos proyecciones, P_λ y P'_λ , definidas por:

$$P_\lambda \varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{para } x > \lambda \\ 0 & \text{para } x < \lambda \end{cases}; \quad P'_\lambda \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x > \lambda \\ \varphi(x) & \text{para } x < \lambda \end{cases}$$

de modo que $P_\lambda + P'_\lambda = I$; $P_\lambda - P'_\lambda = S_\lambda$.

Nótese que las P'_λ , $-\infty < \lambda < \infty$, forman una familia espectral bien conocida; la del operador X ; es decir:

$$X = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dP'_\lambda = - \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dP_\lambda = - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dS_\lambda.$$

Los S_λ conmutan entre sí.

2) Sea V_λ el operador «desplazamiento en λ », definido por:

$$V_\lambda \varphi(x) = \varphi(x + \lambda).$$

Los V_λ son operadores unitarios. Sus adjuntos son:

$$V_\lambda^* = V_{-\lambda} = V_\lambda^{-1}.$$

Sus espectros son continuos, salvo para $V_0 = I$. Forman un grupo abeliano:

$$V_\lambda \cdot V_\mu = V_{\lambda+\mu} = V_\mu \cdot V_\lambda.$$

Es evidente que

$$S_\lambda = V_{-\lambda} \cdot S \cdot V_\lambda = V_\lambda^{-1} S V_\lambda$$

(es decir, equivale a correr el origen hasta λ , aplicar el operador S y llevar nuevamente el origen a su sitio).

Sea U_λ el conjugado de V_λ , según F : $U_\lambda = F^{-1} \cdot V_\lambda \cdot F$. Efectuando las operaciones indicadas se obtiene: $U_\lambda \varphi(x) = e^{i\lambda x} \varphi(x)$ y $U_\lambda^{-1} = e^{-i\lambda x}$, es decir, los U_λ forman también un grupo abeliano de operadores unitarios, cuya familia espectral es la misma que la del operador X (pues son funciones de éste). De

aquí deducimos que la familia espectral de los V_λ es en esencia la misma que la del operador $D = i \frac{d}{dx}$.

3) Definiremos un «operador de Hilbert generalizado» H_λ mediante:

$$H_\lambda = -iH'_\lambda = -iF^{-1}S_\lambda F.$$

Entonces

$$H_\lambda = -iF^{-1}V_{-\lambda}SV_\lambda F = F^{-1}V_{-\lambda}FHF^{-1}V_\lambda F = U_\lambda^{-1}HU_\lambda,$$

Es decir que como operador integral a valores principales se tendría:

$$H_\lambda \varphi(x) = \frac{e^{-i\lambda x}}{\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda t} \varphi(t)}{t-x} dt$$

de modo que si $\psi(x)$ es autofunción de H , $e^{-i\lambda x}\psi(x)$ lo es de H_λ perteneciendo al mismo autovalor.

La descomposición de H_λ en proyecciones puede obtenerse definiendo N_λ y N'_λ mediante cualquiera de estas dos fórmulas:

$$N_\lambda = F^{-1}P_\lambda F; \quad N_\lambda = U_\lambda^{-1}NU_\lambda$$

y análogamente para N'_λ .

Entonces los dos grupos unitarios tienen las siguientes expresiones:

$$U_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda \nu} dP'_\nu; \quad V_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda \nu} dN'_\nu$$

y también es fácil verificar que:

$$-iD = \frac{d}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dN_\lambda = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dH_\lambda.$$

4) La relación entre la transformación de Hilbert y las funciones analíticas en un semiplano está dada por el siguiente teorema (ver [5] teor. 95): «Son condiciones equivalentes, a):

$F\varphi(x)=0$ para $x>0$ y b): $\varphi(x)=\lim_{y\rightarrow 0}\varphi(x+iy)$, donde $\varphi(x+iy)$ es analítica en el semiplano $y>0$, y tal que $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x+iy)|^2 dx = 0$ (1) para todo y .

Existe un teorema análogo (ver [5] teor. 96) cuando $F\varphi(x)=0$ para $x>\lambda$, exigiéndose entonces $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x+iy)|^2 dx = 0$ ($e^{2\lambda y}$).

Mostraremos la estrecha relación que hay entre ambos teoremas.

$F\varphi(x)=0$ para $x>\lambda$ significa que $F\varphi(x)$ es autofunción de S_λ ; por lo tanto $\varphi(x)$ es autofunción de H_λ y $e^{i\lambda x}\varphi(x)$ lo es de H . Pero entonces $F[e^{i\lambda x}\varphi(x)]=0$ para $x>0$, y por el primer teorema:

$$0 \text{ (1)} = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\lambda(x+iy)}\varphi(x+iy)|^2 dx = e^{-2\lambda y} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x+iy)|^2 dx.$$

De la misma manera podría haberse demostrado el primer teorema a partir del segundo.

5) La misma propiedad de H_λ puede aplicarse a la caracterización de la transformada de Fourier de un «paquete de ondas». En Mecánica Cuántica, por ejemplo, se tiene un espacio de impulsos que es el transformado unitario según F del espacio de las coordenadas o de configuración del sistema (suponemos $\hbar=2\pi$). Como los valores posibles del impulso están siempre acotados (pues la energía total disponible es finita), las funciones de onda en el espacio de impulsos deben anularse fuera de un cierto recinto. Limitándonos a un solo grado de libertad y recintos simétricos con respecto al origen tendríamos: $\psi(p)=0$ para $|p|>\lambda>0$. Pasando al espacio de configuración: $\varphi(q)=F^{-1}\psi(p)$ y por lo tanto $\varphi(q)$ es autofunción de H_λ y $H_{-\lambda}$, o sea $e^{\pm i\lambda q}\varphi(q)$ autofunciones de H para los autovalores $\pm i$, respectivamente

$$H[e^{i\lambda q}\varphi(q)] = ie^{i\lambda q}\varphi(q)$$

$$H[e^{-i\lambda q}\varphi(q)] = -ie^{-i\lambda q}\varphi(q).$$

Sumando y restando obtenemos como condiciones necesarias

y suficientes para que una función $\varphi(q)$ sea la transformada de un paquete de ondas:

$$\begin{cases} H[\varphi(q) \cos \lambda q] = -\varphi(q) \sin \lambda q \\ H[\varphi(q) \sin \lambda q] = \varphi(q) \cos \lambda q. \end{cases}$$

Nótese que cualquiera de ellas implica la otra.

Es también inmediato que las mismas condiciones deben ser satisfechas por las partes real e imaginaria de $\varphi(q)$. Ahora bien; sean $f(q)$ y $g(q)$ dos funciones de L^2 ; se verifica:

$$\left. \begin{aligned} FHf &= -iSf \\ FHg &= -iSg \end{aligned} \right\} \therefore FHf \cdot \overline{FHg} = Sf \cdot \overline{Sg} = Ff \cdot \overline{Fg}$$

y aplicando la fórmula de Parseval se obtiene (ver [5] teor. 102):

$$\int_{-\infty}^{\infty} Hf(q) \cdot \overline{Hg(q)} dq = \int_{-\infty}^{\infty} f(q) \cdot \overline{g(q)} dq.$$

Este resultado aplicado a nuestras funciones $e^{\pm i\lambda q} \varphi(q)$ nos permite deducir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(q)|^2 e^{2i\lambda q} dq = - \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(q)|^2 e^{2i\lambda q} dq$$

o sea:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(q)|^2 e^{2i\lambda q} dq = 0$$

es condición necesaria para que $\varphi(q)$ sea la transformada F de un paquete de ondas contenido en el intervalo $(-\lambda, \lambda)$.

Recordando el teorema de la convolución:

$$\begin{aligned} F|\varphi(q)|^2 &= F[F^{-1}\psi(p) \cdot \overline{F^{-1}\psi(p)}] = F[F^{-1}\psi(p) \cdot F^{-1}\overline{\psi(-p)}] \\ &= \psi(p) * \overline{\psi(-p)} \end{aligned}$$

nuestra condición significa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(p)} \cdot \psi(p+2\lambda) dp = 0$$

que por supuesto es necesaria pero no suficiente para que $\psi(p)$ sea un paquete de ondas. (Podrían ser, por ejemplo, varios paquetes de longitud menor que 2λ separados por intervalos de longitud mayor que 2λ).

Si consideramos paquetes contenidos en un intervalo (a, b) cualquiera en lugar del simétrico $(-\lambda, \lambda)$, obtendremos como condiciones:

$$H[(e^{iaq} + e^{ibq}) \varphi(q)] = i(e^{ibq} - e^{iaq}) \varphi(q)$$

o

$$H[(e^{ibq} - e^{iaq}) \varphi(q)] = i(e^{ibq} + e^{iaq}) \varphi(q).$$

Compárese por ejemplo con [2].

Ejemplo: Sea $\psi(p) = \begin{cases} \sqrt{2\pi} & \text{para } |p| < \lambda \\ 0 & \text{para } |p| > \lambda. \end{cases}$ Entonces $F^{-1}\psi(p) =$

$\frac{2 \operatorname{sen} \lambda q}{q}$ y debe cumplirse: $H \left[\frac{2 \operatorname{sen}^2 \lambda q}{q} \right] = -\frac{\operatorname{sen} 2\lambda q}{q}$, lo cual en efecto ocurre como puede verificarse derivando con respecto al parámetro λ con lo que se obtiene la conocida relación:

$$H \cos 2\lambda q = -\operatorname{sen} 2\lambda q$$

(ver [5], pág. 121).

V. - Nuevas generalizaciones.

1) Como el operador de Fourier se aplica en espacios muy generales y el operador signo siempre es fácil de definir, podremos generalizar mucho el operador de Hilbert.

Sea G un grupo topológico conmutativo, localmente compacto, en el cual se ha definido una medida de Haar. Consideremos las funciones complejas $\varphi(x)$ en él definidas y de cuadrado del módulo integrable según dicha medida.

Sean $\psi(x)$ las funciones análogas en el grupo C de caracteres

de G . La transformación de Fourier establece una correspondencia biunívoca entre ambos conjuntos de funciones.

Separaremos los elementos de G o C en dos subconjuntos, A y $\bar{A}$ (su complementario), de igual medida si la medida total es finita, o ambos de medida infinita en caso contrario. Parece útil restringir las posibilidades exigiendo que, si $x \in \bar{A}$, $x^{-1} \cdot \lambda \in A$, siendo λ un elemento fijo.

Definamos ahora un operador signo del siguiente modo:

$$Sf(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ -f(x) & \text{si } x \in \bar{A}. \end{cases}$$

Entonces el operador de Hilbert será:

$$H = -iF^{-1}SF.$$

Es decir, si se parte de G , se pasa al grupo de caracteres mediante la transformación de Fourier, allí se aplica el operador signo y se vuelve a G por la transformación de Fourier inversa.

Por lo tanto las propiedades de un operador de Hilbert dependen exclusivamente de las de un operador signo (y por supuesto de las de F). Los argumentos de las funciones para las cuales está definido el uno pertenecen al grupo de los caracteres del grupo topológico al que pertenecen los argumentos de las funciones para las cuales se define el otro.

Como hay mucha libertad para definir el operador signo puede obtenerse una gran variedad de transformaciones de Hilbert, todas las cuales poseen las propiedades 3) y 4) de III, que son las básicas.

2) Como ejemplo sencillo, sea G los números reales módulo 2π ; C estará formado entonces por los enteros. Como medida, para G la de Lebesgue; C es discreto. En G consideramos las funciones de $L^2(-\pi, \pi)$ y en C los vectores $\{a_n\}$ de norma finita: $\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$.

De G a C se pasa mediante la transformación de Fourier:

$$F\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) e^{-inx} dx \quad (n \text{ entero})$$

y de C a G mediante:

$$F^{-1}\{a_n\} = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}.$$

El operador signo se define en ambos espacios:

$$\text{en } C: S\{a_n\} = \begin{cases} \{a_n\} & \text{para } n > 0 \\ 0 & \text{para } n = 0 \\ -\{a_n\} & \text{para } n < 0 \end{cases}$$

(y es sabido que $-ia_n \text{sign}(n)$ dá los coeficientes de la serie conjugada de $\{a_n\}$)

y en G :

$$S\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{para } 0 < x \leq \pi \\ -\varphi(x) & \text{para } -\pi \leq x < 0. \end{cases}$$

El operador de Hilbert será: $H = -iF^{-1}SF$ en G , y $H = -iFSF^{-1}$ en C . Es decir, en G :

$$\begin{aligned} H\varphi(x) &= \frac{-i}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{inx} S \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) e^{-int} dt = \frac{-i}{\pi} \left\{ \sum_1^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) e^{in(x-t)} dt - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{-\infty}^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) e^{in(x-t)} dt \right\} = \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \text{sen } n(x-t) dt \end{aligned}$$

y ya es sabido en qué condiciones esto representa la función conjugada:

$$-\frac{1}{2\pi} \oint_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\text{tg} \frac{t-x}{2}} dt.$$

A la inversa, en C :

$$H\{a_n\} = \frac{-i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} S \sum_{-\infty}^{\infty} e^{imt} a_m dt = \frac{-i}{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \sum e^{i(m-n)t} a_m dt - \right.$$

$$\left. - \int_{-\pi}^0 \sum e^{it(m-n)} a_m dt \right\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} a_m \sin t(m-n) dt.$$

y suponiendo que puede cambiarse el orden de los pasos al límite obtenemos:

$$H\{a_m\} = \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{a_m}{m-n} [(-1)^{m-n} - 1].$$

fórmula semejante a la del caso continuo salvo un factor que anula la mitad de los sumandos y que aparece porque el límite superior de integración es finito y no hay una suma Césaro que elimine la parte oscilatoria.

3) Transformación de Hilbert en dos dimensiones. Como segundo ejemplo tomaremos el plano, que coincide con sus caracteres. Definimos:

$$F\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi(t, s) e^{i(tx+sy)} dt ds.$$

Definiremos al operador signo con respecto a la recta $ax+by=0$, que limita dos semiplanos: $A(ax+by < 0)$ y $B(ax+by > 0)$.

$$S\varphi(x, y) = \begin{cases} \varphi(x, y) & \text{cuando } (x, y) \in B \\ -\varphi(x, y) & \text{cuando } (x, y) \in A. \end{cases}$$

El operador de Hilbert será:

$$\begin{aligned} {}^2H\varphi(x, y) &= -iF^{-1}SF\varphi(x, y) = \frac{-i}{4\pi^2} \\ &= \frac{-i}{4\pi^2} \left\{ \iint_B - \iint_A \right\} e^{-i(tx+sy)} \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi(u, v) e^{i(tu+vs)} du dv dt ds = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \iint_B dt ds \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi(u, v) \sin [t(u-x) + s(v-y)] du dv. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \iint_B \sin [t(u-x) + s(v-y)] dt ds &= \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{\frac{b}{a}s}^{\infty} \sin [t(u-x) + s(v-y)] dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos s[v-y-\frac{b}{a}(u-x)]}{u-x} ds \end{aligned}$$

(habiendo hecho la suma Césaro de la integral sobre t); obtendremos, suponiendo que puede cambiarse el orden de integración, lo que no reduce esencialmente el dominio de nuestras funciones:

$${}^2H\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} ds \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(u, v) \cos s[v-y-\frac{b}{a}(u-x)]}{u-x} du dv$$

y sumando las integrales sobre v y s :

$${}^2H\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(u, y + \frac{b}{a}(u-x))}{u-x} du$$

y del mismo modo se obtiene la fórmula simétrica:

$${}^2H\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x + \frac{a}{b}(v-y), v)}{v-y} dv.$$

Como se ve, para a , o $b=0$ estas fórmulas se reducen a la de una variable.

Como ejemplo tomemos $a=b=1$; $\varphi(x, y) = ye^{-\frac{x^2}{2}}$

$${}^2H[ye^{-\frac{x^2}{2}}] = \frac{1}{\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{(u+y-x)e^{-\frac{u^2}{2}}}{u-x} du = -2 + 2y\rho(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

donde $\rho(x) = \int_0^x e^{t^{1/2}} dt$.

Considerando a y como parámetro y aplicando la transformación de una variable obtendríamos en cambio:

$$H[ye^{-\frac{x^2}{2}}] = yH[e^{-\frac{x^2}{2}}] = 2y\rho(x)e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

(Las integrales aquí utilizadas pertenecen a la tabla de transformadas de Hilbert que se está compilando en el Instituto de Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires).

Para $a=b=1$ la transformación en dos variables puede escribirse en la forma simétrica:

$${}_2H\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(u-y, u-x)}{u-(x+y)} du.$$

4) Si $\sum_{m,n} c_{m,n} e^{i(mx+ny)}$ es una serie de Fourier doble, pueden definirse infinitas series conjugadas cuyos coeficientes estarían dados por:

$$c_{m,n}^* = -i c_{m,n} \operatorname{sign}(am+bn)$$

(a y b números reales).

BIBLIOGRAFIA

- [1] GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. Comunicación presentada en la XIª reunión de la A. F. A., 1948.
- [2] HARDY, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 37-331-1941.
- [3] HILLE. *Comp. Math.* 6-93-1939.
- [4] v. NEUMANN, *Act. Sci. et Ind.* N° 229. 1935.
- [5] TITCHMARSH, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*. Oxford, 1937.
- [6] TRICOMI, *Comm. Math. Helv.* 8-70-1935.

SOBRE LA VARIACION DE FUNCIONES DISCONTINUAS Y MULTIFORMES DE UNA VARIABLE REAL

por M. COTLAR y E. ROXIN

Se trata el problema de hallar una fórmula para expresar la variación de una función discontinua de una variable, análoga a la que Banach dió para funciones continuas. En el caso de ser $y=f(x)$ continua la fórmula de Banach establece que la variación

total de $f(x)$ vale $V = \int_{-\infty}^{+\infty} N(y) dy$, siendo $N(y_0)$ el número de so-

luciones de la ecuación $f(x) = y_0$. En lo que sigue se establece que para funciones discontinuas la variación total se obtiene sumando a la integral análoga otro término, que es la suma de las oscilaciones de $f(x)$ en todos sus puntos de discontinuidad; los resultados se extienden al caso de una función $f(x)$ multiforme.

1. - *Los conjuntos $f[x]$, $f[J]$ y la función asociada.* Sea $y=f(x)$ una función real de la variable real x , uniforme o no. En el caso de ser $f(x)$ multiforme la notación $y_0=f(x_0)$ expresa que el número y_0 es una de las determinaciones de $f(x_0)$, es decir uno de los valores que $f(x)$ hace corresponder a x_0 . Designaremos con $f[x_0]$ al conjunto de estos posibles valores $f(x_0)$ y con $|f[x_0]|$ su medida, en caso de ser medible. Más general, si E es un conjunto lineal indicaremos con $f[E]$ el conjunto de los valores $f(x)$, donde $x \in E$ y con $|f[E]|$ su medida. $\text{Sup. } f[E]$ ($\text{inf. } f[E]$) designará el extremo superior (inferior) del conjunto $f[E]$, y en particular usaremos la notación $\text{sup. } f[x_0]$ ($\text{inf. } f[x_0]$). Finalmente designaremos con $J_\epsilon(x_0)$, $\epsilon > 0$, un entorno de centro x_0 y radio ϵ .

A la función $f(x)$ dada le hacemos corresponder otra $\varphi(x)$ definida de la siguiente manera: para que sea $y_0=\varphi(x_0)$ es necesario y suficiente que para todo $\epsilon > 0$ se verifique $\text{inf. } f[J_\epsilon(x_0)] \leq y_0 \leq \text{sup. } f[J_\epsilon(x_0)]$.

Diremos que $\varphi(x)$ es la función asociada de $f(x)$. $\varphi(x)$ es en general multiforme, aún en el caso de que $f(x)$ sea uniforme.

De la definición de $\varphi(x)$ se deduce inmediatamente:

- a) Si $y_0 = f(x_0)$, es también $y_0 = \varphi(x_0)$, es decir $y_0 \in f[x_0]$ implica $y_0 \in \varphi[x_0]$.
- b) Si $y_0 \neq \varphi(x_0)$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que el conjunto $f[J_\varepsilon(x_0)]$ cae totalmente a la derecha o a la izquierda de y_0 .

2. - *Teorema: Toda $\varphi(x)$ asociada de una $f(x)$ es darbourxiana.*

Esto significa: si $y_1 = \varphi(x_1)$, $y_2 = \varphi(x_2)$, existe, para todo y_0 comprendido entre y_1 e y_2 , un x_0 comprendido entre x_1 y x_2 tal que $y_0 = \varphi(x_0)$, no excluyéndose el caso límite $x_1 = x_2 = x_0$.

Demostración: Consideremos primero el caso $x_1 \neq x_2$. Suponiendo lo contrario a la tesis, a todo x del intervalo $[x_1; x_2]$ corresponderá un entorno $J_\varepsilon(x)$ tal que $f[J_\varepsilon(x)]$ cae de un solo lado de y_0 . Como los entornos $J(x)$ cubren el intervalo $[x_1; x_2]$, existe un número finito de ellos, correspondientes a un número finito de puntos $x^{(i)}$ tal que en la sucesión finita $f[J(x_1)]$, $f[J(x^{(1)})]$, $f[J(x^{(2)})]$, $f[J(x^{(3)})]$, ..., $f[J(x_2)]$, cada dos conjuntos consecutivos tienen por lo menos un punto común, de donde se deduce que los conjuntos extremos $f[J(x_1)]$ y $f[J(x_2)]$ deben caer de un mismo lado de y_0 , contrariamente a la hipótesis de que y_0 está comprendido entre y_1 e y_2 . En el caso de ser $x_1 = x_2$, será $y_1 = \varphi(x_1)$; $y_2 = \varphi(x_1)$, luego

$$\inf. f[J_\varepsilon(x_1)] \leq y_i \leq \sup. f[J_\varepsilon(x_1)]$$

para todo ε , para $i=1,2$ y por lo tanto también para $i=0$, pues y_0 está comprendido entre y_1 e y_2 . Según la definición de función asociada resulta pues $y_0 = \varphi(x_1)$.

3. - *Oscilación en intervalos y puntos.* Para todo intervalo J , sea abierto, cerrado o semiabierto (con un extremo, pero sin el otro), el número $\omega_f(J) = \sup. f[J] - \inf. f[J]$ recibirá el nombre de oscilación de $f(x)$ en J .

En el caso de un punto x_0 definimos:

$$M_f(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup. f[J_\varepsilon(x_0)], \quad m_f(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf. f[J_\varepsilon(x_0)]$$

y la diferencia $M_f(x_0) - m_f(x_0) = \omega_f(x_0)$ recibirá el nombre de oscilación de la función $f(x)$ en el punto x_0 .

4. - Teorema: Si $\varphi(x)$ es la asociada de $f(x)$ se tiene

- a) $M_f(x_0) = M_\varphi(x_0) = \sup. \varphi[x_0] = \varphi(x_0);$
 $m_f(x_0) = m_\varphi(x_0) = \inf. \varphi[x_0] = \varphi(x_0);$
 $\omega_f(x_0) = \omega_\varphi(x_0) = |\varphi[x_0]|.$
- b) Si J es un intervalo abierto es $\sup. f[J] = \sup. \varphi[J]; \inf. f[J] = \inf. \varphi[J]; \omega_f(J) = \omega_\varphi(J).$ Pero si J no es abierto sólo se puede asegurar que $\sup. f[J] \leq \sup. \varphi[J]; \inf. f[J] \geq \inf. \varphi[J]; \omega_f(J) \leq \omega_\varphi(J).$
- c) Para cualquier intervalo J , cerrado, abierto o semiabierto, que también puede reducirse a un punto, es $\varphi[J]$ otro intervalo que es cerrado (puede ser un punto) cuya medida es $|\varphi[J]| = \omega_\varphi(J).$

Demostración: Como toda determinación de $f(x)$ es también una determinación de $\varphi(x)$ resulta $\sup. f[J_\varepsilon(x_0)] \leq \sup. \varphi[J_\varepsilon(x_0)]; \inf. f[J_\varepsilon(x_0)] \geq \inf. \varphi[J_\varepsilon(x_0)].$ Por otra parte, como para todo x existe un x' infinitamente próximo tal que $f(x') \geq \varphi(x) - \delta$ para cualquier $\delta > 0$, debe ser $\sup. \varphi[J_\varepsilon(x_0)] \leq \sup. f[J_\varepsilon(x_0)]$ y se concluye que $M_f(x_0) = M_\varphi(x_0)$ y análogamente $m_f(x_0) = m_\varphi(x_0)$. Además, para todo $\varepsilon > 0$ es $\inf. f[J_\varepsilon(x_0)] \leq M_f(x_0) \leq \sup. f[J_\varepsilon(x_0)]$, luego, por definición de función asociada, resulta que $M_f(x_0) = M_\varphi(x_0)$ es un valor de $\varphi(x_0)$, y evidentemente debe ser $M_f(x_0) = M_\varphi(x_0) = \sup. \varphi[x_0]$. Análogamente será $\inf. \varphi[x_0] = m_\varphi(x_0) = m_f(x_0)$. Como $\varphi(x)$ es darboxiana resulta $\omega_\varphi(x_0) = \sup. \varphi[x_0] - \inf. \varphi[x_0] = |\varphi(x_0)|$, lo que prueba la parte a) de la tesis. Si J es un intervalo abierto, existe para todo $\varepsilon > 0$ un par de puntos x_1, x_2 interiores a J tales que $\varphi(x_1) > \sup. \varphi[J] - \varepsilon, \varphi(x_2) < \inf. \varphi[J] + \varepsilon$. Por definición de $\varphi(x)$ existen x', x'' infinitamente próximos a x_1, x_2 , respectivamente, y por lo tanto también interiores a J , tales que $f(x') > \varphi(x_1) - \delta, f(x'') < \varphi(x_2) + \delta$; de esto se deduce que $\sup. f[J] \geq \sup. \varphi[J], \inf. f[J] \leq \inf. \varphi[J]$. Por otra parte, como todo valor de $f(x)$ es también un valor de $\varphi(x)$, tienen lugar las desigualdades de signo opuesto, quedando demostrada la parte b) de la tesis. El resto es consecuencia de la propiedad darboxiana de $\varphi(x)$.

5. - Corolario. La oscilación $\omega_\varphi(J)$ es subaditiva en J . Más precisamente: si $J = J_1 + J_2$, donde J, J_1, J_2 son intervalos abier-

tos, cerrados o semiabiertos, pudiendo alguno reducirse a un punto, se verifica $\omega_{\varphi}(J) \leq \omega_{\varphi}(J_1) + \omega_{\varphi}(J_2)$. Demostración: Es consecuencia inmediata del punto c) del teorema anterior y del hecho que el conjunto $\varphi[J]$ está contenido en el conjunto suma $\varphi[J_1] + \varphi[J_2]$.

6.- *Definición de variación total.* Llamaremos *conjunto-J* a todo intervalo abierto, cerrado o semiabierto y también a un solo punto, es decir a todo conjunto lineal que tenga la propiedad, que si $x_1 \leq x \leq x_2$, $x_1 \in J$, $x_2 \in J$ implica $x \in J$. Entenderemos por subdivisión estricta $\sigma(J) = \{J_1, \dots, J_n\}$ de J a toda descomposición de la forma $J = J_1 + \dots + J_n$, donde los J_i son conjuntos-J sin puntos comunes dos a dos; por lo tanto los componentes J_i de la subdivisión $\sigma(J)$ pueden ser puntos o intervalos cualesquiera, con tal de que cada punto de J pertenezca a uno y sólo uno de ellos.

Para cada subdivisión $\sigma(J) = \{J_1, \dots, J_n\}$ pondremos

$$\sum_{\sigma(J)} \omega_f(J_i) = \omega_f(J_1) + \dots + \omega_f(J_n)$$

y definimos la *variación total de $f(x)$ en J* como el número $V_f(J)$ = extremo superior de las sumas $\sum_{\sigma(J)} \omega_f(J_i)$ correspondientes a las

posibles subdivisiones estrictas $\sigma = \sigma(J)$. En caso de ser $f(x)$ uniforme y continua nuestra definición coincide con la ordinaria, en la que se toman subdivisiones no estrictas, o sea de componentes no-rampantes. Pero en el caso de funciones uniformes discontinuas se llega a resultados distintos, según se adopten subdivisiones estrictas o no estrictas. Por ejemplo: tomemos la función definida en el intervalo $[0; 2]$ de la siguiente manera: $f(x) = 1$ para $x = 1$; $f(x) = 0$, para $x \neq 1$; la variación total resulta ser 1 con subdivisiones estrictas, pero 2 con subdivisiones no estrictas.

Observemos que en caso de ser J un punto resulta $V_{\varphi}(J) = \omega_f(J) = \omega_{\varphi}(J)$.

7.- *Teorema.* Si $\varphi(x)$ es la asociada de $f(x)$ es $V_f(J) = V_{\varphi}(J)$. *Demostración.* Como evidentemente para toda subdivisión estricta $\sigma = \sigma(J)$ es $\sum_{\sigma} \omega_{\varphi}(J_i) \geq \sum_{\sigma} \omega_f(J_i)$ por ser $\omega_{\varphi}(J_i) \geq \omega_f(J_i)$ (ver teorema 4), es también $V_{\varphi}(J) \geq V_f(J)$. Probaremos que también es cierta la desigualdad contraria. A cada subdivisión estricta $\sigma(J) =$

$\{J_1, \dots, J_n\}$ le asociamos otra σ' definida así: los J_i que sean intervalos abiertos o puntos los dejamos invariables, en cambio los que sean intervalos semiabiertos o cerrados los sustituimos por sumas de intervalos abiertos y puntos, de tal manera que los componentes de σ' son o intervalos abiertos o puntos. Por otra parte es σ' un refinamiento de σ , es decir, todo componente de σ es suma de componentes de σ' . De lo primero resulta, según el teorema 4,

$$\sum_{\sigma'} \omega_f(J_i) = \sum_{\sigma} \omega_{\varphi}(J_i),$$

puesto que los J_i de σ' son intervalos abiertos o puntos, siendo, por lo tanto, iguales las oscilaciones de $f(x)$ y $\varphi(x)$ en ellos. De lo último, en cambio, resulta por la propiedad subaditiva de $\omega_{\varphi}(J)$

$$\sum_{\sigma'} \omega_{\varphi}(J_i) \geq \sum_{\sigma} \omega_{\varphi}(J_i).$$

Por lo tanto, para toda σ hemos encontrado una σ' tal que

$$\sum_{\sigma'} \omega_f(J_i) \geq \sum_{\sigma} \omega_{\varphi}(J_i),$$

de donde resulta que $V_f(J) \geq V_{\varphi}(J)$, quedando demostrado el teorema.

8. - Las funciones $L(y, J)$ y $N(y, J)$. Siguiendo a Banach pondremos para cada conjunto J y para cada valor y_0 :

$L_f(y, J)$ = función característica del conjunto $f[J]$;

$N_f(y_0, J)$ = número de puntos $x \in J$ tales que $y_0 = f(x)$.

Evidentemente $N_f(y, J) \geq L_f(y, J)$. Además es $N_f(y_0, J)$ aditiva en J y $L_f(y_0, J)$ subaditiva, es decir $J = J_1 + J_2$; $J_1 \cdot J_2 = 0$ implica $N_f(y_0, J) = N_f(y_0, J_1) + N_f(y_0, J_2)$;

$$L_f(y_0, J) \leq L_f(y_0, J_1) + L_f(y_0, J_2).$$

9. - Teorema. Si $\varphi(x)$ es asociada de $f(x)$ se tiene:

a) $L_{\varphi}(y, J)$ es función medible de y cuya integral entre $-\infty$ y $+\infty$ vale $\omega_{\varphi}(J)$.

b) $N_{\varphi}(y, J)$ es función medible de y , siendo $N_{\varphi}(y, J) = \text{ex-}$

tremo superior de $\sum_{\sigma} L_{\varphi}(\gamma, J)$ para las posibles σ estrictas de J .

- e) Si σ_n es una sucesión monótona de subdivisiones estrictas (es decir tal que cada subdivisión es un refinamiento de la precedente) de J , cuya norma (=longitud del intervalo máximo de una subdivisión) tiende a 0 cuando n tiende a ∞ , se verifica:

$$\sum_{\sigma_n(J)} L_{\varphi}(\gamma_0, J_i) \uparrow N_{\varphi}(\gamma_0, J)$$

indicando la flecha ascendente que el primer miembro tiende al segundo en forma creciente.

Demostración: a) Es consecuencia de ser darboxiana la $\varphi(x)$, razón por la cual es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_{\varphi}(\gamma, J) d\gamma = |\varphi[J]| = \omega_{\varphi}(J)$$

también en el caso de que J sea un punto.

Sabemos por una parte que si $\sum_{\sigma_n(J)} L_{\varphi}(\gamma_0, J_i) = k$, será $N_{\varphi}(\gamma_0, J) \geq k$, pues en k conjuntos J_i hay algún x tal que $\varphi(x) = \gamma_0$, y estos J_i no tienen puntos comunes dos a dos. Demostraremos ahora que, siendo σ_n la sucesión de subdivisiones estrictas de la parte c), si $N_{\varphi}(\gamma_0, J) \geq k$ es posible encontrar un n_0 tal que para todo $n > n_0$ se verifica

$$\sum_{\sigma_n(J)} L_{\varphi}(\gamma_0, J_i) \geq k.$$

En efecto, $N_{\varphi}(\gamma_0, J) \geq k$ significa que existen en J por lo menos k puntos x_i que verifican la ecuación $\varphi(x_i) = \gamma_0$. Basta pues tomar la norma de la subdivisión σ_n suficientemente pequeña para que cada dos x_i pertenezcan a conjuntos J_i distintos, de modo que $L_{\varphi}(\gamma_0, J_i)$ valga la unidad en k conjuntos J_i distintos.

De modo que la $\sum_{\sigma_n} L_{\varphi}(\gamma_0, J_i)$ es una función creciente de n (por ser subaditiva la oscilación respecto del intervalo) que nunca supera la cota $N_{\varphi}(\gamma_0, J)$, pero por otra parte supera a cualquier número superado por esta última, que por lo tanto es su límite

para $n \rightarrow \infty$. Como este límite es a la vez extremo superior de todos los términos $\sum_{\sigma_n} L_{\varphi}(y_0, J_i)$, pero por otra parte no depende de la sucesión particular σ_n elegida, será a la vez el extremo superior de todas las posibles sumas

$$\sum_{\sigma(J)} L_{\varphi}(y_0, J_i).$$

10. - *Teorema.* Si $\varphi(x)$ es asociada de $f(x)$, se tiene para todo conjunto J :

$$V_{\varphi}(J) = \int_{-\infty}^{\infty} N_{\varphi}(y, J) dy.$$

Demostración. Hemos visto que con las condiciones del teorema anterior es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\sigma_n(J)} L_{\varphi}(y, J_i) = N_{\varphi}(y, J).$$

Como la expresión en el miembro izquierdo es una función creciente de n , podemos integrar permutando la integración con el paso al límite, resultando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\sigma_n(J)} \int_{-\infty}^{\infty} L_{\varphi}(y, J_i) dy = \int_{-\infty}^{\infty} N_{\varphi}(y, J) dy.$$

El primer miembro vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\sigma_n(J)} \int_{-\infty}^{\infty} L_{\varphi}(y, J_i) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\sigma_n(J)} \omega_{\varphi}(J_i).$$

Por lo tanto el $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\sigma_n(J)} \omega_{\varphi}(J_i)$ no depende de la sucesión σ_n elegida (siempre que cumpla las condiciones del teorema anterior), y como todas esas sucesiones dan sumas que crecen con n (por ser subaditiva la oscilación con respecto al intervalo) habrá alguna sucesión σ_n tal que

$$\sup_{\sigma} \sum \omega_{\varphi}(J_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\sigma_n(J)} \omega_{\varphi}(J_i).$$

Por lo tanto el primer miembro vale $V_{\omega}(J)$, quedando demostrado el teorema.

11. - *Los conjuntos C y D.* Diremos que $f(x)$ es continua en x_0 si $\omega_f(x_0)=0$, es decir si $M_f(x_0)=m_f(x_0)$. Designaremos con $C_f(J)$ el conjunto de los puntos de J en que $f(x)$ es continua y con $D_f(J)$ el conjunto $J - C_f(J)$. Del teorema 4 resulta que si $\varphi(x)$ es asociada de $f(x)$ es $C_f(J) = C_{\varphi}(J)$, podemos pues escribir $C(J) = C_f(J) = C_{\varphi}(J)$. Los conjuntos $C_{\varphi}(J)$ y $D_{\varphi}(J)$ son medibles por ser $\varphi(x)$ darboxiana. En un punto $x \in C(J)$ serán las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ uniformes e iguales, por lo tanto

$$N_f(y_0, C(J)) = N_{\varphi}(y_0, C(J)).$$

12. - *Generalización de la fórmula de Banach. Teorema.* Para toda función $f(x)$ se tiene

$$V_f(J) = \int_{-\infty}^{\infty} N_f(y, C(J)) dy + \sum_x \omega_f(x), \quad (I)$$

donde la sumatoria se extiende a todos los puntos $x \in J$. Si $f(x)$ es uniforme, resulta

$$V_f(J) = \int_{-\infty}^{\infty} N_f(y, J) dy + \sum_x \omega_f(x). \quad (II)$$

Demostración. Si los x_n en que $\omega_f(x_n) > 0$ no son numerables ambos miembros de (I) son ∞ . Luego basta suponer que $\{x_n\} = D(J)$ es numerable.

Por lo visto más arriba es

$$\begin{aligned} V_f(J) &= V_{\varphi}(J) = \int_{-\infty}^{\infty} N_{\varphi}(y, J) dy = \int_{-\infty}^{\infty} N_{\varphi}(y, C(J)) dy + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} N_{\varphi}(y, D(J)) dy = \int_{-\infty}^{\infty} N_f(y, C(J)) dy + \int_{-\infty}^{\infty} N_{\varphi}(y, D(J)) dy. \end{aligned}$$

Para probar (I) basta demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_{\varphi}(y, D(J)) dy = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_f(x_n) \quad \{x_n\} = D(J).$$

En virtud de lo visto en (9) es

$$N_{\omega}(y, D(J)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n L_{\omega}(y, x_i).$$

Como la $\sum_{i=1}^n L_{\omega}(y, x_i)$ es función de y creciente con n , podemos escribir

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} N_{\omega}(y, D(J)) dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} L_{\omega}(y, x_i) dy = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \omega_{\omega}(x_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \omega_f(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_f(x_i) \end{aligned}$$

quedando probado (I). Si $f(x)$ es uniforme y $D(J)$ numerable será $f[D(J)]$ numerable, luego para todo y , salvo un conjunto numerable, será $N_f(y, C(J)) = N_f(y, J)$ de modo que la integral que figura en (I) puede reemplazarse por la de (II) y queda probado el teorema.

CRONICA

EL JUBILEO DE MAURICE FRÉCHET

Con motivo del jubileo del matemático francés Maurice Fréchet (n. en 1878) la Unión Matemática Argentina ha resuelto adherir al homenaje que el mundo científico rinde al eminente creador de la teoría de los espacios abstractos que hoy domina a la matemática toda.

Con ese objeto y por voluntad expresa de Fréchet, la Société Mathématique de France creará uno o dos premios a otorgarse a comienzos de 1950 a trabajos originales de *Análisis general* (Teoría de espacios abstractos, transformaciones de elementos abstractos entre sí) y sus aplicaciones. Se admitirán trabajos en lengua extranjera con resumen en francés.

La Unión Matemática Argentina confía en el aporte pecuniario de todos sus miembros para tan noble fin, habiendo sido encargada por la comisión especial formada por la sección de Geometría de la Academia de París, integrada para este objeto con algunos colegas de Fréchet de la Ecole Polytechnique, para efectuar la colecta en la Argentina y países limítrofes. Se ha fijado una cuota mínima de \$ 20, moneda argentina.

La lista de adherentes será publicada por la Société Mathématique de Francia, patrocinadora del merecido homenaje a una de las figuras máximas de la matemática del siglo XX.

UNION MATEMATICA ARGENTINA

COMUNICACIÓN

UN TEOREMA EQUIVALENTE AL DE ZORN (*) (1)

por Gregorio KLIMOVSKY

Diremos que una relación $<$ sobre un conjunto A es *arreflexiva* si para todo $a \in A$ se cumple $a \not< a$.

Diremos que a_0 es cota superior de un subconjunto A' de un conjunto ordenado ⁽²⁾ A si para todo $a' \in A'$ se tiene $a' < a_0$.

1) Si un conjunto A está ordenado por una relación $<$ arreflexiva y a_0 es cota superior de un subconjunto A' de A , entonces $a_0 \in A'$. En efecto, para todo $a' \in A'$ se tiene $a' < a_0$. Si $a_0 \in A'$ se tendría $a_0 < a_0$, lo que no es posible.

Consideremos el siguiente enunciado:

2) *No existen ordenaciones arreflexivas en las que toda sub-ordenación simple posea cota superior en el sistema.*

Para probar la equivalencia lógica de esta proposición con el teorema de Zorn demostraremos primero que

I) El teorema de Zorn implica la proposición 2).

Supongamos que exista un conjunto A ordenado por $<$, siendo esta relación arreflexiva y con la propiedad de que todo subconjunto simplemente ordenado posee cota superior en el sistema. Por el teorema de Zorn existe un subconjunto A' simplemente ordenado maximal (es decir, al que no se le puede adjuntar ningún elemento mayor o menor que todos los de A' sin que deje de ser simplemente ordenado). Por ser simplemente ordenado poseerá una cota superior a_0 en el sistema, y por 1) se tendrá $a_0 \in A'$, pues $<$ es arreflexiva. Luego A' puede ampliarse en A por adjunción de a_0 sin dejar de ser simplemente ordenado, lo que contradice su maximalidad. Por lo tanto A no existe y 2) queda demostrada.

Veamos ahora que

II) La proposición 2) implica al teorema de Zorn.

Como el teorema de Zorn es equivalente al postulado de buena ordenación, bastará demostrar que

II bis) La proposición 2) implica al postulado de buena ordenación.

Supongamos que exista un conjunto A que no puede bien ordenarse. Consideremos el agregado $E = \{E\alpha\}$ de todos los buenos ordenamientos $E\alpha$ definidos sobre subconjuntos de A (agregado que no es vacío pues al menos los puntos de A constituyen cada uno un conjunto bien-ordenado). Vamos a introducir en E un ordenamiento $<$ de la siguiente manera:

Diremos que $E\alpha < E\beta$ si a) $E\alpha$ es segmento de $E\beta$; b) Hay al menos un elemento de $E\beta$ que no lo es de $E\alpha$. La condición b) da carácter arreflexivo a la relación $<$.

Consideremos un sub-agregado E' de E que esté simplemente ordenado por $<$. Sea A' el subconjunto de A formado por todos los puntos que pertenezcan algún $E\alpha \in E'$; vamos a definir una relación R que permitirá bien-ordenar los puntos de A' .

Sean a y b dos elementos cualesquiera de A' . Si existe algún $E\gamma \in E'$ al

(*) Resumen de la comunicación presentada en la sesión de la U. M. A. del 22 de noviembre de 1947.

(1) Ver S. LEFSCHETZ, *Algebraic Topology*, Am. Math. Soc., 1942, pág. 5. El teorema de Zorn es lógicamente equivalente al postulado de Zermelo, de modo que en el presente trabajo enunciamos a éste en una nueva forma.

(2) Un conjunto se dirá *parcialmente ordenado* u *ordenado* si ciertos pares de elementos del mismo satisfacen alguna relación $<$ sujeta a la mera condición de transitividad. Diremos que es *simplemente ordenado* si además, para todo par a, b del mismo, se tiene $a < b$ ó $b < a$.

cual pertenezcan a y b , diremos que a posee la relación R con b si b sigue a a en E . Dado que E' está simplemente ordenado, E' existe siempre. Llamemos E_A' a la ordenación obtenida por R sobre A' ; es fácil ver que es una buena ordenación, debiendo por consiguiente pertenecer a E . E_A' no puede cubrir A (pues ello implicaría que A es bien ordenable), luego algún x de A no entra en E_A' . Definamos E_B' como la ordenación obtenida agregando x a E_A' , considerando a x posterior a todos los demás elementos. $E_B' \in E$ y sigue a todos los E' , siendo por lo tanto cota superior del agregado E' con respecto a la ordenación $<$.

De lo anterior se tiene que la ordenación $<$ definida sobre E goza de las siguientes propiedades:

a') es arreflexiva.

b') todo sub-ogregado simplemente ordenado de E posee cota superior en E .

Por consiguiente E contradice 2) y el conjunto A debe poder bien-ordenarse.

Las demostraciones I y II nos permiten concluir que el enunciado 2) es equivalente al del teorema de Zorn.

BIBLIOGRAFIA

LEOPOLDO NACHBIN, *Combinação de topologias pseudo-metrisaveis e metrisaveis*.
Notas de Matemática nº 1. Boffoni. Río de Janeiro, 1948.

Este es el primer fascículo de una serie mimeografiada, NOTAS DE MATEMÁTICA, que se publica en Río de Janeiro bajo la dirección de A. Monteiro. No es libro de exposición de alguna porción conocida de la Matemática, sino que tiene el carácter definido de memoria original corriente, aunque con abundancia de detalles como para que su lectura resulte clara y amena. Como el autor lo dice en el prefacio, lo esencial de este fascículo está contenido en una nota de los Comptes Rendus, París. Consiste en lo siguiente. Sea E un espacio abstracto arbitrario, P el sistema parcialmente ordenado de las topologías sobre E que pueden ser deducidas de alguna pseudométrica (topologías pseudometrizables), y M el sistema parcialmente ordenado de las topologías metrizables (aquí pseudométrica se distingue de la métrica común sólo porque dos puntos distintos pueden tener distancia nula, y la relación de "precede" en las ordenaciones está entendida como "con igual o menos conjuntos abiertos"). Si cuando Z es un conjunto de topologías sobre E ponemos $S(Z)$ o $I(Z)$ para los conjuntos de todos los supremos y, respectivamente, ínfimos de subconjuntos de Z (tanto supremo como ínfimo tomado en el *lattice* completo de todas las topologías sobre E), los resultados fundamentales de Nachbin se expresan: 1. $ISIS(P) = ISI(P)$ es el conjunto de todas las topologías sobre E ; 2. $SIS(M) = SI(M)$ es el conjunto de todas las topologías de Fréchet-Riesz (cada punto es un conjunto cerrado). En ambos casos el resultado no se puede mejorar. Además de estos teoremas de representación el autor da para cada clase que aparece, $S(P)$, $IS(P)$; etc., una caracterización en términos de las nociones fundamentales de una topología (conjunto abierto, punto de acumulación, etc.). Un ejemplo típico es el siguiente (que caracteriza a $IS(P)$): si un conjunto X de E no es abierto, o existe un punto de X y un punto de su complementario topológicamente equivalentes (idéntica clausura), o existe un punto de X tal que todo entorno de este punto contiene una infinidad de puntos del complementario.

R. A. RICABARRA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

La U. M. A. reconoce cuatro categorías de miembros: honorarios, protectores, titulares y adherentes. El miembro protector paga una cuota anual de 100 \$, por lo menos; el titular una cuota mensual de 5 \$ o anual de 50 \$; y el adherente una cuota anual de 10 \$. Los pagos deberán efectuarse por cheque, giro u otro medio libre de gastos, a la orden de la Tesorera, Prof. Clotilde A. Bula, Rioja 3681. Olivos F.C.M.

Por ser la U. M. A. miembro del patronato de la Mathematical Reviews (sponsoring member), los socios de la U. M. A. tienen derecho a suscribirse a esa importante revista de bibliografía y crítica con 50 % de rebaja sobre el precio de suscripción que es de 20 dólares por año. Los socios de la U. M. A. pagarán por tanto sólo 10 dólares por año.

Los autores de trabajos reciben gratuitamente una tirada aparte de 50 ejemplares. Las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

JUNTA DIRECTIVA

Presidente, Julio Rey Pastor, Yerbal 898, Buenos Aires.
Vicepresidentes, César A. Trejo, Félix E. Herrera. Secretario general, Máximo Valentinuzzi. Secretarios locales, O. A. Varsavsky (Bs. Aires), R. A. Ricabarra (La Plata), P. L. Checchi (Córdoba), E. Gaspar (Rosario), S. Fernández Long (Bahía Blanca), I. C. Guglielmone (Tucumán), S. Sispánov (San Juan). J. de Dios Olivieri (Santa Fe), M. Balanzat (San Luis), F. Toranzo (Mendoza). Tesorera, Clotilde A. Bula, Protesorera, María Josefina Erramuspe, Director de Publicaciones, J. Babini.

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

La A. F. A., asociación privada de investigadores, profesores y estudiantes de física y de astronomía, tiene por objeto fomentar el progreso de la enseñanza de dichas materias por medio de reuniones científicas periódicas y de la publicación de trabajos originales.

Podrán ingresar como socios activos quienes hayan efectuado investigaciones originales; pueden ser socios adherentes los profesores que no cumplan este requisito; y socios estudiantes los que hayan aprobado el primer año de estudios de física o de astronomía.

Las solicitudes de ingreso, que deberán llevar la firma de dos socios activos o adherentes, habrán de dirigirse al secretario local que corresponda. Los socios activos abonarán una cuota mensual de 6 \$, los adherentes de 4 \$ y los estudiantes de 2 \$. En estas cuotas están incluidas las suscripciones al órgano de la A. F. A. y a la revista "Ciencia e Investigación".

Los manuscritos destinados a la publicación deberán enviarse al delegado de la A. F. A. Mario Bunge, Instituto de Física, Perú 222, Bs. Aires; y la correspondencia administrativa deberá dirigirse al secretario local que corresponda o a la tesorera.

Para la redacción y presentación de los trabajos se agradecerá se tengan en cuenta las *Normas generales* distribuidas con esta revista en 1945.

COMISION DIRECTIVA

Presidente: Enrique Gaviola
Tesorera: Estrella Mazzoli de Mathov, San Juan 1931, Buenos Aires.
Secretarios locales: Ernesto E. Galloni, Buenos Aires, Yerbal 1763.
Fidel Alsina Fuertes, La Plata, calle 44 N° 717.
Guido Beck, Córdoba, Laprida 922.
José Würschmidt, Tucumán, Laprida 765.

Abonnement annuel à l'étranger: 4.00 dollars (Etats-Unis).

Prière d'adresser toute la correspondance scientifique et administrative à l'adresse ci-dessous:

SR. SECRETARIO DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

Dr. MÁXIMO VALENTINUZZI

Gascón 520, Buenos Aires (REP. ARGENTINA)

S U M A R I O

	Pág.
Deducción sencilla de la teoría del eiconal, por R. Gans	3
Nota sobre los valores límites de funciones analíticas, por A. P. Calderón, A. Ginzález Domínguez, A. Zygmund	16
Sobre la transformación de Hilbert, por O. A. Varsavsky	20
Sobre la variación de funciones discontinuas y multiformes de una variable real, por M. Cotlar y E. Roxin	38
Unión Matemática Argentina. <i>Comunicación</i> . Un teorema equiva- lente al de Zorn, por G. Klimovsky	47
<i>Crónica</i> . — El jubileo de Maurice Fréchet	46
<i>Bibliografía</i> . — L. Nachbin, Combinação de topologias sendo-me- trisaveis e metrisaveis (R. A. Ricabarra)	48

UNION MATEMATICA ARGENTINA

MIEMBROS HONORARIOS

Tulio Levi-Civita (†); Beppo Levi; Alejandro Terracini; George D. Birkhoff (†); Marshall H. Stone; Georges Valiron, Antoni Zygmund.

REPRESENTANTES EN EL EXTRANJERO

Ing. Rafael Laguardia (Uruguay). Ing. José Luis Massera (Uruguay).
Dr. Godofredo García (Perú). Dr. Leopoldo Nachbin (Brasil). Dr. Roberto Frucht (Chile). Dr. Peter Thullen (Ecuador). Dr. Mario González (Cuba).
Dr. Alfonso Nápoles Gandara (México). Pedro Puig (España). Georges Valiron (Francia). Alejandro Terracini (Italia).

Contribuyen especialmente al sostenimiento de las publicaciones de
la UNION MATEMATICA ARGENTINA los siguientes

MIEMBROS PROTECTORES

COMPAÑÍA INDUSTRIAL DEL NORTE DE SANTA FE. INGENIO AZUCARERO "ARNO"
(Villa Ocampo. F. C. S. F.). — JULIO REY PASTOR (Buenos Aires). — EMILIA
J. DE DOMÍNGUEZ (Buenos Aires). — TRICERRI HNOS. (Rosario). — CLOTIL-
DE A. BULA (Rosario). — ELBA R. RAIMONDI (Buenos Aires). — FERNAN-
DO L. GASPAR (Rosario).