Volumen XIV Número 2

# REVISTA

DE LA

# UNION MATEMATICA ARGENTINA

(MIEMBRO DEL PATRONATO DE LA MATHEMATICAL REVIEWS)

ORGANO DE LA

# ASOCIACION FISICA ARGENTINA



BUENOS AIRES
1949

# PUBLICACIONES DE LA U. M. A.

Vol. I (1936-1937), Vol. II (1938-1939), Vol. VII (1940-1941), Vol. VIII (1942), Vol. IX (1943), Vol. X (1944-1945), Vol. XI (1945-1946), Vol. XII (1946-1947), Vol. XIII (1948)

Notas y memorias de J. Babini, M. Balanzat, J. Balseiro, J. Barral Souto, A. Battig, G. Beck, C. Biggeri, G. Birkhoff, U. Broggi, C. A. Bula, M. Bunge, H. E. Calcagno, F. Cernuschi, A. W. Conway, E. Corominas, C. Crespo, E. A. de Cesare, J. de Cicco, J. A. del Peral, M. Fassina, J. Favet, E. Ferrari, V. y A. Fraile, Y. Frenkel, R. Frucht, E. Gaspar, E. Gaviola, A. González Domínguez, B. Gross, A. J. Guarnieri, H. Hadwiger, J. E. Herrera, E. Kasner, G. Knie, N. Krivoshein, T. Levi-Civita, W. Luyten, W. Mächler, J. L. Massera, L. Nachbin, G. Palamà, M. Petrovich, M. M. Peixotto, A. Petracca, P. A. Pizà, E. R. Raimondi, J. J. Rebella, J. Rey Pastor, S. Ríos, P. Rossell Soler, M. Sadosky, R. San Juan, L. A. Santaló, M. Schönberg, S. Sispanov, K. Sitte, A. Terracini, P. Thuillen, F. Toranzos, J. V. Uspensky, G. Valiron, E. Vidal Abascal, G. Wataghin, A. Wintner, J. Würschmidt.

Informes de las reuniones de la Asociación Física Argentina.

Soluciones de temas propuestos. Bibliografía, Crónica, etc.

Vol. III (1938-1939). Vol. IV (1939). Vol. V (1940). Vol. VI (1940-1942).

Fascículos separados

Nº 1. Gino Loria. *Le Matematiche in Ispagna e in Argentina.* — Nº 2. A. González Domínguez. *Sobre las series de funciones de Hermite.* — Nº 3. Michel Petrovich. *Remarques arithmétiques sur une équation differentielle du premier ordre.* — Nº 4. A. González Domínguez. *Una nueva demostración del teorema límite del Cálculo de Probabilidades. Condiciones necesarias y suficientes para que una función sea integral de Laplace.* — Nº 5. Nikola Obrechkoff. *Sur la sommation absolue par la transformation d'Euler des séries divergentes.* — Nº 6. Ricardo San Juan. *Derivación e integración de series asintóticas.* — Nº 7. Resolución adoptada por la U. M. A. en la cuestión promovida por el Sr. Carlos Biggeri. — Nº 8. F. Amodeo. *Origen y desarrollo de la Geometría Proyectiva.* — 9. Clotilde A. Bula. *Teoría y cálculo de los momentos dobles.* — Nº 10. Clotilde A. Bula. *Cálculo de superficies de frecuencia.* — Nº 11. R. Frucht. *Zur Geometria auf einer Fläche mit indefiniter Metrik (Sobre la Geometría de una superficie con métrica indefinida).* — Nº 12. A. González Domínguez. *Sobre una memoria del Prof. J. C. Vignaux.* — Nº 13. E. Toranzos. *Sobre las singularidades de las curvas de Jordan.* — Nº 14. M. Balanzat. *Fórmulas integrales de la intersección de conjuntos.* — Nº 15. G. Knie. *El problema de varios electrones en la mecánica cuantista.* — Nº 16. A. Terracini. *Sobre la existencia de superficies cuyas líneas principales son dadas.* — Nº 17. L. A. Santaló. *Valor medio del número de partes en que una figura convexa es dividida por n rectas arbitrarias.* — Nº 18. A. Wintner. *On the iteration of distribution functions in the calculus of probability (Sobre la iteración de funciones de distribución en el cálculo de probabilidades).* — Nº 19. E. Ferrari. *Sobre la paradoja de Bertrand.* — Nº 20. J. Babini. *Sobre algunas propiedades de las derivadas y ciertas primitivas de los polinomios de Legendre.* — Nº 21. R. San Juan. *Un algoritmo de sumación de series divergentes.* — Nº 22. A. Terracini. *Sobre algunos lugares geométricos.* — Nº 23. V. y A. Fraile y C. Crespo. *El lugar geométrico y lugares de puntos áreas en el plano.* — Nº 24. R. Frucht. *Coronas de grupos y sus subgrupos, con una aplicación a los determinantes.* — Nº 25. E. R. Raimondi. *Un problema de probabilidades geométricas sobre los conjuntos de triángulos.*

---

En 1942 la U. M. A. ha iniciado la publicación de una nueva serie de "Memorias y monografías" de las que han aparecido hasta ahora las siguientes:

Vol. I; Nº 1. — Guillermo Knie, *Mecánica ondulatoria en el espacio curvo.* Nº 2. — Guido Beck, *El espacio físico.* Nº 3. — Julio Rey Pastor, *Integrales parciales de las funciones de dos variables en intervalo infinito.* Nº 4. — Julio Rey Pastor, *Los últimos teoremas geométricos de Poincaré y sus aplicaciones.* Homenaje póstumo al Prof. G. D. Birkhoff.

Vol. II; Nº 1. — Yanny Frenkel, *Criterios de bicompacidad y de H-completidad de un espacio topológico accesible de Frechet-Riesz.* Nº 2. — Georges Valiron, *Fonctions entières.*

---

Además han aparecido tres cuadernos de *Miscelánea matemática.*

# SOBRE UN TEOREMA DE E. HOPF

por M. Cotlar y R. A. Ricabarra

## § 1. *Introducción.*

Sea $M$ un espacio abstracto, $T$ una clase aditiva de subconjuntos $A, B, \ldots$ de $M$ [1], $m(A)$ una medida completamente aditiva definida sobre $T$ que vale 1 sobre el espacio total, $m(M)=1$, y $G=\{g_\alpha\}$ un grupo de transformaciones biunívocas de $M$ sobre sí mismo que deja invariante a $T$ y a la subfamilia de $T$ compuesta por los conjuntos de medida $m$ nula, es decir:

$m_1$) $A \in T$, $g \in G$ implica $Ag \in T$,

$m_2$) $A \in T$, $m(A)=0$, $g \in G$, implica $m(Ag)=0$.

En lo que sigue supondremos fijada definitivamente esta notación. Además de la medida fija $m(A)$ consideraremos otras medidas definidas sobre $T$; una medida $\mu(A)$ definida sobre $T$ se dirá *m-invariante* si: $\mu_1$) $\mu(A)$ es completamente aditiva sobre $T$; $\mu_2$) $m(A)=0$ equivale a $\mu(A)=0$; $\mu_3$) $\mu(Ag)=\mu(A)$ para todo $A \in T$; $g \in G$; $\mu_4$) $\mu(M)=1$.

Diremos que dos conjuntos $A \in T$, $B \in T$ son *equivalentes por descomposición infinita* (*finita*), abreviadamente e. d. i. (e. d. f.), si existen dos descomposiciones $A=A_1+A_2+\ldots$ y $B=B_1+B_2+\ldots$, en número finito o infinito numerable (finito) de sumandos, con

---

[1] Entendemos por clase aditiva, como de costumbre, una clase no vacía $T$ de conjuntos, que contiene con cada subfamilia numerable su unión y con cada conjunto su complementario respecto de $M$. Una medida completamente aditiva sobre $T$ es una función que hace corresponder a todo conjunto $A$ de $T$ un número $m(A) \geq 0$ de modo que para toda sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos $A_1 A_2, \ldots$, se verifica $m(A_1+A_2+\ldots) = m(A_1)+m(A_2)+\ldots$

$A_n = B_n g_n$, $B_n \in T$, $g_n \in G$ para todo $n$ y $A_i A_j = B_i B_j = 0$ para $i \neq j$. En el caso de un grupo $G$ cíclico o continuo monoparamétrico, E. Hopf demuestra el siguiente teorema (²): *Para que exista una medida m-invariante $\mu(A)$ es necesario y suficiente que $M$ no sea equivalente por descomposición infinita con ningún subconjunto $M'$ de medida $m(M') < m(M)$.* Hopf dejó abierto el problema de si el teorema sigue siendo válido cuando se reemplaza «descomposición infinita» por «descomposición finita». En esta nota extendemos el teorema a una clase muy amplia de grupos $G$ (que contiene a los abelianos y los resolubles). Los argumentos usados por nosotros son enteramente diferentes a los de Hopf y se basan en el uso de la *equicontinuidad* del grupo $G$: $G$ se dice equicontinuo (respecto de la medida $m(A)$) si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $m(A) < \delta$ implica $m(Ag) < \varepsilon$, cualquiera sea $g \in G$. Precisamente, probamos que la equicontinuidad de $G$ es equivalente simultáneamente a la existencia de una medida $m$-invariante y a la imposibilidad de que $M$ sea e. d. i. a un subconjunto $M'$ con $m(M') < m(M)$: Usamos para esto un artificio de von Neumann (ver § 2) con lo que se logra las ventajas de mayor sencillez, concisión y generalidad. Además la medida que proporciona el teorema se obtiene constructivamente, aunque con la intervención esencial del axioma de Zermelo. Estudiamos las propiedades de un conjunto que llamamos *núcleo singular* (§ 4) y que encierra toda la patología que aparece en el caso de no existir una medida $m$-invariante. En cuanto al problema de Hopf, fué resuelto por P. Halmos (²) con un interesante ejemplo negativo. Combinado este ejemplo con el teorema 5, conduce a curiosas propiedades del grupo de los enteros (teorema 7).

## § 2. *Grupos medibles. La media de v. Neumann.*

Un grupo $G = \{g_\alpha\}$ se llama *medible* (v. Neumann, Zur allgemeine Theorie des Masses, Fund. Math. 13, 1929, pg. 73-116) si existe una medida $\nu$ definida para todos los subconjuntos

---

(²) *Theory of measure and invariant integrals.* Trans. Amer. Math. Soc. V 34, 1932, pg. 373-393. Hopf impone a la medida la condición suplementaria: $m(A) > 0$ implica la existencia de un $B \subset A$ con $0 < m(B) < m(A)$, que nosotros no suponemos. Ver además L. HALMOS, *Ann. of Math.* V. 48 (1947), 735-54.

$E \subset G$, simplemente aditiva, invariante a derecha y que vale 1 sobre $G$, es decir:

$\nu_1)$ $\nu(E)$ es definida para todo conjunto $E \subset G$ y $\nu(E) \geqq 0$,

$\nu_2)$ si $E_1, E_2$ son disjuntos $\nu(E_1+E_2)=\nu(E_1)+\nu(E_2)$,

$\nu_3)$ $\nu(Eg)=\nu(E)$ para todo $g \in G$,

$\nu_4)$ $\nu(G)=1$.

Si $f(g)$ es una función real acotada definida sobre $G$, se puede definir una integral o media

$$M(f)=\int_G f(g)\, d\nu(g)$$

según la construcción usual de Riemann. Esta $M(f)$ posee las propiedades siguientes:

$M_1)$ $M(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)=\lambda_1 M(f_1)+\lambda_2 M(f_2)$ si $\lambda_i$ son números reales,

$M_2)$ Si $f_1(g)=f(g_1 g)$ es $M(f_1)=M(f)$,

$M_3)$ Si $f(g) \geqq 0$ es $M(f) \geqq 0$,

$M_4)$ Si $f(g) \equiv 1$ es $M(f)=1$.

La clase de los grupos medibles es bastante amplia (v. Neumann, l. c.); en particular todos los grupos resolubles, y por tanto los abelianos, son medibles.

Retomemos ahora los elementos y terminología del § 1 y supongamos para el resto de este § que el grupo $G$ es medible. Haciendo uso de un simple artificio de v. Neumann (l. c.) asociaremos a la medida $m(A)$, $A \in T$ una medida $m^*(A)$ definida por

$$m^*(A)=M(f_A(g)) \quad \text{donde} \quad f_A(g)=m(Ag).$$

La medida asociada $m^*(A)$ tiene las propiedades siguientes (3):

(3) Este artificio resulta una herramienta muy útil en la construcción de medidas invariantes, como se proponen mostrar los autores en un próximo trabajo.

$m_1^*$) $m^*(A)$ está definida para todo $A \in T$ y $m^*(A) \geqq 0$,
$m_2^*$) $m^*$ es simplemente aditiva, es decir, $A_1 . A_2 = 0$ implica $m^*(A_1+A_2) = m^*(A_1) + m^*(A_2)$,
$m^*_3$) $m^*(Ag) = m^*(A)$ para todo $A \in T$, $g \in G$,
$m^*_4$) $m^*(M) = 1$,
$m_5^*$) $m(A) = 0$ implica $m^*(A) = 0$.

La última propiedad es consecuencia de la propiedad de invariancia $m_2$) de la medida $m(A)$.

## § 3. *Equicontinuidad respecto de $m(A)$.*

Si $A$ y $B$ son equivalentes por descomposición finita o infinita, $A = A_1 + A_2 + \ldots$, $B = B_1 + B_2 + \ldots$, $A_n = B_n g_n$, pondremos $A = Bd$, donde $d$ es la transformación biunívoca definida sobre $B$, que coincide con $g_n$ en $B_n$.

Lema 1. (i) *La condición $m_2$) equivale a la siguiente:*

$m_2'$) *para cada $g \in G$ y $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon, g)$ tal que $A \in T$, $m(A) < \delta$ implica $m(Ag) < \varepsilon$.*

(ii) *Si $A = Bd$, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $B' \subset B$, $m(B') < \delta$ implica $m(B'd) < \varepsilon$.*

*Demostración.* (i) Evidentemente $m_2'$) implica $m_2$). Recíprocamente, supuesta $m_2$), si no se verificara $m_2'$) existiría una sucesión $A_n \in T$, $B_n \in T$ y un $g \in G$ con $m(A_n) < 1 : 2^n$, $m(B_n) > \delta > 0$, $B_n = A_n g$.

Poniendo $A'_n = \sum_n^\infty A_i$, $B'_n = A'_n g$, sería $m(A'_n) \to 0$, $m(B'_n) > \delta > 0$, de donde $m(\bigcap_n A'_n) = 0$ y $m(\bigcap_n B'_n) = m((\bigcap_n A'_n) g) \geqq \delta > 0$ contra $m_2$).

(ii) Es consecuencia fácil de (i), y omitimos la demostración.

El lema precedente sugiere la siguiente

Definición: El grupo $G = \{g_\alpha\}$ se dirá *equicontinuo* (respecto de $m(A)$) si dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon)$, tal que cualesquiera sean $A \in T$ y $g \in G$, $m(A) < \delta$ implica $m(Ag) < \varepsilon$.

Teorema 1. *Para que un grupo medible $G$ sea equiconti-*

*nuo es necesario y suficiente que exista una medida* $\mu(A)$ *m-invariante* (§ 1). *Demostración. Necesario.* Sea $G$ equicontinuo. Vamos a probar que la medida $m^*(A)=\mu(A)$ asociada a la $m(A)$ (§ 2) es $m$-invariante. Si $m^*(A)=0$ resulta de $M_1)$—$M_4)$ la existencia de una sucesión $g_n \in G$ tal que $f_A(g_n) \to 0$, donde $f_A(g)=m(Ag)$; luego $m(Ag_n) \to 0$ y por la equicontinuidad $m(A)=0$. Así pues $m^*(A)=0$ implica $m(A)=0$, y por $m^*_5)$ $m(A)=0$ implica $m^*(A)=0$. Luego sólo falta probar que $\mu(A)=m^*(A)$ es completamente aditiva sobre $T$ o sea que $A_1 \supset A_2 \supset \ldots, A_n \to 0$ (intersección vacía) implica $\mu(A_n) \to 0$. En efecto, $A_n \to 0$ implica $m(A_n) \to 0$, luego por la equicontinuidad $\sup_g m(A_n g) \to 0$, de donde $M(f_{A_n}) \to 0$, $m^*(A_n) \to 0$.

*Suficiente.* Supongamos la existencia de una medida $\mu(A)$ $m$-invariante. Probaremos que $G$ es equicontinuo. De lo contrario, existiría un $\varepsilon_0 > 0$ tal que cualquiera sea la sucesión $\delta_n > 0$ existen $A_n \in T$, $g_n \in G$ con $m(A_n) < \delta_n$, $m(A_n g_n) > \varepsilon_0$. Como $\mu(A)=0$ si $m(A)=0$, resulta que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $m(A) < \delta$ implica $\mu(A) < \varepsilon$; podemos pues tomar los $\delta_n < 1:2^n$ y tales que además $\mu(A_n) < 1:2^n$. Poniendo $B_n = \sum_n^\infty A_n$, $B'_n = \sum_n^\infty A_n g_n$ $m(B_n) \to 0$ y $m(B_n') > \varepsilon_0 > 0$, luego $B_n \to B$ con $m(B)=0$ y $B_n' \to B'$ con $m(B') > \varepsilon_0$. Pero

$$\mu(B') \leqq \sum_n^\infty \mu(A_n g_n) = \sum_n^\infty \mu(A_n) \leqq \sum_n^\infty 1/2^n,$$

luego $\mu(B')=0$ y por lo tanto $m(B)=0$, contradicción.

Lema 2. (i) *Si* $B'_n = B_n d_n$, $\Sigma\, m(B'_n) < \infty$, *dada una sucesión de números reales* $\varepsilon_i > 0$ *se puede hacer corresponder a todo número natural* $k$ *un número natural* $N(k)$ *de modo tal que si* $\{n_i\}$ *es una sucesión de números naturales que verifica* $n_{i+1} \geqq N(n_i)$ $(i=1,2,\ldots)$, *se puede determinar para cada* $i$ *un conjunto* $C_{n_i} \subset B_{n_i}$ *tal que* $m(B_{n_i} - C_{n_i}) < \varepsilon_i$ *y los* $C'_{n_i} = C_{n_i} d_{n_i}$ *sean disjuntos dos a dos.* (ii) *Si* $C'_n = C_n d_n$, $C = \text{lím sup}\, C_n$ *y los* $C'_n$ *son disjuntos dos a dos, entonces existe* $E \subset C$, $m(C-E)=0$, *e infinitos conjuntos* $E'_n$ *disjuntos dos a dos, cada uno equivalente por descomposición infinita con* $E$. *Demostración.* Por el lema 1, (ii), existe un $\delta_k > 0$ tal que $B \subset B'_k$, $m(B) < \delta_k$ implica $m(Bd_k^{-1}) < \varepsilon_k$. Por ser $\Sigma m(B'_n) < \infty$ podemos elegir, para cada $k$, el $N(k)$ de modo que $\sum_{N(k)}^\infty m(B'_n) < \delta_k$. Si $\{n_i\}$ es una sucesión que verifica

$n_{i+1} \geqq N(n_i)$, poniendo $D'_i = B'_{n_i} \cdot \sum_{n_i+1}^{\infty} B'_n$, $D_i = D'_i d^{-1}_{n_i}$, será $m(D'_i) < \delta_i$, $m(D_i) < \varepsilon_i$ y los conjuntos $C_{n_i} = B_{n_i} - D_i$ responden a la tesis. (ii) Sea $\varepsilon_i > 0$, $\varepsilon_i \to 0$, y $N_1 < N_2 < \dots N_k < \dots$ una sucesión de números naturales tales que para cada $k$, $m(C - \sum_{n=1+N_k}^{N_{k+1}} C_n) < \varepsilon_k$. Poniendo $S_k = \sum_{1+N_k}^{N_{k+1}} C_n$, $S'_k = \sum_{1+N_k}^{N_{k+1}} C'_n$, es evidente que si $\{k_i\}$ es una sucesión infinita de números enteros y $S = \bigcup_i S_{k_i}$, entonces $S$ es equivalente por descomposición infinita con un $S' \subset \bigcup_i S'_{k_i}$ y $m(C - S) = 0$. Si se descompone la sucesión de los números naturales en infinitos conjuntos $\{k_i^n\}$ disjuntos dos a dos y se pone $S^n = \bigcup_i S_{k_i^n}$; es $S^n$ e. d. i. con un $S'^n \subset \bigcup_i S'_{k_i^n}$, los $S'^n$ disjuntos dos a dos y $m(C - S^n) = 0$. Basta poner $E = \bigcap_n S^n$.

Teorema 2. *Para que un grupo medible $G$ sea equicontinuo respecto de la medida $m(A)$, es necesario y suficiente que $M$ no sea equivalente por descomposición infinita con ningún conjunto $M'$ de medida $m(M') < m(M)$. Demostración. Necesario.* Supongamos que $G$ es equicontinuo y $M$ e. d. i. con $M'$, $m(M') < m(M)$. Como por el teorema 1 existe una medida $m$-invariante $\mu(A)$, resulta $\mu(M) = \mu(M')$, $\mu(M - M') = 0$, $m(M - M') > 0$, contrariamente a la definición de $m$-invariancia.

*Suficiente.* Supongamos que $G$ no es equicontinuo. Entonces existe una sucesión $B_n \in T$, $g_n \in G$, $B'_n = B_n g_n$ con $m(B_n) > \delta > 0$, $m(B'_n) < 1 : 2^n$. Por el lema 2, (i), existe una subsucesión $B_{n_k}$ y conjuntos $C_{n_k} \subset B_{n_k}$, $C'_{n_k} = C_{n_k} g_{n_k}$ con $m(\overline{\lim} C_{n_k}) \geqq \delta > 0$ y los $C'_{n_k}$ disjuntos dos a dos. Por el lema 2, (ii), poniendo $C = \overline{\lim} C_{n_k}$, existe un $E \subset C$ con $m(E) = m(C) \geqq \delta > 0$ y una sucesión infinita de conjuntos $E_n$ disjuntos dos a dos, cada uno e. d. i. con $E$. Por la propiedad $m_2$) debe ser $m(E_n) > 0$ para todo $n$, puesto que $m(E) \geqq \delta > 0$. Por ser los $E_n$ disjuntos y e. d. i. dos a dos, es $E' = \bigcup_1^{\infty} E_n$ e. d. i. con $E'' = \bigcup_2^{\infty} E_n$, mientras que $m(E'') < m(E')$, $E'' \subset E'$. De aquí resulta que $M$ es e. d. i. con $M' = E'' + (M - E')$, $m(M') < m(M)$.

*Observación.* Las partes «suficiente» de los teoremas 1 y 2 valen para grupos $G$ arbitrarios.

De los teoremas 1 y 2 resulta la generalización del teorema de Hopf:

Teorema 3. *Si $G$ es un grupo medible, una condición necesaria y suficiente para que exista una medida m-invariante, es que $M$ no sea equivalente por descomposición infinita con ningún conjunto $M'$ de medida $m(M')<m(M)$.*

Para cerrar este § observemos que con idéntico método al usado hasta aquí se extiende a grupos $G$ medibles el teorema de Birkhoff-Smith sobre las medidas de orden $m$ (teorema 2 del trabajo citado de E. Hopf).

## § 4. *El núcleo singular S.*

En este § consideraremos algunos aspectos de la no equicontinuidad del grupo $G$.

*Definición*: Designaremos con $\Delta=\{\delta\}$ $(\Delta'=\{\delta'\})$ al conjunto de los números reales $\delta\geqq 0$ $(\delta'\geqq 0)$ tales que existe un conjunto $B\epsilon T$, $m(B)=\delta$ $(m(B)=\delta')$ y una sucesión de conjuntos $B_n$, $n=1,2,\ldots,$ disjuntos dos a dos, tales que $B$ es e. d. i. (e. d. f.) con cada $B_n$; diremos que el conjunto $B$ *pertenece* a $\delta\epsilon\Delta$ $(\delta'\epsilon\Delta')$. Evidentemente $\Delta'\subset\Delta$ e $\inf\Delta=\inf\Delta'=0$.

Lema 3. (i) Sup $\Delta=\sup\Delta'=\delta_0$. (ii) $\delta_0\epsilon\Delta$ [4]. (iii) *Si $B_1$ pertenece a $\delta$, $B_2$ a $\delta_0$, entonces $m(B_1-B_2)=0$, luego si $B_1$ y $B_2$ pertenecen ambos a $\delta_0$ es $m(B_1-B_2)=m(B_2-B_1)=0$.* (iv) *Todo conjunto $B$ perteneciente a $\delta_0$ es invariante salvo medida $m$ nula* [5]. *Demostración.* (i) Evidentemente basta probar que $\sup\Delta'\geqq\sup\Delta$. Sea $B$ perteneciente a $\delta\epsilon\Delta$ y $B_n$ infinitos conjuntos disjuntos, cada uno e. d. i. con $B$. Dado $\varepsilon>0$, podemos determinar para cada $n$ un $B^n\subset B$ tal que $m(B-B^n)<\varepsilon:2^n$ y que $B^n$ sea e. d. f. con una parte $B'_n$ de $B_n$. Poniendo $C=\bigcap B^n$ es $m(C)>\delta-\varepsilon$ y $C$ e. d. f. con infinitos subconjuntos $C_n\subset B'_n$ disjuntos dos a dos. Luego $C$ pertenece a un $\delta'\epsilon\Delta'$ con $\delta'>\delta-\varepsilon$,

(4) El problema de si también $\delta_0\epsilon\Delta'$ equivale, en virtud de (iv), al problema de Hopf (§ 1).

(5) Si $G$ es numerable, por ej. cíclico, se puede afirmar más aún: entre los conjuntos pertenecientes a $\delta_0$ hay uno invariante.

lo que termina la demostración (i). (ii) Sean $\delta_n \to \delta_0$, $\delta_n \in \Delta$, $B^n$ perteneciente a $\delta_n$ y, para cada $n$, $B^n{}_1$, $B^n{}_2$, ... infinitos conjuntos disjuntos ,cada uno e. d. i. con $B^n$. Por ser los $B^n{}_k$ disjuntos dos a dos para cada $n$ fijo, podemos elegir $k_n$ de modo tal que $\sum_{n=1}^{\infty} m(B^n{}_{kn}) < \infty$, luego por aplicación sucesiva de (i) y (ii) del lema 2, resulta la existencia de un conjunto $E$ con $m(E) = \delta' \geqq \delta_0$ e. d. i. con infinitos $E_n$ disjuntos dos a dos; luego $\delta' \in \Delta$, $\delta' \geqq \delta_0$ y resulta $\delta' = \delta_0$, $\delta_0 \in \Delta$. (iii) Suponiendo lo contrario o sea $B_1$ perteneciente a $\delta$, $B_2$ a $\delta_0$ y $m(B_1 + B_2) > \delta_0$, poniendo $B^{2k} = B_1$, $B^{2k+1} = B_2$, $B = \overline{\text{lím}}\, B^n$, eligiendo la sucesión $\{n_k\}$ del lema 2 (i) de modo que $n_k$ sea par o impar conjuntamente con $k$ y aplicando (i) y (ii) de dicho lema a los conjuntos actuales $B^n$, resulta que $B$ pertenece a $\delta' = m(B) > \delta_0$, contrariamente a la definición de $\delta_0$. (iv) Consecuencia inmediata de (iii).

L e m a 4. *Existe un conjunto $S$ de medida $m(S) = \delta_0$, invariante salvo medida nula* (ver nota (5) al pie de la pág. 55), *y que contiene una infinidad de conjuntos $S_n$ disjuntos dos a dos, cada uno equivalente por dscomposición infinita con $S$. Demostración.* Si $B$ pertenece a $\delta_0$ y $B_n = Bd_n$ son los conjuntos disjuntos dos a dos y e. d. i. con $B$, resulta del lema 3, (iv) que el conjunto $B'_n = B_n - B$ $(n = 1, 2, \ldots)$ es de medida $m(B'_n) = 0$, luego también es de medida nula el conjunto $B'$ = cápsula invariante de $\sum_1^{\infty} B'_n$ respecto del grupo numerable generado por todos los $g \in G$ que intervienen en algún $d_n$. Basta poner $S = B - B'$.

*Definición.* Al conjunto $S$ del lema 4, que en virtud del lema 3 (iii) está determinado salvo medida $m$ nula, lo llamaremos *núcleo singular* del espacio (respecto del grupo $G$).

*Observación*: Si $G$ es numerable, en particular cíclico, $S$ puede tomarse estrictamente invariante. El significado del núcleo singular como acumulador de la no-equicontinuidad del grupo $G$, aparece claramente en el siguiente teorema 4 y corolarios, que son consecuencias inmediatas del lema 4 y de la demostración del teorema 2. Valen «salvo medida nula».

T e o r e m a 4. *En $M - S$ es $G$ equicontinuo. Dentro de $S$, $G$ no es equicontinuo en ningún subconjunto invariante.*

Corolario 1. *Para que exista una medida m-invariante es necesario y suficiente que el núcleo singular tenga medida* $m(S)=\delta_0=0$.

Corolario 2. *En* $M-S$ *existe una medida m-invariante.*

Corolario 3. *Toda medida completamente aditiva e invariante* (¡no necesariamente $m$-invariante!), *definida en* $S$, *es idénticamente nula.*

Corolario 4. *Si* $G'\subset G$ *es un subgrupo de* $G$ *de índice finito y* $S'$ *es el núcleo singular correspondiente a* $G'$, *es* $m(S-S')=m(S'-S)=0$. *En particular si* $G$ *es cíclico,* $G=\{g^n\}$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, *todos los subgrupos de* $G$ *tienen un mismo núcleo singular* $S$. [Más general: esto vale si $G/G'$ es «equicontinuo»].

Reunimos en el siguiente teorema las propiedades patológicas del núcleo singular $S$.

Teorema 5. (i) *Todos los puntos* $x\in S$ *son no periódicos, es decir hay infinitos elementos distintos de la forma* $xg$, $g\in G$. (ii) *Existe una sucesión no decreciente de conjuntos* $S^n$ *tales que* $\lim S^n=S$, *y para cada* $S^n$ *existen infinitos* $S^n{}_k$ $(k=1,2,\ldots)$ *disjuntos dos a dos, cada uno* e. d. f. *con* $S^n$. (iii) *Para todo* $\varepsilon>0$, *existe* $E\subset S$, $m(S-E)<\varepsilon$, *e infinitos* $g_n\in G$ *tales que los conjuntos* $Eg_n$ *son disjuntos dos a dos.* (iv) *Para todo* $\varepsilon>0$ *existe un conjunto* $E\subset S$ *e infinitos* $g_n\in G$ *tales que* $m(E)<\varepsilon$ *y* $m(Eg_n)\to m(S)$. (v) *Existe una partición* (salvo medida nula) *de* $S$ *en infinitos conjuntos* disjuntos, $S=\sum_1^\infty S^n+S^0$, $m(S^0)=0$, *tales que cada* $S^n$ *admite infinitos trasladados* $S^n g_k$ $(k=1,2,\ldots)$ *disjuntos dos a dos.* (vi) *Existe un continuo de particiones de* $S$ *en infinitos conjuntos disjuntos* $S=\sum_1^\infty S^n$ *tales que cada* $S^n$ *es* e. d. i. *con* $S$. (vii) *Si* $G=\{g^n\}$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ *es cíclico, existe una partición de* $S$ *en infinitos conjuntos disjuntos* $S=\sum_1^\infty S^p$ *donde* $S^p$ *es* e. d. i. *con* $S$ *respecto del subgrupo* $G^p=\{g^{np}\}$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

*Demostración.* (i) y (ii) son consecuencias inmediatas del lema 3 (i). (iii) Sea $S^n$ la sucesión de los conjuntos de (ii) y $n_0$ tal que poniendo $E_1=S^{n_0}$ sea $m(S-E_1)<\varepsilon/2$. Si $m^*(A)$ es la medida asociada (§ 2) que es invariante y finitamente aditiva, resulta de la definición de los $S^n$ que $m^*(E_1)=0$, luego por la propiedad $m^*_5$) existen infinitos $g_n \in G$ con $m(E_1 g_n) \rightarrow 0$. Por la aplicación del lema 2 se consigue un $E \subset E_1$ y una subsucesión $g_{n_i}$ con $m(E_1 - E) < \varepsilon : 2$, $m(S-E) < \varepsilon$, y los $Eg_{n_i}$ disjuntos dos a dos. (iv) Si $S^n$ es la sucesión de (ii) $n_0$ tal que $m(S-S^n) < \varepsilon$, poniendo $E=S-S^{n_0}$ será $m(E) < \varepsilon$ y como $m^*(S^{n_0})=0$, resulta $m^*(E)=m^*(S)=m(S)$, pues $S$ es invariante salvo medida nula. Luego por $m^*_5$) existen infinitos $g_n \in G$ con $m(Eg_n) \rightarrow m(S)$. (v) Poniendo $R'=S^1$, $R^n=S^n-S^{n-1}$, los razonamientos de (iv) prueban que para cada $n$ existe un $E_n{}^1 \subset R^n$ con $m(R^n - E_n{}^1) < \varepsilon_1 : 2^n$ e infinitos $E_n{}^1 g_k$ $(k=1,2,\ldots)$ disjuntos dos a dos. Análogamente para cada $n$ existe un $E_n{}^2 \subset R^n - E_n{}^1$ con $m(R^n - E_n{}^1 - E_n{}^2) < \varepsilon_2 : 2^n$ y con infinitos $E_n{}^2 g_k$ disjuntos dos a dos. Siguiendo en esta forma y eligiendo $\varepsilon_k \rightarrow 0$, los $E_n{}^k$ proporcionan la descomposición deseada. (vi) Por definición de $S$, existen infinitos conjuntos $S_1$, $S_2$, ... contenidos en $S$, disjuntos dos a dos, cada uno e. d. i. con $S$. Si $\{n_k\}$ es una sucesión de números naturales que no contiene a todos los números naturales, el conjunto $S_0=S-\Sigma S n_k$ contiene por lo menos un $S_i$, e. d. i. con $S$, luego por el teorema de Cantor-Bernstein, en la forma que le dió Banach (ver Fund. Math. 6, 1924, pg. 236-239), es $S_0$ e. d. i. con $S$. De modo que para cada tal sucesión $\{n_k\}$ hay una partición $S=\Sigma S_n$ deseada, luego las hay un continuo. (vii) Daremos sólo un esbozo de demostración porque los detalles requieren un espacio que está en desproporción con la importancia de la propiedad. Sea $E_1$ e. d. i. respecto de $G$ con $S$, $\{E_i{}^p\}$ una descomposición respecto de $G^p$. Se elige $\{n_p\}$, $p=1,2,\ldots$ suficientemente grande, $E_2, E_3 \in \{E_i{}^2\}$, $i \geqq n_2$, y se pone $E'_1=(E_1 - \sum_{\substack{i \geq n_p \\ p-1}}^{\infty} E_i{}^p) + \{$la imagen en $E_2$ de la parte restante de $E_1\}$ en reemplazo de $E_1$. Así $E'_1$, $E_3$ son conjuntos e. d i. con $S$ respecto de $G$, $G^2$ y disjuntos. Luego se busca $E_4$, $E_5$, $E_6 \in \{E_i{}^3\}$, $i \geqq n_3$, y se hace aquí con $E'_1$, $E_3$ y $E_4$, $E_5$ respectivamente lo que primero con $E_1$ y $E_2$. Siguiendo de esta manera, $E_1$ (y lo mismo cada conjunto $E_i$ que aparece) queda reemplazado por una suma de conjuntos e. d. i. con una parte de él, que por el lema 1 será todo $E_1$, salvo medida nula, con sólo tomar $n_i$ suficientemente grande; y estas sumas son disjuntas dos a dos.

Corolario 1. *Existe una sucesión de conjuntos $S^n$ conte-*

*nidos en $S$ con* $\lim S^n = S$, *tales que toda medida finitamente aditiva, invariante, definida en $S$, se anula en $S^n$, $n=1,2,\ldots$*

Corolario 2. *Para que exista en $M$ una medida m-invariante, es necesario y suficiente que para cada conjunto $E_0$, $m(E_0)>0$, exista una medida $\nu(E)$ finitamente aditiva e invariante con $\nu(E_0)>0$.* La necesidad es obvia; la suficiencia es consecuencia de (ii), poniendo $E_0=S^n$ si $m(S^n)>0$.

De (vi) se deduce inmediatamente la siguiente generalización para grupos $G$ arbitrarios del teorema **1** de la memoria citada de E. Hopf, sobre la medida de compresibilidad: Si $\{A\}$ es el mínimo conjunto invariante que contiene a $A$, se define para todo $B\subset\{A\}$ la medida de compresibilidad $\mu_A(B)$ como el ínfimum de las sumas $\sum\limits_1^\infty m(Bi\,g)$ para las posibles particiones $B=\sum\limits_{i=1}^\infty B_i$ y los posibles $g_i\in G$ tales que $B_i g_i\subset A$. Para $A$ fijo es $\mu_A(B)$ una medida invariante, completamente aditiva sobre la familia aditiva formada por los conjuntos de $T$ contenidos en $\{A\}$. Por tanto de (vi) resulta:

Corolario 3. *Para todo* $A\subset S$ *es* $\mu_A(\{A\})=0$ o $\infty$.

## § 5. *El problema de E. Hopf.*

Diremos que $E\in T$ verifica la *propiedad* $(h)$ (respectivamente $(h^*)$) si para ningún $g\in G$ es $Eg\subset E$, $Eg\neq E$ ($Eg\subset E$, $m(E-Eg)>0$); análogamente $E$ *verifica* $(h_\infty)$ ($(h^*_\infty)$) si $E$ no es e.d.i. con una parte $E_1\subset E$, $E_1\neq E$, ($E_1\subset E$, $m(E-E_1)>0$). $T$ verifica $(h)$ etc., si lo verifica todo $E\in T$. E. Hopf probó (l. c.) que la condición $(h^*)$ para T equivale, en el caso de $G$ cíclico, a la no equivalencia por descomposición finita de $M$ con una parte propia. Aunque el problema de Hopf fué resuelto por la negativa por Halmos, cabe considerarlo para cada $T$ particular: ¿Es cierto que si T verifica $(h^*)$ verifica también $(h^*_\infty)$? Para grupos $G$ no cíclicos el problema de Hopf se resuelve trivialmente por la negativa: sea $M$ el conjunto de los números naturales, $m(A)$ una medida completamente aditiva definida para todo subconjunto $A\subset M$ no idénticamente nula, $g_i$ la permutación de $M$ que permuta $i$ con $2i$ y deja invariantes los demás puntos, $G$=grupo generado por los $g_i$. Vamos pues a limitarnos al caso de $G$ cíclico, $G=\{g^n\}$, $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$, generado por una transformación $g$. En este caso la diferencia entre $(h^*)$ y $(h^*_\infty)$ (para $T$) se advierte claramente, teniendo en cuenta que $(h^*_\infty)$ se expresa teorema 5 (iii) como la imposibilidad de la existencia de un conjunto de medida $m$ positiva con *infinitos* congruentes disjuntos, mientras que $(h^*)$ equivale a la imposibilidad de la existencia de un conjunto de medida $m$ positiva con *todos* sus congruentes disjuntos dos a dos (en efecto, si $Eg \subset E$, $m(E-Eg)>0$, el conjunto $E-Eg$ tiene medida positiva y todos sus congruentes disjuntos dos a dos).

Observemos que si $M=\{x_i\}$ es numerable y $G=\{g^n\}$ cíclico, el problema de Hopf se resuelve por la afirmativa; en efecto, en este caso la clase aditiva $T$ es atómica, es decir existe una sucesión de conjuntos disjuntos $\{A_k\}$ tal que todo $E \in T$ es unión de átomos $A_k$ y por tanto $A_k g \in \{A_k\}$. Si hay un $A_k$ de medida $m(A_k)>0$ tal que $A_k g^i \neq A_k g^j$ si $i \neq j$ (es decir $A_k$ es no periódico) entonces no se verifica $(h^*)$ y por consiguiente tampoco $(h^*_\infty)$; y si todo $A_k$ de medida $m(A_k)>0$ es periódico, existe evidentemente una medida m-variante y se verifican ambas condiciones $(h^*)$ y $(h^*_\infty)$. Como simple corolario de esta observación resulta el siguiente

Teorema 6. *Si $T$ es una clase completa respecto de una medida finita $\mu(A)$ completamente aditiva e invariante respecto de $G=\{g^n\}$, y $M$ es de potencia cardinal no-medible* [6]*, el problema de Hopf tiene solución afirmativa. Demostración.* Sea $m=a+s$, $a=$ absolutamente continua respecto de $\mu$, $s=$ singular. Si $T$ no verifica $(h^*_\infty)$ es $M$ e. d. i. con $M'$, $m(M-M')>0$, $\mu(M-M')=0$, $a(M-M')=0$ y por tanto $s(M-M')>0$, y en virtud del teorema 3, no existe ninguna medida $s$-invariante. Por ser $T$ completa respecto de $\mu$ y $M$ de potencia cardinal no-medible, se sabe (B. Pettis, Duke M. J. 4, 1938, pg. 552-565) que $s$ se reduce a su espectro numerable, es decir, existe un conjunto numerable de puntos $\{x_n\} \subset M$ con $s(x_n)>0$ y tal que $s$ se anula en su complementario. Además es fácil ver que el espectro de $s$ es invariante respecto de $G$. La observación que precede este teorema termina la demostración.

(6) $T$ es completa respecto de $\mu$, si $\mu$ está definida sobre $T$ y si todo conjunto contenido en un conjunto de medida $\mu$ nula pertenece a $T$. Un número cardinal es no medible, si una medida completamente aditiva nula en los puntos, definida sobre todos los subconjuntos de un espacio de esta potencia, se anula idénticamente (ver S. Ulam, *Fund Math.* 16, 1930, pg. 140-150).

Sea $Z$ el grupo de los números enteros y $g$ la transformación que a $n$ hace corresponder $g(n)=n+1$, y $G=\{g^n\}$ el grupo cíclico correspondiente

*Definición.* Diremos que $Y\subset Z$ es un conjunto $(P)$ si cualquiera sea el entero $p$, $-\infty<p<+\infty$, el conjunto $Y\cup Yg^p\cup\ldots Yg^{np}\cup\ldots$ $(n>0)$ tiene la propiedad $(h)$ respecto de $G=\{g^n\}$. $Y\subset Z$ se dirá un *conjunto* $(Q)$ (respectivamente $(Q^p)$) si $Y$ es un conjunto $(P)$ y si además $Y$ es e. d. i. con $Z$ respecto de $G=\{g^n\}$ (respectivamente $G^p=\{g^{pn}\}$) y respecto de los conjuntos $(P)$, es decir si $Y=Y_1+Y_2+\ldots$, $Z=Z_1+Z_2+\ldots$, $Y_iY_j=Z_iZ_j=0$ para $i\neq j$, $Y_i=Z_ig^{n_i}$ $(Y^i=Z_ig^{pn_i})$, siendo cada $Y_i$ un conjunto $(P)$. La demostración del siguiente lema es fácil y la omitimos.

Lema 5. (i) *Las propiedades $(h)$, $(P)$, $(Q)$ son invariantes respecto de $g$.* (ii) *$Y$ tiene la propiedad $(P)$ si y sólo si $U^\infty_{n=1}\ Yg^{np}\supset Y$ para todo $p$, $-\infty<p<-\infty$.* (iii) *Si cada $Y_i$ verifica $(P)$ también lo verifica $U_iY_i$.* (iv) *Si $Y$ verifica $(h)$ también lo verifica el complementario de $Y$.*

Teorema 7. *El grupo $Z$ de los números enteros posee las siguientes propiedades:*

(i) *$Z$ admite un continuo de particiones en infinitos conjuntos disjuntos $Z=U^\infty_{p=1}Y_p$, donde $Y_p$ es un conjunto $(Q^p)$.*

(ii) *Existe un $Y\subset Z$ que es un conjunto $(P)$ y tal que para cada entero $p$, $-\infty<p<+\infty$, existen infinitos $n_i=n_i(p)$ tales que los conjuntos $Yg^{pn_i}$ son disjuntos dos a dos.*

(iii) *Para cada $p$ existe una infinidad no numerable de conjuntos $(Q^p)$ incongruentes dos a dos.*

(iv) *Para cada $p$ existe un $Y$ que es un conjunto $(Q^p)$ y tal que designando con $I_N$ al intervalo $(-N,N)$, se verifica, para $N\to\infty$,*

*límite $\{$(número de elementos del conjunto $Y\cap I_N)\,.\,N^{-1}\}=0$.*

*Demostración.* Según Halmos existe una $T$ que verifica $(h^*)$ y no $(h^*_\infty)$. Primeramente observemos que si $T$ verifica $(h^*)$, dada una sucesión de conjuntos $E_n\in T$, existe otra $E'^n\in T$ tal que $E'^n\subset E_n$, $m(E'_n)=m(E_n)$ y tal que todos los conjuntos $E'_{n,p}=E'^n\cup E'^n g^p\cup E'^n g^{2p}\cup\ldots$ $(n=1,2,\ldots,$ $p$ entero arbitrario) verifican la propiedad $(h)$; para ello basta evidentemente suprimir los conjuntos de medida nula que distinguen la propiedad $(h')$ de la $(h)$. Como para todo punto $x \in M$ no periódico la trayectoria $\{x_p\} = \{xg^p\}$ es isomorfa con el grupo $Z$, las definiciones de conjuntos $(P)$ y $(Q^p)$ se transportan obviamente a subconjuntos de una trayectoria. Entonces si $E \in T$ es tal que $E$ y todo $E^p = E \cup Eg^p \cup Eg^{2p} \cup \ldots$ ($p$ entero cualquiera) verifican $(h)$, para todo punto $x \in E$ no periódico, $E \cap \{x_p\}$ es un conjunto $(P)$. Luego, de la observación anterior y del hecho de que todo $x \in S$ es no periódico, se deduce que si $T$ verifica $(h^*)$, para todo $E \subset S$, $m(E) > 0$, existe un $E' \subset E$, $m(E') = m(E)$, tal que para todo todo punto $x \in E'$ es $E' \cap \{x_p\}$ un conjunto $(P)$. De estas observaciones y de (iii), (vi), (vii) del teorema 5 resultan inmediatamente (i) y (ii) de la tesis. Para demostrar (iii) supongamos, por lo contrario, que los conjuntos $(Q^p)$ forman una familia $\{Y_i\}$ numerable. Por (vii) del teorema 5 y por lo dicho más arriba, existe un conjunto $E \subset S$, $m(E) > 0$, tal que para todo $x \in E$ es $E \cap \{x_p\}$ un conjunto $(Q^p)$. $E$ queda descompuesto en una infinidad numerable de conjuntos, $E = \Sigma E_i$, $i = 1, 2, \ldots$, donde $E_i$ está formado por aquellos puntos $x$ de $E$ para los cuales $E \cap \{x_p\}$ es congruente al conjunto $Y_i$; en otros términos, si $x'$, $x''$, son dos puntos de un mismo $E_i$, sus trayectorias interceptan a $E_i$ en conjuntos isomorfos a $Y_i$. Fijando un $x \in E_i$ y poniendo $E_r^{i(x)} = (E_i \cap \{x_p\})\, g^r$, por ser los $E_r^{i(x)}$ subconjuntos de una misma trayectoria isomorfa a $Z$, existe un sistema atómico $\{A_j^i(x)\}$ tal que cada $A_j^i(x)$ es una intersección de una infinidad numerable de conjuntos $E_r^{i(x)}$, cada $E_r^{i(x)}$ es unión de átomos $A_j^i(x)$, $A_j^i(x)\, g \in \{A_j^i(x)\}$, y dos átomos coinciden o son disjuntos. De lo observado más arriba respecto del isomorfismo de los conjuntos $E_i \cap \{x^p\}$ para $i$ fijo y $x \in E_i$ variable, resulta que llamando $K_i = U_{p=-\infty}^{+\infty}(E_i g^p)$ y poniendo $E_r^i = E_i g^r$, existe un sistema atómico $\{A_j^i\}$, $A_j^i \subset K_i$, tal que cada $A_j^i$ es una intersección de una infinidad numerable de conjuntos $E_r^i$, $A_j^i = K_i \cap Eg^{n_1} \cap Eg^{n_2} \cap \ldots$, $n_r = n_r(j)$, cada $E_r^i$ es unión de átomos $A_j^i$, $A_j^i g \in \{A_j^i\}$, y dos átomos o coinciden o son disjuntos. Como $E$ tiene infinitos conjuntos e. d. i. disjuntos y $E \cap \{x_p\}$ es un $(Q)$, se deduce que para cada $A_j^i$ son disjuntos dos a dos los congruentes $A_j^i g$, $A_j^i g^2$, .... Luego poniendo $H = Eg^{n_1} \cap Eg^{n_2} \cap \ldots$, $H \cap K_i = A_j^i$, se tendrá $Hg \subset H$, $A_j^i \subset H - Hg$, $H \in T$, lo que en virtud de la condición $(h^*)$ de la hipótesis implica $m(A_j^i) = 0$, para todo átomo $A_j^i$. Luego $m(E_i) = 0$ y $m(E) = \Sigma m(E_i) = 0$, obteniéndose una contradicción, lo que prueba (iii). En cuanto a (iv), se obtiene fácilmente la tesis, combinando el corolario 1 del teorema 5 con propiedades conocidas del grupo medible $Z$. Con esto queda terminada la demostración del teorema 7.

Finalmente observemos que si $Y \subset Z$ es un conjunto $(P)$, se deduce del lema 5, (ii), que toda progresión aritmética contiene ninguno o infinitos puntos de $Y$. Luego existe una función que a todo sistema finito $(i_1, \ldots, i_n)$ de números enteros ($n$ arbitrario) hace corresponder un número entero $a(i_1, \ldots, i_n) > 0$ tal que $Y$ contiene a todos los números de la forma $\{a(i_1)i_1 + a(i_1, i_2)i_2 + \ldots a(i_1, \ldots i_n)i_n\}$. Por lo tanto un conjunto $(P)$ debe ser extraordinariamente abundante en puntos, y ya para $p > 2$ no hemos podido encontrar ejemplos de conjuntos $(Q^p)$ (7). En una nota siguiente desarrollaremos el método de equicontinuidad aquí usado para obtener una caracterización de los operadores de Koopman y una simplificación de los teoremas de Dunford-Miller.

(7) En cambio se construye con toda facilidad un contínuo de conjuntos $(P)$, no congruentes dos a dos, observando que la intersección de un arco de la circunferencia con la trayectoria de un punto respecto de una rotación irracional determina un conjunto $(P)$.

# TRANSFORMACION DE CONFIGURACIONES DEL CAMPO DE RADIACION.

## APLICACION A LA RADIACION DE MULTIPOLOS.

por JOSÉ A. BALSEIRO
Instituto de Física — La Plata

SUMMARY: The problem of determining the photon distribution over the states of a quantized radiation field described by means of two systems of orthogonal vibrations both referred to the same radiation field is solved.

The formalism is applied in order to find the probabilities of a given configuration of the radiation emitted by electric and magnetic multipoles. Known expressions for angular intensity distribution are obtained.

§ 1. - *Introducción.* — En un trabajo anterior (1) se ha planteado el problema de determinar la distribución de las configuraciones de fotones del campo de radiación descripto mediante un sistema de soluciones ortogonales $\vec{B}_s$ de las ecuaciones de campo, cuando inicialmente se tiene una distribución dada de fotones referidos a otro sistema de soluciones $\vec{A}_r$. El formalismo se refiere al caso en que el número y las frecuencias de los fotones asociados al campo se conservan.

El vector potencial del campo de radiación cuantificado referido a uno y a otro sistema de soluciones se expresa:

$$\vec{A} = \Sigma\, a_r \vec{A}_r + \text{conj. comp.} = \sum_s b_s \vec{B}_s + \text{conj. comp.} \tag{1.1}$$

en donde $a_r$ y $b_s$ son los operadores de amplitud. Los sistemas de funciones ortogonales $\vec{A}_r$ y $\vec{B}_s$ definen una transformación unitaria

$$\vec{A}_r = \sum_s c_{rs} \vec{B}_s + \text{conj. comp.} \tag{1.2}$$

(1) J. A. BALSEIRO. *Phys.* Rev. *73,* 1346 (1948).

que transforma las amplitudes según:

$$b_s = \sum_r c_{rs} a_r \qquad a_r = \sum_s c^*_{rs} b_s. \tag{1.3}$$

Como es sabido, los operadores $a_r$, $b_s$ son representables, respectivamente, mediante las variables canónicamente conjugadas $p, q$ y $P, Q$ en la forma:

$$a_r = \frac{1}{\sqrt{2h\nu}} (p_r - i2\pi\nu\, q_r) \quad a^*_r = \frac{1}{\sqrt{2h\nu}} (p_r + i2\pi\nu\, q_r) \tag{1.4}$$

$$b_s = \frac{1}{\sqrt{2h\nu}} (P_s - i2\pi\nu\, Q_s) \quad b^*_s = \frac{1}{\sqrt{2h\nu}} (P_s + i2\pi\nu\, Q_s). \tag{1.5}$$

Las expresiones (1. 3), (1 4) y (1. 5) establecen entre las variables $p, q$ y $P, Q$ una transformación canónica, la que a su vez, define una transformación entre las autofunciones del campo referidas a las representaciones (q) y (Q). Dada la autofunción $g_{n_1 n_2 \ldots} (q_1\, q_2 \ldots)$ referida al primer sistema que define la configuración de $n_1$ fotones en el estado al cual se refiere $q_1$, etc. se ha demostrado en el trabajo citado que se transforma en la autofunción

$$\Delta_{n_1 n_2 \ldots} (Q_1\, Q_2 \ldots) = \sum d^{\,n_1 n_2 \ldots}_{\,m_1 m_2 \ldots} \quad g_{m_1 m_2 \ldots} (Q_1\, Q_2 \ldots) \tag{1.6}$$

$$\text{con } \sum_i m_i = \sum_j n_j.$$

El cuadrado del módulo de los coeficientes $d^{\,n_1 n_2 \ldots}_{\,m_1 m_2 \ldots}$ dan la probabilidad de la configuración correspondiente a $m_1, m_2, \ldots$ fotones distribuídos sobre los estados definidos por $Q_1, Q_2, \ldots$. El problema se reduce, pues, a determinar estos coeficientes. En el trabajo citado se han dado expresiones formales para estos coeficientes y que, en general, no son simples de calcular. En el presente trabajo se obtienen expresiones algebraicas que permiten calcular en forma inmediata estos coeficientes en función de las amplitudes $c_{rs}$. En el caso de un solo fotón presente en el campo el cuadrado del módulo de estas amplitudes determinan directamente la probabilidad de la correspondiente distribución.

El problema se resuelve planteando la transformación $p, q \rightarrow P, Q$ de la siguiente manera:

Definimos las variables:

$$y_r = \frac{h}{2\pi} a^*_r \qquad z_r = -i\, a_r \tag{1.7}$$

$$Y_s = \frac{h}{2\pi} b^*_s \qquad Z_s = -i\, b_s \tag{1.8}$$

y, teniendo presente la regla de conmutación de los operadores de amplitud se obtiene:

$$y_r z_{r'} - z_{r'} y_r = -i \frac{h}{2\pi} \delta_{rr'}; \quad Y_s Z_{s'} - Z_{s'} Y_s = -i \frac{h}{2\pi} \delta_{ss'}. \tag{1.9}$$

En esta forma, las variables $y, z$ e $Y, Z$ son canónicamente conjugadas. Además, teniendo presente la (1.3) se tiene las transformaciones

$$Z_s = \sum_r c_{rs} z_r \qquad z_r = \sum_s c^*_{rs} Z_s. \tag{1.10}$$

La transformación canónica $p, q \longrightarrow P, Q$ puede, en esta forma, enunciarse como el producto de:

a) la transformación canónica $p, q \longrightarrow y, z$
b) la transformación de coordenadas $y \longrightarrow Y$; $z \longrightarrow Z$
c) la transformación canónica $Y, Z \longrightarrow P, Q$.

En la parte II se emplea el formalismo para determinar la distribución de fotones en ondas multipolares eléctricas y magnéticas, lo que permite calcular la probabilidad que un fotón sea emitido por un multipolo según una dirección determinada.

§ 2. — *Transformación* $p, q \longrightarrow y, z$. Las expresiones (1.4) y (1.7) definen la transformación canónica:

$$\begin{aligned} p_r &= i\sqrt{2h\nu_r}\, z_r - i\, 2\pi\nu_r\, q_r = \frac{\partial W_1}{\partial q_r} \\ y_r &= i\frac{h}{2\pi} z_r - i\sqrt{2h\nu_r}\, q_r = -\frac{\partial W_1}{\partial z_r} \end{aligned} \tag{2.1}$$

en donde $W_1(q, z)$ es la función generatriz de la transformación que consideramos.

El núcleo de la transformación resulta:

$$S_1(\xi, z) = e^{-\frac{2\pi i}{h} W_1(\xi, z)} = e^{\Sigma_i \left[-\frac{1}{2}\xi_i{}^2 - \frac{1}{2} z_i{}^2 + \sqrt{2}\,\xi_i z_i\right]} \quad (2.2)$$

$$\text{con } \xi_i = 2\pi \sqrt{\frac{v_i}{h}}\, q_i$$

En la representación $p, q$ las autofunciones del campo son las funciones de Hermite:

$$g_{n_1 n_2 \dots}(\xi_1 \xi_2 \dots) = e^{-\frac{1}{2}\xi_1{}^2} H_{n_1}(\xi_1)\, e^{-\frac{1}{2}\xi_2{}^2} H\, \mathrm{H}_{n_2}(\xi_2) \dots$$

La transformación de estas funciones mediante el núcleo (2.2) se obtiene teniendo presente el desarrollo en funciones de Hermite normalizadas

$$e^{-\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}X^2 + 2\xi X} = \sum_{v=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H_v(\xi) \sqrt{\frac{2^v}{v!}}\, x^v$$

que permite obtener, siendo $x = \sqrt{\frac{1}{2}}\, z$:

$$f_{n_1 n_2 \dots}(z_1 z_2 \dots) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_1(\xi_1 \xi_2 \dots z_1 z_2 \dots)\, g_{n_1 n_2 \dots}(\xi_1 \xi_2 \dots)\, d\xi_1 d\xi_2 \dots =$$

$$\frac{z_1{}^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{z_2{}^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} \dots \quad (2.3)$$

La transformación $p, q \longrightarrow y, z$, debido al carácter no hermitiano de las variables, $y, z$ no es unitaria siendo $S_1{}^{-1} \neq S_1{}^*$. Por esta razón la transformación de las funciones ortogonales $g_{n_1 n_2 \dots}$ no produce funciones ortogonales. No es posible, por este motivo, atribuirles a las funciones $f_{n_1 n_2 \dots}$ el carácter de autofunciones del campo [2]. Esto hace que la inversión de la integral

[2] Estas funciones son designadas "Funciones Generatrices" por H. W. PENG, Proc. Roy. Irish Acad. *51*, A Nº 8, 113 (1947). Según una cita de Peng han sido introducidas en la descripción del campo de radiación por P. A. M. DIRAC, *Quantum electrodynamics*. Comunications of the Dublin Institute for Advanced Studies A, Nº 1.

(2. 3) correspondiente a la transformación $p, q$ no sea trivial. Hallado el núcleo $S_1^{-1}$ de esta última transformación y puesto que $z$ es compleja, será necesario determinar el camino de integración en el plano $z$ de modo que se obtengan las funciones $g$ como transformadas de las $f$. Resulta ser:

$$S_1^{-1}(z, \xi) = e^{\Sigma_i [\frac{1}{2}\xi_i^2 + \frac{1}{2} z_i^2 - \sqrt{2}\, z_i \xi_i]} \,. \tag{2. 4}$$

Utilizando la integral:

$$e^{-\frac{\xi^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2 + 2is\xi}\, ds$$

y la definición de $H_n(\xi)$ mediante la derivada de orden $n$ de $e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$ se obtiene:

$$g_{n_1 n_2 \dots}(\xi_1 \xi_2 \dots) = \int_{-i\infty}^{i\infty} S'^{-1}_1 (z, \xi)\, f_{n_1 n_2 \dots}(z_1 z_2 \dots)\, dz_1\, dz_2 \dots \tag{2. 5}$$

§ 3. — *Transformaciones* $z \rightarrow Z$; $Y, Z \rightarrow P, Q$. La transformación de coordenadas $z \rightarrow Z$, definida por la (1. 10) permite transformar en forma inmediata las funciones $f_{n_1 n_2 \dots}(z_1 z_2 \dots)$ en las correspondientes a la representación $Z$. En efecto, se tiene:

$$f_{n_1 n_2 \dots}(z_1 z_2 \dots) = \frac{z_1^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{z_2^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} \dots = \Sigma \frac{(c^*_{1s_1} Z_{s_1})^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{(c^*_{2s_2} Z_{s_2})^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} \dots$$

$$= \sum_{m_1 m_2 \dots} \delta^{n_1 n_2 \dots}_{m_1 m_2 \dots} \frac{Z_1^{m_1}}{\sqrt{m_1!}} \frac{Z_2^{m_2}}{\sqrt{m_2!}} \dots = \sum_{m_1 m_2 \dots} \delta^{n_1 n_2 \dots}_{m_1 m_2 \dots} f_{n_1 n_2 \dots}(Z_1 Z_2 \dots) \tag{3. 1}$$

$$\text{con} \quad \Sigma\, m_i = \Sigma n_j = N.$$

Nos interesa dar una representación adecuada de los coeficientes $\delta^{n_1 n_2 \dots}_{m_1 m_2 \dots}$ de este desarrollo. Se tiene que:

$$\delta^{n_1 n_2 \dots}_{m_1 m_2 \dots} = \frac{1}{(2\pi i)^N} \sqrt{\frac{m_1!\, m_2! \dots}{n_1!\, n_2! \dots}} \oint \dots$$

$$\oint \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2} \dots}{Z_1^{m_1+1} Z_2^{m_2+1} \dots} dZ_1\, dZ_2 \dots \tag{3. 2}$$

Observamos ahora, que si formamos el desarrollo:

$$\frac{Z_1^{m_1}}{\sqrt{m_1!}} \frac{Z_2^{m_2}}{\sqrt{m_2!}} \cdots = \sum_{n_1 n_2 \ldots} \delta^{m_1 m_2 \ldots}_{n_1 n_2 \ldots} \frac{z_1^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \cdot \frac{z_2^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} \cdots$$

$$\text{con } \Sigma n_j = \Sigma m_i = N$$

resulta:

$$\delta^{m_1 m_2 \ldots}_{n_1 n_2 \ldots} = \delta^{*\, n_1 n_2 \ldots}_{m_1 m_2 \ldots} = \frac{1}{(2\pi i)^N} \sqrt{\frac{n_1!\, n_2! \ldots}{m_1!\, m_2! \ldots}} \oint \cdots$$

$$\oint \frac{Z_1^{m_1} Z_2^{m_2} \ldots}{z_1^{n_1+1} z_2^{n_2+1} \ldots} dz_1\, dz_2 \ldots \qquad (3.3)$$

La transformación canónica $Y, Z \longrightarrow P, Q$ es la inversa de $P, Q \longrightarrow Y, Z$ análoga a la tratada en el § 2, puesto que en la representación $P . Q$ las autofunciones del campo son:

$$g_{n_1 n_2 \ldots} (X_1 X_2 \ldots) = e^{-\frac{1}{2} X_1^2} H_{n_1} (X_1)\, e^{-\frac{1}{2} X_2^2} H_{n_2} (X_2) \ldots \qquad (3.4)$$

$$\text{con } X_j = 2\pi \sqrt{\frac{v_i}{h}}\, Q.$$

§ 4.—*Transformación de configuraciones.* Puesto que las funciones $f_{n_1 n_2 \ldots}$ no pueden considerarse como autofunciones del campo, no podemos a priori interpretar al cuadrado del módulo de los coeficientes $\delta^{n_1 n_2 \ldots}_{m_1 m_2 \ldots}$ de (3.1) como la probabilidad de la correspondiente configuración. Demostraremos, sin embargo, que estos coeficientes son los mismos que los del desarrollo (1.6), para los cuales vale la mencionada interpretación.

Sea $S(q, Q)$ el núcleo de la transformación $p, q \longrightarrow P, Q$. Se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(q, Q)\, g_{n_1 n_2 \ldots} (q)\, dq = \Delta_{n_1 n_2 \ldots} (Q). \qquad (4.1)$$

Si $S_2 (Z, Q)$ es el núcleo de la transformación $Y, Z \longrightarrow P, Q$

análogo al dado por (2. 4), teniendo presente las expresiones (2, 3) y (3. 1) se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-i\infty}^{i\infty} S_1(q,z)\, S_2(Z,Q)\, g_{n_1 n_2 \cdots}(q)\, dq\, dZ =$$

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} S_2(Z,Q)\, f_{n_1 n_2 \cdots}(z)\, dZ = \Delta_{n_1 n_2 \cdots}(Q). \qquad (4.2)$$

Comparando esta última con la (4. 1) se obtiene la relación:

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} S_1(q,z).S_2(Z,Q)\, dZ = S(q,Q). \qquad (4.3)$$

Por otra parte, la (3. 1) puede darse en la forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_1(q,z)\, g_{n_1 n_2 \cdots}(q)\, dq = \sum_m \delta^{n_1 n_2 \ldots}_{m_1 m_2 \ldots} \int_{-\infty}^{\infty} S_2^{-1}(Z,Q)\, g_{n_1 n_2 \cdots}(Q)\, dQ.$$

Multiplicando por $S_2(Z,Q')$, integrando respecto a $Z$ y observando que:

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} S_2(Z,Q')\, S_2^{-1}(Z,Q)\, dZ = \delta(Q-Q')$$

llegamos, teniendo presente la (4. 3) y llamando nuevamente $Q$ a $Q'$:

$$\Delta_{n_1 n_2 \cdots}(Q_1 Q_2 \ldots) = \sum_m \delta^{n_1 n_2 \ldots}_{m_1 m_2 \ldots}\, g_{m_1 m_2 \cdots}(Q_1 Q_2 \ldots)$$

Los coeficientes $\delta^{n_1 n_2 \ldots}_{m_1 m_2 \ldots}$ son pues los coeficientes $d^{n_1 n_2 \ldots}_{m_1 m_2 \ldots}$ de (1. 6).

Si tenemos presente las (3. 2) y (3. 3) obtenemos para la probabilidad de la configuración $m_1$, $m_2$, ... asociados a las ondas $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$, ... la expresión:

$$W^{n_1 n_2 \ldots}_{m_1 m_2 \ldots} = \delta^{n_1 n_2 \ldots}_{m_1 m_2 \ldots} \; \delta^{*\, n_1 n_2 \ldots}_{m_1 m_2 \ldots} =$$

$$\frac{1}{(2\pi i)^{2N}} \oint \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2} \ldots}{Z_1^{m_1+1} Z_2^{m_2+1} \ldots} dZ_1 \, dZ_2 \ldots$$

$$\oint \frac{Z_1^{m_1} Z_2^{m_2} \ldots}{z_1^{n_1+1} z_2^{n_2+1} \ldots} dz_1 \, dz_2 \ldots \qquad (4.4)$$

De (3.1) se sigue que $C^*_{st} C_{st}$ da directamente la probabilidad, en el caso de un solo fotón presente en el campo, de observar este fotón en el estado $t$ si inicialmente está referido al estado $s$.

Debe cumplirse, naturalmente, que $\sum\limits_{m} W^{n_1 n_2 \ldots}_{m_1 m_2 \ldots} = 1$, lo que resulta en forma inmediata de (3.1) y (3.3):

$$1 = \sum_m \delta^{n_1 n_2 \ldots}_{m_1 m_2 \ldots} \frac{1}{(2\pi i)^N} \sqrt{\frac{n_1! \, n_2! \ldots}{m_1! \, m_2! \ldots}} \oint$$

$$\frac{Z_1^{m_1} Z_2^{m_2} \ldots}{z_1^{n_1+1} z_2^{n_2+1} \ldots} dz_1 \, dz_2 \ldots = \sum_m \delta^{n_1 n_2 \ldots}_{m_1 m_2 \ldots} \; \delta^{*\, n_1 n_2 \ldots}_{m_1 m_2 \ldots} \qquad (4.5)$$

La representación (3.2) de los coeficientes $\delta^{n \ldots}_{m \ldots}$ permite determinar el valor medio del número de fotones asociados al estado $t$, resultando:

$$\overline{m}_t = \sum_r n_r \, (C^*_{rt} \, C_{rt}) \qquad (4.6)$$

Igualmente, es calculable la dispersión media cuadrática del valor medio ([3]), obteniéndose:

$$\sigma_t^2 = \overline{m}_t + (\overline{m}_t)^2 - \sum_r n_r \, (n_r + 1) \, (C^*_{rt} C_{rt})^2. \qquad (4.7)$$

([3]) La discusión de esta expresión y los desarrollos correspondientes serán publicados próximamente.

## PARTE II

### *Distribución de configuraciones en la radiación de multipolos.*

5. — *Generalidades.* Hemos visto que en el caso de un solo fotón presente en el campo de radiación los coeficientes $\delta n_m$ coinciden con los $C_{rs}$ de (1. 2). Si en un caso determinado se conocen estos coeficientes se podrá atribuir en el proceso de emisión de un fotón cierta expresión a la onda emitida si la excitación está dada en un sistema ortonormal $\vec{A}_r$. Recíprocamente, si se conoce la expresión de la onda emitida $\vec{B}_s$ se podrá determinar la probabilidad de la excitación de una de las $\vec{A}_r$ mediante las cuales es expresable $\vec{B}_s$. Nos referimos a este último caso, siendo $\vec{B}_s$ una onda multipolar (eléctrica o magnética) y $\vec{A}_r$ ondas planas.

El campo de radiación puede ser expresado desarrollando las funciones de campo en ondas esféricas, cada una de las cuales satisface las ecuaciones de Maxwell. Estas soluciones (eléctricas y magnéticas) están caracterizadas por los números enteros $l$ y $m$. El primero caracteriza a la onda emitida por un multipolo (eléctrico o magnético) de orden $2^l$. Los diferentes valores de $m$ corresponden a las distintas posibles orientaciones del polo $2^l$ en el espacio. Si, en particular, se tiene solamente la radiación de un multipolo de orden $2^l$ las restantes ondas esféricas deben considerarse vacías.

El campo de radiación que consideramos, puede también obtenerse expresado en ondas planas, cada una de las cuales está caracterizada por el vector de propagación $\vec{k}$, la frecuencia $v = \frac{c}{2\pi}|k|$ y el vector de polarización $\vec{e}$. Si se establece que una de estas ondas planas está excitada y las restantes vacías, se puede resolver el problema de determinar la probabilidad de la excitación de una onda multipolar dada. Recíprocamente, puede plantearse el problema de determinar la distribución de un fotón, que inicialmente está asociado a una onda multipolar, sobre las ondas planas mediante las cuales aquélla es expresable. Esto último equivale a determinar la probabilidad que un fotón es emitido por un multipolo en cierta dirección dada por $\vec{k}$. Ambos problemas son equivalentes y se resuelven (§ 4) hallando los coeficientes de la transformación unitaria onda plana-ondas esféricas y recíprocamente, onda esférica-ondas planas.

Se tendrá en general:

$$\vec{A} = \sum_l \sum_{m=-l}^{+l} a_l^m \vec{A}_l^m = \int \bar{b}(k, u, v) \vec{e}(u, v) e^{i(\vec{k}\vec{r})} k^2 \, dk \operatorname{sen} u \, du \, dv. \quad (5.1)$$

Una onda plana será expresable

$$b(k\, u\, v) \vec{e} e^{i(\vec{k}\vec{r})} = \sum_l \sum_{m=-l}^{+l} C_l^m (k\, u\, v) A_l^m (r, \vartheta, \varphi) \quad (5.2)$$

O bien, cada solución esférica:

$$A_l^m (r\, \vartheta\, \varphi) = \int C^*{}_l^m (k\, u\, v) \vec{e} (u\, v) e^{i\vec{k}\vec{r}} k^2 \, dk \operatorname{sen} u \, du \, dv \quad (5.3)$$

siendo $k$, $u$ y $v$ las coordenadas polares del vector $\vec{k}$.

En (5.2), $|C_l^m (k\, u\, v)|$ da la probabilidad que el fotón asociado a la onda plana definida por $k, u$ y $v$ esté asociado a la onda esférica $A_l^m$. En (5.3) el mismo valor define la probabilidad que un fotón emitido por un multipolo $l$, $m$ sea emitido en un ángulo sólido $dw = \operatorname{sen} u \, du \, dv$. Si, por otra parte, suponemos que la radiación emitida es monocromática, la (5.3) se convierte en:

$$A_l^m (r\, \vartheta\, \varphi) = \int C^*{}_l^m (u, v) \vec{e} (u\, v) e^{i\vec{k}\vec{r}} dw \quad (5.4)$$

y tendremos, así, definida la probabilidad que el fotón sea emitido según la dirección dada por $u$ y $v$.

§ 6. — *Soluciones esféricas expresadas en ondas planas.* Sean $r, \vartheta, \varphi$ las coordenadas polares de un lugar del espacio y $k, u, v$ las coordenadas polares del vector de propagación $\vec{k}$. $\vartheta$ y $u$ forman dos lados de un triángulo esférico cuyo tercer lado $\alpha$ cumple:

$$\cos\alpha = \cos\vartheta\cos u + \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen} u\cos(\varphi - v). \tag{6.1}$$

Teniendo en cuenta la fórmula de Rayleigh:

$$e^{ik.r\cos\alpha} = \Sigma\, i^l (2l+1)\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\, J_{l+1/2}(kr)\, P_l(\cos\alpha)$$

la (6.1) y el teorema de adición de las funciones esféricas se llega:

$$e^{i(\vec{kr})} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l} 4\pi\, i^l \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}$$

$$J_{l+1/2}(kr)\, P_l^m(\cos\vartheta)\frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} P_l^m(\cos u)\frac{e^{-imv}}{\sqrt{2\pi}} \tag{6.2}$$

en donde $P_l^m$ son las funciones esféricas $P_l^m$ normalizadas.

La anterior permite escribir, teniendo en cuenta la ortogonalidad de las funciones $Y^*{}_l^m(u\,v) = P_l^m(\cos u)\dfrac{e^{-imv}}{\sqrt{2\pi}}$:

$$\frac{i^{l+2}}{4\pi}\int Y_l^m(u\,v)\, e^{i(kr)}\operatorname{sen} u\, du\, dv = \chi_l(kr)\, Y_l^m(u\,v) \tag{6.3}$$

siendo:

$$\chi_l(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{l+1/2}(kr)$$

Recordando que en el campo de radiación $\vec{A} = \dfrac{i}{k}\vec{E}$, siendo $\vec{E}$ el vector eléctrico del campo se tiene:

$$(A_z)_l^m = \frac{i}{k}[(E_r)_l^m\cos\vartheta - (E_\vartheta)_l^m\operatorname{sen}\vartheta].$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(A_x \pm iA_y)_l^m =$$

$$\frac{i}{\sqrt{2k}}[(E_r)_l^m\operatorname{sen}\vartheta + (E_\vartheta)_l^m\cos\vartheta \pm i\,(E_\varphi)_l^m]\, e^{\pm i\varphi}$$

en donde $(E_r)_l^m$, $(E\ )_l^m$, $(E_\varphi)_l^m$ son las componentes del campo eléctrico de una onda multipolar eléctrica en coordenadas esféricas dadas por Debye [4]. De aquí se obtienen las expresiones [5]:

$$(A_z)_l^m = \beta \left\{ \left( \frac{l(l+m+1)(l-m+1)}{(l+1)(2l+1)(2l+3)} \right)^{1/2} X_{l+1}(kr)\, Y_{l+1}^m(\vartheta, \varphi) + \left[ \frac{(l+1)(l+m)(l-m)}{l(2l-1)(2l+1)} \right]^{1/2} X_{l-1}(kr)\, Y_{l-1}^m(\vartheta, \varphi) \right\}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(A_x + iA_y)_l^m = \beta \left\{ \left[ \frac{l(l+m+2)(l+m+1)}{2(l+1)(2l+1)(2l+3)} \right]^{1/2} X_{l+1}(kr)\, Y_{l+1}^{m+1}(\vartheta, \varphi) - \left[ \frac{(l+1)(l-m)(l-m-1)}{2l(2l-1)(2l+1)} \right]^{1/2} X_{l-1}(kr)\, Y_{l-1}^{m+1}(\vartheta, \varphi) \right\}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(A_x - iA_y)_l^m = -\beta \left\{ \left[ \frac{l(l-m+2)(l-m+1)}{2(l+1)(2l+1)(2l+3)} \right]^{1/2} X_{l+1}(kr)\, Y_{l+1}^{m+1}(\vartheta, \varphi) + \left[ \frac{(l+1)(l+m)(l+m-1)}{2l(2l-1)(2l+1)} \right]^{1/2} X_{l-1}(kr)\, Y_{l-1}^{m-1}(\vartheta, \varphi) \right\} \qquad (6.4)$$

donde $\beta$ es un factor numérico independiente de $l$ y $m$.

Estas expresiones del vector potencial resultan combinaciones lineales de las (6.2). Se puede, así, expresar:

$$\vec{A}_l^m = \int \vec{R}_l^m(u, v)\, e^{i\vec{k}r}\, dw = \int |R_l^m(u\, v)|\, \vec{e}(u, v)\, e^{i(\vec{k}r)}\, dw \qquad (6.5)$$

la que en relación con la (5.3) nos da:

$$C_l^m(u, v) = |R_l^m(u, v)|$$

---

(4) Ver p. e. M. Born, Optik (Julius Springer, Berlin, 1933) p. 278.

(5) Se emplean algunas relaciones de recurrencia entre funciones esféricas que figuran en el artículo de H. Bethe, *Handb, der Phys.* T. 24.1 Berlín, 1933, § 65.

y siendo:

$$(R_z)_l^m = i^l \left\{ \left[ \frac{l(l+m+1)(l-m+1)}{(l+1)(2l+1)(2l+3)} \right]^{1/2} Y_{l+1}^{m}(u,v) - \left[ \frac{(l+1)(l+m)(l-m)}{l(2l-1)(2l+1)} \right]^{1/2} Y_{l-1}^{m}(u,v) \right\}$$

$$(R_{x+iy})_l^m = i^l \left\{ \left[ \frac{l(l+m+2)(l+m+1)}{2(l+1)(2l+1)(2l+3)} \right]^{1/2} Y_{l+1}^{m+1}(u,v) + \left[ \frac{(l+1)(l-m)(l-m-1)}{2l(2l-1)(2l+1)} \right]^{1/2} Y_{l-1}^{m+1}(u,v) \right. \quad (6.6)$$

$$(R_{x-iy})_l^m = i^l \left\{ - \left[ \frac{l(l-m+2)(l-m+1)}{2(l+1)(2l+1)(2l+3)} \right]^{1/2} Y_{l+1}^{m-1}(u,v) - \left[ \frac{(l+1)(l+m)(l+m-1)}{2(2l-1)(2l+1)} \right]^{1/2} Y_{l-1}^{m-1}(u,v) \right\}$$

En forma análoga, empleando las soluciones esféricas magnéticas se llega:

$$(A_z)_l^m = \beta \frac{m}{\sqrt{l(l+1)}} X_l \, . \, Y_l^m(u,v) \qquad (6.7)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (A_x + iA_y)_l^m = \beta \left( \frac{(l+m+1)(l-m)}{2l(l+1)} \right)^{1/2} X_l(kr) \, Y_l^{m+1}(\vartheta, \varphi)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (A_x - iA_y)_l^m = \beta \left( \frac{(l-m+1)(l+m)}{2l(l+1)} \right)^{1/2} X_l(kr) \, Y_l^{m-1}(\vartheta, \varphi)$$

con los correspondientes coeficientes:

$$(R_z)_l^m = i_{l-1}^{l} \frac{i^{l-1} m}{\sqrt{l(l+1)}} Y_l^m(u,v)$$

$$(R_{x+iy})_l^m = i^{l-1} \left( \frac{(l+m+1)(l-m)}{2l(l+1)} \right)^{1/2} Y_l^{m+1}(u,v) \qquad (6.8)$$

$$(R_{x-iy})_l^m = i^{l-1} \left( \frac{(l-m+1)(l+m)}{2l(l+1)} \right)^{1/2} Y_l^{m-1}(u,v).$$

§ 7. — *Probabilidad de las distribuciones de un fotón multipolar.* Mediante la (6.5) podemos construir la (5.1) y de ello obtenemos:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} a_l^m \, | \vec{R}_l^m (u, v) | = b\,(u, v). \tag{7.1}$$

Puede demostrarse que la (6.6), así como la (6.7) forman un sistema completo de funciones ortogonales normalizadas. Se obtiene así la expresión correspondiente a la (1.3)

$$a_l^m = \int | \vec{R}_l^m (u, v) \, b(u, v) \, dw \tag{7.2}$$

Según se ha demostrado en el § 4, la (7,2) nos permite calcular la probabilidad que un multipolo de orden $2^l$, con una orientación dada por $m$, emita un fotón en la dirección dada por $u, v$ mediante:

$$| C_l^m (u, v) |^2 = (\vec{R}^*{}_l^m (u, v) \,.\, \vec{R}_l^m (u, v)).$$

Para dipolos $l = 1$ se obtiene:

$$m = 0 \qquad | C_1^0 |^2 = \frac{3}{4} \operatorname{sen}^2 u. \tag{7.3}$$

$$m = \pm 1 \quad | C_1^{\pm 1} |^2 = \frac{3}{8} (1 + \cos^2 u).$$

Para cuadrupolos $l = 2$:

$$m = 0 \quad | C_2^0 |^2 = \frac{15}{16} \operatorname{sen}^2 2\,u$$

$$m = \pm 1 \quad | C_2^{\pm 1} |^2 = \frac{5}{8} (\cos^2 u + \cos^2 2u) \tag{7.4}$$

$$m = \pm 2 \quad | C_2^{\pm 2} |^2 = \frac{5}{8} \left(\operatorname{sen}^2 u + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 2u\right).$$

Para un número $n$ de fotones emitidos por el multipolo $l, m$ el valor medio observable en la dirección $u, v$ está dado, según (4.6) por $n|\vec{R}_l^m(u,v)|^2$. Las fluctuaciones quedan determinadas según la (4.7) por $n|\vec{R}_l^m|^2(1-|\vec{R}_l^m|^2)$. Puesto que la intensidad de la radiación es proporcional al número de fotones asociados, la expresión obtenida para el valor medio debe ser proporcional a la intensidad de la radiación. En efecto: las (7.3) dan una distribución angular de la intensidad de la radiación que coincide con la conocida para dipolos. Las (7.4) coinciden, también con las expresiones dadas por Rubinowcz (6).

Con placer agradezco al Prof. G. Beck algunas discusiones referentes a este trabajo.

(Recibido el 15 de marzo de 1949).

(6) A. Rubinowicz, Zeits. für Phys. *61*, 338 (1930).

# ASOCIACION FISICA ARGENTINA

## DECIMO TERCERA REUNION DE LA ASOCIACION FISICA ARGENTINA

Celebrada en el Instituto de Física de Buenos Aires los días 23 y 24 de mayo de 1949. Presidentes de las reuniones: sucesivamente los Dres. RICARDO GANS y TEÓFILO ISNARDI, el Ing. ERNESTO E. GALLONI, el Dr. HÉCTOR ISNARDI y el Ing. GALLONI

### INFORMES

GUIDO BECK (Observatorio Astronómico, Córdoba): *Progresos recientes en el conocimiento de la estructura del electrón.* (Apareció en *Ciencia e Investigación, 5,* 231 (1949)).

JORGE SAHADE (Observatorio Astronómico, Córdoba): *Las estrellas Wolf-Rayet* (Aparecerá en *Ciencia e Investigación*).

ALBERTO GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ (Universidad de Buenos Aires): *Funciones singulares de la física.* (Aparecerá en esta revista).

ANTONIO RODRÍGUEZ (Universidad de La Plata): *Estado actual de la teoría de los líquidos.*

### RESÚMENES DE LAS COMUNICACIONES

K. FRÄNZ (Buenos Aires): *Una generalización, para impedancias, del teorema de Foster y su aplicación al ancho de la banda de frecuencias de una antena.*

Entre todas las impedancias que en un intervalo dado de frecuencia poseen una parte real dada, ninguna tiene una disminución más grande de la parte imaginaria en función de la frecuencia, que la función comparativa positiva caracterizada en el intervalo dado por una parte real igual a la dada, y fuera del mismo, por una parte real nula. Siendo una función potencial, tal función comparativa puede ser determinada por diversos procedimientos conocidos. Existen impedancias que admiten cualquier grado de aproximación a la función comparativa.

Aplicando este teorema al problema de la adaptación de antenas a cables, resulta una limitación de la banda de las frecuencias que pueden ser emitidas por la antena. Sea por ejemplo $\omega_{\text{máx}}$ la frecuencia máxima emitida y $\omega_{\text{mín}}$ la frecuencia mínima, y $d$ el amortiguamiento de un dipolo; resulta para la banda el valor

$$\frac{\omega_{\text{máx}} - \omega_{\text{mín}}}{\omega_{\text{máx}} - \omega_{\text{mín}}} < \frac{d}{\pi}.$$

A. González Domínguez (Universidad de Buenos Aires): *Relaciones módulo-fase en un intervalo finito de frecuencias.*

Teorema I. — *Si se conoce el módulo de una transferencia* de un circuito lineal pasivo en un intervalo finito de frecuencias $\omega_1 \leqq \omega \leqq \omega_2$, *y se sabe, además, que en el intervalo complementario el módulo es menor o igual que* 1, *entonces la fase de la transferencia está determinada, en el intervalo* $\omega_1 \leqq \omega \leqq \omega_2$, *a menos de una función decreciente de la frecuencia.*

Como corolario resulta el

Teorema II. — *En la banda pasante de un filtro lineal la fase* es función decreciente de la frecuencia.

Los teoremas anteriores tienen correlativos para impedancias.

Teorema III. — *Si se conoce la resistencia* $R(\omega)$ *de un dipolo en un intervalo* $\omega_1 \leqq \omega \leqq \omega_2$, *la reactancia está determinada en el mismo intervalo, a menos de una función no decreciente de la frecuencia.*

Teorema IV. — *Si la resistencia de un dipolo se anula en un intervalo, la reactancia en ese intervalo es función no decreciente de la frecuencia.*

Como corolario de los teoremas III y IV, resulta el siguiente

Teorema V. — *Entre todas las impedancia de resistencia* $R(\omega)$ *prefijada en el intervalo complementario es tal que la curva de reactancia tiene, para todo punto del intervalo, tangente mínima.*

Este teorema pertenece al Profesor K. Fränz (*Elektrische Nachrichten-Technik*, 20, (1943), pp. 113-115), quien ha hecho de él importantes aplicaciones al diseño de antenas.

Teófilo Isnardi, Juan T. D'Alessio y Detlef A. Aberle (Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Buenos Aires):
*Un nuevo cuerpo decolante para medir tensión superficial.*

En el método de Lenard para medir tensión superficial se utiliza un estribo, cuya ejecución es difícil. Para salvar esta dificultad lo hemos sustituído por una lámina de plata de 0,07 mm. de espesor, de 3 cm. de largo y 1 cm. de ancho, que lleva lateralmente dos alambres de 0,4 mm. de diámetro para limitar la película y darle estabilidad. El perfil inferior de la lámina es rectangular, de ancho constante.

Con una balanza analítica adaptada a estas mediciones (J. T. D'Alessio, Tesis, Inst. de Fís. de Bs. As.) se mide la fuerza $P$ que ejerce la película líquida sobre la lámina colocada verticalmente; al elevársela gradualmente $P$ aumenta hasta alcanzarse un valor máximo, que corresponde al «primer máximo» del estribo de Lenard. La teoría de la lámina que proponemos conduce fácilmente a la fórmula

$$\alpha = \frac{P}{2l} - \frac{b}{2}\left(\sqrt{2\alpha s} - \frac{2\alpha}{l}\right)$$

($\alpha$ = tensión superficial, $l$ y $b$ = longitud y espesor de la lámina respectivamente, $s$ = peso específico del líquido).

Hemos obtenido con benzol especialmente purificado y toluol pro análisis Merck valores que coinciden al 0,1 % con los mejores datos de la bibliografía. (Véase D. A. Aberle, Tesis. Inst. de Fís. de Bs. As. para más detalles).

Teófilo Isnardi, Juan T. D'Alessio y Detlef A. Aberle (Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Buenos Aires):
*Una nueva utilización del método de arranque para medir tensión superficial.*

Con la lámina metálica que proponemos (véase el trabajo anterior) y la balanza analítica adaptada, hemos obtenido curvas de $P$, la fuerza que ejerce la película líquida sobre la lámina metálica, en función de la altura $h$, obteniendo valores estables de $P$ más allá del primer máximo.

Las curvas presentan las siguientes características: hasta el primer máximo la variación de $P$ con $h$ es lineal, lo cual está de acuerdo con la teoría de la lámina que hemos desarrollado (D. A. Aberle, Tesis. Inst. de Fís. de Bs. As.). Después de este valor máximo $P$ disminuye varios milígramos hasta que se alcanza un valor estable $(\overline{P})$ que resulta sensiblemente independiente dé la altura y que corresponde probablemente al estado de la lámina líquida en que sus dos superficies se han acercado tanto que su peso es despreciable.

La tensión superficial puede calcularse con la fórmula simple $d = \frac{\overline{P}}{2l}$ ($l$ longitud de la lámina), pues los otros términos de corrección resultan ahora despreciables. Los valores de $\alpha$ con toluol y benzol obtenidos con primer máximo y con el segundo valor estable $(\overline{P})$ concuerdan entre sí y con los mejores de la literatura al 0,1 %.

Esta nueva utilización del método de arranque presenta muchas ventajas sobre la que emplea el primer máximo.

## DISCUSION DE LOS DOS TRABAJOS ANTERIORES

Sr. Kowalewsky: La fórmula de Lenard, ¿se aplica a anillos como los del tensiómetro de du Nöuy?

Sr. Aberle: Para este cuerpo decolante se usan las tablas empíricas de corrección de Harkins y Jordan.

Sr. D'Alessio: Lenard dedujo una ecuación semejante para anillos, pero sólo es aproximada. La forma de la película líquida en anillos es muy complicada, y la integración de la ecuación de Laplace sólo se ha hecho con aproximaciones. En cambio, la teoría del estribo no ofrece dificultades.

Sr. Gans: ¿No han tenido inconvenientes para formar películas con agua?

Sr. Aberle: Los hemos tenido mayores con benzol.

Sr. D'Alessio: Por supuesto que es necesario tomar todas las precauciones habituales de purificación y renovación de la superficie; pero las películas de agua son más estables que las de benzol.

Sr. Gaviola: ¿No convendría usar una esfera como cuerpo de arranque?

Sr. D'Alessio: No tiene ventajas sobre el estribo de Lenard o la lámina que proponemos, pues con estos últimos cuerpos uno de los radios de curvatura de la película líquida se hace infinito. La teoría de una esfera en contacto con un líquido se ha hecho con aproximaciones a fines del siglo pasado.

Sr. Dawson: ¿No es mejor que la lámina termine en un canto cilíndrico en vez de plano?

Sr. D'Alessio: Por el contrario, nos asemejaríamos al alambre del estribo de Lenard, pero con un radio de curvatura peor definido.

H. J. Schumacher (Buenos Aires) *El espectro de bandas y el calor de disociación del BrF.*

Se registró el espectro del $BrF$ con un espectrógrafo Zeiss de tres prismas, $f$ (cámara) $= 87$ cm.; dispersión 12 Å/mm.

Se estableció el esquema de los cantos y la fórmula de bandas correspondiente. Mediante extrapolación gráfica de los cuanta de vibración se pudo determinar la energía de disociación del término superior y, mediante adición del número de ondas de la banda O, O el límite del sistema.

Para la energía de disociación del $BrF$ se obtienen diferentes valores, según que se suponga una disociación en $F$ excitado y $Br$ normal o en $F$ normal y $Br$ excitado. Los valores hallados son

$$D_{BrF} = 59.9 \text{ kcal} \pm 1\ \% \quad \text{y}$$

$$D_{BrF} = 50.3 \text{ kcal} \pm 1\ \%, \text{ respectivamente, por mol.}$$

Este trabajo fué realizado en colaboración con el Dr. P. H. Brodersen.

J. A. Balseiro (Instituto de Física, La Plata): *Transformación de de configuraciones de campos con estadística de Fermi.*

La función que describe un campo de partículas que responden a la estadística de Fermi, puede ser referida a dos sistemas de funciones ortogonales. Dada una distribución de configuraciones referida al primer sistema, se resuelve el problema de determinar la probabilidad de una determinada distribución referida al segundo sistema.

J. F. WESTERKAMP (Instituto de Física, Buenos Aires): *Sobre la conservación de la energía en la difusión de la luz.*

Experiencias de Lennuier sobre difusión de luz de frecuencia $\nu < \nu_0$, han puesto en evidencia la aparición, en la luz difundida, de una línea de la frecuencia de resonancia $\nu_0$ del átomo emisor. Se muestra que este hecho está de acuerdo con las ideas corrientes sobre la estructura de la radiación, y que en teoría cuántica, la conservación de la energía en el fenómeno considerado hace intervenir la indeterminación de la energía debida a las condiciones iniciales de la experiencia.

## DISCUSIÓN

Sr. Beck: No estoy conforme con la interpretación que se dá al $\Delta\varepsilon$. Aquí, lo verdaderamente importante es la energía $\varepsilon_k - \varepsilon_i - h\nu$ y no la $\Delta\varepsilon$, que es mucho menor. Deseo señalar, además, que estas experiencias de Cabannes y Lennuier permiten ver con mucha claridad la importancia de las ideas de Bohr sobre complementaridad. Además, la interpretación propuesta explica también lo que encontró Lennuier: que la línea $\nu_0$ aparece con sus caracteres propios, su ancho, y la de difusión $\nu_1$, con el suyo de incidencia.

Sr. Gaviola: Convendría destacar el significado del concepto de complementaridad, porque parecería que existe un lenguaje especial para interpretar estos hechos, lenguaje que no coincide con el corriente. ¿A qué se debe la incerteza? ¿A la diferencia $\varepsilon_k - \varepsilon_i$?

Sr. Westerkamp: A ella y al hecho de que no podemos decir que «al tiempo $t = 0$ el átomo está en el estado fundamental». Es decir, a la imprecisión con que se formulan las condiciones iniciales.

Sr. Beck: En la teoría cuántica, las nociones de incerteza y de complementaridad han sido introducidas para obtener un lenguaje libre de contradicciones y paradojas; si se quieren formar imágenes más detalladas que las limitadas por las relaciones de Heisenberg ,se llega a contradicciones y paradojas. En este caso, al tiempo $t=0$ queremos que la configuración electrónica del átomo sea la misma que la de un átomo en el estado fundamental en el vacío. Y lo que se demuestra es que, si $\nu_1$ es muy próxima a una resonancia del átomo, el estado no estacionario puede obtenerse superponiendo dos estados estacionarios.

F. García Olano (Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Buenos Aires): *Ecuación de estado de los sólidos.*

Partiendo de las fórmulas establecidas por Murnaghan en su traabjo «Finite deformations of an elastic solid», *Journal of Am. Math.* 1932, se establece la relación que liga la variación de volumen con una presión hidrostática. Se comparan los resultados con los valores experimentales de Bridgmann y con la solución aproximada propuesta por el autor en la XIª reunión de la A. F. A.

En cuanto a la variación de volumen y del coeficiente de compresibilidad con la temperatura, el autor llega a la conclusión de que no es posible establecer relaciones simples y únicas.

El autor elige las fórmulas, que a su juicio, son las más sencillas que dan resultados suficientemente aproximados.

J. Sahade y J. Landi Dessy (Observatorio de Córdoba): *Estudio espectrográfico de la estrella CPD* - 61º 669.

La estrella CPD - 61º 669 fué anunciada como binaria espectroscópica en 1930 por Neubauer. El estudio espectrográfico realizado mediante placas obtenidas en Bosque Alegre confirma la amplitud en velocidad radial encontrada por Neubauer y ha permitido determinar el período de variación y los elementos orbitales que corresponden a la curva de velocidades.

A. Balseiro (Instituto de Física, La Plata): *Fluctuaciones en los campos cuánticos estacionarios.*

Se resuelve el problema de las fluctuaciones del número de partículas asociadas a un estado dado. Se consideran las fluctuaciones correspondientes a partículas de estadística de Bose y de Fermi, y se obtienen expresiones comparables a las conocidas para el caso de equilibrio termodinámico.

D. Canals Frau (Observatorio Astronómico, Córdoba): *Resultados Preliminares de la Exposición de Placas "Nuclear Research" a 2.100 m de Altura, con y sin Absorbente.*

Dos cajas de cobre (con paredes de 0,1 mm. de espesor) conteniendo 2 placas (de 9 x 12 cm.) «Ilford Nuclear Research» C2 cada una, fueron expuestas durante 6 semanas a 2.100 m. de altura en «El Cóndor», Pampa de Achala, Provincia de Córdoba; una de ellas bajo 4 m. de agua. Otra media placa, en una caja similar, fué dejada durante el mismo tiempo en Córdoba (400 m. de altura) a manera de control. El estado actual del recuento del número de «estrellas» (rupturas nucleares) de tres o más ramas, por cm. cuadrado de superficie de emulsión, dá una frecuencia de: 27,4 para la placa de control (I); 33,3 para las placas a 2.100 m. sin absorbente (II) y 37,4 para las placas a 2.100 m y bajo 4 m de agua (III). Esto da, con respecto a la placa de control, por cm. cúbico y día una frecuencia de 27,8 estrellas para la diferencia II-I y 48,1 estrellas para la diferencia III-I. El error medio del promedio es de alrededor de 9 estrellas por cm. cúbico y día. Una misma superficie de una de las placas fué examinada dos veces, obteniéndose valores de la frecuencia que difieren de su media aritmética en 1,6 %.

V. J. Kowalewski (Instituto de Medicina Experimental, Univ. de Buenos Aires): *Dosímetro para radiación X.*

Se describe un instrumento para la medición de la intensidad de un haz de rayos X en base a sus efectos ionizantes. Se mide la ionización producida por el haz en una cámara de ionización tipo dedal mediante un amplificador electrométrico. Las lecturas se efectúan directamente en unidades r/min. El instrumento funciona directamente con la corriente alternada de 220 voltios, siendo insensible a las variaciones habituales de dicha tensión. Se observan las dificultades técnicas encontradas.

A. González Domínguez (Universidad de Buenos Aires): *Sobre el transitorio en filtros.*

Teorema I. — *Si la transferencia de un circuito lineal pasivo es tal que su módulo vale la unidad en un intervalo $\omega_1 \leqq \omega \leqq \omega_2$, la respuesta del circuito a la tensión unitaria no es monótona.*

Teorema II. — *Sea*

$$t(\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega t} F(t)\, dt, \qquad \left(F(t) \geqq 0 \quad \int_0^\infty F(t)\, dt = 1\right),$$

la transferencia de un circuito lineal. Admitimos que $t''(\omega)$ sea absolutamente integrable y de variación acotada en $(-\infty, \infty)$. Definamos el tiempo de retardo $t_r$ y el tiempo de formación $t_f$ por los números

$$t_r = \int_0^\infty t\, F(t)\, dt, \qquad t_f^2 = \int_0^\infty (t - t_r)^2\, F(t)\, dt.$$

Se verifica entonces:

$$t_r \leqq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |t''(\omega)|\, d\omega,$$

$$t_f \leqq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |t'''(\omega)|\, d\omega.$$

El teorema I nos da una indicación acerca del «precio» que debe pagarse para obtener una transferencia *exactamente* igual a 1 en toda la banda pasante (a saber, la desagradable falta de monotonía de la respuesta).

El teorema II proporciona, para los importantes números $t_r$ y $t_f$, acotaciones, en función de la transferencia, más finas (si bien menos manejables), que las usuales.

A. A. Cicchini, H. Mejer, G. Schwachheim, A. Wataghin (Departamento de Física, Facultad de Filosofía, Ciencias y Letras de São Paulo, Brasil) : *Influencia de los duplos knock-on en el registro de los showers penetrantes.*

Con una disposición de dos telescopios verticales (1) se estudió la influencia de los electrones duplos knock-on en el registro de showers penetrantes; buscando la máxima intensidad de éstos. Para ello se varió la separación $\Delta$ y el espesor $e$ de plomo entre los dos telescopios (*).

El método consiste en determinar la frecuencia de los duplos knock-on mediante la de los simples, producidos por los mesones que atraviesan un telescopio. En la disposición de Wataghin la frecuencia de los duplos knock-on es:

$$f = 2(N_{123}/N_{23})^2 \, . \, F.$$

Donde:

$N_{23}$ = coincidencias dobles, frecuencia de mesones.

$N_{123}$ = coincidencias triples, que admitiremos como debidas a simples knock-on.

$F$ = frecuencia de showers penetrantes en una disposición de Wataghin de idéntica geometría: uno por hora (2).

Los resultados son un límite superior, porque despreciamos en $N_{123}$ la contribución de los showers penetrantes y también la de los electrones knock-on debidos a mesones diagonales que son registrados por los conjuntos (I) y (III).

Las curvas $N_{123} = f_1(e)$ y $f = f(e)$ tienen al comienzo un descenso brusco y luego son prácticamente lineales. Interpretamos esta parte como una absorción de mesones.

Para $\Delta = 10{,}4$ cm. y $e = 9{,}77$ cm. se obtuvo $f = 0{,}81 \pm 0{,}01$ %.

---

(1) G. Wataghin. Phys. Rev. 71-453 - 1947.

(*) Los grupos de contadores (II) y (III) forman un telescopio vertical y (I) está en linea horizontal con (II) separado en $\Delta$ cm.. El sistema está totalmente rodeado por 20 cm. de plomo.

(2) H. A. Mejer, G. Schwachheim, A. Wataghin, Phys. Rev. 74-975 - 1948.

## CRONICA DE LA DECIMO TERCERA REUNION DE LA A.F.A.

Buenos Aires, 23 y 24 de Mayo de 1949

El buen éxito de una reunión más de la A. F. A. ya no sorprende. Nos vamos acostumbrando a ello. La décimotercera se destacó por la calidad, cantidad y constancia del auditorio (asistieron 67 personas a la 1ª. sesión y 63 a la última) y por el alto porcentaje de comunicaciones e informes de satisfactorio nivel científico. La participación del Dr. Alberto González Domínguez fué destacada: su meduloso informe, conteniendo mucho de presentación original, y sus comunicaciones fueron atentamente seguidos por el auditorio a pesar de los muchos signos de integral. El informe del Dr. Guido Beck sobre el desarrollo reciente de la teoría del electrón, al que él mismo ha contribuído, desarrollo que ha culminado con el trabajo de Schwinger de fines del año pasado, abriendo nuevas fronteras a la interacción entre el «vacío» y las partículas elementales, fué ciertamente interesante. (Comentario del Ing. Galloni: «Un nuevo éter está siendo creado»).

Tuvimos la satisfacción de saludar a dos nuevos socios activos, los doctores Hans Joaquim Schumacher y Kurt Fränz, quienes hicieron honor a su categoría presentando sendas interesantes comunicaciones originales.

El doctor Teófilo Isnardi fué elegido presidente y los doctores Ricardo Gans, Guido Beck, E. Galloni y Héctor Isnardi vicepresidentes de la reunión. La Dra. Estrella de Mathov actuó como secretaria y el Dr. José Westerkamp como taquígrafo.

Se resolvió que la 14ª Reunión se efectuase en La Plata, en septiembre de 1949.

Amables comidas en casa de los esposos Galloni, Westerkamp y Mathov y una brillante cena de despedida en el Club Universitario facilitaron el contacto personal informal, parte importante de las reuniones científicas.

*E. Gaviola*

# SOBRE LOS ESPACIOS ECARTIZADOS REGULARES $\alpha$.

por MANUEL BALANZAT [1]

M. Fréchet [2] ha definido una clase de espacios abstractos, los espacios ecartizados, más generales que los espacios métricos, y que se obtienen reemplazando el número real que expresa la distancia entre dos puntos de un espacio métrico, por un *ecart abstracto,* es decir, por un elemento de un conjunto ordenado cualquiera. Los espacios así obtenidos son efectivamente más generales que los espacios métricos [3] y conservan bastantes propiedades de estos últimos; en particular se prestan a una extensión del concepto de continuidad uniforme.

La extensión de la continuidad uniforme a espacios más generales que los métricos fué realizada por primera vez por A. Weil [4]. El método de M. Fréchet consigue la obtención de dichos resultados por un camino más natural e intuitivo, de forma que las demostraciones obtenidas son la extensión natural de las demostraciones clásicas en el caso de la recta euclidiana; en particular no hay necesidad de introducir el espacio producto, que es esencial en la teoría de Weil, y que no se presentaba

---

(1) Un resumen de los resultados de la presente nota fué presentado al Congreso del año 1947 de la "Association Française pour l'avancement des Sciences".

(2) M. FRÉCHET, *De l'écart numérique à l'écart abstrait* ("Portugaliae Mathematica", vol. 5, 1946, págs. 121-131).

(3) M. BALANZAT, *Sur la formation des espaces à écart régulier et symétrique* (La Revue Scientifique, nº 3288, 1948, pág. 34).

(4) A. WEIL, *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale* (Actualités scientifiques et industrielles, nº 551, Editorial Hermann, París, 1937).

en las demostraciones anteriores sobre continuidad uniforme en los espacios métricos.

Un espacio ecartizado queda definido por un conjunto de elementos, los puntos del espacio, y un conjunto ordenado, la *escala* de écarts, de forma tal que a cada par de puntos $a, b$ del espacio corresponda un elemento de la escala $\xi=(a, b)$. Para obtener una generalización de las condiciones impuestas a la distancia en el caso de los espacios métricos se supone que la escala tiene un primer elemento 0 y carece de segundo elemento. Entonces se establece que $(a, b)=0$, si y sólo si $a=b$. Como en el caso de los espacios métricos la condición de simetría es $(a, b)=(b, a)$.

Un esferoide de centro $a$ (punto del espacio) y radio $\xi$ (elemento de la escala) es, naturalmente, el conjunto de puntos $x$ del espacio que cumplen la condición $(a, x) \leqq \xi$(5). La topología se establece diciendo que un punto $a$ es de acumulación de un conjunto E, si todo esferoide de centro $a$ contiene algún punto de $E$ distinto de $a$.

Una sucesión $u_\xi$ de puntos del espacio (es decir tal que a todo elemento $\xi$ de la escala corresponda un punto $u_\xi$ del espacio) converge hacia un punto $a$ cuando $\xi$ tiende a 0, si fijado un $\eta>0$ de la escala existe un $\omega>0$ de la misma tal que si $\xi \leqq \omega$, $(a, u_\xi) \leqq \eta$. Es claro que la condición necesaria y suficiente para que un punto $a$ sea de acumulación de un conjunto $E$ es qúe exista una sucesión de puntos de $E$, distintos de $a$, y convergente hacia $a$.

Para generalizar la condición triangular de la distancia en el caso de los espacios métricos, M. Fréchet introduce las condiciones que él denomina de *regularidad.*

Un espacio ecartizado se dice que es regular $\alpha$), $\beta$), $\gamma$) o $\delta$) si las condiciones que siguen son verificadas:

Se puede definir una transformación $\eta=\varphi(\xi)$ de todo elemento $\xi$ de la escala en otro $\eta$ de la misma que converge hacia 0 con $\xi$ y tal que cualesquiera que sean los puntos distintos $x, y, z$ del espacio, las condiciones

(5) El signo $<$ está tomado acá en el sentido amplio de preceder; $a<b$, o $b>a$ significa que en un conjunto ordenado el elemento $a$ precede al $b$ o, lo que es lo mismo, que $b$ sigue a $a$. Si el conjunto es de números reales, ordenado de menor a mayor, el signo $<$ toma entonces su significado clásico.

$$\begin{array}{lll} \alpha) & (x, y) \leqq \xi; & (y, z) \leqq \xi \\ \beta) & (y, x) \leqq \xi; & (y, z) \leqq \xi \\ \gamma) & (x, y) \leqq \xi; & (z, y) \leqq \xi \\ \delta) & (y, x) \leqq \xi; & (z, y) \leqq \xi \end{array}$$

implican necesariamente

$$(x, z) \leqq \varphi(\xi).$$

Un espacio es regular si es a la vez regular $\alpha$), $\beta$), $\gamma$) y $\delta$). Es claro que si se cumple la condición de simetría, las cinco clases de regularidad son equivalentes.

* * *

M. Fréchet ha demostrado que en el caso en que el écart sea regular $\beta$), $\gamma$) o $\delta$), se puede, sin alterar la topología, reemplazar dicho écart por otro simétrico y regular, es decir, que desde el punto de vista topológico, la regularidad y las regularidades $\beta$), $\gamma$) y $\delta$) son equivalentes. La regularidad $\alpha$) es entonces la única que puede ser topológicamente más general que las otras; en la memoria citada, M. Fréchet dejó sin resolver el problema de ver si efectivamente la regularidad $\alpha$) es topológicamente más general. Nosotros vamos a resolver por la afirmativa eeste problema, es decir, que vamos a demostrar que: *la condición de regularidad $\alpha$) es efectivamente más general, desde el punto de vista topológico, que las otras condiciones de regularidad.*

Para ello utilizaremos el hecho de que en un espacio regular (basta que sea regular $\gamma$)), una sucesión $a_\xi$ de puntos no puede tener más de un punto límite. En efecto: si tuviera dos $x$ e $y$, dado un $\eta$ de la escala existe un $\omega$ de la misma tal que para $\xi \leqq \omega$ se tiene

$$(x a_\xi) \leqq \eta \quad (y a_\xi) \leqq \eta$$

y por la condición de regularidad

$$(x, y) \leqq \varphi(\eta).$$

Cuando $\eta$ tiende hacia 0, $\varphi(\eta)$ tiende hacia 0, luego $(x, y)$ precede a cualquier elemento de la escala, es decir $(x, y)=0$ y, por lo tanto, $x=y$.

Por consiguiente, para demostrar nuestro resultado bastará dar *un ejemplo de un espacio regular* $\alpha$) *en el cual una sucesión de puntos tenga varios puntos límites,* puesto que no se podrá, sin cambiar la topología, reemplazar el écart regular $\alpha$) por uno regular.

Vamos ahora a definir un tal espacio:

El conjunto de sus puntos está constituído por:

1) Los números reales no naturales, que designaremos por las letras $a, b, \ldots$

2) Los números transfinitos de las clases I y II, que designaremos por las letras $\alpha, \beta, \ldots$

La escala está formada por los números trasfinitos de las clases I y II considerados en orden inverso y aumentados de un primer elemento 0.

Definiremos el écart de la manera siguiente:

$$(a, b)=1; \quad (a, \alpha)=\alpha; \quad (\alpha, a)=1; \quad (\alpha, \beta)=1$$

e igual a 0 si los dos elementos coinciden.

Vamos a probar la regularidad $\alpha$) del espacio considerando la función $\varphi(\xi)=\xi$, es decir, probando que si $(x, y) \leqq \xi$ e $(y, z) \leqq \xi$ se verifica siempre que $(x, z) \leqq \xi$.

Si de los tres puntos distintos $x, y, z$, $x$ es un número transfinito, entonces $(x, y)=1$, y como 1 es el último elemento de la escala, forzosamente cualquiera que sea $z$, tendremos $(y, z) \leqq 1$ y $(x, z) \leqq 1$; la regularidad se verifica. Análogamente si $x$ e $y$ son los dos números reales no naturales.

Consideremos ahora el caso en que $x$ sean un número entero no natural $a$ e $y$ un número transfinito $\alpha$:

Si $z$ es un número transfinito $\beta$ tendremos

$$(a, \alpha)=\alpha \quad (\alpha, \beta)=1 \quad (a, \beta)=\beta$$

y si $z$ es un número real no natural $b$ tendremos

$$(a, \alpha)=\alpha \quad (\alpha, b)=1 \quad (a, b)=1$$

En todos los casos se cumple la condición, luego el espacio es regular $\alpha$.

Consideremos la sucesión de puntos del espacio $u_\xi = \xi$ es decir que, a cada índice, número transfinito, de la escala le corresponde el mismo número transfinito, pero considerado como punto del espacio.

Si $a$ es cualquier número real no natural, entonces dado un $\eta$ de la escala, si

$$\xi \leqq \eta \quad \text{entonces} \quad (a, u_\xi) = \xi \leqq \eta = (a, u_\eta);$$

luego a es punto límite de la sucesión y como ello se aplica a cualquier punto, deducimos que la sucesión $u_\xi$ tiene como púntos límites todos los números reales no naturales, con lo que queda probado el resultado que queríamos demostrar.

* * *

Consideremos un espacio ecartizado en el que no se pueda, sin alterar la topología, introducir un écart numérico. Se puede demostrar (M. Fréchet, loc. cit.) que si se adoptan las definiciones ordinarias de conjuntos compactos y separables, *todo conjunto compacto tiene un número finito de puntos y todo conjunto separable es numerable.*

Si el écart es numérico, en el caso en que sea regular, el espacio es, por el teorema de Chittenden, metrizable y ya sabemos que entonces los conjuntos compactos o separables no son forzosamente finitos o numerables. Esta propiedad de los espacios métricos subsiste en el caso de los espacios con un écart numérico regular $\alpha$), como lo vamos a probar ahora, al mismo tiempo que estableceremos algunas diferencias entre estos espacios y los métricos.

Comenzaremos por dar un ejemplo de un *espacio ecartizado numéricamente, no metrizable, regular* $\alpha$) *y con conjuntos compactos no finitos.*

Los puntos del espacio están formados por dos conjuntos numerables cualesquiera

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

La escala es el conjunto de las fracciones $\frac{1}{n}$ ordenado de menor a mayor y conteniendo el cero como primer elemento. El écart queda definido de la manera siguiente:

$$(a_n, a_p) = 1; \quad (a_n \alpha_p) = 1; \quad (\alpha_n, a_p) = \frac{1}{p}; \quad (\alpha_n, \alpha_p) = 1 \text{ (si } n > p);$$

$$(\alpha_n, \alpha_p) = \frac{1}{n+p} \text{ si } n < p, \text{ e igual a cero si los puntos coinciden.}$$

Probaremos que el espacio es regular $\alpha$) considerando la función $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon$, es decir, probando que si $(x, y) \leqq \varepsilon$ e $(y, z) \leqq \varepsilon$ se verifica que $(x, z) \leqq \varepsilon$.

Cuando $x$ es un punto $a_n$, $(x, y) = 1$; cuando $y$ es un $a_n$, $(y, z) = 1$; luego para probar la regularidad bastará considerar el caso en que $x = \alpha_n$ e $y = \alpha_p$ y además $n < p$. Si $z = a_q$, tendremos

$$(x, y) = \frac{1}{n+p}; \quad (y, z) = \frac{1}{q}; \quad (x, z) = \frac{1}{q}$$

luego se verifica la condición.

Si $z = \alpha_q$ y si $q < p$, entonces $(y, z) = 1$; basta con estudiar el caso $n < p < q$; tendremos entonces:

$$(x, y) = \frac{1}{n+p}; \quad (y, z) = \frac{1}{p+q}; \quad (x, z) = \frac{1}{n+q}$$

y como $n + p < n + q$, $(x, y) > (x, z)$, luego en todos los casos se cumple la condición de regularidad $\alpha$).

Sea $E$ un conjunto infinito del espacio; si contiene infinitos puntos $a_n$, entonces dado un $\varepsilon$ cualquiera existirá un punto $a_m$ del conjunto tal que $(\alpha_r, a_m) = \frac{1}{m} < \varepsilon$ para cualquier punto $\alpha_r$; si $E$ contiene infinitos puntos $\alpha_n$, entonces dado un $\alpha_r$ cualquiera, existe siempre un $\alpha_m$ del conjunto con $m$ suficientemente grande para que $m > r$ y $(\alpha_r \alpha_m) = \frac{1}{r+m} < \varepsilon$, cualquiera que sea $\varepsilon$. Es decir que cualquier conjunto finito tiene como conjunto de puntos de acumulación el conjunto de los $\alpha_n$. *El espacio es pues compacto.*

De acá se deduce que si consideramos un conjunto $E$ que contenga infinitos puntos $\alpha_n$, sin contenerlos a todos, obtendremos un *conjunto compacto en sí y no cerrado,* propiedad que distingue este espacio de los métricos.

Igualmente si consideramos el conjunto de los $a_n$ obtenemos *un conjunto infinito de un espacio compacto en el que los écarts mutuos entre dos puntos cualesquiera son todos iguales a* 1, propiedad que no puede encontrarse nunca en un espacio métrico.

Finalmente haremos notar que este ejemplo nos suministra otra prueba (limitada al caso del écart numérico) de la mayor generalidad, desde el punto de vista topológico, de la regularidad $\alpha$).

Pasemos ahora al caso de los conjuntos separables y vamos a dar un ejemplo de *un espacio ecartizado numéricamente, regular* $\alpha$), *no metrizable y con conjuntos separables no numerables.*

Los puntos del espacio son los siguientes:

1) Los puntos irracionales $(0<x<1)$ del eje $OX$ del plano que designaremos con las letras $a, b, \ldots$

2) Los puntos irracionales $(0<x<1)$ de las rectas de ecuación $y=n$; $(n=1,2,\ldots)$; estos puntos serán designados por las letras $A_n, B_p, \ldots$ en las que el índice indicará la ordenada de la recta a que pertenecen; convendremos en que los puntos $a, A_n, A_p, \ldots$ tienen siempre una misma abcisa, y por lo tanto los puntos $a, B_n, C_n, \ldots$ tienen abcisas diferentes.

3) Los puntos racionales $(0\leqq x\leqq 1)$ del eje $OX$ del plano, designaremos estos puntos por las letras $\alpha, \beta, \ldots$

La escala es el conjunto de los números reales del segmento $(0\leqq x\leqq 1)$ ordenado de menor a mayor. El écart se define de la manera siguiente:

$$(a, A_n)=\frac{1}{n}; \quad (a, \alpha)=|a-\alpha|; \; |A_n, \alpha|=|a-\alpha|,$$

igual a cero si los dos puntos coinciden y a uno en todos los otros casos.

Probaremos la regularidad $\alpha$) de la misma forma que en el ejemplo anterior, es decir, estableciendo que si $(x, y)<\varepsilon$ e $(y, z)<\varepsilon$ se tiene siempre $(x, z)<\varepsilon$.

Observaremos que $(x,y)=1$, salvo en los tres casos $x=a$, $y=A_n$; $x=a$, $y=\alpha$; $x=A_n$, $y=\alpha$. Pero en los dos últimos casos es siempre $(y,z)=1$, luego sólo hay que estudiar el primero y en éste $(y,z)\neq 1$, sólo cuando $z=\alpha$. Todo se reduce pues a estudiar el caso $x=a$; $y=A_n$; $z=\alpha$. En este caso tenemos $(x,y)=\frac{1}{n}$; $(y,z)=|a-\alpha|$; $(x,z)=|a-\alpha|$ es decir $(x,z)=(y,z)$, luego queda probada la regularidad $\alpha$) del espacio.

De la definición del écart se deduce que si consideramos el conjunto numerable de los puntos racionales del eje $OX$, este conjunto tiene como puntos de acumulación el conjunto de los restantes puntos del espacio; éste es por consiguiente *no numerable y separable.*

El conjunto de los puntos irracionales de las rectas $y=n$, es un *conjunto de puntos no numerable y tal que los écarts mutuos entre dos puntos cualesquiera del conjunto son todos iguales a* 1, resultado que sabemos es imposible en un espacio métrico y separable.

Finalmente haremos observar que este espacio presenta igualmente otra propiedad que lo distingue de los métricos; dicha propiedad es que *el espacio es separable pero no perfectamente separable.*

Como ya hemos visto que es separable sólo nos queda por probar que no es perfectamente separable.

Sea $\{W\}$ una familia de entornos equivalente topológicamente a la familia $\{V\}$ de los esferoides.

Sea $a$ un punto irracional del eje $OX$ y $V(a,n)$ el esferoide definido por la condición $(a,x)\leqq\frac{1}{n}$; dicho esferoide contiene únicamente puntos racionales del eje $OX$ y puntos irracionales de las rectas $y=n$ de la misma abcisa que $a$.

Por la equivalencia topológica supuesta de ambas familias tiene que haber un entorno $W(a,n)$ contenido en el esferoide $V(a,n)$ y que por consiguiente sólo puede tener puntos de los contenidos en dicho esferoide; pero como el punto $a$ es punto de acumulación del conjunto de todos los $A_n$, se ve que $W(a,n)$ contiene forzosamente puntos del tipo $A_n$, es decir, puntos de abcisa $a$.

Dos entornos $W(a,n)$ y $W(b,n)$ correspondientes a puntos distintos del eje $OX$ tiene que ser forzosamente diferentes, ya que el primero sólo contiene, y contiene seguramente, puntos de las rectas $y=n$ de abcisa igual a $a$, y el segundo de abcisa igual a $b$.

Luego de cualquier familia $\{W\}$ equivalente topológicamente a la familia de los esferoides se puede extraer un conjunto $W(a,n)$ de entornos distintos en correspondencia biunívoca con los puntos irracionales del segmento $(0 \leqq x \leqq 1)$, luego dicha familia no puede ser numerable y por consiguiente el espacio no puede ser perfectamente separable.

---

# CRONICA

## UNION MATEMATICA ARGENTINA

### REUNION DEL 7 DE JULIO DE 1948

El 7 de julio se reunió la Unión Matemática Argentina en el Instituto de Matemática de la Universidad de Buenos Aires.

Fueron expuestos los siiguientes trabajos:

1. M. Cotlar: *Caracterización de operadores de Koopman.*
2. R. A. Ricabarra: *Medidas transitivas en espacios compactos.*
3. Dietrich Völker: *Sobre el producto de integrales dobles de Laplace.*
4. Kurt Fränz: *Relaciones entre señales y espectros.*

Quedaron postergados para la próxima reunión los trabajos de J. C. Vignaux, O. A. Varsavsky y P. Pi Calleja, así como el de A. González Domínguez, titulado ''Aplicaciones de la delta completa a la electrodinámica cuántica de Schwinger''.

A continuación se leyó un informe de Secretaría, dándose cuenta del homenaje tributado al Prof. Zygmund, de la intensificación del intercambio científico, de la invitación al Congreso Internacional de Matemáticos de 1950, de la inclusión de la Unión Matemática Argentina en los registros de la Unesco, de la representación de la UMA en las jornadas de Epistemología e Historia de la Ciencia delegada en el Dr. M. Valentinuzzi y de igual representación en el Congreso Italiano de Matemática delegada en el Prof. A. Terracini residente actualmente en Italia. Se dejó constancia del agradecimiento enviado al Arq. Julio V. Otaola por su apoyo prestado a las actividades matemáticas desde su cargo oficial en la Universidad de Buenos Aires.

Se rindió luego un homenaje al Ing. Manuel Guitarte, fallecido a comienzos de este año, destacando el Dr. González Domínguez la actuación del Ing. Guitarte como socio fundador y presidente de la UMA.

A continuación el Dr. González Domínguez se refirió a la invitación recibida para participar en la Unión Matemática Internacional, con asiento en Estados Unidos de América.

La Dra. Clotilde A. Bula presentó el informe de Tesorería, acordándose elevar la cuota de los socios adherentes de $ 10 a $ 15 anuales y la de los fundadores y titulares de $ 50 a $ 60, anuales.

Después del informe de tesorería, se renovó la Junta Directiva, la cual quedó constituída así: Presidente, J. Rey Pastor; vicepresidentes, C. A. Trejo y E. Herrera; secretario general, M. Valentinuzzi; secretarios locales: O. A. Varsavsky (Buenos Aires), R. A. Ricabarra (La Plata), P. L. Checchi (Córdoba), E. Gaspar (Rosario), S. Fernández Long (Bahía Blanca), I. C. Guglielmone (Tucumán), S. Sispánov (San Juan), J. de Dios Olivieri (Santa Fe), M. Balanzat (San Luis) y F. Toranzos (Mendoza); Tesorero, Cl. A. Bula; protesorero, M. J. Erramuspe; director de publicaciones, J. Babini.

A los representantes en el extranjero ya existentes, fueron agregados P. Puig (España), G. Valiron (Francia) y A. Terracini (Italia).

*M. Valentinuzzi*

## UNION LATINA DE MATEMATICOS (U. L. M.)

En la visita realizada a París por el profesor Rey Pastor, le recordó el Prof. Valiron aquel discurso que con motivo de la terminación de sus lecciones en Buenos Aires le dedicara en el banquete de despedida que le ofreció la UMA. La idea de agruparse los países latinos para defender su cultura común, apoyándose moral y materialmente, que en aquella época parecía necesidad urgente de postguerra, no solamente sigue teniendo valor de actualidad, sino que la crisis financiera de muchos países europeos la ha avivado, surgiendo como esperanza salvadora en muchas mentes de hombres de ciencia. Varios de alta jerarquía fueron convocados por el profesor Valiron en su casa para cambiar ideas con el profesor Rey Pastor sobre la manera de llevar a la práctica ese vago pero general deseo de los matemáticos franceses. Concurrieron los profesores Fréchet, Denjoy, Perès, Janet, Garnier, Cartan, Darmois, Gaspar, Monteiro Camargo, y enviaron su adhesión, impedidos de concurrir, los profesores Hadamard, Julia y Favard; y después de conversar sobre el tema, se encomendó al profesor Rey Pastor, próximo a partir para Italia, que cambiase ideas con los colegas italianos.

La visita a las más importantes universidades italianas fué fructuosa en grado sumo, y en vista del favorable ambiente, redactó un anteproyecto de estatutos en que se puntualizaban las diversas formas de organizar esa ayuda mutua para favorecer el intercambio y mejor conocimiento de los trabajos, defender las lenguas latinas del creciente avasallamiento por el inglés, conservar la gloriosa herencia recibida, especialmente de Francia e Italia, y atenuar las dificultades financieras con que luchan las sociedades científicas, revistas y estudiosos de ciencia pura. La Unione Matematica Italiana acogió con gran interés ese anteproyecto así como el Reglamento, que posteriormente redactó el mismo autor, los hizo circular entre sus miembros y después de aprobados en principio en la reunión de Ferrara, celebrada en febrero, posteriormente en la de abril, celebrada en Bolonia, y finalmente en la de junio celebrada en Parma, se acordó la adhesión a la entidad proyectada (U. L. M.), con la sola modificación del artículo relativo a la rotación de la sede de la entidad.

Mientras tanto, la Société Mathématique de France se está ocupando activamente de estudiar el anteproyecto de Estatutos y Reglamento precitados. Con este fin ha sido nombrada una Comisión especial formada por los profesores Denjoy, Chazy, Fréchet, Paul Levy, Valiron, Garnier, Delsarte y Brard, Presidente de la entidad.

El Consejo Superior de investigaciones en España ha acogido también con gran simpatía este proyecto, ofreciendo patrocinarlo, y es de esperar que también se interesen otros países hispanoparlantes. Para facilitar el conocimiento de los fines perseguidos y la manera de lograrlos, en el próximo número publicaremos el anteproyecto de Estatuto y reglamento, y es de esperar, en vista del valioso apoyo ya logrado (muy especialmente entusiasta por parte de los profesores Terracini, Favard, Sergescu, Valiron,...) que se logre la organización de la ULM antes del prórimo Congreso internacional de Matemáticos, facilitando así la posible formación de otra unión más amplia, que podrá abordar problemas generales, con la colaboración de todos los países cultos.

## UNION MATEMATICA ARGENTINA

La U. M. A. reconoce cuatro categorías de miembros: honorarios, protectores, titulares y adherentes. El miembro protector paga una cuota anual de 100 $, por lo menos; el titular una cuota mensual de 5 $ o anual de 50 $; y el adherente una cuota anual de 10 $. Los pagos deberán efectuarse por cheque, giro u otro medio libre de gastos, a la orden de la Tesorera, Prof. Clotilde A. Bula, Rioja 3681. Olivos F.C.M.

Por ser la U. M. A. miembro del patronato de la Mathematical Reviews (sponsoring member), los socios de la U. M. A. tienen derecho a suscribirse a esa importante revista de bibliografía y crítica con 50 % de rebaja sobre el precio de suscripción que es de 20 dólares por año. Los socios de la U. M. A. pagarán por tanto sólo 10 dólares por año.

Los autores de trabajos reciben gratuitamente una tirada aparte de 50 ejemplares. Las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

### JUNTA DIRECTIVA

Presidente, Julio Rey Pastor, Yerbal 898, Buenos Aires. Vicepresidentes, César A. Trejo, Félix E. Herrera. Secretario general, Máximo Valentinuzzi. Secretarios locales, O. A. Varsavsky (Bs. Aires), R. A. Ricabarra (La Plata), P. L. Checchi (Córdoba), E. Gaspar (Rosario), S. Fernández Long (Bahía Blanca), I. C. Guglielmone (Tucumán), S. Sispánov (San Juan). J. de Dios Olivieri (Santa Fe), M. Balanzat (San Luis), F. Toranzos (Mendoza). Tesorera, Clotilde A. Bula, Protesorera, María Josefina Erramuspe, Director de Publicaciones, J. Babini.

## ASOCIACION FISICA ARGENTINA

La A. F. A., asociación privada de investigadores, profesores y estudiantes de física y de astronomía, tiene por objeto fomentar el progreso de la enseñanza de dichas materias por medio de reuniones científicas periódicas y de la publicación de trabajos originales.

Podrán ingresar como socios activos quienes hayan efectuado investigaciones originales; pueden ser socios adherentes los profesores que no cumplan este requisito; y socios estudiantes los que hayan aprobado el primer año de estudios de física o de astronomía.

Las solicitudes de ingreso, que deberán llevar la firma de dos socios activos o adherentes, habrán de dirigirse al secretario local que corresponda. Los socios activos abonarán una cuota mensual de 6 $, los adherentes de 4 $ y los estudiantes de 2 $. En estas cuotas están incluídas las suscripciones al órgano de la A. F. A. y a la revista "Ciencia e Investigación".

Los manuscritos destinados a la publicación deberán enviarse al delegado de la A. F. A. Mario Bunge, Instituto de Física, Perú 222, Bs. Aires; y la correspondencia administrativa deberá dirigirse al secretario local que corresponda o a la tesorera.

Para la redacción y presentación de los trabajos se agradecerá se tengan en cuenta las *Normas generales* distribuídas con esta revista en 1945.

### COMISION DIRECTIVA

Presidente: Enrique Gaviola
Tesorera: Estrella Mazzolli de Mathov, San Juan 1931, Buenos Aires.
Secretarios locales: Ernesto E. Galloni, Buenos Aires, Yerbal 1763.
Marco A. Poggio, La Plata, calle 41 Nº 764.
Guido Beck, Córdoba, Laprida 922.
José Würschmidt, Tucumán, Laprida 765.

Abonnement annuel à l'etranger: 4.00 dollars (Etats-Unis).

Prière d'adresser toute la correspondance scientifique et administrative à l'adresse ci-dessous:

SR. SECRETARIO DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA
Dr. MÁXIMO VALENTINUZZI
Gascón 520, Buenos Aires (REP. ARGENTINA)

## SUMARIO