

REVISTA DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

(MIEMBRO DEL PATRONATO DE LA MATHEMATICAL REVIEWS)

ORGANO DE LA ASOCIACION FISICA ARGENTINA

Director: José Babini

Delegado de la A. F. A.: Mario Bunge

Redactores de la U. M. A.: Julio Rey Pastor, Luis A. Santaló, Mischa Cotlar

Redactores de la A. F. A.: Enrique Gaviola, Richard Gans, Guido Beck



MIEMBROS TITULARES DE LA U. M. A.

J. BABINI (Santa Fe) (fundador). — M. BALANZAT (San Luis). — J. BARRAL SOUTO, (B. Aires) (fundador). — C. A. BULÁ (Rosario) (fundador). — E. CORMINAS (Mendoza). — A. DURANO Y VEDIA (B. Aires). — FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES (B. Aires) (fundador). — FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS (Rosario) (fundador). — FACULTAD DE QUÍMICA INDUSTRIAL (Santa Fe) (fundador). — A. FARENGO DEL CORRO (B. Aires). — Y. FRENKEL (B. Aires). — E. GASPAR (Rosario) (fundador). — F. L. GASPAR (Rosario) (fundador). — J. GIANNONE (Rosario) (fundador). — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ (Buenos Aires) (fundador). — J. GONZÁLEZ GALÉ (Buenos Aires) (fundador). — W. S. HILL (Montevideo) (fundador). — OBSERVATORIO ASTRONÓMICO (La Plata). — A. LASOURAIN (Buenos Aires). — J. OLGUIN (Rosario) (fundador). — D. PAPP (Buenos Aires). — P. PI CALLEJA (San Juan). — E. R. RAIMONDI (Buenos Aires) (fundador). — J. E. REYNAL (Buenos Aires). — J. REY PASTOR (Buenos Aires) (fundador). — A. E. SAGASTUME BERRA (La Plata). — E. L. SAMATÁN (Buenos Aires) (fundador). — J. SORTHEIX (Tucumán) (fundador). — D. T. A. DE SPELUZZI (Buenos Aires) (fundador). — F. TORANZOS (Mendoza). — C. A. TREJO (La Plata). — J. C. VIGNAUX (Buenos Aires). — E. H. ZARANTONELLO (La Plata).



BUENOS AIRES

1950

AÑO DEL LIBERTADOR

GENERAL DON JOSÉ DE SAN MARTÍN



UNION MATEMATICA ARGENTINA

La U. M. A. reconoce cuatro categorías de miembros: honorarios, protectores, titulares y adherentes. El miembro protector paga una cuota anual de 100 \$, por lo menos; el titular una cuota mensual de 5 \$ o anual de 50 \$; y el adherente una cuota anual de 10 \$. Los pagos deberán efectuarse por cheque, giro u otro medio libre de gastos, a la orden de la Tesorera, Prof. Clotilde A. Bula, Rioja-3681. Olivos F.C.M.

Por ser la U. M. A. miembro del patronato de la Mathematical Reviews (sponsoring member), los socios de la U. M. A. tienen derecho a suscribirse a esa importante revista de bibliografía y crítica con 50 % de rebaja sobre el precio de suscripción que es de 20 dólares por año. Los socios de la U. M. A. pagarán por tanto sólo 10 dólares por año.

Los autores de trabajos reciben gratuitamente una tirada (aparte de 50 ejemplares. Las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

JUNTA DIRECTIVA

Presidente, Julio Rey Pastor, Yerbal 898, Buenos Aires.
Vicepresidentes, César A. Trejo, Félix E. Herrera. Secretario general, Máximo Valentinuzzi. Secretarios locales, O. A. Varsavsky (Bs. Aires), R. A. Ricabarra (La Plata), P. L. Checchi (Córdoba), E. Gaspar (Rosario), S. Fernández Long (Bahía Blanca), I. C. Guglielmone (Tucumán), S. Sispánov (San Juan). J. de Dios Olivieri (Santa Fe), M. Balanzat (San Luis), F. Toranzos (Mendoza). Tesorera, Clotilde A. Bula, Protensorera, María Josefina Erramuspe, Director de Publicaciones, J. Babini.

ASOCIACIÓN FISICA ARGENTINA

La A. F. A., asociación privada de investigadores, profesores y estudiantes de física y de astronomía, tiene por objeto fomentar el progreso de la enseñanza de dichas materias por medio de reuniones científicas periódicas y de la publicación de trabajos originales.

Podrán ingresar como socios activos quienes hayan efectuado investigaciones originales; pueden ser socios adherentes los profesores que no cumplan este requisito; y socios estudiantes los que hayan aprobado el primer año de estudios de física o de astronomía.

Las solicitudes de ingreso, que deberán llevar la firma de dos socios activos o adherentes, habrán de dirigirse al secretario local que corresponda. Los socios activos abonarán una cuota mensual de 6 \$, los adherentes de 4 \$ y los estudiantes de 2 \$. En estas cuotas están incluidas las suscripciones al órgano de la A. F. A. y a la revista "Ciencia e Investigación".

Los manuscritos destinados a la publicación deberán enviarse al delegado de la A. F. A. Mario Bunge, Instituto de Física, Perú 222, Bs. Aires; y la correspondencia administrativa deberá dirigirse al secretario local que corresponda o a la tesorera.

Para la redacción y presentación de los trabajos se agradecerá se tengan en cuenta las Normas generales distribuidas con esta revista en 1945.

COMISION DIRECTIVA

Presidente: Enrique Gaviola

Tesorera: Estrella Mazzolli de Mathov, San Juan 1931, Buenos Aires.

Secretarios locales: Ernesto E. Galloni, Buenos Aires, Yerbal 1763.

Marco A. Poggio, La Plata, calle 41 N° 764.

Guido Beck, Córdoba, Laprida 922.

José Würschmidt, Tucumán, Laprida 765.

Abonnement annuel à l'étranger: 4.00 dollars (Etats-Unis).

Prière d'adresser toute la correspondance scientifique et administrative à l'adresse ci-dessous:

SR. SECRETARIO DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

Dr. MÁXIMO VALENTINUZZI

Gascón 520, Buenos Aires (REP. ARGENTINA)



RICARDO GANS

INTRODUCCION

por E. GAVIOLA

Al cumplir Ricardo Gans 70 años el 7 de marzo de 1950, en plena actividad científica, puede contemplar satisfecho medio siglo de intensa labor como investigador y como maestro. Gans es uno de los últimos ejemplos del físico no especializado: es teórico y es experimentador; se ha ocupado y se ocupa de magnetismo, de óptica, de soluciones coloidales, de teoría de los cuanta, de estadística, de radiotécnica, de relatividad, de ultramicroscopía, de matemática aplicada, etc. Sus publicaciones originales suman arriba de 200, aparecidas, en su mayoría, en «Annalen der Physik» y en «Contribuciones a las Ciencias Físicas» de la Universidad de La Plata, revista fundada por Gans mismo.

Hasta comienzos de este siglo no eran raros físicos universales como Gans: Helmholtz, J. J. Thomson, Heinrich Hertz, Lord Rayleigh, Kirchhoff, Willy Wien, Langevin. Al promediar el siglo, la especialización creciente amenaza convertir al laboratorio de los físicos en una torre de Babel: los teóricos no tocan un aparato, sin dañarlo, desde que aprueban trabajos prácticos; los experimentadores acaban por huir de fórmulas más complicadas que una función lineal o funciones trigonométricas a la 1ª. potencia; el campo de la física está dividido en n especialidades, donde n es una función positiva y creciente (¿exponencial?) del tiempo; se corre el riesgo de que cada especialidad se enseñe pronto por separado. Hombres universales como Gans son necesarios para mitigar el mal. Aunque no pueda ser remediado del todo. Para poder valorar los trabajos de Gans sería necesario otro hombre tan universal como él. A falta de éste, he recurrido a él mismo. Escuchémoslo:

«En la primera década de este siglo surgió en la «Elektro-

technische Zeitschrift» una discusión sobre lo que permanece constante en un imán permanente. ¿El número de líneas de fuerza o la fuerza magnetomotriz? Se pensaba en un circuito magnético permanente, formado por dos imanes herradura puestos frente a frente, la distancia entre cuyos polos era variada».

«Estudié el asunto teórica y experimentalmente, al principio junto con mi amigo Rudolf Weber, e hice efectuar un trabajo detallado de tesis sobre el asunto a mi discípulo Eberhard Kempen. Resultó, sin lugar a dudas, que la fuerza magnetomotriz permanece constante y que el flujo magnético varía en el circuito al variar la separación de los polos, pues varía la resistencia magnética».

«En aquella época, la única ley conocida para medios ferromagnéticos era la ley de Warburg, según la cual la *superficie* de la curva de histéresis es una medida para el calor producido en un ciclo. Busqué relaciones sencillas nuevas y encontré la que bauticé con el nombre de *permeabilidad reversible*. Si en cualquier punto del plano $H-B$ se ha variado la intensidad del campo un par de veces en $\pm \Delta H_0$, vale entonces, dentro de límites amplios, que la variación de inducción ΔB es proporcional a cada variación ΔH del campo, con la única restricción de que el campo se mantenga por debajo de $H + \Delta H_0$. Uno se mueve en forma reversible en el plano $H-B$ sobre una recta a cuya inclinación μ_r di el nombre de permeabilidad reversible. Resultó, además, que entre todos los materiales estudiados (Fe, Ni, acero) μ_r no depende de H sino únicamente de B , o, dicho con mayor propiedad, de la magnetización J , y que existe una ley de estados correspondientes. Si se introduce, en efecto, como unidad de la susceptibilidad reversible K_r , la susceptibilidad originaria K_0 y como unidad de la magnetización J la saturación J_∞ , resulta que $K_r/K_0 = f(J/J_\infty)$; donde f es una función universal. Resultó, además, que la permeabilidad reversible transversal (esto es $\Delta H \perp J$) difiere de la longitudinal ($\Delta H \parallel J$), es decir, que el material se hace magnéticamente anisótropo debido a la magnetización».

«Las medidas absolutas del efecto Zeeman de una línea espectral hechas por diferentes autores estaban en aquella época bastante lejos unas de otras. Suponíamos (en Tübingen) que la falla estaba en que una persona dada no entendía bastante de mediciones espectroscópicas y magnéticas; por ello decidí llevar la precisión de la medida de campos magnéticos fuertes al má-

ximo posible. Para ello era necesario construir normales de campos magnéticos y de inducción mutua y medirlas exactamente. Paschen, Gmelin y yo procedimos entonces a medir el desdoblamiento magnético de una línea espectral. Paschen dirigía la parte óptica del trabajo, yo la magnética. Después de ello, fué solamente necesario comparar el desdoblamiento de una línea cualquiera con el de una de las medidas por Gmelin *en el mismo campo magnético*, lo que es esencialmente más simple».

«Fe y Ni no poseen propiedad ferromagnética alguna para frecuencias ópticas. Por ello propuse a Loyarte que investigara a qué frecuencia pierden estos cuerpos su magnetismo; él encontró que a la frecuencia de ondas hertzianas cortas».

«El comportamiento de la histéresis en campos rotatorios era discutido. Loyarte lo estudió en su tesis, y sus resultados fueron después ampliados en detalles por von Halem en el Instituto de Física de Königsberg».

«La ley de Warburg de la histéresis, mencionada más arriba, vale sólo para el ciclo completo. No se sabía cómo se reparte la producción de calor sobre las distintas partes de las ramas de la curva de histéresis. Propuse, por ello, a Adelsberger que midiera este calor paso a paso sobre la curva. Bates llama a este trabajo, en su libro sobre magnetismo, un trabajo pionero. A continuación, hice que Pfaffenberger midiera, paso a paso también, el efecto Barkhausen; ambas curvas se parecían como un huevo a otro, de modo que así se supo que los saltos de Barkhausen son la causa de la producción de calor».

«Me había ocupado, también, mientras tanto, con la teoría estadística del día-, para- y ferromagnetismo. No parecía imposible entonces, de acuerdo al estado de la teoría, que la susceptibilidad diamagnética no fuese constante sino función de la intensidad del campo y que para campos débiles se acercara asintóticamente a un valor y para campos fuertes a otro valor. En favor de ello hablaban medidas hechas con Bi y Sb por Honda y Owen bajo la dirección del holandés Dubois. Héctor Isnardi puso a prueba esos resultados por medio de medidas de precisión, encontrando que eran erróneas. Las susceptibilidades de ambos elementos son exactamente constantes dentro de un amplio campo».

«Con el ruso Akulov, quien quería perfeccionarse en el Instituto de Física de Königsberg, estudié el comportamiento de monocristales ferromagnéticos. Estos estudios los continué con Czer-

linski y resultó que las curvas de magnetización de monocristales de Fe, Ni y Co pueden representarse con sorprendente exactitud con una (Ni, Co) o con dos (Fe) constantes. Después midió Czerlinski la ley de desembocadura en la saturación con ferromagnética pseudo isótropos. Resultó que para campos fuertes la magnetización obedece a la ley $J = J_{\infty} - a/H^2$, y que la constante a , determinada experimentalmente, puede ser calculada a partir de las constantes de anisotropía determinadas en cristales».

«Sea también mencionada la medida de la fuerza coercitiva en Fe, Ni y acero en ancho intervalo de temperaturas, desde la temperatura del aire líquido hasta el punto de Curie, y las bellas medidas de Heinz Wittke en Königsberg, sobre propiedades magnéticas hereditarias (retardadas): si se cambia la intensidad de campo en un material ferromagnético, la inducción necesita un tiempo pequeño, pero finito y medible para tomar su nuevo valor. Este fenómeno fué estudiado por Wittke cuidadosamente encontrando que la curva que une en forma continua los puntos de la curva de magnetización medidos balísticamente no corresponde a la curva recorrida verdaderamente, sino que a la curva de magnetización usual se le superponen pequeños codos, lo que significan una pérdida adicional de calor, desde el punto de vista técnico-económico. Este fenómeno tiene una relación íntima con el conocido factor de ruido en radiotelefonía».

«Otro grupo de mis trabajos se ocupa de la difusión de la luz (efecto Tyndall). Principié con soluciones coloidales. Me había mostrado que el calor de soluciones coloidales de oro podía ser explicado con la teoría electromagnética de la luz si se suponía, que las partículas tenían el mismo índice de refracción y el mismo coeficiente de absorción que el oro macroscópico, tales como habían sido determinadas por Hagen y Rubens midiendo los coeficientes de absorción y de reflexión en función de la longitud de onda, y si las partículas eran supuestas esféricas. Pero, me pregunté: ¿son verdaderamente esféricas? Deduje las fórmulas válidas para elipsoides, teniendo como casos límites discos y bastoncitos y resultó que la curva de absorción debe depender fuertemente de la forma de las partículas, de modo que de la curva observada puede deducirse la forma con mucha precisión. Así pudo comprobarse que soluciones de Au y de Ag contienen partículas casi exactamente esféricas. También en el caso del Pt coloidal (Calatroni). Para ello fué necesario desarrollar un mé-

todo especial de ultrafiltración con filtro de collodium-ácido acético. Mi preparador Alberto Elizabe me ayudó efectivamente. Sin ultrafiltración se observan curvas de absorción caprichosas, que se explican por conglomeración de las partículas; después del proceso se tiene en cambio las partículas sueltas, si se hacen las medidas en la solución poco tiempo después de la filtración».

«También fueron estudiados los fenómenos magnéticos y ópticos en soluciones coloidales de Fe (Héctor Isnardi) con el fin de obtener conclusiones sobre la constitución de las partículas».

«Existe aún otro criterio para determinar si partículas coloidales son esféricas o no. En el primer caso, la luz radiada transversalmente debe estar linealmente polarizada, en el segundo se superpone a esa luz polarizada luz natural, lo que produce una despolarización. Teófilo Isnardi ha mostrado cuán cuidadoso debe ser el fallo del experimentador al estudiar soluciones de mastic y de gomas. El observó que el grado de despolarización dependía de la concentración, mientras que la forma de las partículas no podía variar con la concentración. Pude demostrar que en concentraciones grandes la influencia recíproca de las partículas aumenta el grado de despolarización, y que se obtiene la constante de forma característica únicamente extrapolando hacia diluciones infinitas».

«Estos resultados me dieron ánimo para probar si se podía observar en el laboratorio difusión de la luz producida por las moléculas mismas. Ensayos análogos fueron hechos simultáneamente por el Baron Strutt (después Lord Rayleigh, hijo) en Inglaterra, por Cabannes en Francia y por Raman en la India. Para la iluminación disponía de la intensidad del sol argentino y de un coelostato de Zeiss. Creo poder decir sin exagerar que las despolarizaciones medidas por mí son las más exactas, especialmente después que, posteriormente, mi asistente Harald Volkmann convirtió el método en un procedimiento de precisión. La dificultad de medidas con gases y vapores consiste en que la intensidad de la luz dispersada lateralmente es muy pequeña, y que la parte de luz natural que condiciona el grado de despolarización es sólo unos pocos porcientos del total. Este grado de despolarización representa, por otra parte, una nueva constante óptica. Se puede decir, en términos generales: El índice de refracción, o mejor $(n^2-1)/(n^2+2)$, mide el volumen de las moléculas; el grado de

despolarización indica su forma, su alejamiento de la forma esférica».

«En líquidos, la interpretación de la difusión de la luz es algo más complicada. Einstein ha mostrado que se la puede comprender valiéndose de las fluctuaciones de la densidad. Densidad uniforme es el estado más probable pero no el único posible, y si en cualquier parte del líquido se produce un aumento o una disminución de densidad, tenemos lo que el óptico llama una «Schliere» (cuerda); en nuestro caso, naturalmente, una microcuerda que difunde luz en todas las direcciones. Pero Einstein obtiene para la luz difusa polarización lineal total y no explica la — en aquella época aún desconocida — despolarización. A ésta la he explicado así: el estado isótropo de un líquido es el más probable; pueden y deben aparecer, además, microanisotropías menos probables, las condicionan la despolarización. Si ello es correcto, concluí, debe existir una relación estrecha entre el grado de despolarización y la constante de Kerr. Deduje la fórmula y la probé con los valores experimentales. Absolvió la prueba, verdaderamente».

«Al mismo campo pertenecen las publicaciones sobre el color del mar, sobre la aspereza de una superficie de mercurio, así como un estudio de la dispersión de luz en la superficie transparente de separación de dos líquidos (Hilario Magliano)».

«Comprendí, sin embargo, que detalles de la estructura molecular sólo pueden ser determinados si se efectúan con gases y vapores las medidas más diversas, si se efectúa, por decirlo así, un ataque concéntrico con todas las armas. Índice de refracción, grado de despolarización, constante dieléctrica como función de la temperatura y constante de Kerr. Tales mediciones propuse a mis colaboradores H. A. Stuart y Harald Volkmann. Los resultados están condensados en el bello libro de Stuart sobre «Molekülstruktur».

«A los trabajos anteriores deseo agregar brevemente sólo unos pocos más. En el campo de la termodinámica: Sobre la dependencia de influencias físicas de los números de transporte y de las fuerzas electromotrices de pilas; Sobre un integrador termodinámico (colaboración con Adriano Pereyra Miguez) que permite integrar mecánicamente la ecuación diferencial $(F-T) dF/dT = U(T)$. En el campo de la electrotécnica y alta frecuencia: Sobre la teoría del freno electromagnético; La resistencia mag-

nética de un rotor dentado; Sobre la estabilidad de las órbitas electrónicas en el betatrón; El comportamiento de una red hertziana; Estudios sobre antenas; El sistema de Lecher en un tubo protector. Trabajos sobre el movimiento browniano y un estudio sobre la cuestión de si hemos llegado al límite de la medibilidad debido al movimiento browniano. Una publicación sobre la teoría de emisión de electrones, otra sobre una deducción sencilla de la teoría del eiconal. Hay una publicación sobre la constante dieléctrica en la teoría de Schrödinger y otra, en colaboración con Mrowka sobre la teoría de perturbaciones en la mecánica ondulatoria».

«El método de perturbaciones perteneciente a Schrödinger, muy elegante, por cierto, tiene el inconveniente que obliga a calcular todas las funciones propias y sus energías propias, mientras que el procedimiento de Gans y Mrowka permite calcular directamente la función perturbadora y, en muchos casos, por una simple cuadratura, en lugar de hacerlo por integración de una ecuación diferencial».

El libro de Gans sobre análisis vectorial cuenta con 6 ediciones alemanas, 1 argentina, 1 española y 1 inglesa.

Algunos de los discípulos y colaboradores de Gans han sido mencionados más arriba. Pueden ser agregados, entre otros: Walter Gerlach, Munich; Walter Steubing, Hamburgo; José B. Collo, Buenos Aires; Loedel Palumbo, San Juan; Antonio Fonseca; Augustín Durañona y Vedia, La Plata; Alberto E. Sagastume Berra, La Plata; y tres generaciones de ingenieros.

El curso de física general (física experimental) dictado por Gans en La Plata desde 1912 hasta 1925 en forma magistral fué para muchos, entre ellos el que escribe, una revelación de la física. Circunstancias lamentables para la física argentina alejaron a Gans de La Plata entre 1925 y 1947. Sus viejos alumnos nos sentimos regocijados por su vuelta.

He preguntado a Gans por qué aceptó el ofrecimiento de venir a La Plata en 1912. Gans, nacido en Hamburgo el 7 de marzo de 1880, se recibió de doctor en física después de estudiar en Hannover y Estrasburgo, en 1901, a la temprana edad de 21 años. Fué asistente de Quincke en Heidelberg y de Paschen en Tübingen y llegó a ser «Privatdozent» en Tübingen a los 23 años de edad, profesor extraordinario allí mismo a los 28, siendo llamado como profesor ordinario a Estrasburgo a los 31 años

de edad, en 1911. En aquella época era usual llegar a ser extraordinario a los 35 y ordinario a los 40 o 45. La carrera académica de Gans fué, pues, excepcionalmente brillante. ¿Porqué abandonó el importante centro científico europeo de Estrasburgo para venir al entonces desierto científico de La Plata? He aquí la respuesta:

«Desciendo de una vieja familia hamburguesa dedicada al comercio. El «moto» de los hombres del comercio hamburgués reza: «Mein Feld die Welt» (mi campo el mundo). Algo parecido sucede en la ciencia: «la ciencia no tiene patria». A ello se sumó que en la primera década de este siglo se leía mucho en diarios alemanes sobre el notable desarrollo de la Argentina, lo que me indujo a colaborar, aunque fuera poco, en esa evolución, pues, decíame, el progreso económico de un país tiene que ir unido al progreso espiritual».

En nombre de sus colaboradores y discípulos es mi privilegio expresar al Dr. Gans nuestro deseo de que su brillante producción científica, su fecunda obra pedagógica y su bienestar personal continúen por muchos años.

Es para mi un placer expresar, también en este lugar, en nombre de la AFA, nuestro agradecimiento al Dr. Guido Beck, inspirador y editor de este volumen; a la Imprenta de la Universidad Nacional del Litoral por la prontitud y esmero con que ha terminado su tarea; al Ing. José Babini, por su amplia y constante colaboración, y al Sr. Damián Canals Frau, por haber leído y corregido algunos manuscritos y pruebas.

ASPECTOS HISTORICOS DE LA SUPRACONDUCTIVIDAD

por MAX V. LAUE

Max Planck - Institut für Physik, Göttingen

(Recibido el 25-8-1949)

ZUSAMMENFASSUNG: Geschichtlicher Überblick über die bisherige Entwicklung der Theorie der Supraleitung.

La teoría de la electricidad y del magnetismo es hija del siglo XIX. En 1867, tras un desarrollo largo y difícil, se condensó en la teoría del campo de Faraday y Maxwell. Debido al descubrimiento de las ondas eléctricas por Heinrich Hertz (1889) — y a pesar de una fuerte oposición — esta teoría conquistó el reconocimiento general aún antes de 1900. Se creyó entonces, que un capítulo grande e importante había llegado a su conclusión.

Sin embargo, como acontece muchas veces, experiencias nuevas condujeron a una sorpresa. Al lograr condensar el helio (1908), Kamerlingh Onnes, en Leiden, había alcanzado temperaturas más bajas que las obtenidas anteriormente. Siguiendo el cambio de la resistencia eléctrica de los metales hasta estas temperaturas, encontró con asombro, en 1911, que a 4° K esta resistencia se anula en mercurio⁽¹⁾. Poco después halló el mismo comportamiento en otros metales, p. ej. en el plomo y el estaño. Esta «supraconductividad» aparece a una temperatura característica para cada sustancia, en el llamado punto de discontinuidad. Por supuesto, otros metales, como p. ej., oro, plata, cobre, no presentan hasta ahora el mencionado fenómeno. Sin embargo, existe la posibilidad de que sus puntos de discontinuidad se encuentren a temperaturas más bajas, todavía no alcanzadas. En total se conoce, ahora, la supraconductividad en 19 metales puros, en muchas aleaciones y también en algunas combinaciones químicas.

En 1914⁽²⁾ Kamerlingh Onnes al mantener una corriente en

un circuito supraconductor durante horas y días, mostró que la resistencia de un supraconductor no solamente es mucho más pequeña que la de un conductor normal (así se llama, para distinguirlo, a un conductor ordinario, que ofrece resistencia), sino que esta resistencia efectivamente no existe. Únicamente la dificultad experimental de mantener el circuito durante más tiempo a una temperatura tan baja, puso un límite temporal a la experiencia. En una ocasión, Kamerlingh Onnes indujo una tal corriente permanente en su laboratorio en Leiden, voló a Londres con el recipiente Dewar que contenía el circuito en un baño de helio líquido, y demostró allá los efectos magnéticos de la corriente ante la Sociedad Real.

Mucho más tarde, en 1941, Justi y Zickner⁽³⁾ verificaban otra consecuencia deducida por el que escribe de la idea de una corriente sin resistencia. En el caso de un conductor normal las conocidas reglas de Kirchhoff determinan los fenómenos de la ramificación de una corriente; ésta se reparte sobre las ramas en proporción a las resistencias respectivas. En el caso de un supraconductor los factores que deciden son la autoinducción y la inducción mutua. Puede acontecer que en una rama la corriente tenga sentido opuesto a la de la corriente principal. Todas estas conclusiones han sido plenamente verificadas experimentalmente.

En 1913, Kamerlingh Onnes logró otro descubrimiento fundamental⁽⁴⁾. No solamente el aumentar la temperatura más allá del punto de discontinuidad hace desaparecer la supraconductividad, sino también un campo magnético en el cual se introduzca el supraconductor. Pero, es necesario que el campo tenga una intensidad mayor que un cierto «valor umbral». El valor umbral depende de la sustancia y, para una sustancia dada, es tanto mayor cuanto menor es la temperatura.

En este dominio, Kamerlingh Onnes encontró menos sucesores de lo que se podía esperar dada la sensación que habían provocado sus primeros trabajos. No había, ni hay hoy en día, muchos institutos de física que posean las máquinas caras y difíciles de manejar, necesarias para llegar a temperaturas tan bajas. Además, la técnica experimental es tan distinta de la de temperaturas normales, que hace falta una rutina extraordinaria para poder efectuar limpiamente hasta las mediciones más sencillas. El laboratorio de Kamerlingh Onnes fué uno de los pocos lugares donde se siguió cultivando esta rama de la investigación, aún después de su

muerte (1926). Allá, en la tercera década de este siglo, W. J. de Haas, con un grupo de colaboradores, se halló con el hecho sorprendente de que un campo magnético, orientado perpendicularmente al alambre supraconductor, tiene que tener la mitad de la intensidad que haría falta para anular la supraconductividad, si el campo estuviese orientado paralelamente al alambre.

Durante años, una de las grandes incógnitas del fenómeno fue el hecho de que la corriente cuya resistencia se trata de medir, parecía depender fuertemente de la orientación relativa: campo magnético-corriente.

Recién en 1932 el que escribe pudo dar la interpretación ⁽⁵⁾.

De primera intención, y basado sobre la teoría de Maxwell, se había considerado al supraconductor como un conductor con conductividad infinita. G. Lippmann, en París, llamó la atención sobre el hecho de que entonces el supraconductor debería ser impenetrable para un campo magnético, es decir, que las líneas de fuerza deberían desviarse fuera de él. Pero una modificación tal de un campo magnético exterior implica un aumento de la intensidad del campo en la superficie del cuerpo. En el caso de un alambre de sección circular este aumento es precisamente una duplicación. El campo que actúa sobre el supraconductor tiene, pues, una intensidad doble de la del campo que se encuentra a gran distancia del mismo. Como en las experiencias siempre se había medido el campo a gran distancia, se había concluido que el campo en la superficie del supraconductor — que es el campo que actúa — era menor precisamente en un factor dos. Si esta concepción fuese correcta, una esfera debía perder su supraconductividad a distinto valor de la intensidad del campo magnético, a saber, a $2/3$ del valor umbral. Un alambre de sección elíptica debía necesitar también otra intensidad característica del campo y, además, esta intensidad debía depender de la orientación del campo con respecto a la sección elíptica. Todas estas conclusiones han sido confirmadas por de Haas y sus colaboradores en largas series de mediciones durante los años 1934-1937.

Pero, la concepción de un supraconductor como conductor de conductividad infinita llevaba necesariamente a otra conclusión más. Si se introduce un metal en un campo magnético a una temperatura superior a la del punto de discontinuidad, es decir, mientras aún presenta conductividad normal, el campo no se de-

forma y sus líneas de fuerza lo atraviesan sin sufrir modificación alguna. Enfriando el metal — en el campo magnético — hasta la supraconductividad, nada debería modificarse. Sin embargo, cuando W. Meissner y R. Ochsenfeld, en 1933⁽⁶⁾, determinaron los campos en la vecindad de supraconductores, hallaron que esta conclusión no se verificaba. Aún procediendo de la manera descrita, las líneas de fuerza son desplazadas hacia afuera tan pronto como se establece la supraconductividad. Es indiferente el camino que se elige: si se enfría primero y se introduce después el campo, o si se aplica primero el campo y se enfría después.

El interior de un supraconductor suficientemente grueso está siempre libre de campo magnético. Eso se llama el *efecto Meissner*. Fué un punto crucial en la historia de la supraconductividad.

En este descubrimiento se basa todo el desarrollo ulterior. Primero, los físicos holandeses, Rutgers, Casimir y Gorter⁽⁷⁾ pudieron establecer la termodinámica de la transición de conductividad normal a supraconductividad. Los dos estados representan fases, en el sentido de Gibbs, de una misma substancia, entre las cuales se puede producir una transición reversible. Aparece aquí un calor latente con el cual están vinculados los calores específicos de las dos fases. Pero, aún cuando tales relaciones son conocidas en otras transiciones entre fases, en este caso se agrega una relación con el valor umbral magnético como característica particular. Todas estas consecuencias han podido ser verificadas experimentalmente después de 1934 por los físicos de Leiden, entre los cuales se distinguió particularmente Keesom⁽⁸⁾.

Quedó, sin embargo, el problema básico. Nuestras teorías de la conductividad eléctrica, creadas para conductores normales y que han conducido para éstos a resultados muy satisfactorios, ¿cómo podían ser extendidas a los supraconductores? La mayoría de los teóricos atacaron este problema desde el lado atómico. Preguntaron cómo se comportan los electrones en un supraconductor en comparación con un conductor normal. A pesar de los muchos trabajos que se han escrito, no se puede afirmar que alguna de estas teorías pertenezca a la parte segura de la física. En los últimos años, una teoría cuántica de la supraconductividad de W. Heisenberg⁽⁹⁾ es, quizás, la que presenta el mayor interés, pero tiene que competir con otras, p. ej., con una propuesta por M. Born⁽¹⁰⁾.

También la teoría generalmente llamada de London, tiene

históricamente su origen en ideas atomísticas. El planteo característico de esta teoría fué hecho, en lo que a la teoría clásica de los electrones se refiere, por R. Becker. W. Heller y F. Sauter⁽¹¹⁾, y en lo que a la teoría cuántica se refiere, por Fritz y Heinz London⁽¹²⁾. El autor aceptó este planteo⁽¹³⁾ sin referirse a las ideas atomísticas. Le pareció necesario, como primer paso, extender la teoría puramente fenomenológica de Maxwell a los supraconductores. Una vez logrado eso, la teoría atómica deberá dar el segundo paso.

Esta teoría puede ser expuesta de la siguiente manera: La supraconductividad plantea, desde el principio, un dilema: por un lado la mencionada desaparición de la resistencia eléctrica, por el otro la imposibilidad de distinguir ópticamente los estados supraconductor y normal del mismo metal. Las propiedades ópticas de un conductor normal dependen esencialmente de su conductividad finita. Luego esta conductividad debe conservar cierta importancia también para el supraconductor.

La teoría de London interpreta estos dos hechos, aparentemente contradictorios, suponiendo que existen dos mecanismos de conducción completamente distintos: un mecanismo que da lugar a la supraconductividad y otro mecanismo ordinario que obedece a la ley de Ohm. El primero de ellos no tiene nada que ver con la conductividad común. Ahora bien, las ecuaciones fundamentales de la teoría muestran que en el caso estacionario el primer mecanismo excluye al segundo, al poner literalmente en cortocircuito la corriente óhmica, de manera que su conductividad ya no influya. Sin embargo, en el caso de vibraciones rápidas, la corriente óhmica domina tanto más cuanto mayor es la frecuencia. Para frecuencias ópticas el mecanismo de la supraconductividad deja prácticamente de influir. Pero ya en el dominio de las oscilaciones hertzianas, Mc. Lennan y colaboradores habían comprobado en 1932, la existencia de una resistencia en supraconductores⁽¹⁴⁾. En 1941, Heinz London repitió estas experiencias⁽¹⁵⁾. De las ecuaciones así obtenidas fluye entonces, como consecuencia matemática inevitable: 1º) el efecto Meissner; 2º) todo lo que sabemos desde Kamerlingh Onnes sobre corrientes permanentes.

Pero en esta representación, el efecto Meissner no aparece como una supresión total del campo magnético, sino como una limitación del campo a una capa delgada bajo la superficie del supraconductor. En general esta capa tendrá un espesor del orden

de 10^{-5} a 10^{-6} cm. Para la mayoría de las mediciones, eso es prácticamente equivalente a una supresión total, pero, existen también casos en los cuales algo de la profundidad de penetración se hace notar indirectamente. Son las supracorrientes en estas capas, las que protegen las partes interiores del campo magnético.

Existe otro dilema más, que ya Kamerlingh Onnes trató de resolver en 1924 por una experiencia que no tuvo éxito completo (16). El hecho de que exista la corriente permanente, indica que entre el mecanismo de la supraconductividad y la materia — propiamente dicho — en su interior, no actúan fuerzas. Sin embargo, cada corriente eléctrica está acompañada, según Maxwell, por un campo magnético y, en el caso de la supraconductividad, la vinculación entre corriente y campo es todavía más estrecha. Por lo tanto deben actuar fuerzas del campo sobre el mecanismo de la corriente, fuerzas que tienden a desplazar las líneas de corriente. Pero la misma teoría habla también de líneas de corriente no desplazables, estacionarias.

La idea que salva esta dificultad es la de las tensiones que acompañan cada supracorriente, idea ya introducida por London. Esa parte de la teoría es el punto angular del cual depende todo. Para explicar su significado, consideraremos primero una cuestión trivial.

¿Porqué no cae al suelo, siguiendo la gravedad, un cuerpo suspendido en el campo gravitacional de la tierra? La contestación, bien conocida, es: En su interior existen tensiones elásticas que en cada punto compensan exactamente la gravitación. Es verdad que las tensiones no pueden anularla. Pero la trasladan del interior a la suspensión. El gancho, al cual está fijado el cuerpo, tiene que resistir la acción total de la gravedad.

En el caso de la supraconductividad, las fuerzas del campo magnético que actúan sobre los portadores de la corriente corresponden a la gravedad, mientras que las tensiones de London corresponden a las tensiones elásticas. Naturalmente, es necesario comprobar que existen tensiones apropiadas. Eso ya lo comprobó Fritz London en 1937 (17). Pero, ¿cuál es el análogo al gancho en nuestro ejemplo? Es, sin duda, la superficie del supraconductor. En ella se transmite la acción del campo magnético a la materia, acción que se ejerce primariamente sobre los portadores de la corriente. En el caso estacionario, todo el sistema de la supracor-

riente está suspendido de la superficie. de la misma manera en que una lámpara está suspendida de su gancho.

A mi modo de ver, es un éxito particular de esta teoría el llegar, necesariamente, de las tensiones de London a la existencia de un valor umbral magnético. Esta conclusión permite entonces derivar de la manera habitual la termodinámica completa de la transición de fase, mientras que Rutgers, Casimir y Gorter tuvieron que admitir este hecho como dato experimental. Eso ha sido demostrado por el autor en 1938⁽¹⁸⁾.

La presente teoría fenomenológica ha ido sufriendo varias modificaciones durante los años. Al principio tenía una forma que consideraba los supraconductores como cuerpos isótropos. En realidad se trata de cuerpos cristalinos, y si su sistema cristalino no es el cúbico, tenemos que tomar en cuenta las distintas direcciones en ellos. Este paso ha sido dado por el autor en 1948⁽¹⁹⁾. Últimamente⁽²⁰⁾ logró también incluir la idea de una densidad máxima, insuperable, de la corriente, idea tomada de la teoría atómica de Heisenberg, sin sacrificar con ello ninguno de los resultados esenciales de la forma anterior de la teoría. Es cierto que la teoría pierde con eso una característica que tenía en común con la teoría de Maxwell, es decir, la linealidad de sus ecuaciones y de sus ecuaciones diferenciales. Ahora ya no podemos formar por superposición de dos soluciones posibles una tercera. Esto representa una dificultad seria para el desarrollo matemático de la teoría.

Con eso parece que el desarrollo de la teoría ha llegado a un cierto fin. Se adelantó mucho a las experiencias y ahora se presenta para los experimentadores la tarea de verificar las distintas conclusiones teóricas en el mayor número posible de sustancias y en tantas condiciones diferentes como se pueda. Para tener condiciones bien determinadas tendrán que trabajar no con el material policristalino habitual, sino con microcristales. Pero, la matemática tendrá que establecer el puente entre la teoría y la experiencia, calculando casos particulares que son apropiados para la verificación experimental. Solamente cuando esto haya sido hecho en un número suficiente de casos podremos considerar nuestras ideas de la supraconductividad como aseguradas.

Por fin tenemos que mencionar todavía un fenómeno que se presenta regularmente cuando se destruye la supraconductividad por un campo magnético, y que ha causado gran confusión en

la interpretación de las experiencias. Al principio se creía que la conductividad normal se establece primero en una capa superficial que rodea al resto supraconductor. Solamente con un aumento ulterior del campo, este resto debía reducirse, y, finalmente, desaparecer. Pero no es así. La condición termodinámica de equilibrio no es compatible con la coexistencia de supraconducción y conducción normal en cuanto aquel resto forma un todo macizo. La situación cambia si dominios supraconductores delgados se encuentran colocados dentro de un ambiente en fase normal. Estos dominios tienen que ser tan delgados que ya no se pueda formar en ellos una capa protectora que separe el interior supraconductor. En realidad, durante la descomposición de la supraconductividad aparece un «estado intermedio», una mezcla mecánica de dominios normales y supraconductores. No siempre el estado intermedio puede ser identificado por mediciones de la resistencia, y distinguido del estado supraconductor. Porque si las partes supraconductoras siguen conectadas unas con otras forman un puente entre los extremos del circuito que se hace cargo de la conductividad, y aparece como estado supraconductor. De aquí fluyen a menudo interpretaciones equívocas de los resultados de las mediciones. De Haas y sus colaboradores ya aclararon este punto en las mencionadas investigaciones de 1934 a 1937, y en 1947, los físicos rusos Meshlovsky y Shalnikov⁽²¹⁾ confirmaron y precisaron estas observaciones. Existe un método mejor para identificar el estado intermedio: el campo magnético. Tan pronto como se puede observar un tal campo en el cuerpo (naturalmente en pequeños agujeros en su interior), la supraconductividad se ha descompuesto y se ha formado el estado intermedio.

Göttingen, Max Planck-Institut für Physik.
Julio 1949.

(Traducido por G. BECK y D. CANALS FRAT).

B I B L I O G R A F I A

- 1) H. KAMERLINGH-ONNES, Comm. Leiden, 122b y 124c, 1911.
- 2) H. KAMERLINGH-ONNES, Comm. Leiden, 140b, y 141b, 1914.
- 3) E. JUSTI y G. ZICKNER, Phys. Z., 42, 258, 1941.
- 4) H. KAMERLINGH-ONNES, Coll. Leiden, 174a y b, 1913.
- 5) M. v. LAUE, Phys. Z., 33, 796, 1932.
- 6) W. MEISSNER y R. OCHSENFELD, Naturw., 21, 787, 1933.
W. MEISSNER, Phys. Z., 35, 931, 1934.
- 7) H. CASIMIR, Physica, 1, 306, 1934.
- 8) Véase p. ej., W. H. KEESOM y P. H. VAN LAER, Physica, 3, 371, 1936.
- 9) W. HEISENBERG, Z. f. Naturforschung, 2a, 185, 1947; 3a, 65, 1948;
Göttinger Nach. Mathem. -Physik Klasse 1947, p. 23; Ann. d. Phys.,
3, 289, 1948.
- 10) M. BORN, Nature, 162, 968 y 1017, 1948.
- 11) R. BECKER, G. HELLER y F. SAUTER, Z. f. Phys., 85, 772, 1933.
- 12) FRITZ y HEINZ LONDON, Proc. Roy. Soc., 149, 71, 1935; Physica, 2, 341, 1935.
- 13) M. v. LAUE, Ann. d. Phys., 42, 65, 1942, y 43, 223, 1943.
- 14) MC. LENNAN, A. C. BURTON, A. PITT y J. O. WILHELM, Proc. Roy. Soc.,
136, 52, 1932; 138, 245, 1932.
- 15) H. LONDON, Proc. Roy. Soc., 176, 522, 1940; M. v. LAUE, Z. f. Phys.,
124, 35, 1947.
- 16) H. KAMERLINGH-ONNES, Comm. Leiden, Suppl. 50a, 1924.
- 17) F. LONDON: Une conception nouvelle de la supraconductivité, Paris, 1937.
- 18) M. v. LAUE, Ann. d. Phys., 32, 71 y 253, 1938.
- 19) M. v. LAUE, Ann. d. Phys., 3, 31, 1948.
- 20) M. v. LAUE, Ann. d. Phys., 1949 (por aparecer); véase también la 2ª edición de M. v. Laue, Theorie der Supraleitung, Springer-Verlag, 1949.
- 21) A. MESHKOWSKY y A. SHAKNIKOV., Journ. of Physics, 11, 1, 1947.

PROPAGACION DE ONDAS ELECTROMAGNETICAS EN LA GUIA AXIAL EXCENTRICA

por JOSÉ A. BALSEIRO

Instituto de Física - La Plata

(Recibido el 7-11-1949)

SUMMARY. - The formal solution for electromagnetic waves propagating between two eccentric cylinders of infinite conductivity is given in terms of the propagation modes of the coaxial guide. A first approximation for the case of small eccentricities is discussed, and the propagation factor is obtained in terms of the eccentricity.

1. - *Introducción.* — Trataremos las soluciones de las ecuaciones de Maxwell correspondientes a la propagación de ondas entre dos cilindros de conductividad infinita y no concéntricos, en el caso que el cilindro interior contiene el centro del exterior ⁽¹⁾.

La solución en el caso general puede ser expresada como una superposición de los modos correspondientes a la guía coaxial, pudiendo ser satisfechas las condiciones de contorno mediante una superposición de modos eléctricos (E) o magnéticos (H) indistintamente. El campo en este tipo de guía es, pues, transversal sea respecto del vector magnético, sea respecto del vector eléctrico. Existe, también en este caso la solución fundamental para la cual $E_z = E_\varphi = 0$, que coincide con la correspondiente a la guía coaxial.

En el caso de excentricidades grandes el cálculo del factor de propagación requiere la determinación de las raíces de una ecuación trascendente de infinitos términos. Sin embargo, tratándose de pequeñas excentricidades correspondientes a errores acci-

⁽¹⁾ El Prof. KURT FRÄNZ nos ha comunicado que ha tratado este mismo problema resolviendo en forma aproximada la ecuación de ondas expresada en coordenadas bipolares con el método variacional de Ritz.

dentales o de construcción de las guías coaxiales se puede hallar la solución en primera aproximación, pudiéndose aplicar el mismo método para la determinación de aproximaciones superiores.

Los modos de propagación en una guía coaxial están dados por las soluciones particulares de las ecuaciones de Maxwell en coordenadas cilíndricas z, ρ, φ :

Ondas eléctricas (E):

$$\begin{aligned} E_z &= \alpha^2 Z_n(\alpha\rho) e^{in\varphi} \cdot F & H_z &= 0 \\ E_\rho &= -ih \alpha Z'_n(\alpha\rho) e^{in\varphi} \cdot F & H_\varphi &= -\frac{k}{h} E_\omega \\ E_\omega &= -ih \frac{n}{\rho} Z_n(\alpha\rho) e^{in\varphi} \cdot F & H_\rho &= \frac{k}{h} E_\omega \end{aligned}$$

significando $Z'_n(\alpha\rho)$ la derivada de $Z_n(\alpha\rho)$ respecto del argumento ($\alpha\rho$).

Ondas magnéticas (M):

$$\begin{aligned} H_z &= \alpha^2 Z_n(\alpha\rho) e^{in\varphi} \cdot F & E_z &= 0 \\ H_\rho &= -ih \alpha Z'_n(\alpha\rho) e^{in\varphi} \cdot F & E_\varphi &= \frac{k}{h} H_\omega \\ H_\varphi &= -ih Z_n(\alpha\rho) e^{in\varphi} \cdot F & E_\rho &= -\frac{k}{h} H_\varphi \end{aligned}$$

Siendo:

la función cilíndrica $Z_n(\alpha\rho) = A J_n(\alpha\rho) + B N_n(\alpha\rho)$

$$F = e^{i(kct - hz)}$$

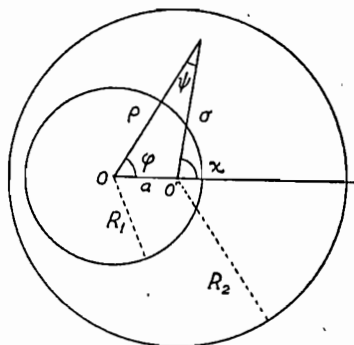
$$\alpha^2 = k^2 - h^2 \quad h, \text{ factor de propagación.}$$

Las condiciones de contorno se expresan, para las ondas (E) $Z_n(\alpha R_1) = Z_n(\alpha R_2) = 0$ y $Z'_n(\alpha R_1) = Z'_n(\alpha R_2) = 0$ para las ondas (H). El factor de propagación queda determinado por estas condiciones mediante las raíces de la ecuación:

$$\text{para } (E) \quad J_n(\alpha R_1) N_n(\alpha R_2) - J_n(\alpha R_2) N_n(\alpha R_1) = 0 \quad (1.1)$$

$$\text{para } (H) \quad J'_n(\alpha R_1) N'_n(\alpha R_2) - J'_n(\alpha R_2) N'_n(\alpha R_1) = 0. \quad (1.2)$$

2. - *Solución general.* — Sea R_1 el radio del cilindro con centro en O y R_2 al correspondiente al centro O' . Además, sea $a = OO'$, z, ρ, φ las coordenadas cilíndricas de un sistema con centro en O y z, σ, χ las coordenadas cilíndricas de un sistema con centro en O' .



Consideraremos las soluciones (E) correspondientes a nuestro problema.

Podemos expresar la componente E_z referida al centro O en la forma:

$$E_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n Z_n(\alpha\rho) e^{in\varphi} \cdot F, \quad (2.1)$$

con

$$Z_n(\alpha\rho) = A_n J_n(\alpha\rho) + B_n N_n(\alpha\rho)$$

y, también, referida al O' :

$$\bar{E}_z = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^2 \bar{Z}_m(\alpha\sigma) e^{im\chi} \cdot F, \quad (2.2)$$

con

$$\bar{Z}_m(\alpha\sigma) = \bar{A}_m J_m(\alpha\sigma) + \bar{B}_m N_m(\alpha\sigma).$$

Debe cumplirse, en virtud de la uniformidad de las funciones de campo que en cualquier punto del recinto comprendido entre los dos cilindros $E_z = \bar{E}_z$. Además, las soluciones cilíndricas de las ecuaciones de Maxwell son derivables de un potencial de Hertz que resulta ser proporcional a E_z . De aquí que la igualdad de E_z implique la uniformidad de la solución.

Mediante el teorema de adición de las funciones cilíndricas podemos referir la (2.2) a la (2.1) y de allí obtener la relación entre los coeficientes A, B y $\bar{A}, \bar{B}$ que determinan la uniformidad de la solución. Por otra parte, en (2.1), dada la simetría respecto de φ las condiciones de contorno $E_z(R_1) = E_\varphi(R_1) = 0$ quedan dadas por

$$Z_n(\alpha R_1) = 0 \quad \text{para cualquier } n \quad (2.3)$$

y análogamente, en (2.2) por la simetría respecto de χ las condiciones de contorno exigen que:

$$\bar{Z}_m(\alpha R_2) = 0 \quad \text{para cualquier } m. \quad (2.4)$$

Mediante el teorema de adición:

$$\bar{Z}_m(\alpha\sigma) = e^{-im\psi} \psi \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} [\bar{A}_m J_{m+\mu}(\alpha\rho) + \bar{B}_m N_{m+\mu}(\alpha\rho)] J_\mu(\alpha a) e^{i\mu\varphi}$$

obtenemos:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_n(\alpha\rho) e^{in\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\bar{A}_m J_n(\alpha\rho) + \bar{B}_m N_n(\alpha\rho)] J_{n-m}(\alpha a) e^{in\varphi}.$$

Luego:

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_m \bar{A}_m J_{n-m}(\alpha a) \\ B_n &= \sum_m \bar{B}_m J_{n-m}(\alpha a). \end{aligned} \quad (2.5)$$

De las condiciones (2.3), (2.4) y de las relaciones (2.5) se obtiene el sistema lineal homogéneo:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{A}_n \left[\frac{J_n(\alpha R_1)}{N_n(\alpha R_1)} - \frac{J_m(\alpha R_2)}{N_m(\alpha R_2)} \right] J_{n-m}(\alpha a) = 0 \quad (2.6)$$

el cual admite una solución distinta de la trivial cuando el determinante del sistema es nulo:

$$\left\| \left(\frac{J_n(\alpha R_1)}{N_n(\alpha R_1)} - \frac{J_m(\alpha R_2)}{N_m(\alpha R_2)} \right) J_{n-m}(\alpha a) \right\| = 0. \quad (2.7)$$

Esta ecuación trascendente define los valores posibles de α

y es la correspondiente a (1.1), a la cual se reduce cuando $a=0$, pues $J_{n-m}(0)=\delta_{n,m}$.

En forma análoga para las ondas (H) se llega a:

$$\left\| \left(\frac{J'_m(\alpha R_2)}{N'_m(\alpha R_2)} - \frac{J'_n(\alpha R_1)}{N'_n(\alpha R_1)} \right) J_{n-m}(\alpha a) \right\| = 0. \quad (2.8)$$

3. - *Primera aproximación.* — Si llamamos α^0 a una de las infinitas raíces de (1.1) las raíces de (2.6) pueden expresarse como una función par de a . Se tendrá, puesto que $\alpha=\alpha^0$ para $a=0$:

$$\alpha = \alpha^0 + ca^2 + da^4 \dots$$

Cuando a es suficientemente pequeño tal que $\alpha^4 \ll a^2$, tendremos en primera aproximación

$$\alpha = \alpha^0 + ca^2. \quad (3.1)$$

En las ecuaciones (2.6) sólo serán significativos los términos factores de:

$$J_1(\alpha a) = -J_{-1}(\alpha a) = \frac{\alpha a}{2} = \xi \quad J_0(\alpha a) = 1 - \xi^2$$

Esto es, en esta aproximación podemos satisfacer las condiciones de contorno con el desarrollo (2.1) reducido a tres términos. Si excitamos un modo de orden n aparecen superpuesto a éste los modos de orden $n-1$ y $n+1$. En tal caso el determinante (2.6) se reduce a un determinante de tercer orden. Si llamamos:

$$a_{n-m} = J_n(\alpha R_1) N_m(\alpha R_2) - J_m(\alpha R_2) N_n(\alpha R_1)$$

para un modo de orden n (2.6) se convierte:

$$a_{n-1,n-1} a_{n,n} a_{n+1,n+1} + \xi^2 [a_{n,n-1} a_{n-1,n} a_{n+1,n+1} + \\ + a_{n-1,n-1} a_{n,n+1} a_{n+1,n} - 3 a_{n-1,n-1} a_{n,n} a_{n+1,n+1}] = 0. \quad (3.2)$$

Por otra parte, la (3.1) puede expresarse:

$$\alpha = \alpha^0 + c_2 \xi^2 \quad \text{donde } \xi = \frac{\alpha a}{2} \approx \frac{\alpha^0 a}{2}. \quad (3.3)$$

Desarrollando en serie las funciones cilíndricas involucradas en (3.2) en la forma:

$$J_n(\alpha R) = J_n(\alpha^0 R) + R c_2 \xi^2 J'_n(\alpha^0 R) = \\ = J_n(\alpha^0 R) + R C_2 \frac{\xi^2}{2} [J_{n-1}(\alpha^0 R) - J_{n+1}(\alpha^0 R)]$$

obtenemos, si llamamos $a_{n,m}^0$ al valor de $a_{n,m}$ calculada con el valor conocido α^0 en vez de α : $a_{n,n}^0 = 0$.

$$a_{n-1,n-1} a_{n,n} a_{n+1,n+1} = c_2 \frac{\xi^2}{2} [R_1(a_{n,n-1}^0 - a_{n,n+1}^0) + \\ + R_2(a_{n-1,n}^0 - a_{n+1,n}^0)] a_{n-1,n-1}^0 a_{n+1,n+1}^0 \\ a_{n-1,n-1} a_{n-1,n} a_{n+1,n+1} = a_{n,n-1}^0 a_{n-1,n}^0 a_{n+1,n+1}^0 \\ a_{n-1,n-1} a_{n,n+1} a_{n+1,n} = a_{n-1,n-1}^0 a_{n,n+1}^0 a_{n+1,n}^0.$$

Con esto la (3.2) permite calcular C_2 , resultando:

$$C_2 = -2 \left\{ \frac{a_{n,n-1}^0 a_{n-1,n}^0}{[R_1(a_{n,n-1}^0 - a_{n,n+1}^0) + R_2(a_{n-1,n}^0 - a_{n+1,n}^0)] a_{n-1,n-1}^0} + \right. \\ \left. \frac{a_{n,n+1}^0 a_{n+1,n}^0}{[R_1(a_{n,n-1}^0 - a_{n,n+1}^0) + R_2(a_{n-1,n}^0 - a_{n+1,n}^0)] a_{n+1,n+1}^0} \right\}$$

El sistema de seis ecuaciones lineales homogéneas a que quedan reducidas las (2.5) y (2.6) en esta aproximación permiten calcular los coeficientes A_{n-1} , A_{n+1} , B_{n-1} , B_n , B_{n+1} en función de A_n :

$$A_{n-1} = \xi A_n \frac{N_{n-1}(\alpha R_1)}{N_n(\alpha R_1)} \times \frac{a_{n,n-1}}{a_{n-1,n-1}} \\ A_{n+1} = \xi A_n \frac{N_{n+1}(\alpha R_1)}{N_n(\alpha R_1)} \times \frac{a_{n,n+1}}{a_{n+1,n+1}} \\ B_{n-1} = -\xi A_n \frac{J_{n-1}(\alpha R_1)}{N_n(\alpha R_1)} \times \frac{a_{n,n-1}}{a_{n-1,n-1}} \\ B_n = -A_n \frac{J_n(\alpha R_1)}{N_n(\alpha R_1)} \\ B_{n+1} = -\xi A_n \frac{J_{n+1}(\alpha R_1)}{N_n(\alpha R_1)} \times \frac{a_{n,n+1}}{a_{n+1,n+1}}.$$

Análogamente se determina en esta aproximación la solución correspondiente a las ondas (H) con el significado de

$$a_{n,m} = J'_n(\alpha R_1) N'_m(\alpha R_2) - J'_m(\alpha R_2) N'_n(\alpha R_1)$$

y α^0 una de las raíces de $a^0_{n,n} = 0$.

4. - *Segunda aproximación.* — Para una segunda aproximación:

$$\alpha = \alpha^0 + c_2 \xi^2 + c_4 \xi^4$$

supuesto que $\xi^6 \ll \xi^4$.

En tal caso

$$J_2(\alpha a) = J_{-2}(\alpha a) = \frac{\xi^2}{2} \quad J_1(\alpha a) = -J_1(\alpha a) = \xi \quad J_0(\alpha a) = 1 - \xi^2$$

con lo cual (2.7) queda reducido a un determinante de quinto orden expresable en la forma:

$$a_{n-2,n-2} a_{n-1,n-1} a_{n,n} a_{n+1,n+1} a_{n+2,n+2} + \xi^2 C_n + \xi^4 D_n = 0, \quad (4.1)$$

donde C_n y D_n son sumas de productos de $a_{n-2,n-2}$, $a_{n,n-2}$... etc.

En esta aproximación:

$$\begin{aligned} J_n(\alpha R) = & \left[1 - \frac{1}{4} (R C_2 \xi)^2 \right] J_n(\alpha^0 R) + \\ & + \frac{1}{2} R (C_2 \xi^2 + C_4 \xi^4) [J_{n-1}(\alpha^0 R) - J_{n+1}(\alpha^0 R)] \\ & + \frac{1}{8} (R C_2 \xi^2)^2 [J_{n-2}(\alpha^0 R) + J_{n+2}(\alpha^0 R)] \end{aligned}$$

donde α^0 es siempre una raíz de $a^0_{nn} = 0$. Los factores $a_{n,m}$ son expresables

$$a_{n,m} = a^0_{n,m} + \xi^2 \beta_{n,m} + \xi^4 \gamma_{n,m} + C_4 \xi^4 \delta_{n,m},$$

que con la (4.1) permite calcular C_4 en términos de C_2 , R_1 , R_2 y $a^0_{n,m}$.

UN RESUMEN SOBRE LOS NUCLEOS ATOMICOS PESADOS

por W. SEELMANN-EGGEBERT

Instituto de Química, Universidad Nacional de Tucumán

(Recibido el 9-11-1949)

ZUSAMMENFASSUNG: Stellung der schweren Atomkerne im ZNA-Diagramm und im periodischen System, genetischer Zusammenhang, radioaktive Daten und Zerfallsarten.

Después del descubrimiento de la radiactividad del uranio y del torio, fueron estudiados los núcleos que descenden genéticamente de ellos y que pertenecen a las tres familias radiactivas naturales. Hace algunos años parecía que se hubiere agotado la investigación relacionada con los núcleos pesados ⁽¹⁾. Pero, cuando fué descubierta la posibilidad de transformar también artificialmente los núcleos pesados, empezó una nueva época de descubrimientos e investigaciones. El interés aumentó extraordinariamente cuando, en sus trabajos sobre la formación de transuránicos. Hahn y Strassmann descubrieron la fisión nuclear; y muy especialmente cuando se reconoció la trascendencia de este descubrimiento y con ello la importancia de los núcleos pesados.

Con la utilización de métodos de investigación considerablemente mejorados pudieron ser sintetizados y analizados durante los últimos años tantos núcleos pesados nuevos que me parece útil dar un resumen acerca de ellos.

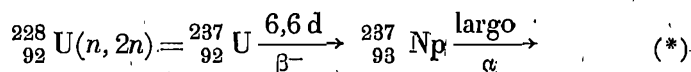
Como bien se sabe, todos los núcleos pesados con número de masa mayor que el del estable Bi 209, son radiactivos y, por lo tanto, es poco probable que existan núcleos estables de

⁽¹⁾ J. WÜRSCHMIDT, Universidad Nacional de Tucumán Publ. 376, Dept. Física 21.

masa mayor. Todos estos núcleos deben pertenecer, según las leyes de la desintegración radiactiva, a una familia cuyos miembros posean una relación genética radiactiva entre sí.

No ocurren transformaciones por desintegración radiactiva de un núcleo de una familia determinada en un núcleo de otra familia. El distintivo más característico de cada una de las cuatro familias radiactivas es su fórmula de masa, a la cual deben corresponder todos sus miembros. Por lo tanto basta el conocimiento del número de masa de un núcleo para saber a qué familia pertenece. Las fórmulas de masa para las familias son las siguientes: $4n$, con $n \geq 52$, para la serie del torio; $4n+2$, con $n \geq 51$, para la serie del uranio-radio; $4n+3$, con $n \geq 51$, para la serie del actinio y $4n+1$, con $n \geq 52$, para la serie del neptunio, elemento que ya se extinguió en la naturaleza. El nombre del neptunio deriva de su isótopo con vida media más larga, el Np 237. Ningún otro miembro de la familia del neptunio tiene vida media suficientemente larga como para que sea posible encontrarlo en la naturaleza.

También la formación continua del Np 237, a partir del U 238 por el proceso



por neutrones emitidos por fisión espontánea o formados por rayos cósmicos, es tan lenta que ni el Np 237 mismo ni ninguna de sus sustancias hijas han sido encontrados en la naturaleza. Todos los miembros de esta familia prácticamente sólo pueden ser formados en forma sintética a partir de otros núcleos, ya sea directamente o a través de sus sustancias madres.

Ya en 1935, O. Hahn, L. Meitner y F. Strassmann descubrieron por medio del bombardeo de torio con neutrones térmicos, los primeros isótopos de la familia del neptunio: el Th 233 y el Pa 233⁽²⁾. La mayoría de los miembros de esta familia sintética fué hallada y aislada a partir del Np 237 — formado con ayuda

(*) Se utiliza la nomenclatura según resolución de la Unión Internal de Química, Leiden, 1940.

(2) O. HAHN y L. MEITNER, *Natur.* 23, 320, 1935; L. MEITNER, O. HAHN y F. STRASSMANN, *Z. Physik.* 109, 538, 1938.

de los neutrones de una pila atómica — en el «Argonne National Laboratory», Chicago, EE. UU. y en la Atomic Energy Division, Chalk River, Ontario, Canadá, en forma independiente y simultánea^(*), donde también fueron medidos sus datos nucleares y aclarados sus relaciones genéticas.

Los isótopos del uranio, 238 y 235, y también del torio natural 232, son prácticamente los únicos tipos nucleares que existen todavía en la naturaleza en cantidades mayores, ya que su vida media es relativamente larga en relación con la edad de la tierra. Por eso forman, casi exclusivamente, las sustancias de partida para los otros núcleos pesados.

La mayor parte de estos núcleos pesados son formados como sustancias hijas por desintegración radiactiva de los tipos nucleares ya mencionados y del Np 237, que a su vez sólo puede ser formado artificialmente por un proceso $(n, 2n)$ del U 238 y subsiguiente desintegración β del U 237.

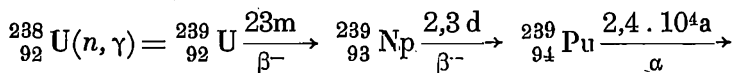
Todos los núcleos que no son directamente sustancias hijas de estos cuatro núcleos, pueden ser formados sólo por procesos nucleares artificiales si se utilizan como núcleos de partida las sustancias madres o los miembros de las familias naturales.

Por eso, como tipos nucleares de partida para tales procesos artificiales se dispone solamente de los núcleos U 235, U 238 y Th 232 y en algunos casos además los isótopos estables del talio, plomo y bismuto. También, en pequeñas cantidades, los isótopos Ra 226 (radio), Ra 228 (Ms Th I), Ac 227 (actinio), Th 228 (Rtdh), Th 230 (ionio) y Pa 231 (protactinio), porque sus períodos son tan largos que se forman en cantidades ponderables durante la desintegración gradual del uranio y torio y éstos pueden ser aislados de minerales de uranio-torio.

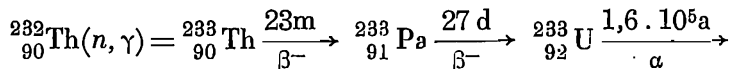
Mientras tanto, del Th 232 o U 238, respectivamente, fueron producidos en forma artificial por los neutrones de las pilas atómicas, cantidades ponderables de Pu 239, Np 237 y U 233; por medio de rayos α o deuterones de los ciclotrones o sincrotrones fueron formados además muy pequeñas cantidades de Am 241, 242 y Cm 242.

El Pu 239 se forma continuamente en minerales de uranio por el proceso siguiente:

(*) Phys. Rev., 72, 252 y 253, 1947.



y teóricamente también U 233 en minerales de uranio-torio por este proceso:



debido a los neutrones esporádicos de los minerales de uranio. Estos neutrones son formados principalmente por la fisión espontánea del U 235. Pero las cantidades de estos isótopos formados en la naturaleza son tan pequeñas que, por ejemplo, el Pu 239 sólo pudo ser hallado en fuentes naturales después de su descubrimiento artificial, mientras la existencia del U 233 hasta ahora no ha sido confirmada en la naturaleza. Además, su separación sería muy dificultosa a causa de las grandes cantidades de otros isótopos naturales del uranio, como U 238, 235 y 234.

Como sólo se disponía de estas, relativamente pocas, clases de núcleos como sustancias de partida para procesos nucleares, no se ha logrado formar todos los núcleos cuyo descubrimiento y aislación sería posible por tener una vida media suficientemente larga. Sin embargo, con los medios actuales debería ser posible formar más núcleos, incluso de los tipos situados cerca de las márgenes del valle de energía del sistema de los núcleos (Ver más adelante).

Es difícil la elaboración sintética de nuevos tipos de núcleos de partida de los cuales se podrían formar núcleos más pesados aún, es decir, isótopos de elementos con mayor número de protones que el del curio 96, porque estos núcleos pueden ser producidos solamente por rayos alfa o deuterones, es decir, no pueden ser producidos en pilas atómicas. A pesar de las grandes intensidades de las fuentes actuales, el rendimiento es siempre relativamente pequeño, a causa de la pequeña sección eficaz para esta clase de procesos nucleares.

Además, en algunos casos la vida media de los isótopos respectivos es muy breve, por lo que es difícil formarlos bastante rápidamente en cantidades ponderables: un aumento lento en estos casos es imposible, porque los ya formados se desintegran demasiado rápido debido a sus cortos períodos.

El uso de sustancias con una vida media relativamente breve en cantidades ponderables, produce nuevas dificultades. Su actividad grande, el calentamiento propio y la necesidad de protección contra las radiaciones, dificultan el trabajo con ellas.

La separación de los elementos con un número de protones mayor que 94, es químicamente difícil, porque las actínidas más pesadas conocidas se parecen mucho entre sí, como ocurre con las lantánidas.

Si se quieren formar núcleos más pesados aún, es decir, núcleos con un número de protones mayor que el americio y el curio, se tendrá que hacer una separación química de los núcleos de partida para verificación segura. A causa de las difíciles reacciones químicas, que exigen mucho tiempo, esta separación sólo se logrará si la vida media de los núcleos hipotéticos es relativamente larga.

Pero en general, parece como si los períodos de los núcleos extremadamente pesados disminuyeran cada vez más.

Además de su desintegración normal por emisión de rayos alfa, electrones o captura K, los núcleos pesados muestran fisión natural espontánea. Esta clase de fisión nuclear no se debe confundir con la fisión artificial por bombardeo con neutrones rápidos, ni la con neutrones térmicos que muestran además los núcleos con masas impares.

Para algunos tipos nucleares fué medido y determinado el período de fisión espontánea. Por ejemplo, la vida media del U 235 con respecto a esta clase de desintegración resultó de cerca de 10^{13} años.

El conocimiento de la vida media para la fisión espontánea de los transuránicos tendría un interés especial. Según las ideas de Bohr y Wheeler⁽⁴⁾ se puede calcular, utilizando su fórmula, que un aumento del número de protones en una unidad acortaría la vida media en un factor 10^4 , mientras que un aumento de la masa en una unidad aumentaría la vida media de la fisión espontánea en un factor diez⁽⁵⁾.

Si la vida media del U 235 fuese de 10^{13} años, lo que es muy probable por las mediciones efectuadas, sería la del Am 242 aproximadamente de 10^8 años, la del Cm 238 de uno hasta tres

(4) N. BOHR y J. A. WHEELER, Phys. Rev., 56, 426, 1939.

(5) S. FLÜGGE, Fiat Review of German Science, Vol. 13, 218.

años y la vida media para desintegración por fisión espontánea del Cm 242 aproximadamente de 10^4 años⁽⁶⁾.

Por cierto, el límite que la naturaleza pone a la formación y verificación de núcleos cada vez más pesados no ha sido alcanzado todavía.

Con la aplicación de grandes recursos se podría probablemente, en un futuro próximo, formar y analizar otros isótopos de elementos pesados ya conocidos y también de nuevos.

El primer diagrama permite una apreciación de todos los núcleos pesados hasta ahora conocidos en el sistema ZNA de los núcleos atómicos. Se puede ver fácilmente que la mayoría de los núcleos posibles son ya conocidos, pero se puede ver también cuáles son los núcleos aún desconocidos que tiene posibilidad teórica de existir y que pueden ser formados probablemente por procesos artificiales. Además, se puede ver qué núcleos pueden entrar en consideración como núcleos de partida para tales procesos de formación. Por ejemplo, debería ser posible formar el núcleo Ac 226, aún desconocido, por un proceso (p, n) a partir del Ra 226. No se puede prever naturalmente si el Ac 226 tendría una vida media bastante larga como para que pueda ser observado y/o aislado por separación química.

Los cuatro diagramas siguientes muestran, en particular, las familias radiactivas en el sistema periódico de los elementos. Las abreviaturas son las mismas que en el primer diagrama.

Los datos nucleares más precisos, los tipos de formación de los núcleos pesados y una lista muy completa de la literatura original hasta fines de 1948, han sido publicados en el «Isotopenbericht»⁽⁷⁾.

La mayoría de los datos utilizados se han tomado de esta publicación, excepto algunos que han sido publicados más tarde. En este resumen fué considerada la literatura original hasta setiembre de 1949.

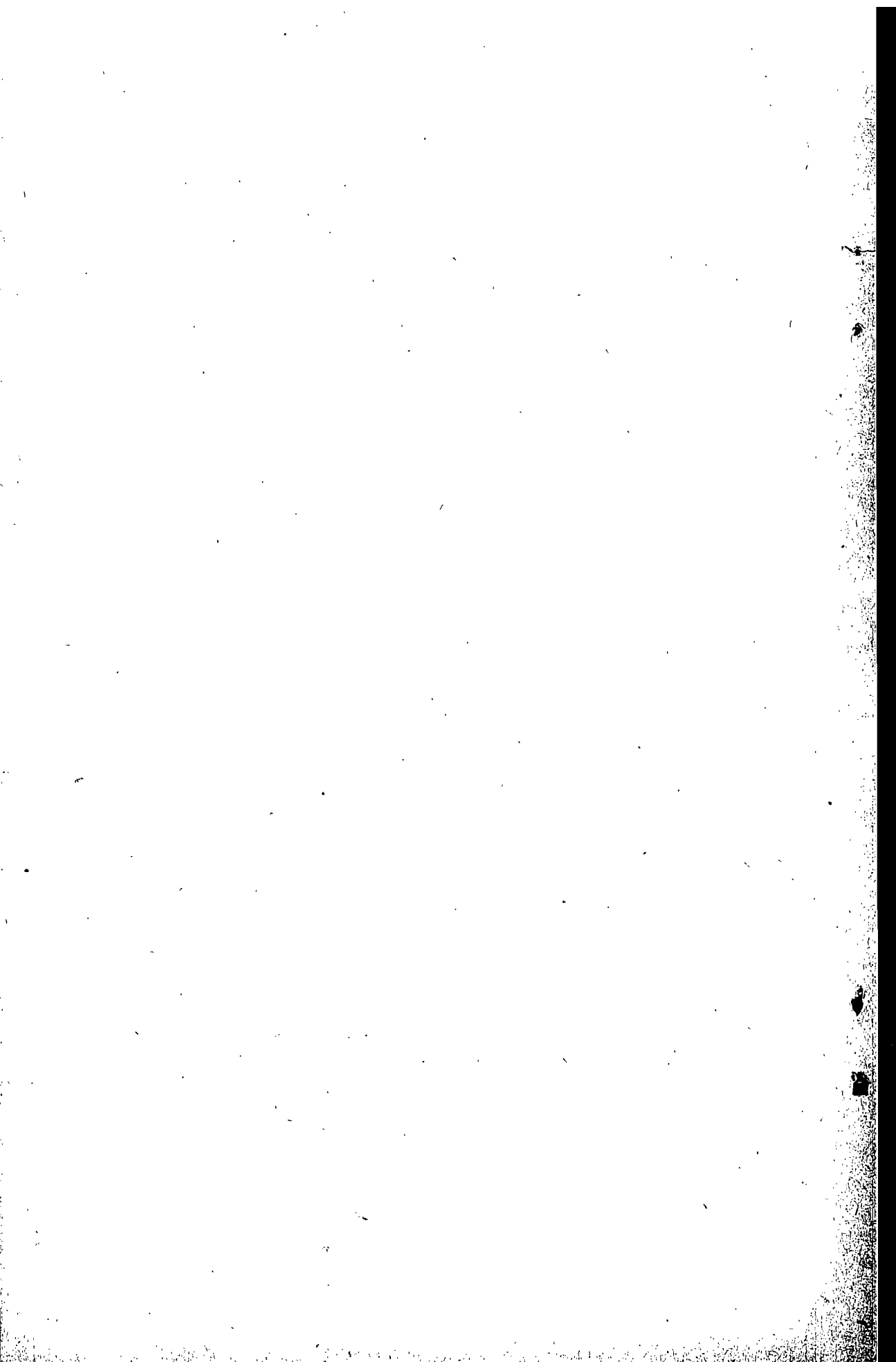
⁽⁶⁾ G. T. SEABORG, Chem. and Eng. News, Feb. 10, 1947.

⁽⁷⁾ J. MATTAUCH y A. FLAMMERSFELD, Isotopenbericht, Verlag der Zeitschrift für Naturforschungen, Tübingen 1949, Alemania.

[illegible]

El sistema ZNA de los núcleos pesados con sus períodos y tipos de desintegración.

Donde: A = número de masa; N = número de neutrones; Z = número de protones; a = años; d = días; h = horas; m = minutos; s = segundos; $ms = 10^{-3}$ segundos; $\mu s = 10^{-6}$ segundos; $m.breve$ = período muy breve; $breve$ = período breve; $largo$ = período largo; $?$ significa que el isótopo o tipo de desintegración no es seguro; $[]$ significa que el número de masa todavía no es seguro; est significa un núcleo estable; α = desintegración por rayos alfa; β = desintegración por electrones; K = captura K ; γ = núcleo isómero y desintegración isómera por rayos gama.



SEGUNDO DIAGRAMA

	Grupo principal								Grupo secundario								
	III	IV	V	VI	VII	O	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII			
Z	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	
A																	
240																	240
236																	236
232																	232
228																	228
224																	224
220																	220
216																	216
212																	212
208																	208

SERIE DEL TORIO

Posición de los isótopos con número de masa $4n$, con $n \geq 52 \leq 60$ en el sistema periódico de los elementos. Los isótopos que poseen nombre propio están subrayados.

TERCER DIAGRAMA

Grupo principal									Grupo secundario								
III	IV	V	VI	VII	O	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII				
Z	Tl	Pb	Bi	Po	At	Em	Fr	Ra	Ac	Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	
	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	
A↓													Transuran.				
													Actinidas				
241														Pu _B	Am _K	Cm	241
														10a	500a	55d	
237													U _B	Np _K	Pu		237
													6,63d	2,5·10 ⁵ a	40d		
233										Th _B	Pa _K	U					233
										23,0m	27,4d	4,63·10 ⁵ a					
229										Th _B	Pa _K	U					229
										7,10 ⁴ a	1,5h	1h					
225										Ra _B	Ac	Th					225
										14,8d	10,0d	75m					
221										Fr	Ra						221
										4,8m	breve						
217																	217
213																	213
209																	209
205																	205

SERIE DEL NEPTUNIO

Posición de los isótopos con número de masa $4n + 1$, con $n \geq 52 \leq 60$ en el sistema periódico de los elementos.

CUARTO DIAGRAMA

Grupo principal									Grupo secundario								
III	IV	V	VI	VII	O	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII				
Z	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	
	Tl	Pb	Bi	Po	At	Em	Fr	Ra	Ac	Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	
A↓									Transurano.								
									Actinidas								
242															Am*	Cm	242
238															400a 118h	150d	238
234																	234
230																	230
226																	226
222																	222
218																	218
214																	214
210																	210
206																	206

SERIE DEL URANIO-TORIO

Posición de los isótopos con número de masa $4n + 2$, con $n \geq 51 \leq 60$ en el sistema periódico de los elementos. Los isótopos que poseen nombre propio están subrayados.

QUINTO DIAGRAMA

Grupo principal									Grupo secundario								
	III	IV	V	VI	VII	O	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII			
Z	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	
	Tl	Pb	Bi	Po	At	Em	Fr	Ra	Ac	Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	
A ↓									Transuran.								
									Actinidas								
239													U _β	Np _β	Pu _β	Am	239
													235m	231d	241m	12h	
235													AcU _β	Np _β			235
													207m	240d			
231													UY _β	Pa _β	U _β	Np	231
													246h	3210a	42d	53m	
227									Ra _β	Ac _β	RdAc _β	Pa _β					227
									217a	189d	38m						
223									AcK _β	AcX _β	Ac _β						223
									21m	114d	2m						
219									An _β	Fr _β							219
									392s	100ms							
215									ACA _β	At _β							215
									183ms	100ms							
211									ACB _β	ACC _β	ACC _β	At _β					211
									361m	216m	5ms	75h					
207									ACC _β	ACD _β	Bi _β	Po _β	At _β				207
									476m est.	?	57h	17h					

SERIE DEL ACTINIO

Posición de los isótopos con número de masa $4n + 3$, con $n \geq 51 \leq 59$ en el sistema periódico de los elementos. Los isótopos que poseen nombre propio están subrayados.

REMANENCIA, FACTOR DE DESMAGNETIZACION Y FUERZA COERCITIVA A LA TEMPERATURA DE CURIE

por WALTER GERLACH y JAKOB KRANZ

Physikalisches Institut der Universität, München

(Recibido el 11-11-1949)

ZUSAMMENFASSUNG: Bei Legierungen von Nickel mit Kupfer und Nickel mit Chrom nimmt im Bereich der Curietemperatur der Entmagnetisierungskoeffizient stark zu, während er bei tieferen Temperaturen temperaturunabhängig ist. Mit dem Anstieg des Entmagnetisierungskoeffizienten ist ein Anstieg der Coerzitivkraft verbunden. Die wahre Remanenz wird durch die Scherung mit den gemessenen N -Werten erheblich vergrößert und bleibt bis fast an die Curietemperatur konstant.

1º. La remanencia real de un cuerpo ferromagnético isotropo debe representar, según la concepción bien establecida del origen de la curva de magnetización «técnica», el 50 % de la saturación, independiente de la temperatura a la cual se la mide. Siendo $J_{\infty T}$ la saturación a la temperatura T , J_{RT} la remanencia a la misma temperatura, $\cos \vartheta$ la distribución media de los vectores de magnetización en el caso de remanencia, tenemos $J_{RT} = J_{\infty T} \cdot \cos \vartheta$ o $J_{RT} = 0,5 \cdot J_{\infty T}$; todos los vectores se encuentran en la semiesfera «positiva», distribuidos al azar sobre todas las direcciones «positivas».

2º. Resultó de las medidas de la remanencia del níquel, que el valor $\cos \vartheta = 0,5$ se encontró para valores mayores que $T/\Theta = 0,45$ (Θ = temperatura de Curie), pero solamente hasta $T/\Theta = 0,95$; después disminuye bastante rápidamente al acercarse a Θ . Debajo de $T/\Theta = 0,45$, $\cos \vartheta = 0,5$ permanece constante para muestras con tensiones internas muy grandes. Para muestras blandas $\cos \vartheta$ crece hasta alrededor de 0,8. La razón de esto es que en el último caso, a temperaturas bajas, la energía K del cristal

se hace sensiblemente mayor que la energía S_i de las tensiones. Este caso es sin interés para lo que sigue; supondremos siempre $S_i \gg K$.

3º. Las razones que pueden explicar los pequeños valores de $\cos \vartheta$ al acercarse a la temperatura de Curie, Θ , son las siguientes:

- a) Una determinación equivocada del valor de saturación;
- b) Una influencia desconocida que puede debilitar la remanencia.

Ad a) En la cercanía de la temperatura de Curie, la saturación no puede ser medida con medios magnéticos. En este intervalo de temperatura se superpone a la orientación paralela al campo («magnetización técnica») la magnetización real (aumento de la magnetización espontánea por el trabajo del campo exterior contra la energía térmica). Las curvas $J-H$ se aproximan a rectas a partir de unos miles de Oerstedt, después de una parte curva, de manera que no es posible obtener por extrapolación el valor de la saturación técnica. Por esta razón hemos determinado la magnetización espontánea a partir del efecto magnetocalórico. No estamos seguros, sin embargo, si este valor no resulta ser todavía un poco elevado, ya que las magnetizaciones real y técnica no son independientes una de otra. Incluso con el valor $J_{\infty T}$ así determinado, $\cos \vartheta$ todavía disminuye cerca de Θ .

Ad b) La remanencia real se calcula haciendo intervenir el factor de desmagnetización N_g , factor que está determinado por la forma geométrica de la muestra. La cantidad $N_g \cdot J_{RT}$ que interviene en la determinación (Scherung) era tan pequeña, que la diferencia entre la remanencia observada («aparente») y la real resultó muy reducida. Sin embargo, se planteó la pregunta si el empleo del factor N_g geométrico aún es justificado en la cercanía de Θ .

4º. Hemos medido la curva de magnetización ideal, con el método de idealización de campo alternado de Steinhaus-Gumlich, en campos constantes entre cero y alrededor de 0,02 Oe. Esta curva resultó rigurosamente lineal en el dominio mencionado. Su inclinación sobre el eje del campo (intensidad del campo exterior aplicado) da el valor recíproco del factor de desmagnetización. Eso ha sido demostrado anteriormente por nosotros hasta $T/\Theta = 0,94$, verificándose para muestras normales un valor N constante en este dominio de temperaturas. Por encima de $T/\Theta = 0,94$ hallamos, sin embargo, un fuerte crecimiento de N .

5) Las mediciones aquí descriptas se realizaron con aleaciones de cobre con níquel, cuyos valores Θ son aproximadamente 140°, 95° y 35° C para 20 %, 25 % y 30 % de cobre, respectivamente. (Para sustancias ferromagnéticas puras las mediciones todavía no han sido terminadas). Una serie de medidas con níquel + 4 % de cromo ($\Theta = 125^\circ$ C) ha sido agregada para mostrar que el efecto no depende de la cantidad ni del tipo de elemento que se ha aleado.

La tabla I da el aumento del valor de N en la cercanía de Θ , $(N_{\text{exp}} - N_g) \cdot 10^3$.

Otra representación de las medidas, $(N_{\text{exp}} - N_g)_T / (N_{\text{exp}} - N_g)_{20^\circ}$ está dada en la figura 1.

T A B L A I

Temp.	$(N_{\text{exp}} - N_g) \cdot 10^3$			
	Ni + 30%Cu $N_g = 4,2 \cdot 10^{-3}$	Ni + 25%Cu $N_g = 3,6 \cdot 10^{-3}$	Ni + 4%Cr $N_g = 3,8 \cdot 10^{-3}$	Ni + 20%Cu $N_g = 4,3 \cdot 10^{-3}$
10	1,1	0,75	0,2	0,2
20	1,2	0,75	0,2	0,2
25	1,4	—	—	—
30	2,0	—	—	—
35	5,0	—	—	—
40	—	—	0,2	0,2
60	—	0,75	—	—
90	—	0,75	—	—
95	—	1,8	—	—
98	—	3,9	—	—
100	—	5	0,2	—
105	—	—	0,2	0,2
110	—	—	0,25	—
115	—	—	0,35	—
120	—	—	0,5	0,2
125	—	—	1,0	0,22
126	—	—	2,5	—
130	—	—	—	0,28
135	—	—	—	0,4
140	—	—	—	1,0
142	—	—	—	3,4

6°. Si ahora, con estos valores muy elevados de N , se re-determina la remanencia real a partir de la remanencia medida, se llega a valores considerablemente mayores.

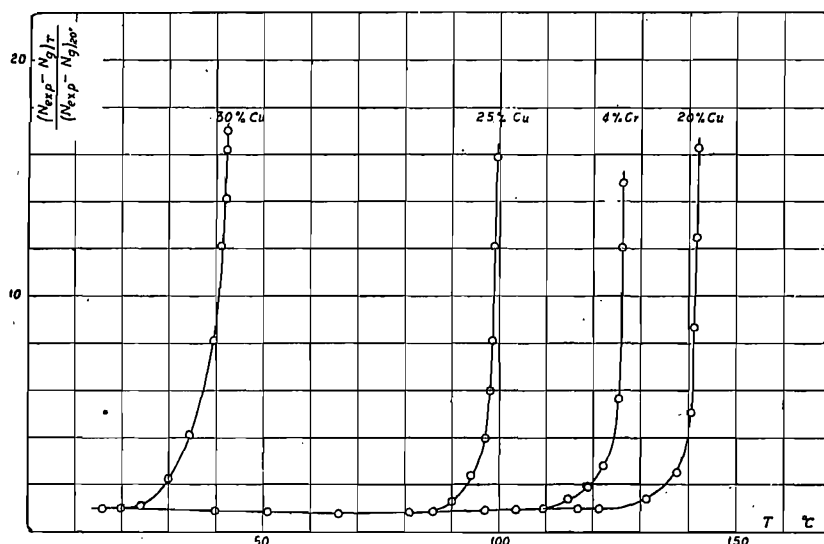


Fig. 1

La tabla II representa, para una muestra de níquel + 25 % de cobre con Θ alrededor de 95°C , los valores medidos y calculados, ambos referidos a los valores de $J_{\infty T}$ obtenidos con ayuda del efecto magnetocalórico. El aumento es muy considerable.

T A B L A II

R = remanencia calculada de manera usual, R_w = remanencia determinada a partir de $J_{\infty T}$ del efecto magnetocalórico y de N_{exp} .

Muestra: Ni + 25%Cu

Temp. °C	N_{exp}/N_g	$\frac{R}{(\cos \theta)}$	$\frac{R_w}{(\cos \theta)}$
20	2,7	0,46	0,46
50	2,7	0,45	0,46
80	2,7	0,43	0,46
85	2,7	0,40	0,45
90	3,1	0,32	0,445
95	6	0,21	0,425
98,2	13	0,15	0,40
106,8	120	0,085	0,27
110,0	200	0,07	0,17

El valor de $\overline{\cos \vartheta} = 0,46$, medido a baja temperatura, permanece constante hasta casi la temperatura de Curie: 93°C . Esta última fué determinada por el efecto magnetocalórico, el calor específico y la fuerza termomotriz con resultados concordantes. Recién en el dominio de transición al estado paramagnético disminuye la remanencia porcentual.

7°. El aumento del valor de N en la cercanía de Θ significa que los «dominios de Weiss» empiezan a disolverse de manera tal que a lo largo de la muestra se forman pequeños imanes, unidos por puentes poco o nada magnetizables. En materiales ferromagnéticos de este tipo se observa frecuentemente una gran fuerza coercitiva. Por eso se ha medido la curva de histéresis y se ha determinado de ella H_c . Resultó que la fuerza coercitiva aumenta considerablemente en el mismo dominio que el factor N .

8°. El crecimiento de N y de H_c en la cercanía de Θ ha sido hallado hasta ahora en todas las aleaciones níquel-cobre y níquel-cromo. N , en función de T/Θ depende de la concentración, de la magnitud de las tensiones internas y del tamaño de los cristalitas. Cuanto menor las tensiones internas y cuanto mayor la recristalización, mayor es la temperatura a la cual comienza el aumento de N . El carácter cualitativo, sin embargo, permanece igual.

Munich, octubre de 1949.

(Traducido por G. BECK y D. CANALS FRAU).

RELACIONES ENTRE SEÑAL Y ESPECTRO

por KURT FRÄNZ

Facultad de Ciencias exactas, Físicas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires - Instituto Radiotécnico

(Recibido el 14/11/1949)

ZUSAMMENFASSUNG: Fuer den Hauptteil eines weitgehend beliebigen Signals gegebener Dauer werden enge obere und untere Schranken angegeben, die nur von der Dauer und nicht vom Verlauf des Signales abhaengen. Insbesondere wird berechnet, welcher Bruchteil der Gesamtenergie eines Signales gegebener Dauer hoechstens auf Frequenzen ω innerhalb eines Bandes gegebener Breite $|\omega| \leq \Omega$ entfaellt. Die Kűpfműller'sche Regel ueber den Zusammenhang zwischen Bandbreite und Einschwingzeit eines Filters wird in verallgemeinerter Form bewiesen. Ferner wird bewiesen, dass die Durchlasskurve eines Filters mit monotonem Einschwingvorgang auch nicht angenaehert rechteckig sein kann, sondern ungefaehr Glockenform hat. Genauer kann man zeigen, dass bei einem Filter mit monotonem Einschwingvorgang die saemtlichen Ableitungen des Uebertragungsmasses nach der Frequenz ihr absolutes Maximum bei der Frequenz Null haben und dass ebenso die geraden Ableitungen der quadratischen Durchlasskurve nach der Frequenz ihr absolutes Maximum bei der Frequenz Null haben.

En la tćcnica de telecomunicaciones se debe a menudo establecer relaciones entre una seńal $u(t)$ que es una funci3n del tiempo y su espectro $f(j\omega)$, que es una funci3n de la frecuencia. Cada una determina completamente a la otra estando ambas vinculadas por medio de integrales de Fourier. En general es difıcil ver lo que implican tales integrales para los problemas prĆcticos. Sin embargo existen resultados sobre las relaciones entre seńal y espectro que admiten aplicaciones directas y c3modas y que por lo tanto se usan muy a menudo en la tćcnica de las telecomunicaciones. Ejemplo de ellos son los teoremas sobre la relaci3n entre la velocidad de grupo o el tiempo de retardo de una seńal y su espectro [1], la regla de Kűpfműller sobre la relaci3n entre el tiempo de formaci3n de una seńal y el ancho

de banda de su espectro [2] y las reglas sobre la forma de la curva de selección de un filtro con transitorios monótonos, como las formuladas por Wallman, [3]. Una parte de estos resultados han sido establecidos en forma rigurosa mientras la regla de Küpfmüller y las de Wallman son extrapolaciones de ejemplos particulares.

Nos hemos planteado el problema de establecer reglas manejables y rigurosas a la vez, analizando los espectros de las señales de duración finita, las señales con espectros de «ancho finito» y los espectros de señales monótonas.

Existe una ley básica de la transmisión de señales en los sistemas lineales que satisfacen el principio de superposición: para que no existan distorsiones serias de señales de duración τ en sistemas lineales, el ancho de banda de la transferencia del sistema debe ser del orden $1/\tau$. Esta ley posee gran importancia práctica, porque el ruido de fondo y el precio de los equipos aumentan con el ancho de banda. Nuestro análisis de las relaciones entre señal y espectro nos permitirá precisar la ley general.

I. - Teoremas

Una señal arbitraria (con un número finito de puntos de discontinuidad) $u(t)$ de duración finita τ admite una representación por medio de su espectro $f(j\omega)$ de la forma

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{con} \quad f(j\omega) = \\ = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} u(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{y} \quad u(t) \equiv 0 \quad \text{para} \quad |t| > \frac{\tau}{2}.$$

Llamamos energía total E de la señal a la magnitud

$$E = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} u^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f f^* d\omega.$$

El asterisco indica el imaginario conjugado. Llamamos densidad espectral de la energía a ff^* . Llamamos energía parcial en la banda $|\omega| \leq \Omega$ a la integral

$$E(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} ff^* d\omega.$$

Teorema 1.

La densidad espectral de la energía ff^* de una señal de duración finita τ y de energía total E , admite la acotación superior

$$ff^* \leq \frac{\tau \cdot E}{1 + \left[1 - \left| \frac{\text{sen } \omega \tau}{\omega \tau} \right|^2 \right]} = \frac{\tau \cdot E}{n(\omega \tau)}; \quad -\infty < \omega < \infty,$$

con $n(0) = 1 \leq n(\omega \tau) \leq 2 = n(\infty)$.

Para $\omega = 0$ el signo igual es válido sólo en el caso de la señal rectangular ($u(t) = \text{const. para } |t| \leq \frac{\tau}{2}$). Tal señal rectangular posee la densidad espectral

$$ff^* = \tau E \left[\frac{\text{sen } \omega \tau / 2}{\omega \tau / 2} \right]^2,$$

expresión que en el intervalo $|\omega \tau| < \pi$ no es muy distinta de la cota superior.

Teorema 2.

Para $|\omega \tau| < \pi$ la densidad espectral ff^* de una señal no negativa ($u \geq 0$) de duración τ admite la acotación inferior

$$ff^* \geq f^2(0) \cos^2(\omega \tau / 2); \quad |\omega \tau| \leq \pi.$$

En vez del espectro $f(0)$ para la frecuencia $\omega = 0$ podemos introducir el valor medio de la señal $\bar{u} = \frac{1}{\tau} \int u dt = \frac{1}{\tau} f(0)$. El

signo igual es válido sólo para una «señal» de dos picos iguales en los instantes $t = \pm \frac{\tau}{2}$.

Teorema 3.

Para $|\omega\tau| \leq \pi$ la densidad ff^* de una señal no negativa y con un solo máximo en el instante $t=0$ ($\frac{du}{dt} \geq 0$ para $t \leq 0$ y $\frac{du}{dt} \leq 0$ para $t \geq 0$) no es menor que la densidad de la señal rectangular de la misma duración y del mismo valor medio

$$ff^* \geq f^2(0) \left[\frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2} \right]^2.$$

El signo igual sólo vale para la señal rectangular.

Teorema 4.

Entre todas las señales de duración finita τ y de energía total E hay una $U(t)$ con la energía parcial máxima $E_{\max}(\Omega)$ en el intervalo $|\omega| \leq \Omega$. Esta señal satisface la ecuación integral

$$U(t) = \lambda \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \frac{1}{\pi} \frac{\sin \Omega(t-s)}{t-s} U(s) ds.$$

La energía parcial máxima es una función del producto $\Omega\tau$ e igual al recíproco del primer valor propio λ_1 de la ecuación integral.

$$E_{\max}(\Omega\tau) = x_1 = \frac{1}{\lambda_1}.$$

Este valor propio lo hemos calculado numéricamente. Como demuestra la tabla siguiente, en la parte esencial del espectro no es posible mejorar mucho la concentración espectral con respecto a la correspondiente señal rectangular.

La energía parcial máxima se encuentra entre los valores $\overline{E} < E_{\max} < \overline{E}$. La energía parcial de la señal rectangular la llamamos E_r .

$\Omega \tau$	0	1	2	3	4	4,5
$\overline{E}'$	0	0,313	0,574	0,777	0,994	1
$\overline{E}$	0	0,313	0,571	0,758	0,935	0,965
$\overline{E}_r$	0	0,310	0,571	0,753	0,850	

Teorema 5.

Si excitamos con la tensión escalón $e(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t > 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$ un filtro de transferencia $T(j\omega)$, resulta la tensión de salida $u(t)$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty + \nu}^{j\infty + \nu} \frac{T(p)}{p} e^{pt} dp \quad \nu > 0.$$

Küpfmüller define el tiempo de formación τ de la señal $u(t)$ en la salida del filtro por medio de la tangente máxima

$$\tau = \frac{1}{\left(\frac{du}{dt}\right)_{\max}}$$

y demuestra que para el filtro ideal con $T(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{para } |\omega| < \Omega \\ 0 & \text{para } |\omega| > \Omega \end{cases}$ se verifica la relación

$$\tau = \frac{\pi}{\Omega}.$$

Este resultado lo generalizamos para filtros arbitrarios:

$$\left| \frac{du}{dt} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |T| d\omega.$$

El signo igual vale sólo en el caso de una transferencia con fase lineal, o sea

$$T(j\omega) = |T| e^{-j\omega t_0}.$$

Teorema 6.

En una comunicación presentada a la decimotercera reunión de la AFA, A. González Domínguez ya ha demostrado que «si la transferencia de un circuito lineal pasivo es tal que su módulo $|T|$ vale la unidad en un intervalo finito $\omega_1 < \omega < \omega_2$, la respuesta del circuito a la tensión unitaria no es monótona [4].

Además hemos obtenido fórmulas que implican la regla de Wallman. Para que la respuesta de un filtro a la tensión escalón sea monótona, la transferencia $T(j\omega)$ debe satisfacer para todas las frecuencias las desigualdades

$$\left| \frac{d^n T}{d\omega^n} \right| \leq \left| \frac{d^n T}{d\omega^n} \right|_{\omega=0}; \quad \left| \frac{d^{2n} |T|^2}{d\omega^{2n}} \right| \leq \left| \frac{d^{2n} |T|^2}{d\omega^{2n}} \right|_{\omega=0}.$$

La desigualdad particular

$$\left| \frac{d^2 |T|^2}{d\omega^2} \right| \leq \left| \frac{d^2 |T|^2}{d\omega^2} \right|_{\omega=0}$$

implica que la curva de selección $|T|^2$ de un filtro tiene curvatura máxima para la frecuencia $\omega=0$ y, por lo tanto, no puede ser aproximadamente rectangular como la del filtro ideal, sino que es campaniforme. La definición precisa de la selección y la monotonía de los transitorios no son propiedades compatibles.

II. Señales de duración finita.

Para demostrar el teorema 1 debemos analizar una señal de duración τ y de energía total E . Descompongamos tal señal en su valor medio (componente continua) y su parte alterna

$$u(t) = \bar{u} + u_2(t).$$

Con estas definiciones resulta

$$E = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} u^2 dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} u_2^2 dt + \tau \bar{u}^2 \geq \tau \bar{u}^2$$

o sea

$$f^2(0) \leq \tau E.$$

El signo igual vale sólo para $u_2 \equiv 0$, es decir para la señal rectangular.

La señal rectangular $u = \begin{cases} 1 & \text{para } |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{para } |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$ posee el espectro

$$f(j\omega) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t} dt = \frac{\text{sen } \omega\tau/2}{\omega\tau/2}.$$

Esta primera desigualdad admite una generalización para frecuencias arbitrarias, la cual constituirá nuestro teorema 1. Formemos la expresión

$$u_r(t) = \begin{cases} u - \frac{1}{\tau} f(j\omega_0) e^{j\omega_0 t} & \text{para } |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{para } |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}.$$

Obtenemos así las ecuaciones

$$\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} u_r e^{-j\omega_0 t} dt = 0$$

y

$$\int u u^* dt = \int u_r u_r^* dt + \frac{1}{\tau} f(j\omega_0) f^*(j\omega_0) \geq \frac{1}{\tau} f(j\omega_0) f^*(j\omega_0).$$

La última desigualdad vale para funciones complejas arbitrarias $u(t)$, que se anulan para $|t| > \frac{\tau}{2}$, y en particular para $u_r(t)$ y su espectro $f_r(j\omega)$:

$$f_r(j\omega) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} u_r e^{-j\omega t} dt = f(j\omega) - f(j\omega_0) \frac{2}{\tau} \frac{\text{sen}(\omega - \omega_0)\tau/2}{\omega - \omega_0}$$

$$f_r(-j\omega_0) = f^*(j\omega_0) - f(j\omega_0) \frac{\text{sen} \omega_0 \tau}{\omega_0 \tau}$$

Sustituyendo en la última desigualdad obtenemos

$$\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} u_r u_r^* dt \geq \frac{1}{\tau} \left\{ ff^* \left[1 + \frac{\text{sen}^2 \omega_0 \tau}{(\omega_0 \tau)^2} \right] - [f^2 + f^{*2}] \frac{\text{sen} \omega_0 \tau}{\omega_0 \tau} \right\}$$

$$\geq \frac{1}{\tau} ff^* \left(1 - \left| \frac{\text{sen} \omega_0 \tau}{\omega_0 \tau} \right|^2 \right)$$

o sea

$$E \geq \frac{1}{\tau} ff^* \left(1 - \left| \frac{\text{sen} \omega_0 \tau}{\omega_0 \tau} \right|^2 \right) + \frac{1}{\tau} ff^*,$$

lo que equivale al teorema 1.

La comparación de esta cota superior con el espectro de la señal rectangular demuestra que no es posible mejorar mucho la cota para $|\omega\tau| < \pi$.

Para demostrar los teoremas 2 y 3, es decir, para establecer cotas inferiores para la densidad espectral de la energía, modificaremos las condiciones que deben satisfacer las señales. En vez de prescribir la energía total, prescribiremos el valor medio $\bar{u}$ de la señal lo que ya nos fija el valor del espectro para la frecuencia 0:

$$f(0) = \tau \bar{u}.$$

Nos preguntamos entonces con qué rapidez puede disminuir la densidad espectral en la proximidad de la frecuencia 0.

Si no imponemos a la señal ninguna otra restricción, la densidad espectral puede anularse para frecuencias arbitrariamente pequeñas, según lo demuestra la consideración de un problema de antenas formalmente equivalente al nuestro. La dependencia funcional entre el diagrama y la distribución de la corriente en el alambre viene expresada por una integral de Fourier del mismo tipo que la que establece la relación entre una señal de duración finita y su espectro. Es sabido que tal diagrama de antena puede poseer ceros para ángulos arbitrariamente pequeños si la corriente en el alambre cambia de signo. Esto nos indica que para establecer cotas inferiores de la densidad del espectro, debemos imponer a la señal condiciones suplementarias. Admitiremos que no cambia el signo de la señal $u(t)$:

$$u(t) \geq 0.$$

Para establecer la cota inferior empezaremos por plantearnos el problema de encontrar el valor mínimo de la parte real del espectro:

$$f(j\omega) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} u(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} u(t) \sin \omega t dt.$$

Sólo la parte esencial del espectro depende poco de la forma precisa de la señal. Por lo tanto resultará una cota inferior para aquellas frecuencias ω para las cuales el $\cos \omega t$ bajo la integral no es negativo, o sea para las frecuencias $|\omega \tau| < \pi$. Con esta condición resulta para $|t| \leq \frac{\tau}{2}$

$$\cos \omega t \geq \cos \omega \frac{\tau}{2} \geq 0.$$

Como por hipótesis el valor medio de la señal está fijado, resulta el valor mínimo de la parte real del espectro para las señales que se anulan para todo t con excepción de sendos entornos infinitesimales correspondientes a los instantes $t = \pm \frac{\tau}{2}$.

Resulta así la desigualdad

$$\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} u \cos \omega t dt \geq \cos \frac{\omega \tau}{2} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} u dt = f(0) \cos \frac{\omega \tau}{2}$$

y con ella el teorema 2):

$$ff^* \geq f^2(0) \cos^2 \frac{\omega \tau}{2} \quad \text{para} \quad |\omega \tau| \leq \pi.$$

Como una señal de dos picos iguales a distancia τ todavía no es una señal en el sentido de las aplicaciones, será natural imponer más restricciones a estas señales; admitiremos que la señal posee un solo máximo en el instante $t=0$.

$$\frac{du}{dt} \geq 0 \quad \text{para} \quad t \leq 0 \quad \text{y} \quad \frac{du}{dt} \leq 0 \quad \text{para} \quad t \geq 0.$$

Descomponemos tal señal en su parte alterna y su valor medio y obtenemos así

$$\begin{aligned} f(j\omega) f^*(j\omega) &= \int [\bar{u} + u_2(t_1)] [\bar{u} + u_2(t_2)] e^{j\omega(t_1 - t_2)} dt_1 dt_2 \\ &= f^2(0) \frac{\sin^2 \omega \tau / 2}{(\omega \tau / 2)^2} + 2f(0) \frac{\sin \omega \tau / 2}{\omega \tau / 2} \int u_2 \cos \omega t dt + \left[\int u_2 e^{j\omega t} dt \right]. \end{aligned}$$

A los efectos de obtener una cota inferior, es legítimo suprimir la parte impar de $u(t)$, la que sólo contribuye al tercer término aumentándolo.

Con nuestras condiciones para la señal, la integral

$$\int u_2 \cos \omega t dt \geq 0$$

no es negativa, lo que nos da el teorema 3:

$$ff^* \geq f^2(0) \frac{\sin^2 \omega \tau / 2}{(\omega \tau / 2)^2}.$$

El signo igual vale sólo para una parte alterna idénticamente nula, es decir, para la señal rectangular.

Para demostrar el teorema 4 tenemos que analizar la energía parcial de una señal de duración τ :

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} f f^* d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} u(t_1) u(t_2) e^{-j\omega(t_1-t_2)} dt_1 dt_2 d\omega \\ &= \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \frac{1}{\pi} \frac{\sin \Omega(t_1-t_2)}{t_1-t_2} u(t_1) u(t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Se comprueba que para toda señal es válida la desigualdad

$$0 < E(\Omega) < E(\infty) = E.$$

Es sabido por la teoría de las ecuaciones integrales, que entre todas las señales de energía total E existe una $U(t)$ para la cual $E(\Omega)$ toma su valor máximo $E_{\max}(\Omega)$ y que esta $U(t)$ satisface la ecuación integral

$$U(t_1) = \lambda \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \frac{1}{\pi} \frac{\sin \Omega(t_1-t_2)}{t_1-t_2} U(t_2) dt_2.$$

Con la normalización $E=1$ resulta

$$E_{\max} = x_1 = \frac{1}{\lambda_1}$$

siendo x_1 el primer número característico de la ecuación y λ_1 el primer valor propio. Es posible calcular x_1 por métodos numéricos con aproximación arbitraria. Como el núcleo

$$k(s, t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \Omega(t-s)}{t-s}$$

es positivo definido [$0 < E(\Omega)$], todos los números característicos son positivos; obtenemos cotas superiores para x_1 por medio de las siguientes desigualdades:

$$1 > x_1$$

$$S_1 = \int k(t, t) dt = \sum_1^{\infty} x_v > x_1$$

$$S_2^2 = \int k^2(t, s) dt ds = \sum_1^{\infty} x_v^2 > x_1^2$$

$$S_1 = \frac{\Omega\tau}{\pi}; S_2^2 = \frac{1}{\pi^2} [2\Omega\tau \text{Si}(2\Omega\tau) - 2 \text{sen}^2 \Omega\tau + \text{Ci}(2\Omega\tau) - C - \ln 2\Omega\tau]$$

(C = constante de Eulár-Mascheróni).

En nuestra tabla hemos puesto $\bar{E} = S_2$ para $S_2 < 1$ y $\bar{E} = 1$ para $S_2 > 1$. Para obtener una cota inferior comparamos

$$[\sum_2^{\infty} x_v]^2 = [S_1 - x_1]^2$$

con

$$\sum_2^{\infty} x_v^2 = S_2^2 - x_1^2,$$

lo que nos da

$$[S_1 - x_1]^2 \geq S_2^2 - x_1^2.$$

Como cota inferior $\underline{E}$ obtenemos

$$\underline{E} = \frac{S_1}{2} + \sqrt{\frac{S_2^2}{2} - \frac{S_1^2}{4}}$$

siempre que la raíz sea real.

Los teoremas 1 a 4 demuestran que una señal de duración τ y de una forma utilizable en la técnica de las telecomunicaciones posee un espectro que en el intervalo $|\omega\tau| \leq \pi$ depende poco de la forma de la señal y en cambio depende de su duración. Es sabido que para frecuencias mayores el espectro depende mucho de los detalles de la señal.

III. La regla de Kùpfmüller

Para el filtro ideal $T(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{para } |\omega| < \Omega \\ 0 & \text{para } |\omega| > \Omega \end{cases}$

Kùpfmüller ha calculado la siguiente respuesta $u(t)$ a la tensión escalón e : $u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}(\Omega\tau)$ para $e(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$.

Con su definición del tiempo de formación τ de la señal resulta

$$\tau = \frac{1}{\left(\frac{du}{dt}\right)_{\max}} = \frac{\pi}{\Omega}.$$

Es fácil generalizar este teorema para filtros arbitrarios. Representemos la tensión escalón por medio de la integral

$$e(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{v-j\infty}^{v+j\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp = \begin{cases} 1 & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}.$$

$$v > 0$$

Siendo $T(j\omega)$ la transferencia de un circuito lineal arbitrario y no necesariamente pasivo, obtenemos

$$u(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{v-j\infty}^{v+j\infty} \frac{T(p)}{p} e^{pt} dp.$$

y para la derivada de la respuesta

$$u'(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{v-j\infty}^{v+j\infty} T(p) e^{pt} dp.$$

Suponemos que para $p \rightarrow \infty$ $T(p)$ se anula por lo menos como $1/p^2$, lo que no es una restricción para los filtros de buena

selección. Entonces podemos poner $v=0$ en la última integral, lo que hace evidente la desigualdad siguiente:

$$\left| \frac{du}{dt} \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} T(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |T(j\omega)| d\omega.$$

La integral del segundo miembro es igual al área de la curva de selección del filtro, la cual en el caso del filtro ideal de Küpfmüller toma el valor de $2Q$. En el caso de una fase lineal, vale el signo igual. Siendo lineal la fase, obtenemos

$$T(j\omega) = |T| e^{-j\omega t_0},$$

de manera que en el instante $t=t_0$ resulta

$$T(j\omega) e^{j\omega t} = |T|.$$

Con esto demostramos el teorema 5.

IV. Filtros con transitorios monótonos

Wallman ha enumerado las reglas siguientes sobre filtros con transitorios monótonos:

La curva de selección de un filtro debe ser campaniforme y la fase debe ser lineal para que los transitorios sean monótonos.

Las obtuvo como generalización de muchos ejemplos particulares.

La primera condición necesaria que debe cumplir tal filtro, publicada como resultado riguroso es la de A. González Domínguez.

Las siguientes fórmulas rigurosas implican que la curva de selección debe ser campaniforme por ser monótonos los transitorios.

Una condición equivalente a la monotonía de los transitorios es la que la derivada de la respuesta sea no negativa. Usando la inversión de nuestra representación de la respuesta a la tensión escalón es fácil ver las consecuencias de esta desigualdad para la transferencia:

$$T(j\omega) = \int_0^{\infty} \frac{du}{dt} e^{-j\omega t} dt; \quad \frac{du}{dt} \geq 0.$$

Obtenemos

$$|T(j\omega)| = \left| \int_0^{\infty} u'(t) e^{-j\omega t} dt \right| \leq \int_0^{\infty} u'(t) dt = T(0);$$

el signo igual vale sólo para $\omega=0$. Para todas las derivadas de la transferencia resultan desigualdades análogas siendo legítima la derivación bajo la integral por ser $u'(t)$ una función que disminuye para $t \rightarrow \infty$ exponencialmente.

$$\left| \frac{d^n T}{d\omega^n} \right| = \left| \int_0^{\infty} u'(t) (-jt)^n e^{-j\omega t} dt \right| \leq \int_0^{\infty} u'(t) t^n dt = \left| \frac{d^n T}{d\omega^n} \right|_{\omega=0}.$$

Para la curva de selección resulta

$$|T(j\omega)|^2 = \left| \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} u'(t_1) u'(t_2) e^{j\omega(t_1-t_2)} dt_1 dt_2 \right| \leq \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} u'(t_1) u'(t_2) dt_1 dt_2 = |T|^2_{\omega=0}$$

y para todas las derivadas pares

$$\left| \frac{d^{2n} |T|^2}{d\omega^{2n}} \right| = \left| \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} u'(t_1) u'(t_2) (t_1-t_2)^{2n} e^{j\omega(t_1-t_2)} dt_1 dt_2 \right| \leq \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} u'(t_1) u'(t_2) (t_1-t_2)^{2n} dt_1 dt_2 = \left| \frac{d^{2n} |T|^2}{d\omega^{2n}} \right|_{\omega=0}.$$

Usando sólo la desigualdad con $n=2$, ya resulta que la curva de selección debe ser campaniforme. Buscando la curva que sea la más semejante al rectángulo del filtro ideal, ponemos el signo

igual en esta desigualdad. Esto demuestra que la correspondiente curva de selección que debe empezar con el valor 1 para la frecuencia $\omega=0$ y terminar con el valor 0 para frecuencias grandes, se compone de dos trozos de parábola. Esta curva posee el área mínima compatible con su curvatura inicial para $\omega=0$. Su área es Ω , su tangente máxima es Ω^{-1} y su derivada segunda es Ω^{-2} .

Es una consecuencia de las otras desigualdades que en realidad la tangente máxima de la curva de selección de un filtro con transitorios monótonos es menor que la tangente máxima de nuestra curva formada de dos arcos de parábola; es decir, la curva de selección de tal filtro es muy distinta del rectángulo, es una curva campaniforme.

LITERATURA

- 1) G. DOETSCH. Laplace Transformation, Berlin, J. Springer 1937, pág. 147.
A. SOMMERFELD. Atombau und Spektrallinien II, Vieweg, Braunschweig 1939, pág. 715.
- 2) K. KÜPFMÜLLER. E. N. T. 1 (1924) 141 und 5 (1928) 18.
- 3) G. VALLEY and H. WALLMAN. Vacuum tube amplifiers. Macgraw Hill, New York 1948, pág. 80.
- 4) A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. XIII Reunión de la asociación física argentina del 23/24 de mayo de 1949.
- 5) K. FRÄNZ. Zeitschrift fuer Hochfrequenz 61 (1943) 51.

CALCULO APROXIMADO DE LA FUNCION RADIAL DE DISTRIBUCION

por ANTONIO E. RODRIGUEZ
Instituto de Física - La Plata
(Recibido el 16-11-1949)

The present paper is concerned with the calculation of the radial distribution function for Argon in the liquid region. The author uses here some results obtained in a previous paper.

The results are shown in diagrams and a short discussion is given to compare these results with those obtained with X-Rays experiments.

Introducción.

En una serie de trabajos publicados recientemente, Max Born y H. S. Green (^{1 2 3 4 5}) han desarrollado una teoría cinética de líquidos, capaz de describir las propiedades dinámicas y en equilibrio de un sistema estadístico de moléculas. Entre otros resultados importantes se ha establecido que todas las propiedades termodinámicas del sistema pueden expresarse en función de la función de distribución $n_2(x^{(1)}, x^{(2)})$, que expresa la probabilidad de encontrar dos moléculas en posiciones dadas por $x^{(1)}$, $x^{(2)}$. Para fluidos monoatómicos en equilibrio esta función depende solamente de la distancia r , y es idéntica a la función radial de distribución determinada experimentalmente por medio de la difracción de rayos X por líquidos de ese tipo. En consecuencia la termodinámica de un líquido se reduce al conocimiento de esta función.

En otro trabajo que forma parte de esa misma serie, el autor (⁶) ha desarrollado un método aproximativo que permite calcular numéricamente las integrales que contienen la función radial de distribución y ha calculado dos isothermas para el Argon usando el potencial de Lennard-Jones para describir la interacción entre los átomos de dicho gas. El mismo método se ha

utilizado en este trabajo para calcular la función radial de distribución para el Argon líquido a una temperatura de 130° K y a una presión de 30 atmósferas, correspondiente a la isoterma teórica calculada en el trabajo mencionado (6). El cálculo de la función radial de distribución resulta menos complicado que el de una isoterma y no es necesario introducir más aproximaciones de las que resultan de aceptar la suposición de Kirkwood (7), aparte de las que se hacen en el cómputo numérico. Por esta razón y aún usando el mismo número de términos en el desarrollo en serie que se tomó anteriormente para el cálculo de las isotermas, se pueden esperar mejores resultados. Además las curvas teóricas obtenidas pueden compararse directamente con las que se obtienen experimentalmente por difracción de rayos X (8).

En el texto se indican brevemente las fórmulas empleadas y los resultados se muestran en diagramas. Para una exposición más detallada del método aproximativo y desarrollos se dirige al lector al trabajo del autor que se menciona más arriba.

1. La ecuación integral para la función de distribución.

Si se acepta como válida la superposición de Kirkwood, es decir si se supone que la probabilidad relativa de la ocurrencia de una molécula en conjunción con otras dos es igual al producto de las probabilidades relativas de la ocurrencia de la misma molécula en conjunción con cada una de las otras separadamente, se obtiene para la función radial de distribución $n_2(r)$ la ecuación integral:

$$(1.1) \quad \log \frac{n_2(r)}{n_1^2} + \frac{\Phi(r)}{kT} = \frac{\pi}{n_1^3} \int_0^\infty \int_{-s}^s (s^2 - t^2) \frac{t+r}{r} \{n_2(t+r) - n_1^2\} dt n_2(s) \frac{\Phi'(s)}{kT} ds$$

en donde $\Phi(r)$ es la energía potencial mutua de dos átomos o moléculas a la distancia r uno de otro y n_1 la densidad.

Ensayando para $n_2(r)$ una expresión de la forma

$$(1.2) \quad n_2(r) = e^{-\Phi(r)/kT + f(r)}$$

se obtiene para $f(r)$ la expresión

$$(1.3) \quad r \cdot f(r) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon^2 s \beta^2(s) \operatorname{sen}(rs) ds}{\lambda - \varepsilon \beta(s)}$$

en donde

$$(1.4) \quad r \beta(r) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} s \{e^{-\Phi(s)/kT} - 1\} \operatorname{sen}(rs) ds$$

y

$$(1.5) \quad \lambda = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} n_1}$$

siendo $\varepsilon - 1$ un parámetro definido como el valor medio de la misma función $f(r)$.

Definiendo convenientemente a la función $\beta(r)$ en el plano complejo, e indicando con z_u las raíces complejas de la ecuación

$$(1.6) \quad \beta(z) = \lambda/\varepsilon,$$

se encuentra para $f(r)$ la expresión

$$(1.7) \quad r f(r) = -\varepsilon r \{e^{-\Phi(r)/kT} - 1\} - (2\pi)^{1/2} \frac{\lambda^2}{\varepsilon} \sum_u \frac{z_u}{\beta'(z_u)} e^{irz_u}$$

en donde la sumatoria está extendida sobre las raíces en el semiplano superior complejo, y para ε la siguiente expresión

$$(1.8) \quad \varepsilon = \frac{\int_0^{\infty} r^2 \alpha(r) dr}{\int_0^{\infty} r^2 \alpha(r) dr + \int_0^{\infty} r^2 \alpha(r^2) dr + (2\pi)^{1/2} \left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^2 \sum_u \frac{\beta'(Z_u)}{Z_u} \int_0^{\infty} r \alpha(r) e^{irZ_u} dr}$$

en donde hemos escrito

$$\alpha(r) = e^{-\Phi(r)/kT} - 1.$$

2. Método de cálculo.

Desarrollemos ahora la función $\alpha(s)$ en la forma

$$(2.1) \quad s \cdot \alpha(s) = \sum_k C_k e^{is \xi_k}.$$

Eligiendo ξ_k en el semiplano superior complejo, se determinan los coeficientes C_k mediante un análisis armónico de Fourier (ya que se supone conocida la función $\alpha(s)$; para esto último se toma para $\Phi(s)$ la expresión dada por Lennard-Jones⁽⁹⁾:

$$(2.2) \quad \Phi(s) = \left(\frac{a}{s^6} - \frac{b}{s^{12}} \right).$$

Conocidos los C_k se obtiene para $\beta(z)$ la expresión

$$(2.3) \quad \beta(z) = - \frac{2}{(2\pi)^{1/2}} \sum_{k=0}^n \frac{C_k}{\xi_k^2 - z^2}.$$

Usando (2.3) y teniendo en cuenta la (1.6), se pueden determinar las raíces z_u dando valores a λ/ϵ . Luego se calcula el valor correspondiente para ϵ mediante la (1.8). Finalmente se obtienen $f(r)$, reemplazando los valores calculados en la (1.7).

3. Aplicación. La función $n_2(r)$ para el Argon a una temperatura de 130° K y a una presión de 30 atmósferas sobre la curva del vapor saturado.

Adoptando para las constantes a y b los valores que da Lennard-Jones para el Argon

$$(3.1) \quad \begin{cases} b = 1620 \times 10^{-10} \text{ ergs } \text{\AA}^{12} \\ a = 1.03 \times 10^{-10} \text{ ergs } \text{\AA}^6 \end{cases}$$

se ha calculado la función $\Phi(r)/kT$ y luego $\alpha(r)$; enseguida se han calculado los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier usando 12 valores de la función $r \alpha(r)$ igualmente espaciados en

el intervalo $0 \leq r \leq 7.2 \text{ \AA}$. Luego se han calculado las tres primeras raíces de la ecuación (1.6), de las cuales la primera es real, puesto que λ corresponde a la densidad del líquido. Por último se han obtenido las funciones $f(r)$ y $-\phi(r)/kT + f(r)$, y se han dibujado en la figura 1.

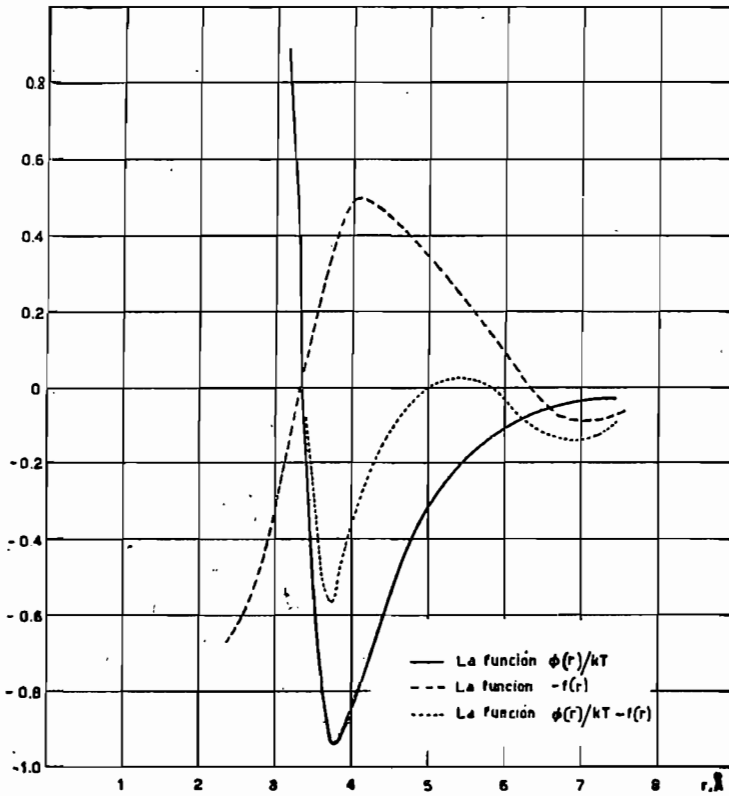


Fig. 1

En la figura 2 se ha dibujado la función radial de distribución.

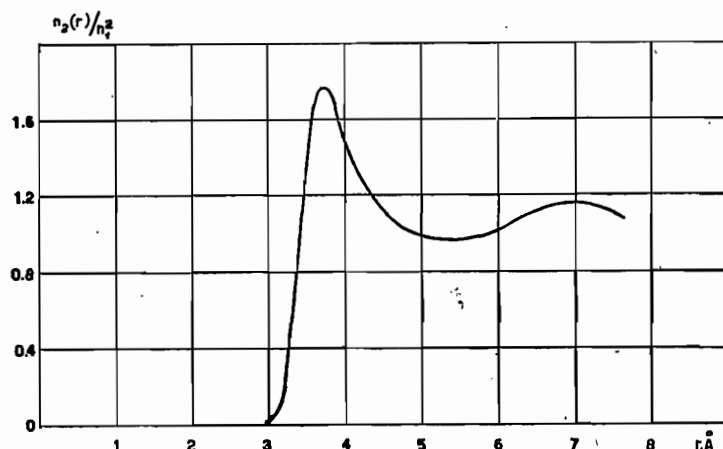


Fig. 2

Discusión.

Si se compara la curva teórica obtenida en la figura 2 con las obtenidas experimentalmente, por ejemplo la que dan Eisenstein y Gingrich^(10 11) para aproximadamente la misma temperatura y presión, se observa que ambas poseen la misma forma con los dos máximos ubicados igualmente a 3,6 Å y 7 Å, respectivamente. Sin embargo, la relación entre las ordenadas de los máximos en la curva teórica es de 1.5, mientras que experimentalmente se obtiene un valor de 1.8. En vista de los resultados obtenidos, el autor ha considerado interesante hacer un cálculo más exacto, teniendo en cuenta en el cálculo las cinco primeras raíces de la ecuación (1.6). Este trabajo se halla ahora en preparación y los resultados se publicarán oportunamente.

La Plata, noviembre 14 de 1949.

R E F E R E N C I A S

- (¹) BORN, M. & GREEN, H. S. 1946 Proc. Roy. Soc. A, 188, 10.
- (²) GREEN, H. S. 1947 Proc. Roy. Soc. A, 189, 103.
- (³) BORN, M. & GREEN, H. S. 1947 Proc. Roy. Soc. A, 190, 455.
- (⁴) BORN, M. & GREEN H. S. 1947 Proc. Roy. Soc. A, 191, 168.
- (⁵) GREEN, H. S. 1948 Proc. Roy. Soc. A, 194, 244.
- (⁶) RODRÍGUEZ, A. E. 1949 Proc. Roy. Soc. A, 196, 73.
- (⁷) KIRKWOOD, J. G. & BOGGS, E. M. 1942 J. Chem. Phys. 10, 394.
- (⁸) GINGRICH, N. S. 1943 Rev. Mod. Phys., 15, 90.
- (⁹) LENNARD-JONES, J. E. 1924 Proc. Roy. Soc. A, 106, 463.
- (¹⁰) EISENSTEIN, A. & GINGRICH, N. S. 1940 Phys. Rev. 58, 307.
- (¹¹) EISENSTEIN, A. & GINGRICH, N. S. 1942 Phys. Rev. 62, 261.

REFRACCION ATMOSFERICA

por JOSÉ WÜRSCHMIDT

Instituto de Física, Universidad Nacional de Tucumán

(Recibido el 17-11-1949)

SUMMARY: 1º A comparison is given between the tables of atmospheric refraction, obtained in work on astronomy and geodesy in different countries, and differences existing between them are noted.

2º The introduction of a "standard atmosphere" is proposed for a new numerical computation, which permits an exact calculation of the density of the air at any level above sea.

3º A method of computation is applied to the refraction in the case of a plane surface and, in the case of the earth's surface, a method of successive approximations for each zenith distance.

I. — GENERALIDADES, BIBLIOGRAFIA, TABLAS DE REFRACCION

a) *Superficie plana, condiciones normales de presión y temperatura.*

Prescindiendo de la curvatura de la superficie terrestre, y por lo tanto considerando constante el índice de refracción del aire en un plano horizontal de la altura y sobre el nivel del mar, un rayo solar que tiene en una altura muy grande (índice de refracción prácticamente igual a cero) una distancia zenital α , llegará al nivel del mar con una distancia zenital menor α_0 , por el efecto de la refracción atmosférica. Mediante el método de las capas paralelas ⁽¹⁾, cuya más baja tiene el índice de refracción n , se obtiene fácilmente:

$$(1) \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0} = n,$$

o con la densidad del aire en el nivel del mar ρ_0 , y la ley em-

pírica de *Maskart* para gases que relaciona n con la densidad ρ ⁽²⁾:

$$(1 a) \quad \text{sen } \alpha = [1 + C \rho_0] \text{sen } \alpha_0.$$

El ángulo de refracción γ la «refracción» será entonces:

$$(2) \quad \gamma = \alpha - \alpha_0.$$

Se deduce fácilmente la siguiente fórmula de aproximación:

$$(3) \quad \gamma = C \rho_0 \text{tg } \alpha_0 = (n-1) \text{tg } \alpha_0,$$

o expresando γ en segundos de arco:

$$(3 a) \quad \gamma = 206265 C \rho_0 \text{tg } \alpha_0.$$

Ahora bien, mientras que para la densidad del aire a 0° y 760 mm de Hg se toma comúnmente el valor $\rho_0 = 1,2930 \text{ kg/m}^3$ (usaremos el sistema MKS, ya usado desde hace tiempo en Meteorología ⁽³⁾), encontramos en la bibliografía valores ligeramente variables para el índice de refracción del aire bajo condiciones normales de temperatura y presión, a saber:

en las tablas de Landolt-Börnstein ⁽⁴⁾: entre 1,0002933 y 1,0002925

en Handbuch der Physik ⁽⁵⁾ » 1,00029315 » 1,00029130.

En consecuencia se hallan semejantes variaciones en los valores numéricos de la magnitud $206265 C \rho_0$, llamada «constante de refracción» que es el valor de la refracción para el ángulo $\alpha_0 = 45^\circ$; oscilan entre 60,058" y 60,50". Dos autores, *Faye* ⁽⁶⁾ y *Connaissance des temps* ⁽⁷⁾ citan como valor más seguro: 60,154" que prácticamente coincide con el valor 60,153", citado en *Handbuch* como término medio de todos los valores astronómicos más nuevos.

Con este valor para la constante de refracción, el índice de refracción del aire a 0° y 760 mm de Hg será: $n_0 = 1,0002916$ y la refracción $\gamma = \alpha - \alpha_0$ para la distancia zenital α_0 se calcula mediante:

$$(1 aa) \quad \text{sen } \alpha = 1,0002916 \text{sen } \alpha_0;$$

o:

$$(1 b) \quad \lg \text{sen } \alpha = \lg \text{sen } \alpha_0 + 0,0001266.$$

La fórmula de aproximación es:

$$(3a) \quad \lg \gamma = \lg \operatorname{tg} \alpha_0 + 1,77922.$$

En la tabla I damos los valores de γ , calculados mediante (1b) y (3a) hasta $\alpha_0 = 75^\circ$; para la comparación agregamos los valores de *Faye*.

T A B L A I
ANGULOS DE REFRACCIÓN
(0° C, 760 mm de Hg; superf. plana)

<i>Dist. zen.</i>	<i>valor exacto</i>	<i>valor aprox.</i>	<i>valor de Faye</i>
5°	5,3''	5,3''	5,2''
10°	10,6''	10,6''	10,6''
15°	16,1''	16,1''	16,1''
20°	21,9''	21,9''	21,9''
25°	28,1''	28,1''	28,0''
30°	34,7''	34,7''	34,7''
35°	42,1''	42,1''	42,1''
40°	50,5''	50,5''	50,4''
45°	60,15''	60,15''	60,0''
50°	71,7''	71,7''	71,7''
55°	85,8''	85,8''	85,6''
60°	104,2''	104,2''	103,8''
65°	129,1''	129,0''	128,2''
70°	165,4''	165,3''	163,8''
71°	174,9''	174,7''	
72°	185,3''	185,1''	
73°	197,0''	196,7''	
74°	210,1''	209,8''	
75°	224,9''	224,5''	221,0''

La comparación de las tres columnas evidencia: 1) que hasta 60° la fórmula de aproximación es suficiente hasta los décimos segundos; 2) que la independencia de la refracción de la constitución de la atmósfera de ninguna manera se extiende hasta 79° (*Faye*), sino hasta sólo 50°.

b) Presión p'_0 , temperatura T'_0 ; fórmula de Comstock.

Con la presión p'_0 y la temperatura T'_0 en el nivel del mar, la densidad del aire, con la «ecuación de estado del gas perfecto»

$$(4) \quad p = R \rho T$$

se escribe:

$$(5) \quad \rho'_0 = \rho_0 \frac{p'_0}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T'_0} \quad \text{con: } p_0 = 760; T_0 = 273;$$

por lo tanto se reemplaza sencillamente en las fórmulas (1a) y (3a) ρ_0 por ρ'_0 . Faye escribe, siendo b la presión y t temperatura en °C: La acción refringente está dada por:

$$(n-1) \frac{b}{760} \frac{1}{1+0,00366 t}$$

Con la ecuación (5) tendremos p. ej. para $p'_0=29,6$ inches (pulgadas) y $t=50^\circ$ F (valores muy usados en tiempos pasados y hasta hoy día) las fórmulas:

$$(1 \text{ bb}) \quad \text{sen } \alpha = 1,0002780 \text{ sen } \alpha_0$$

o:

$$(1 \text{ c}) \quad \lg \text{sen } \alpha = \lg \text{sen } \alpha_0 + 0,0001207$$

y,

$$(3 \text{ b}) \quad \lg \gamma = \lg \text{tg } \alpha_0 + 1,75848.$$

La tabla II contiene los valores exactos y aprxoimados, calculados mediante las expresiones precedentes; para comparación agregamos los valores de Pryde⁽⁸⁾ y de Nassau⁽⁹⁾ que se refieren a las mismas condiciones de presión y temperatura.

T A B L A II
ÁNGULOS DE REFRACCIÓN

(50°F y 29,6 inches de Hg, superf. plana)

Dist. zenit.	Valor exacto	Valor aprox.	Valor de Pryde	Val. de Nassau
5°	5,0''	5,0''	5''	5''
10°	10,1''	10,1''	10''	10''
15°	15,3''	15,4''	15''	15''
20°	20,8''	20,9''	21''	21''
25°	26,7''	26,7''	26''	27''
30°	33,1''	33,1''	33''	33''
35°	40,1''	40,2''	40''	40''
40°	48,1''	48,1''	48''	48''
45°	57,3''	57,3''	57''	57''
50°	68,4''	68,3''	68''	68''
55°	81,9''	81,9''	81''	82''
60°	99,3''	99,3''	98''	99''
65°	123,1''	123,0''	122''	
70°	157,6''	157,5''	155''	157''
71°	166,7''	166,5''		
72°	176,7''	176,5''		
73°	187,8''	187,6''		
74°	200,3''	200,0''		
75°	214,4''	214,0''	210''	213''

La comparación de los valores confirma las conclusiones de arriba; a partir de $\alpha_0 = 50^\circ$ la ley especial según la cual la densidad del aire varía con la altura, la curvatura de la Tierra, modifica los valores de la refracción. En vez de usar la fórmula (5) para reducir los valores encontrados con la fórmula de aproximación (3ª), la mayoría de los autores da tablas auxiliares, para reducir las refracciones calculadas para condiciones normales, a otra presión y otra temperatura; en *Nassau* (9) se menciona la la fórmula «empírica» de *Comstock*:

$$(6) \quad \gamma = \frac{983 b}{460 + t} \operatorname{tg} \alpha_0.$$

Escribiendo nuestra fórmula de aproximación:

$$\gamma = 206265 C \rho_0 \frac{p'_0}{p_0} \frac{T_0}{T'_0} \operatorname{tg} \alpha_0$$

y poniendo:

$$p_0 = 760 \text{ mm} = 29,92 \text{ inches (pulgadas)}$$

$$p \text{ mm} = \frac{p}{2,54} \text{ inches} = b \text{ inches}$$

$$T_0 = 273^\circ \text{ K} = (273 + 0)^\circ \text{ C} = \left(273 \cdot \frac{9}{5}\right)^\circ \text{ F} = 491,4^\circ \text{ F}$$

$$\begin{aligned} T'_0 \text{ }^\circ \text{ K} &= (273 + t)^\circ \text{ C} = \left(273 \cdot \frac{9}{5} - 32 + t\right)^\circ \text{ F} = \\ &= (459,4 + t)^\circ \text{ F} \end{aligned}$$

obtenemos, con el valor de ρ_0 , como arriba:

$$(6a) \quad \gamma = \frac{987,9 b}{459,4 + t},$$

fórmula prácticamente casi idéntica con la de *Comstock*.

c) *Las refracciones para distancias zenitales grandes.*

Revisando la bibliografía referente a tablas de refracción atmosférica y métodos para conseguir los valores, sea teóricamente,

sea por observaciones astronómicas, mencionamos además el *Handbuch der Experimentalphysik* ⁽¹⁰⁾, en el cual se cita un artículo de A. Bemporad, publicado en 1906 en la *Enzyklopaedie der mathematischen Wissenschaften*, y se reproducen algunas tablas del mismo.

Un grupo de tablas se refiere a condiciones normales, mientras que en el otro se refiere las otras condiciones en el nivel del mar, arriba mencionadas.

Damos breves resúmenes.

T A B L A I I I

REFRACCIONES PARA DISTANCIAS ZENITALES GRANDES

(0° C, 760 mm de Hg)

Dist. zen.	Handbuch Phys.	Bessel	Handb. Exp. Ivory	Schmidt	Faye
70°	entre 164,5'' y 165,2''	164,5''	165,2''	165,0''	163,8''
75°		221,9''	222,0''	227,7''	221,0''
80°	» 330,8'' y 332,3''	331,1''	332,0''	332,3''	329,8''
85°	» 607,9'' y 619,3''	613,9''	619,3''	617,9''	613,5''
86°		734,9''	738,7''	736,0''	731,8''
87°		900,4''	906,8''	904,1''	898,8''
88°		1150,7''	1155,1''	1152,0''	1146,2''
89°		1556,4''	1546,3''	1542,6''	1537,0''
90°	» 1816,4'' y 2241,3''	2241,3''	2200,0''	2207,8''	2196,0''

Merece especial interés el valor para $\alpha_0 = 90^\circ$, la refracción horizontal; con el valor 2196 de la tabla de Faye resulta para las condiciones $b = 29,6$ inches y $t = 50^\circ$ F el valor: 2096''.

Encontramos los siguientes valores:

1980'' : Pryde ⁽⁸⁾ "Mean Refraction" $b = 29,6$ inches, $t = 50^\circ$ F.

2094,1'' : » "Bessels Refractions"; mediante las tablas de corrección para presión y temperatura se ve que las condiciones son:

$$b = 29,6 \text{ inches, } t = 49^\circ \text{ F}$$

2094'' : Pernter-Exner ⁽¹¹⁾ Los autores dicen que la tabla reproducida de Bessel se refiere a 760 mm y $8,5^\circ$ C; mediante las tablas de corrección se halla: 751,1 mm. y $8,5^\circ$ C, valores no muy distintos de 29,6 inches y 49° F.

2094'' : Newcomb-Engelmann ⁽¹²⁾

2090'' : Nassau ⁽⁹⁾

2090'' : Russell y otros ⁽¹³⁾

2090'' : Skilling-Richardson ⁽¹⁴⁾

Finalmente destacamos las divergencias, en especial también en el signo de las diferencias, entre las dos tablas publicadas en Pryde: «Mean Refraction» y «Bessels Refractions».

T A B L A I V

LAS TABLAS PUBLICADAS EN EL LIBRO DE PRYDE

<i>Dist. uenit.</i>	<i>Mean Refraction</i>	<i>Bessels Refraction</i>	<i>Diferencia</i>
75°	210''	212,1''	— 2,1''
76°	225''	227,4''	— 2,7''
77°	243''	244,9''	— 1,9''
78°	263''	265,0''	— 2,0''
79°	287''	288,5''	— 1,5''
80°	315''	316,2''	— 1,2''
81°	348''	349,3''	— 1,3''
82°	389''	389,6''	— 0,6''
83°	440''	439,7''	+ 0,3''
84°	508''	503,3''	+ 4,7''
85°	594''	586,5''	+ 7,5''
86°	711''	698,9''	+ 12,1''
87°	876''	854,6''	+ 21,4''
88°	1115''	1088,6''	+ 26,4''
88°10'	1165''	1138,0''	+ 27,0''
88°20'	1218''	1191,9''	+ 26,1''
88°30'	1275''	1250,9''	+ 25,1''
88°40'	1335''	1315,6''	+ 19,4''
88°50'	1400''	1386,7''	+ 13,3''
89°	1469''	1464,6''	+ 4,4''
89°10'	1542''	1549,8''	— 7,8''
89°20'	1620''	1642,7''	— 22,7''
89°30'	1703''	1743,5''	— 40,5''
89°40'	1790''	1852,3''	— 62,3''
89°50'	1882''	1969,2''	— 87,2''
90°	1980''	2094,1''	— 114,1''

II. — TEORIA ELEMENTAL DE LA REFRACCION ATMOSFERICA.

a) Cambio de la densidad del aire con la altura, «Atmósfera Standard».

Habiendo desarrollado la teoría en mi trabajo arriba citado, repito lo dicho en p. 151: «Dependiendo el cambio de la densidad del aire con la altura no sólo de la presión, sino también de la temperatura, suponiendo para el último cambio la ley más sencilla posible y también concordante con las observaciones, es decir, el cambio lineal: escribimos la relación:

$$(7) \quad T = T'_0 - c y,$$

significando T'_0 la temperatura en la superficie terrestre (nivel del mar), T en la altura y . Con la constante c positiva la temperatura disminuye con la altura (disminución normal en la tropósfera c entre $0,005$ y $0,01^\circ/\text{m}$)... La «ecuación diferencial de la estática de la atmósfera» es:

$$(8) \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g,$$

significando ρ la densidad, g la aceleración de la gravedad, p la presión; y la ecuación de estado del gas perfecto:

$$(4) \quad p = R \rho T,$$

siendo R la constante de los gases; usando con *Exner* el MKS, R tiene el valor numérico $29,27 \cdot g$, siendo $g = 9,806''$.

Mediante las tres ecuaciones (7), (8) y (4) se llega a las siguientes expresiones que relacionan densidad y presión con la altura sobre el nivel del mar:

$$(9) \quad \rho = \rho'_0 \left[1 - \frac{c}{T'_0} y \right]^{x-1} (*)$$

$$(10) \quad p = p'_0 \left[1 - \frac{c}{T'_0} y \right]^k,$$

siendo:

$$(11) \quad x = \frac{g}{Rc};$$

p'_0 , ρ'_0 , T'_0 son los valores correspondientes para $y=0$.

(*) Esta relación vale también, considerando la curvatura de la tierra, suponiendo que la temperatura sea constante sobre una superficie esférica concéntrica.

En el trabajo citado se escribió:

$$\lg \frac{\rho}{\rho'_0} = (x-1) \lg \left(1 - \frac{c}{T'_0} y \right)$$

con la temperatura T'_0 en $y=0$, y, tratándose en la aplicación del trabajo citado siempre de alturas pequeñas, se aproximó $\lg \frac{\rho}{\rho'_0}$ mediante $\frac{\rho - \rho'_0}{\rho + \rho'_0}$.

Casos especiales.

1. *Caso isopícnico* (densidad constante; generalmente no se presenta en la naturaleza). De la ecuación:

$$(9a) \quad \rho = \rho'_0$$

sigue inmediatamente:

$$\kappa - 1 = 0$$

y por lo tanto:

$$(11a) \quad c = \frac{g}{R}$$

y también:

$$(10a) \quad p = p'_0 \left[1 - \frac{g}{RT'_0} y \right].$$

Para el caso especial de $T'_0 = T_0 = 273^\circ \text{K}$ tenemos:

$$p = p'_0 \left[1 - \frac{y}{7991} \right];$$

7991 [m] es la conocida «altura de la atmósfera homogénea» ⁽¹⁵⁾.

2. *Caso isotérmico.*

Poniendo:

$$(7b) \quad T = T'_0$$

se obtiene mediante (8) y (4):

$$(9b) \quad \rho = \rho_0 e^{-\frac{g}{RT'_0} y}$$

$$(10b) \quad p = p'_0 e^{-\frac{g}{RT'_0} y}.$$

Para el caso especial $T'_0 = T_0 = 273^\circ \text{K}$ (10b) es la fórmula conocida de *Halley*.

3. Caso adiabático.

Con:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const} = \frac{p'_0}{\rho'^0_\gamma} \left(\gamma = \frac{c_p}{c_v} \right)$$

se obtienen las ecuaciones:

$$(9c) \quad \rho = \rho'_0 \left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{g\rho'_0}{p'_0} y \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$(10c) \quad p = p'_0 \left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{g\rho'_0}{p'_0} y \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$(7c) \quad T = T'_0 \left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{g\rho'_0}{p'_0} y \right],$$

que se identifican con las ecuaciones (9), (10) y (7), si con el valor de γ para el aire 1.405 ponemos:

$$\frac{1}{\gamma-1} = \kappa - 1; \quad \frac{\gamma}{\gamma-1} = \kappa; \quad \text{es decir: } c = \frac{g}{R} \frac{\gamma-1}{\gamma} \cong 0,01^\circ/\text{m}.$$

Ahora bien, dependiendo la «refracción» en cada altura del índice de refracción del aire y éste a su vez de la densidad ρ y siendo aplicables las fórmulas sencillas de arriba sólo para ángulos zenitales no muy grandes y para el caso de una superficie plana, tenemos que elegir un estado medio normal de la atmósfera, fijando una distribución determinada de la temperatura, con condiciones determinadas de densidad, presión y temperatura en el nivel del mar, luego calcular los valores numéricos de la densidad para cada altura.

Habiéndose adoptado en la Argentina oficialmente, con decreto del Poder Ejecutivo de fecha 1º de agosto de 1933, la «Atmósfera Standard» de la C. I. N. A., es decir «Convención Internacional de Navegación Aérea», habiéndose encargado con el mismo decreto a la Dirección de Meteorología, Geofísica e Hidráulica definir dicha atmósfera, estableciendo y publicando las constantes,

fórmulas y tablas de reducción correspondientes, tenemos que elegir como base para cualquier cálculo numérico las definiciones siguientes publicadas por *Alfredo G. Galmarini* ⁽¹⁶⁾ en 1934; (damos los datos en forma resumida):

Entre el nivel del mar y la altura de 11 km (tropósfera):

«gradiente térmico standard» (*Toussaint*) $c = 0,0065^{\circ} \text{C}$; temperatura en el nivel del mar: $15^{\circ} \text{C} = 288^{\circ} \text{K}$; por lo tanto: temperatura en 11 km de altura: $-56,5^{\circ} \text{C} = 216,5^{\circ} \text{K}$.

Presión en el nivel del mar: 760 mm de Hg.

Desde la altura de 11 km la atmósfera es «isotérmica».

Con respecto a los valores de las constantes físicas dice *Galmarini* en p. 10: «No difieren mayormente de las de la C. I. N. A., sino en el valor de las decimales, por lo que no afecta el resultado final de las constantes que intervienen en las fórmulas». Las fórmulas encontradas por *Galmarini* para tropósfera y estratosfera son naturalmente idénticas con las nuestras: *Galmarini*, p. 15, fórm. (8) = nuestra fórm. (9):

$$\rho = \rho'_0 \left[1 - \frac{c}{T'_0} y \right]^{x-1}$$

Galmarini, p. 16, fórm. 1^a = nuestra fórm. (9b)

$$\rho = \rho'_0 e^{\frac{g}{RT_1} (y - 11000)}$$

Daremos en la tabla V los valores numéricos del aire, calculados por nosotros para la aplicación del cálculo de las refracciones, comparados con los de la tabla de *Galmarini*.

T A B L A V

DENSIDAD DEL AIRE EN FUNCIÓN DE LA ALTURA

Altura	Densidad		Altura	Densidad	
	Wü.	Ga.		Wü.	Ga.
0,0 km	1,2257	1,2255	11 km	0,3638	0,3638
0,1	1,2139	1,2138	12	0,3107	0,3107
0,2	1,2023	1,2021	13	0,2654	0,2653
0,3	1,1907	1,1906	14	0,2266	0,2266
0,4	1,1793	1,1791	15	0,1935	0,1935
0,5	1,1679	1,1677	17	0,1412	0,1412
1	1,1122	1,1120	19	0,1030	0,1030
1,5	1,0585	1,0584	20	0,08793	0,0879
2,	1,0069	1,0068	25	0,03985	0,0400
2,5	0,9572	0,9571	30	0,01815	—
3,	0,9095	0,9093	35	0,008247	—
4,	0,8194	0,8193	40	0,003747	—
5,	0,7363	0,7362	45	0,001703	—
6,	0,6598	0,6597	50	0,0007736	—
7,	0,5896	0,5895			
8,	0,5252	0,5251			
9,	0,4663	0,4663			
10,	0,4127	0,4126			

La coincidencia de los valores es suficiente; la ligera diferencia en la cuarta decimal se explica por:

$$\rho'_0 = \rho \frac{273}{288} = 1,2930 \cdot \frac{273}{288} = 1,22567 \cong 1,2257;$$

mientras que *Galmarini* tiene:

$$\rho'_0 = 1,2930 \cdot \frac{273}{288} = 1,2255 \text{ (p. 10);}$$

los valores para α son prácticamente los mismos (*Wü.*: 5,2556; *Ga.*: 5,256).

b) *Teoría de la refracción.*

Superficie plana

Aunque en el caso de una superficie plana la distribución especial de las densidades del aire no tiene influencia sobre los valores de la refracción, si consideramos alturas muy grandes, pues la ecuación (1a) determina unívocamente el valor que

corresponde a tal altura, conviene considerar la determinación de este ángulo para una altura cualquiera y .

En este caso tendremos en vez de (1 a):

$$(13) \quad \text{sen } \alpha = [1 + C (\rho'_0 - \rho)] \text{sen } \alpha_0$$

$$(14) \quad \gamma = \alpha - \alpha_0.$$

Ahora, en vez de la ecuación (9) que representa ρ en función de la altura y , ponemos la ecuación:

$$(15) \quad \rho = \rho'_0 \left[1 - \frac{y}{h} \right],$$

calculando h mediante los valores de ρ'_0 y de ρ de la tabla V, para una determinada altura y (p. ej. para $y = 11$ km); y encontramos, reemplazando (15) en (13) y poniendo:

$$(16) \quad R_0 = \frac{h}{C\rho'_0}$$

la relación:

$$(13 a) \quad \text{sen } \alpha = \left[1 + \frac{y}{R_0} \right] \text{sen } \alpha_0$$

En otras palabras, se reemplaza la curva que corresponde a la ecuación (9) (Fig. 1) por la recta que pasa por los puntos $(0, \rho'_0)$ y $(11, \rho_{11})$.

Demostré en mi trabajo citado que entonces la trayectoria del rayo de luz es representada por una circunferencia, cuyo centro tiene las coordenadas:

$$x_0 = R_0 \text{ctg } \alpha_0$$

$$y_0 = -R_0$$

y cuyo radio es:

$$r_0 = \frac{R_0}{\text{sen } \alpha_0},$$

es decir, para cada distancia zenital la magnitud R_0 es una me-

dida para la *curvatura media* dentro de la tropósfera (0 a 11 km). Dividiendo este intervalo en los dos intervalos parciales 6 y 5 km, o trazando en la fig. 1 las rectas correspondientes, calculando con (15) y (16) los valores, y siguiendo este proceso hasta intervalos de 1 km. se obtienen los resultados siguientes:

T A B L A V I

<i>Intervalos de altura</i>	<i>Radio de curvatura</i>
0 — 11	56590
0 — 6	47010
6 — 11	74890
0 — 3	42070
3 — 6	53290
6 — 9	68730
9 — 11	86490
0 — 1	39070
1 — 2	42120
2 — 3	45490
3 — 4	49230
4 — 5	53360
5 — 6	57970
6 — 7	63100
7 — 8	68870
8 — 9	75340
9 — 10	82660
10 — 11	90040

Se puede extender la subdivisión hasta las capas más cercanas a la superficie, encontrándose, p. ej., en el primer intervalo de 100 m un radio de curvatura de 37840 km, es decir la curvatura del rayo de luz aquí es la sexta parte de la de la tierra (resultado ya conocido). De la misma manera se puede proceder para la estratósfera.

Ahora bien, para el caso irreal de la superficie plana, estas consideraciones no intervienen en el cálculo de las refracciones; para un determinado intervalo, p. ej. para 11 km, la fórmula (13) es idéntica con (13 a), y el valor de γ obtenido con ellas y con (14) es el mismo. También, si elegimos intervalos parciales, p. ej. dos o cuatro, la suma de las refracciones parciales será igual a la refracción total.

Elegimos el caso de la distancia zenital de 45° y calculamos las refracciones para 1, 2 y 4 intervalos de la tropósfera (para los sen se usa la tabla del libro de Pryde⁽⁹⁾; para los demás cálculos la de Schlämilch⁽¹⁷⁾).

Se halla:

para un intervalo de 11 km: $40,1 = 40,1''$

para dos intervalos de 6 + 5 km: $26,3 + 13,8 = 40,1''$

para cuatro intervalos de 3 + 3 + 3 + 2 km:

$$14,7 + 11,6 + 9,0 + 4,8 = 40,1''$$

Por otra parte, con la fórmula de aproximación:

$$(3b) \quad \gamma = 206265 C (\rho'_0 - \rho) \operatorname{tg} \alpha_0$$

obtenemos para $\alpha_0 = 45^\circ$ el mismo ángulo de refracción de $40,1''$.

Superficie con el radio de curvatura $R = 6370$ km.

En el caso de la superficie curvada —radio de curvatura igual al radio de la Tierra $R = 6370$ km— el método de las capas de aire concéntricas, de igual densidad, da, en vez de (13 a) la ecuación:

$$(13b) \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{R}{R + \eta} [1 + C (\rho'_0 - \rho)], \operatorname{sen} \alpha_0$$

significando ahora η la altura sobre el nivel del mar. (Fig. 2). Procediendo ahora, como en el caso de la superficie plana, obtendremos la ecuación:

$$(13c) \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{1 + \frac{\eta}{R_0}}{1 + \frac{\eta}{R}} \operatorname{sen} \alpha_0$$

o también, en buena aproximación, siendo R_0 bastante más grande que R y poniendo:

$$\frac{1 + \frac{1}{R_0}}{1 + \frac{1}{R}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{K}}, \text{ con: } \frac{1}{K} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}$$

tendremos:

$$(13d) \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha_0}{1 + \frac{\eta}{K}}$$

fórmula que expresa la influencia de la curvatura terrestre, modificada por la curvatura del rayo de luz.

Escribimos (13 d) en la forma:

$$\eta = \frac{K}{\text{sen } \alpha_0} [\text{sen } \alpha_0 - \text{sen } \alpha]$$

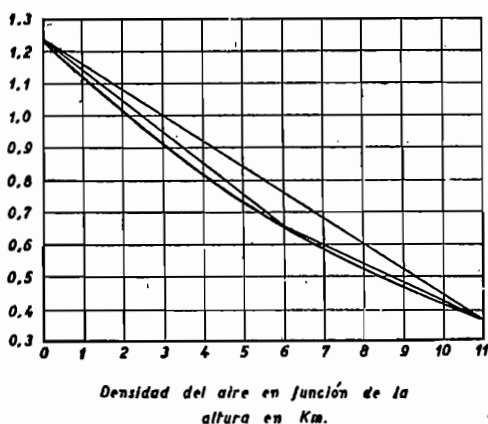


Fig. 1

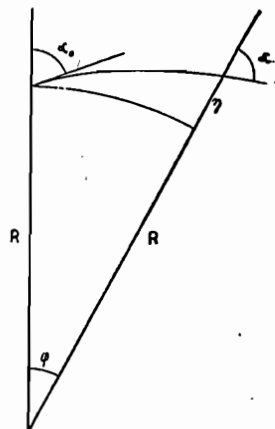


Fig. 2

y obtenemos, con $\frac{d\xi}{d\eta} = \text{tg } \alpha$, integrando:

$$(14) \quad \xi = K \text{ sen } \alpha_0 \lg \frac{\text{tg } \frac{\alpha_0}{2}}{\text{tg } \frac{\alpha}{2}}$$

o también, siendo $\xi = R \cdot \varphi$:

$$(14-a) \quad \varphi = \frac{K}{R} \text{ sen } \alpha_0 \lg \frac{\text{tg } \frac{\alpha_0}{2}}{\text{tg } \frac{\alpha}{2}}$$

o en buena aproximación, para diferencias pequeñas ($\alpha_0 - \alpha$):

$$(14b) \quad \varphi = \frac{K}{R} (\alpha_0 - \alpha).$$

Finalmente tenemos (Fig. 2):

$$(15) \quad \gamma = \varphi - (\alpha_0 - \alpha).$$

Ahora bien, hemos ganado así el siguiente procedimiento para calcular las refracciones para cualquier distancia zenital α_0 :

1) Calculamos para la tropósfera ($\eta=11$ km) h , R_0 y K , luego mediante:

$$(I) \quad \text{sen } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha_0}{1 + \frac{\eta}{K}}$$

$$(II) \quad \varphi = \frac{K}{R} (\alpha_0 - \alpha)$$

$$(III) \quad \gamma = \varphi - (\alpha_0 - \alpha)$$

la primera aproximación para la refracción en la tropósfera; luego subdividimos en 6 y 5 km; si resulta la suma de las refracciones parciales igual al valor anterior, para una determinada distancia zenital, ya tenemos el valor verdadero; si no, subdividimos en 4 intervalos, etc., hasta que, subdividiendo más los intervalos inferiores, llegamos a una suma constante que es entonces la refracción verdadera en la tropósfera.

2) Repetimos el mismo procedimiento para la estratósfera.

Daremos un solo ejemplo para un ángulo zenital bastante grande, es decir, para $\alpha_0=80^\circ$.

1. Tropósfera

	$\varphi - (\alpha_0 - \alpha) = \gamma$
1 intervalo de 11 km:	1969,5 — 1748,0 = 221,5
2 intervalos de 6 y 5 km:	1086,9 — 939,8 = 147,1 883,4 — 808,2 = 75,2 222,3
4 intervalos de 3 + 3 + 3 + 2 km:	547,0 — 464,3 = 82,7 540,1 — 475,5 = 64,6 532,5 — 483,1 = 49,4 351,0 — 325,1 = 25,9 222,6
11 intervalos de 1 km:	183,5 — 153,6 = 29,9 182,2 — 154,7 = 27,5 181,4 — 156,0 = 25,4 181,0 — 157,6 = 23,4 180,1 — 158,6 = 21,5 179,0 — 159,3 = 19,7 178,3 — 160,3 = 18,0 177,3 — 160,9 = 16,4 176,9 — 161,9 = 15,0 176,2 — 162,6 = 13,6 174,8 — 162,5 = 12,3 222,7

2. Estratósfera

1 intervalo de 39 km:	6264,4 — 6180,6 = 83,8
2 intervalos de 19 y 20 km:	3179,9 — 3096,6 = 83,3
	3087,8 — 3084,0 = 3,8
	<u>87,1</u>
4 intervalos de 9 + 10 + 10 + 10 km:	1539,9 — 1471,8 = 68,1
	1641,3 — 1624,8 = 16,5
	1530,9 — 1527,7 = 3,2
	1556,9 — 1556,3 = 0,6
	<u>88,4</u>
8 intervalos, el primero de 4 km, los demás de 5 km:	692,2 — 649,7 = 42,5
	847,9 — 822,1 = 25,8
	829,6 — 818,1 = 11,5
	811,8 — 806,7 = 5,1
	795,1 — 792,8 = 2,3
	779,1 — 778,0 = 1,1
	783,3 — 782,9 = 0,4
	730,4 — 730,3 = 0,1
	<u>88,8</u>

Resultará así para la refracción total que corresponde a la distancia zenital de 80° bajo la suposición de la *Atmósfera Standard* el valor de

$$\gamma = 222,7'' + 88,8'' = 311,5''.$$

Para una superficie plana resultaría el valor considerablemente mayor de $324''$.

Por otra parte, reduciendo el valor ganado a las condiciones normales de temperatura y presión, se obtiene:

$$\gamma = 328,6''$$

mientras que los valores de *Faye* y de *Nassau* son $329,8''$ y $332,0''$ respectivamente.

Demostraremos en otro lugar que la aplicación de la fórmula exacta (14 a) en vez de la de aproximación (14 b) no modificará el resultado para la refracción *total* y que la elección de las densidades que figuran en la tabla V es suficiente hasta para el cálculo de la refracción que corresponde a la distancia zenital de 90° . Publicaremos también la tabla completa de refracciones.

Instituto de Física. - Tucumán, noviembre 13 de 1949.

BIBLIOGRAFIA

- 1) J. WÜRSCHMIDT: Elementare Theorie der terrestrischen Refraktion u. s. w. *Ann. d. Phys.*, IV, 60, 151 - 180, 1919.
- 2) J. WÜRSCHMIDT: l. c., p. 153.
A. WEGENER: Elementare Theorie der atmosphärischen Spiegelungen. - *Ann. d. Phys.*, IV, 57, 203, 1918.
Handbuch der Physik. Hrsg. v. A. WINKELMANN, VI. - Barth, Leipzig, 1902. - p. 503; A. BEMPORAD: Die astronomische und terrestrische Strahlenbrechung.
- 3) F. M. EXNER: Dynamische Meteorologie. - Deuticke, Wien, 1922.
- 4) LANDOLT-BÖRNSTEIN: Physikalische-chemische Tabellen, II, - Springer, Berlin, 1923. Photo-Lithoprint Reprod. Edwards, Michigan, 1943, p. 960.
Ergänzungsband, I, p. 525, Berlin, 1927. - 3. Ergänzungsband, Berlin, 1938.
- 5) *Handbuch der Physik*: l. c., p. 534.
- 6) H. FAYE: Cours d'Astronomie et de Géodésie, I. - Gauthier-Villars, Paris, 1926, p. 123.
- 7) *Connaissance des Temps* pour l'an 1949. - Gauthier-Villars, Paris, 1948.
- 8) JAMES PRYDE: Mathematical Tables. - Chambers, London-Edinburgh, p. 428-430.
- 9) JASON JOHN NASSAU: A Textbook of Practical Astronomy. - Mc Grant Hill, New York-London, 1932, p. 196.
- 10) *Handbuch der Experimentalphysik*; Band XXV: Geophysik, 1. Teil. Red. O. ANGHEHEISTER. Akad. Verlagsges., Leipzig, 1925, p. 114: Refraktion.
- 11) J. M. PERINTER u. F. M. EXNER: Meteorologische Optik. - Braumüller, Wien-Leipzig, 1933, p. 72.
- 12) S. NEWCOMB y R. ENGELMANN: Astronomía Popular. - Gili, Barcelona, 1926, p. 143.
- 13) C. N. RUSSELL, R. SMITH DUGAN and J. QUINCY STEWARD: Astronomy, 1. Ginn, Boston, etc., p. VI.
- 14) W. T. SKILLING and R. S. RICHARDSON: Astronomy. - Holt, New York, 1939.
- 15) J. WÜRSCHMIDT: Altimetría Barométrica. - Cuadernos de Mineralogía y Geología, Tomo I, Nº 3 y 4. Publ. Un. Nac. de Tucumán, Nº 234 y 237. Tucumán, 1938.
- 16) ALFREDO G. GALMARINI: La Atmósfera "Standard". - Dir. de Met., Geof. e Hidrol. - Serie A, Publ. Nº 2. - Tall. Gráf. Min. de Agricultura, Buenos Aires, 1934.
- 17) Pfo PITA SUÁREZ COBIAN y JOSÉ M^º LORENTE PÉREZ: Meteorología Aero-náutica. S. A. E. T. A., Madrid, 1942, p. 45. Los autores usan $\alpha = 5,22$; además $\frac{R}{T} \frac{1}{g}$ el valor 14,6 (*Wü.* 14,593; *Ga.* 14,595). Han calculado: 1 : 0,0065 = 152,8, en vez de 153,85.
- 18) *Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln*. Hrsg. v. O. SCHLÖMILCH. Vieweg, Braunschweig, 1914.

TEORIA DE LAS ABERRACIONES GEOMETRICAS DE LOS SISTEMAS OPTICOS CENTRADOS

por RICARDO PLATZECK

Observatorio Astronómico, Córdoba

(Recibido el 2/12/1949)

SUMMARY: Two methods are developed in order to determine successively the geometrical aberrations of centered systems of an arbitrary number of optical surfaces of axial symmetry, spherical or not.

The first method is based on the classical concept of the angular eiconal (characteristic function), which is deduced from the principle of Fermat.

The second method uses for the determination of the aberrations of the system the matrix which transforms any given ray in the object space into a ray of the image space. This procedure is based on a method which has been given by R. A. Sampson in order to obtain the aberrations of third order. It is shown that it can be developed into a form which permits to determine by successive approximations the coefficients of arbitrarily high order.

Introducción.

En este trabajo se indica el procedimiento que debe seguirse para obtener las aberraciones de un orden $(2n-1)$ cualquiera aplicando dos métodos fundamentalmente diferentes. El primero se basa en la función clásica del eiconal angular (función característica) que se deduce del principio de Fermat. En el segundo se determinan las aberraciones del sistema mediante la matriz que transforma a todo rayo del espacio objeto en un rayo del espacio imagen. Este último método está inspirado en una teoría desarrollada por R. A. Sampson ⁽¹⁾, limitada a las aberraciones de tercer

(*) Extractado de la tesis presentada por el autor en la Universidad Nacional de La Plata en el año 1945.

Una exposición más detallada aparecerá, en otra parte.

⁽¹⁾ SAMPSON, R. A. *A new Treatment of Optical Aberrations*; Phil. Trans., 1913, 212, A, 149-185.

orden. La modificación y generalización estudiada aquí permite, en cambio, obtener sucesivamente las aberraciones de un orden cualquiera. Ella es aplicable a sistemas ópticos centrados, con simetría alrededor de un eje en los cuales los medios transparentes son de índices de refracción constantes y están separados por superficies de discontinuidad.

Teoría del eiconal.

1. *Características del eiconal angular.* Consideremos un sistema óptico centrado y dos sistemas de coordenadas O_0, x_0, y_0, z_0 en el espacio objeto y O_1, x_1, y_1, z_1 en el espacio imagen tales que los ejes x_0 y x_1 coincidan con el eje óptico. Si $A_0(a_0, O, O)$ y $A_1(a_1, O, O)$ son dos puntos sobre el eje óptico situados en el espacio objeto y en el espacio imagen respectivamente, entonces el eiconal angular $W(p_0, q_0, p_1, q_1)$ representa, para un rayo cualquiera que atraviesa el sistema, el camino óptico entre los pies de las perpendiculares trazadas por A_0 y A_1 al rayo considerado. W debe estar expresado en función de p_0, q_0, p_1, q_1 , como variables independientes, donde m_0, p_0, q_0 y m_1, p_1, q_1 , son los cosenos directores del rayo considerado en el espacio objeto (rayo incidente) y el espacio imagen (rayo emergente). A_0 y A_1 pueden en particular ser puntos conjugados. En la expresión de W figuran, desde luego, las constantes características del sistema óptico, como ser índices de refracción, radios de curvatura de las superficies ópticas (no necesariamente esféricas), distancias entre las mismas, etc.

Consideremos ahora dividido el sistema óptico en dos partes cualesquiera. Si es A_l el punto sobre el eje óptico que define la división y si son m_l, p_l, q_l , los cosenos directores del rayo en el espacio correspondiente, y si W_1, W_2 son los eiconales que caracterizan a la primera y segunda parte del instrumento, respectivamente, entonces es sabido que la suma $W_1 + W_2$ da el valor del eiconal de todo el sistema. Ahora bien, dado que en la suma figuran las seis variables $p_0, q_0, p_l, q_l, p_1, q_1$, es necesario eliminar las dos variables intermedias p_l, q_l , para que dicha suma represente verdaderamente al eiconal del sistema total.

La división analizada, desde luego puede hacerse en un número cualquiera de partes. Veremos más adelante que conviene

calcular el eiconal correspondiente a cada una de las superficies ópticas que comprende el sistema en estudio; sumar los valores obtenidos y eliminar después las variables p, q , intermedias. El valor que resulta así representa el eiconal angular de todo el sistema.

Recordemos ahora cómo se obtienen las aberraciones de un sistema cuando se conoce su eiconal angular. Sea α_0 un plano perpendicular al eje óptico que pase por el punto A_0 , y α_1 un plano análogo que pase por A_1 . En tal caso valen las relaciones

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial p_0} &= n_0 y_0 & \frac{\partial W}{\partial p_1} &= -n_1 y_1 \\ \frac{\partial W}{\partial q_0} &= n_0 z_0 & \frac{\partial W}{\partial q_1} &= -n_1 z_1 \end{aligned}$$

donde n_0 y n_1 son los índices de refracción en el espacio objeto e imagen, respectivamente, y_0, z_0 las coordenadas de la intersección del rayo luminoso con el plano frontal α_0 e y_1, z_1 las coordenadas de la intersección del rayo mencionado con el plano α_1 ; en particular α_0 y α_1 pueden ser el plano objeto e imagen del sistema cuyo eiconal angular es W . En tal caso

$$(2) \quad y_1 = y_1(p_0, q_0, p_1, q_1), \quad z_1 = z_1(p_0, q_0, p_1, q_1)$$

da la intersección del rayo genérico con el plano objeto expresado en función de las variables indicadas entre paréntesis. Para obtener de las (2) las aberraciones del sistema óptico es necesario expresarlas en función de las coordenadas y_0, z_0 en el plano objeto y de las coordenadas η, ς en el plano del diafragma (o de alguna de las pupilas del sistema).

En lo que sigue expondremos un método que permite obtener sucesivamente los términos del desarrollo

$$(3) \quad y_1 = y_1^{(1)} + y_1^{(3)} + \dots, \quad z_1 = z_1^{(1)} + z_1^{(3)} + \dots$$

en función de $y_0, z_0, \eta, \varsigma$, donde el exponente entre paréntesis indica el grado en las variables. $y_1^{(1)}, z_1^{(1)}$ dan naturalmente las intersecciones gaussianas, de modo que las aberraciones de 3º,

5º, ... orden del sistema óptico están contenidas en las expresiones

$$(4) \quad \Delta y_1 = y_1^{(3)} + y_1^{(5)} + \dots, \quad \Delta z_1 = z_1^{(3)} + z_1^{(5)} + \dots$$

2. *Eiconal de la refracción en una superficie óptica.* Sea O, x, y, z el sistema de coordenadas con origen en el vértice de la superficie óptica de eje x coincidente con el eje óptico; designemos con $P(X, Y, Z)$ al punto de intersección del rayo luminoso con la superficie. El valor del eiconal angular está dado, entonces, por la expresión ⁽²⁾

$$(5) \quad \overline{W} = (n_0 m_0 - n_1 m_1) X + (n_0 p_0 - n_1 p_1) Y + \\ + (n_0 q_0 - n_1 q_1) Z - n_0 m_0 a_0 + n_1 m_1 a_1,$$

donde $\vec{U}_0(m_0, p_0, q_0)$ y $\vec{U}_1(m_1, p_1, q_1)$ son los vectores unitarios sobre el rayo incidente y emergente, respectivamente. $\overline{W}$ no representa al eiconal angular W buscado, ya que figuran además de las variables p_0, q_0, p_1, q_1 , las variables X, Y, Z, m_0, m_1 . Debemos pues, eliminar estas últimas. La eliminación de m_0 y m_1 resulta de las relaciones

$$(6) \quad m_0^2 + p_0^2 + q_0^2 = 1, \quad m_1^2 + p_1^2 + q_1^2 = 1,$$

en cambio, la eliminación de X, Y, Z se hace mediante la ecuación de la superficie óptica

$$(7) \quad X = \varphi(Y, Z) \quad \text{o} \quad F(X, Y, Z)$$

y la ley de refracción según la cual el vector $\vec{N} = n_0 \vec{u}_0 - n_1 \vec{u}_1$ es normal a la superficie, vale decir, se satisfacen las relaciones ⁽³⁾

$$(8) \quad \begin{cases} (n_0 m_0 - n_1 m_1) \frac{\partial F}{\partial Y} = n_0 p_0 - n_1 p_1 \\ (n_0 m_0 - n_1 m_1) \frac{\partial F}{\partial Z} = n_0 q_0 - n_1 q_1, \end{cases}$$

⁽²⁾ BORN, M., *Optik* (J. Springer, 1933), pág. 73.

⁽³⁾ BORN, M., *Optik*, pág. 74.

que introducidas en la (5) dan

$$(9) \quad \bar{W} = (n_0 m_0 - n_1 m_1) \left(X \frac{\partial F}{\partial X} + Y \frac{\partial F}{\partial Y} + Z \frac{\partial F}{\partial Z} \right) - \\ - n_0 m_0 a_0 + n_1 m_1 a_1.$$

Si ahora tenemos en cuenta que la superficie óptica es de revolución podemos poner $H^2 = Y^2 + Z^2$, con lo que la (9) puede escribirse

$$(10) \quad \bar{W} = (n_0 m_0 - n_1 m_1) \left(X - 2H^2 \frac{\partial X}{\partial H^2} \right) - n_0 m_0 a_0 + n_1 m_1 a_1,$$

y si desarrollamos la (7) en serie

$$(11) \quad F = X + \sum_{j=1}^{\infty} d_j H^{2j}, \quad X = - \sum_{j=1}^{\infty} d_j H^{2j}$$

resulta

$$(12) \quad \bar{W} = (n_0 m_0 - n_1 m_1) \sum_{j=1}^{\infty} (2j-1) d_j H^{2j} - n_0 m_0 a_0 + n_1 m_1 a_1.$$

Ahora bien, para eliminar H de la anterior nos valemos de dos expresiones; la primera de ellas se obtiene elevando al cuadrado y sumando las (8), siendo de la forma

$$(13) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial H^2} \right)^2 H^2 = \psi(p_0, q_0, p_1, q_1),$$

y la segunda se obtiene derivando, multiplicando por H y elevando al cuadrado la (11); su valor es

$$(14) \quad \frac{\partial F}{\partial H^2} H^2 = \sum_{l=1}^{\infty} [ik d_i d_k]_{l+1} H^{2l}$$

donde

$$(15) \quad [ik d_i d_k]_m = \sum_{\substack{i+k=m \\ i, k \geq 1}} ik d_i d_k.$$

Si ahora igualamos los segundos miembros de (13) y (14), y despejamos H^2 se obtiene la siguiente fórmula de recurrencia

$$(16) \quad H_{(p)}^2 = \frac{1}{d_1^2} \psi(p_0, q_0, p_1, q_1) - \frac{1}{d_1^2} \{ [ik d_i d_k]_3 H_{(p-1)}^4 + \\ + [ik d_i d_k]_4 H_{(p-2)}^6 + \dots + [ik d_i d_k]_{p+1} H_{(1)}^{2p} \},$$

donde $H_{(l)}^{2r}$ indica que H^{2r} está desarrollado hasta términos de grado $2l$ en las p, q . La expresión (16) permite obtener sucesivamente $H_{(1)}^2, H_{(2)}^2$, etc., valores que reemplazados en la (12) nos dan el eiconal angular

$$(17) \quad W(p_0, q_0, p_1, q_1) = W_{(2)} + W_{(4)} + \dots + W_{(2p)} + \dots$$

donde se ha tenido en cuenta la (6).

3. *Sistema con r superficies ópticas.* Consideremos un sistema formado por r superficies ópticas. Para definir los r eiconales parciales correspondientes a las mismas fijemos sobre el eje óptico los siguientes puntos: $A_0(a_0, O, O)$, en el espacio objeto, $A_r(a_r, O, O)$ en el espacio imagen, y los puntos A_l ($l=1, \dots, r-1$) entre las superficies S_l y S_{l+1} . Por lo demás los puntos $A_0, \dots, A_r$ son arbitrarios; A_0 y A_r pueden en particular ser las intersecciones de los planos objeto e imagen, respectivamente, con el eje óptico.

El valor del eiconal del sistema está dado, como sabemos ya, por la suma de los eiconales correspondientes a las partes del instrumento definidas por los puntos A_l . Podemos escribir

$$(18) \quad \bar{W} = W_1(p_0, q_0, p_1, q_1) + \dots + W_r(p_{r-1}, q_{r-1}, p_r, q_r)$$

expresión de la cual debemos eliminar las variables intermedias $p_1, q_1, \dots, p_{r-1}, q_{r-1}$. Para ello derivamos sucesivamente la (18) con respecto a $p_1, q_1, \dots, p_{r-1}, q_{r-1}$ y obtenemos

$$(19) \quad \frac{\partial W_i}{\partial p_i} = - \frac{\partial W_{i+1}}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial W_i}{\partial q_i} = - \frac{\partial W_{i+1}}{\partial q_i}, \quad (i=1, \dots, r-1)$$

que de acuerdo a las (1) no son sino las ecuaciones de continuidad del rayo luminoso a través de los planos perpendiculares al eje óptico por los puntos A_l .

Las expresiones (19) nos permiten efectuar la eliminación de las p_i, q_i intermedias por aproximaciones sucesivas. Sean

$$(20) \quad W_i = W_i^{(a)} + W_i^{(2)} + \dots + W_i^{(b)} + \dots \quad (i=1, \dots, r-1)$$

los desarrolló en serie de los eiconales de los elementos que componen el sistema óptico. Si reemplazamos $W_i^{(2)}$ en las (19) obtenemos un sistema de $2(r-1)$ ecuaciones cuya resolución nos da las $2(r-1)$ incógnitas

$$(21) \quad p_1^{(1)}, q_1^{(1)}, \dots, p_{r-1}^{(1)}, q_{r-1}^{(1)}$$

en función de p_0, q_0, p_r, q_r ; ponemos el exponente entre paréntesis para indicar que se trata de relaciones lineales. Si ahora introducimos $W_i^{(2)} + W_i^{(4)}$ en (19) resulta un sistema de ecuaciones con términos de primer y tercer grado en las p_i, q_i intermedias. Podemos reemplazar en los términos de tercer grado las (21) sin perder generalidad; en esta forma nuevamente resulta un sistema lineal con $2(r-1)$ incógnitas, que resuelto nos da $p_i^{(3)}, q_i^{(3)}$. Siguiendo en la misma forma podemos obtener sucesivamente los términos de 5º, 7º, ... grado en las variables finales. Reemplazando los valores obtenidos en (18) se obtiene el desarrollo del eiconal del sistema óptico dado en función de p_0, q_0, p_r, q_r .

4. *Aberraciones en función de las coordenadas en el plano objeto y en el plano del diafragma.* Consideremos nuevamente un sistema óptico formado por r superficies y supongamos que el diafragma se encuentre entre la superficie l y la $l+1$ y sea A_l el punto de intersección del plano que contiene al diafragma con el eje óptico. Dividimos el sistema total en dos partes; la primera comprendida entre A_0 en el espacio objeto, y A_l , y la segunda entre A_l y A_r en el espacio imagen. Los eiconales angulares correspondientes los caracterizamos de la siguiente manera

$$(22) \quad W_1 = W_1(p_0, q_0, p_l, q_l), \quad W_2 = W_2(p_l, q_l, p_r, q_r),$$

y que ya sabemos calcular hasta un orden $2s$ cualquiera.

Si ahora los pares (y_0, z_0) , (y_r, z_r) , (η, ς) son las coordenadas en el plano por A_0 , por A_r y en el diafragma, respectivamente. Entonces las (22) proporcionan de acuerdo a las (1) las ocho expresiones

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_1}{\partial p_0} &= n_0 y_0, & \frac{\partial W_1}{\partial q_0} &= n_0 z_0 \\ \frac{\partial W_1}{\partial p_l} &= -n_l \eta, & \frac{\partial W_1}{\partial q_l} &= -n_l \varsigma \end{aligned}$$

(23)

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_2}{\partial p_l} &= n_l \eta, & \frac{\partial W_2}{\partial q_l} &= n_l \varsigma \\ \frac{\partial W_2}{\partial p_r} &= -n_r \gamma_r, & \frac{\partial W_2}{\partial q_r} &= -n_r z_r\end{aligned}$$

cuyas variables son

(24)

$$p_0, q_0, p_l, q_l, p_r, q_r, \gamma_0, z_0, \eta, \varsigma, \gamma_r, z_r.$$

Para expresar las coordenadas γ_r, z_r en el plano A_r en función de $\gamma_0, z_0, \eta, \varsigma$ procedemos nuevamente por aproximaciones sucesivas. Introducimos los términos de 2º grado $W_1^{(2)}$ y $W_2^{(2)}$ del desarrollo en serie de las (22) en las (23). Resulta así un sistema de ocho ecuaciones lineales; las dos últimas proporcionan

$$(25) \quad \gamma_r^{(1)} = \gamma_r^{(1)}(p_l, q_l, p_r, q_r), \quad z_r^{(1)} = z_r^{(1)}(p_l, q_l, p_r, q_r),$$

y las seis restantes permiten eliminar p_l, q_l, p_r, q_r por una parte, e introducir γ_0, z_0 por la otra. Se obtienen así las relaciones lineales de la aproximación gaussiana

$$(26) \quad \gamma_r^{(1)} = \gamma_r^{(1)}(\gamma_0, z_0, \eta, \varsigma), \quad z_r^{(1)} = z_r^{(1)}(\gamma_0, z_0, \eta, \varsigma)$$

con las cuales se determina la posición A de A_r conjugada de A_0 . Si designamos con y, z a las coordenadas correspondientes resulta

$$(27) \quad y = y(\gamma_0, z_0), \quad z = z(\gamma_0, z_0),$$

que naturalmente son independientes de η, ς .

Para obtener las aberraciones de tercer orden introducimos $W_2^{(4)}$ del desarrollo de las (22) en las (23) y si reemplazamos los valores lineales ya obtenidos en los términos de tercer grado del sistema resultante, dicho sistema nuevamente será lineal. Una vez resuelto nos da

$$(28) \quad p_0^{(3)}, q_0^{(3)}, \dots, p_r^{(3)}, q_r^{(3)}, \gamma_r^{(3)}, z_r^{(3)}.$$

Si repetimos el mismo procedimiento agregando más términos del desarrollo de W_1 y W_2 obtenemos sucesivamente las aberraciones de 5º, 7º.... orden.

Teoría de las matrices.

4. *Introducción.* Consideremos nuevamente un sistema cualquiera, con r superficies ópticas y sean A_0 y A_r dos puntos sobre el eje; el primero en el espacio objeto y el segundo en el espacio imagen. Con origen en A_0 y A_r fijamos dos sistemas de coordenadas O, x, y, z y O', x', y', z' , donde x y x' coinciden con el eje óptico. A un rayo de ecuación

$$(29) \quad y = y_0 + \beta_0 x, \quad z = z_0 + \gamma_0 x,$$

le corresponderá en general un rayo

$$(30) \quad y' = y_1 + \beta_1 x', \quad z' = z_1 + \gamma_1 x'.$$

Los dos sistemas de coeficientes

$$y_0, z_0, \beta_0, \gamma_0, \quad y_1, z_1, \beta_1, \gamma_1,$$

definen al rayo objeto y al rayo imagen, respectivamente.

Ahora bien, el instrumento óptico establece una relación entre el primer grupo y el segundo, vale decir que los valores $y_1, z_1, \beta_1, \gamma_1$, pueden ser expresados en función de $y_0, z_0, \beta_0, \gamma_0$, y de las constantes que caracterizan al instrumento. Veamos cómo se obtienen dichas relaciones.

5. *Refracción en una superficie óptica.* Resolveremos primero el problema propuesto para el caso de la refracción en una superficie que separa dos medios de índices n_0 y n_1 . Por el momento consideraremos una superficie sin simetría particular, de ecuación

$$(31) \quad X = \varphi(Y, Z), \quad F(X, Y, Z) = 0.$$

Hagamos coincidir los ejes x y x' , colocando el origen común en el punto en que x corta a la superficie. Por tener los rayos objeto e imagen correspondientes un punto común sobre la superficie es

$$(32) \quad y_1 + \beta_1 X = y_0 + \beta_0 X, \quad z_1 + \gamma_1 X = z_0 + \gamma_0 X.$$

Recurrimos ahora a la ley de la refracción (y reflexión) en la forma en que la hemos presentado en el capítulo anterior.

De la (8) y de la (31) resulta

$$(33) \quad -\Delta(nm) \frac{\partial X}{\partial Y} = \Delta(np), \quad -\Delta(nm) \frac{\partial X}{\partial Z} = \Delta(nq),$$

donde hemos introducido la notación abreviada

$$(34) \quad \Delta(nm) = n_0 m_0 - n_1 m_1, \quad \Delta(np) = n_0 p_0 - n_1 p_1, \\ \Delta(nq) = n_0 q_0 - n_1 q_1.$$

Si nos valemos de las relaciones

$$(35) \quad p_0 = m_0 \beta_0, \quad q_0 = m_0 \gamma_0, \quad p_1 = m_1 \beta_1, \quad q_1 = m_1 \gamma_1,$$

entre los cosenos directores y los coeficientes angulares, la (33) toma la forma

$$(36) \quad \beta_1 = \frac{\Delta(nm)}{n_1 m_1} \cdot \frac{\partial X}{\partial Y} + \frac{n_0 m_0}{n_1 m_1} \cdot \beta_0, \\ \gamma_1 = \frac{\Delta(nm)}{n_1 m_1} \cdot \frac{\partial X}{\partial Z} + \frac{n_0 m_0}{n_1 m_1} \cdot \gamma_0.$$

Si ahora reemplazamos estas expresiones en la (32), resulta

$$(37) \quad y_1 = y_0 + X \frac{\Delta(nm)}{n_1 m_1} \left(-\beta_0 - \frac{\partial X}{\partial Y} \right) \\ z_1 = z_0 + X \frac{\Delta(nm)}{n_1 m_1} \left(-\gamma_0 - \frac{\partial X}{\partial Z} \right)$$

Las (36) y (37) dan los valores de $y_1, z_1, \beta_1, \gamma_1$, para el caso general en que la superficie no está sometida a restricción alguna.

Consideremos ahora una superficie de revolución alrededor del eje x . En tal caso es

$$H^2 = Y^2 + Z^2,$$

y como

$$Y = y_0 + \beta_0 X, \quad Z = z_0 + \gamma_0 X,$$

resulta

$$\frac{\partial X}{\partial Y} = 2 \frac{dX}{dH^2} (y_0 + \beta_0 X), \quad \frac{\partial X}{\partial Z} = 2 \frac{dX}{dH^2} (z_0 + \gamma_0 X).$$

Si introducimos ahora estas expresiones en las (32) y (33) obtenemos

$$\begin{aligned} y_1 &= \left[1 - 2X \frac{dX}{dH^2} \cdot \frac{\Delta(nm)}{n_1 m_1} \right] y_0 - X \frac{\Delta(nm)}{n_1 m_1} \left[1 + 2X \frac{dX}{dH^2} \right] \beta_0 \\ z_1 &= \left[1 - 2X \frac{dX}{dH^2} \cdot \frac{\Delta(nm)}{n_1 m_1} \right] z_0 - X \frac{\Delta(nm)}{n_1 m_1} \left[1 + 2X \frac{dX}{dH^2} \right] \gamma_0 \end{aligned} \quad (38)$$

$$\beta_1 = 2 \frac{dX}{dH^2} \cdot \frac{\Delta(nm)}{n_1 m_1} \cdot y_0 + \left[\frac{n_0 m_0}{n_1 m_1} + 2X \frac{dX}{dH^2} \frac{\Delta(nm)}{n_1 m_1} \right] \beta_0$$

$$\gamma_1 = 2 \frac{dX}{dH^2} \cdot \frac{\Delta(nm)}{n_1 m_1} \cdot z_0 + \left[\frac{n_0 m_0}{n_1 m_1} + 2X \frac{dX}{dH^2} \frac{\Delta(nm)}{n_1 m_1} \right] \gamma_0$$

que podemos escribir en forma abreviada

$$\begin{aligned} (39) \quad y_1 &= g_{11} y_0 + g_{12} \beta_0 & \beta_1 &= g_{21} y_0 + g_{22} \beta_0 \\ z_1 &= g_{11} z_0 + g_{12} \gamma_0 & \gamma_1 &= g_{21} z_0 + g_{22} \gamma_0 \end{aligned}$$

Estas expresiones muestran que la transformación que permite expresar $y_1, z_1, \beta_1, \gamma_1$, en función de $y_0, z_0, \beta_0, \gamma_0$, queda perfectamente determinada por la matriz

$$(40) \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - 2X \frac{dX}{dH^2} \frac{\Delta(nm)}{n_1 m_1} & X \frac{\Delta(nm)}{n_1 m_1} \left[1 + 2X \frac{dX}{dH^2} \right] \\ 2 \frac{dX}{dH^2} \frac{\Delta(nm)}{n_1 m_1} & \left[\frac{n_0 m_0}{n_1 m_1} + 2X \frac{dX}{dH^2} \frac{\Delta(nm)}{n_1 m_1} \right] \end{vmatrix}$$

A la matriz (40) la designaremos con el nombre de matriz característica de la superficie óptica, que separa los medios de índices de refracción n_0 y n_1 .

6. *Combinación de varios sistemas ópticos.* Analicemos primero el efecto de una translación del sistema de referencia. Para expresar los rayos dados en el sistema O, x, y, z en el sistema O', x', y', z' , trasladado en

$$x' = x - e$$

no hay más que aplicar a $y_0, z_0, \beta_0, \gamma_0$ la transformación definida por la matriz

$$(41) \quad \|e\| = \begin{vmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

para obtener $y_1, z_1, \beta_1, \gamma_1$, como puede comprobarse de inmediato.

Si ahora

$$(42) \quad \|g_{ik}\| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \quad \|k_{ik}\| = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix}$$

son las matrices de los sistemas centrados para los cuales el origen de coordenadas en el espacio imagen del primero, entonces valen las expresiones

$$y_1 = g_{11} y_0 + g_{12} \beta_0 \quad y_2 = k_{11} y_1 + k_{12} \beta_1$$

$$z_1 = g_{11} z_0 + g_{12} \gamma_0 \quad z_2 = k_{11} z_1 + k_{12} \gamma_1$$

$$\beta_1 = g_{21} y_0 + g_{22} \beta_0 \quad \beta_2 = k_{21} y_1 + k_{22} \beta_1$$

$$\gamma_1 = g_{21} z_0 + g_{22} \gamma_0 \quad \gamma_2 = k_{21} z_1 + k_{22} \gamma_1.$$

Eliminando de ellas las variables intermedias $y_1, z_1, \beta_1, \gamma_1$, obtenemos

$$y_2 = (g_{11} k_{11} + g_{21} k_{12}) y_0 + (g_{12} k_{11} + g_{22} k_{12}) \beta_0$$

$$z_2 = (g_{11} k_{11} + g_{21} k_{12}) z_0 + (g_{12} k_{11} + g_{22} k_{12}) \gamma_0$$

$$\beta_2 = (g_{11} k_{21} + g_{21} k_{22}) y_0 + (g_{12} k_{21} + g_{22} k_{22}) \beta_0$$

$$\gamma_2 = (g_{11} k_{21} + g_{21} k_{22}) z_0 + (g_{12} k_{21} + g_{22} k_{22}) \gamma_0$$

vale decir que el instrumento compuesto tiene la matriz

$$(43) \quad \|g_{ik}\| \rightarrow \|k_{ik}\| = \begin{vmatrix} g_{11} k_{11} + g_{21} k_{12} & g_{12} k_{11} + g_{22} k_{12} \\ g_{11} k_{21} + g_{21} k_{22} & g_{12} k_{21} + g_{22} k_{22} \end{vmatrix} = \|G_{ik}\|$$

donde puede observarse que $\|G_{ik}\|$ es igual al producto de la matriz $\|k_{ik}\|$ por la $\|g_{ik}\|$, es decir

$$\|g_{ik}\| \rightarrow \|k_{ik}\| = \|G_{ik}\| = \|k_{ik}\| \times \|g_{ik}\|. \quad (94)$$

En general, un instrumento compuesto de n matrices

$$\|g_{ik}\|_j \quad j=1, \dots, n,$$

tiene por matriz al producto

$$(44) \quad \|G_{ik}\| = \prod_{j=1}^n \|g_{ik}\|_j$$

que permite transformar un rayo del primer espacio objeto en el rayo correspondiente del último espacio imagen.

7. *Cálculo de las aberraciones.* Consideremos un sistema óptico comprendido entre los sistemas de referencia (O_0, x_0, y_0, z_0) y (O_r, x_r, y_r, z_r) . Sea (O_0, y_0, z_0) el plano objeto y (O_r, y_r, z_r) el plano imagen del mismo. Si $\|G_{ik}\|$ es la matriz característica del sistema considerado, entonces el punto $P_0(y_0, z_0)$ es la intersección del rayo luminoso (genérico) con el plano objeto y el punto $P_r(y_r, z_r)$ es la intersección del mismo rayo con el plano imagen. Las coordenadas del punto P_r están dadas por

$$(45) \quad y_r = G_{11} y_0 + G_{12} \beta_0, \quad z_r = G_{11} z_0 + G_{12} \gamma_0.$$

Ahora bien, si a y_r, z_r le restamos los valores $y_r^{(1)}, z_r^{(1)}$ dados por la aproximación gaussiana, obtenemos las aberraciones del sistema óptico mencionado:

$$(46) \quad \Delta y_r = y_r - y_r^{(1)}, \quad \Delta z_r = z_r - z_r^{(1)}.$$

Del primer término del desarrollo en serie de las G_{ik} , resulta

$$y_r^{(1)} = G_{11}^{(0)} y_0, \quad z_r^{(1)} = G_{11}^{(0)} z_0$$

ya que

$$G_{12} = 0$$

es la condición para que P_r sea conjugado de P_0 .

Para que la (46) proporcione las aberraciones en la forma conveniente, es decir en función de las coordenadas en el plano objeto y las del diafragma, es necesario eliminar de las coordenadas sobre las superficies ópticas, las variables intermedias e introducir las variables η, ζ sobre el diafragma. Estas operaciones se efectúan en forma análoga a la desarrollada para el eiconal angular.

8. *Eliminación de las coordenadas sobre la superficie óptica.* Basta hacer la eliminación de X, Y, Z , para cada una de las matrices características de las superficies de separación de dos medios consecutivos, que intervienen en un instrumento cualquiera.

Si analizamos la matriz (40) que caracteriza a la superficie

$$X = \varphi(H^2)$$

observamos que en las g_{ik} figuran expresiones en

$$m_0, m_1, \frac{dX}{dH^2}, X,$$

Si tenemos en cuenta las (11), (13) y (16), podemos expresar estas cantidades en función de p_0, q_0, p_1, q_1 , o sea

$$(47) \quad g_{ik} = g_{ik}(p_0, q_0, p_1, q_1).$$

Si ahora tenemos en cuenta las relaciones

$$p_i = \frac{\beta_i}{\sqrt{1+\beta_i^2+\gamma_i^2}}, \quad q_i = \frac{\gamma_i}{\sqrt{1+\beta_i^2+\gamma_i^2}} \quad i=0,1,$$

podemos expresar g_{ik} en función de $\beta_0, \gamma_0, \beta_1, \gamma_1$.

9. Sistema con r superficies ópticas.

Si consideramos un sistema como el descrito en el § 3 obtenemos paralelamente a las (19) un sistema de ecuaciones del tipo

$$y_j = k_{11,j} y_{j-1} + k_{12,j} \beta_{j-1}, \quad z_j = \dots$$

(48)

$$\beta_j = k_{21,j} y_{j-1} + k_{22,j} \gamma_{j-1}, \quad \gamma_j = \dots$$

que permiten, siguiendo un procedimiento de aproximaciones sucesivas muy análogo al empleado para el eiconal angular, eliminar las variables intermedias.

10. Aberraciones en función de y_0, z_0, η, ζ .

Tomemos nuevamente el sistema óptico dado en § 4 y sea $\|H_{ik}\|$ la matriz de la primera parte y $\|L_{ik}\|$ la de la segunda parte del instrumento. Podemos formar con ellas ocho expresiones análogas a las (23) aplicando las (39) que nos permiten también obtener aquí las aberraciones del sistema en función de las variables finales según un camino paralelo al seguido en § 4.

Este trabajo ha sido expuesto y discutido, en todas sus partes, en el seminario del Observatorio de Córdoba, por lo que deseo expresar mi agradecimiento a los participantes del mismo, en especial a los doctores E. Gaviola y G. Beck.

ESPECTROSCOPIA DE SOLUCIONES

por HÉCTOR ISNARDI
Instituto de Física - La Plata

(Recibido el 12/12/1949)

SUMMARY: The spectra of aqueous solutions have been studied, exciting the spectra by an arc and using the experimental arrangements in fig. 3 and 4.

A table is given of the values of sensibility which have been obtained with a Zeiss spectrograph of three glass prisms with a camera of 84 cm focal distance. In all cases the arc has been generated by a transformer of 12,000 V the secondary circuit being directly connected to the electrodes. The current flowing in the arc is 3 A and the potential difference measured between the electrodes is approximately 600 V.

For a solution of 2 mg of LiCl in 1 l of water the "spectral consumption" has been determined and has been found to be less than 10^{-6} mg.

§ 1. GENERALIDADES

Los métodos y dispositivos experimentales usados en el estudio espectral de soluciones son poderosos auxiliares para la determinación de elementos contenidos en pequeña cantidad en muestras sólidas, previamente transformadas en soluciones por vía química.

En una muestra líquida es fácil modificar su concentración o separar por precipitación los elementos que no se tengan interés en determinar, lo que acarrea la doble ventaja de reforzar en general las líneas de los elementos no precipitados y de simplificar los espectrogramas, por eliminarse todas o la mayor parte de las líneas de los precipitados.

En cada caso particular y según el elemento que quiera determinarse, convendrá estudiar la muestra por los métodos especiales para sólidos o líquidos.

De acuerdo con los valores de la sensibilidad para los distintos elementos por nosotros estudiados, puede asegurarse que su determinación cualitativa deberá ser realizada al estado de solución, siempre que se disponga de suficiente cantidad inicial de muestra sólida.

§ 2. LOS DISPOSITIVOS EXPERIMENTALES USADOS

En el año 1884 excitando con chispa, electrodos de grafito humedecidos con soluciones, verificó *Hartley* la presencia de metales disueltos.

Muchos años después en 1907, *Pollok*, continúa las experiencias de *Hartley* reemplazando, con el propósito de evitar la crepitación del líquido, los electrodos de grafito por electrodos de oro.

El mismo año *De Gramunt*, para evitar las líneas espectrales de los electrodos metálicos, analiza soluciones haciendo saltar la chispa entre dos gotas de líquido que afloran en los extremos de tubos de cuarzo, estando sumergido cada uno de ellos en vasos que contienen la solución.

Twyman y *Hitchen* en el año 1931 utilizan el tubo de *Hartley* modificado por *Pollik* y *Leonard* y con él constatan al estudiar cuantitativamente soluciones de *Co*, *Ni* y *Cr*, que las incrustaciones en la parte superior de los electrodos de grafito y la descomposición de las soluciones, dan una falsa idea de su concentración.

En el año 1935 *Duffendak*, *Wley* y *Owens* y un año después *Thompson* y *Duffendak*, introducen modificaciones fundamentales en el tubo inicial de chispa de *Hartley*.

Un modelo usado por *Twyman* y construido por *Hilger* es el que ilustra la figura 1.

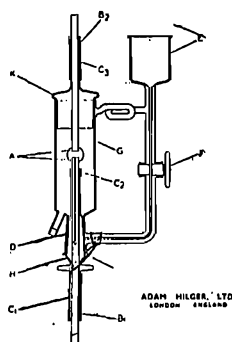


Fig. 1

Los electrodos son de grafito de 5 mm. de diámetro, la

solución está contenida en el recipiente *E* de diámetro grande para que varíe poco la velocidad de escurrimiento del líquido mientras dura la experiencia, la solución llega a la parte superior del electrodo inferior, por un agujero central y la descarga de la chispa se produce entre este y el electrodo superior colocado frente a él.

Loewe en el año 1928, excitando con chispa, analizó soluciones colocando pequeñas gotas de líquido en una cavidad hecha en el electrodo inferior. Otros investigadores han estudiado espectralmente soluciones excitando con chispa o arco, electrodos de carbón o grafito, previamente sumergidos en caliente varias veces en el líquido o evaporando a sequedad la muestra y estudiando su residuo.

W. Gerlach al ocuparse del estudio espectral de humores y soluciones ha construido dos modelos de electrodos con ese fin.

El primero es un tubo de vidrio de forma acodada que se carga por uno de sus extremos que termina en forma de embudo y cuya punta opuesta, es coronada por una pequeña esfera de vidrio abierta en su parte superior con una escotadura circular de 4 mm. de diámetro. Un conductor de platino que termina en una esferita del mismo metal, llega por el interior del tubo al ensanchamiento superior de manera que sobre él quede una pequeña capa líquida.

El electrodo superior se coloca frente a la superficie libre del líquido y ha sido construido en Cadmio terminando su extremo en forma cónica.

Con una adecuada regulación de la chispa esta salta a través del líquido sin hacerlo crepitar y se obtienen las líneas de los elementos disueltos muy intensas con respecto a las propias del Cadmio.

El segundo de los modelos construidos por *Gerlach* es un trozo de hierro cilíndrico de 5 cm. de diámetro y 5 cm. de altura sostenido por un soporte, que simultáneamente sirve de conductor y todo colocado dentro de un embudo de vidrio que se llena con hielo.

En la parte superior del electrodo de hierro, una profunda cavidad permite colocar un recipiente de platino donde se deposita la muestra líquida que se desea analizar.

El electrodo superior es metálico, grueso y corto y se coloca un poco descentrado frente al menisco del líquido para que

la lente condensadora recoja toda la luz del arco de llama.

Con este electrodo su autor registró, analizando orina, la línea 2537 A° última del mercurio, en una solución de 10^{-4} % de concentración, exponiendo tres minutos y utilizando el espectrógrafo grande Steinheil con óptica de cuarzo.

Lundengardh, ha construido un dispositivo, modificando modelos anteriores, especialmente diseñado para el estudio espectral de alcalinos y alcalinotérreos en solución. La figura 2 es un corte de este aparato.

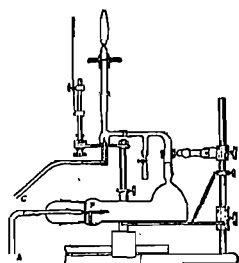


Fig. 2

La solución llega pulverizada al extremo de un mechero de vidrio con boquilla de cuarzo, donde arde la llama de gas acetileno. Con este aparato su autor ha realizado interesantes trabajos espectrales, especialmente en el dominio de la química agrícola.

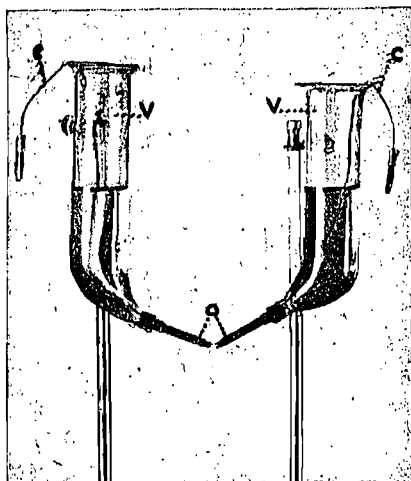


Fig. 3

Las figuras 3 y 4 son reproducciones fotográficas de los modelos de electrodos contruídos por nosotros, para el estudio espectral de soluciones.

En el primero de estos modelos (figura 3), de construcción muy sencilla, el derrame de líquido varía continuamente, mientras que en el segundo (figura 4) el derrame es uniforme y por esa causa el foco luminoso que produce el arco de llama es sumamente constante.

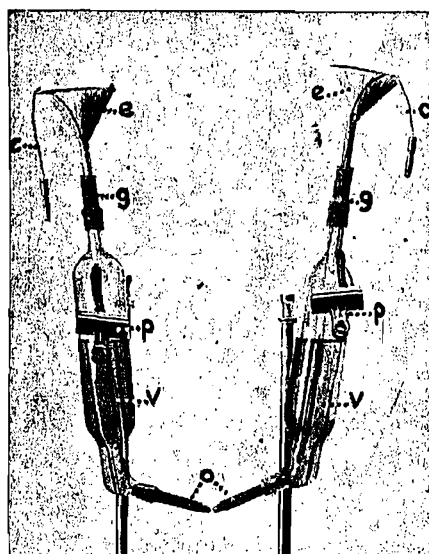


Fig. 4

En los dos modelos los recipientes *v* son tubos de vidrio pyrex de unos 3 cm. de diámetro y 15 cm. de longitud, que terminan en su parte inferior en conos esmerilados a los que se ajustan los electrodos *o*.

En el modelo de derrame constante, los embudos de carga *e* se fijan a las pipas por dos tubos de goma *g* y su largo cuello, por donde salen los conductores *c* al exterior, permite regular la velocidad de salida de la solución; la pinzas *p* ajustan dos tubitos de goma enchufados en salidas laterales de las pipas, que abiertas permiten cargarlas, un tubo de vidrio soldado normalmente al eje del vaso *v* sirve para fijar sólidamente el conjunto al brazo *p* del soporte (figura 6).

La figura 5 es un corte longitudinal de los terminales metálicos o. El porta electrodos *B* termina en cono para poderlo ajustar al vaso *v*. El electrodo *A* es de 5 mm. de diá-



Fig. 5

metro y 60 mm. de longitud, y ha sido rebajado y roscado con paso fino para poderlo fijar al soporte *B* de manera, que el líquido que se desliza por el espacio *E* moje el extremo del electrodo y caiga gota a gota. Al tornillo *R* se le ha limado una superficie plana que permite el paso del líquido.

El espacio *E* es de más o menos 0,5 mm., pero su tamaño no tiene mayor importancia, pues se puede regular la velocidad de salida del líquido levantando o bajando el embudo *e*. La tuerca *T* fija sólidamente el conjunto y es indispensable cuando se quiere mantener constante la distancia entre los electrodos, ya que los continuos levados con soluciones ácidas, desgastan al tornillo *R* y al paso de rosca del porta electro *B*.

Puede también utilizarse, cuando no interese la variación de la distancia entre los electrodos, un modelo más simple. En este modelo el electrodo *A* es cilíndrico y se desliza por el interior de la camisa *B* siendo retenido en posición por el conductor *c*, doblado sobre el borde de las pipas o del embudo.

Cuando se utilize el modelo de la figura 3 debe ajustarse con más cuidado la separación *E* o regular la caída del líquido con un poco de lana de vidrio colocada en la parte inferior del vaso *v*.

La velocidad de caída de la solución debe ser tal que el arco funcione muy regularmente lo que evita por completo que el líquido crepite y que se pierda una parte de él por ese motivo.

En estas condiciones el foco luminoso es de pequeño volumen, cuando se regula convenientemente la distancia entre las puntas de los electrodos. Esta distancia puede variar entre 0,5 y 2 mm., según la tensión que se use para producir el arco de llama y la intensidad que circule.

Bien regulado el dispositivo, puede funcionar continuamen-

te cualquier tiempo, salvo los pequeños intervalos necesarios para recargar las pipas.

El número de gotas que cae por minuto por cada electrodo varía entre 80 y 120 y el volumen total de solución que se derrama por hora es aproximadamente un litro.

§ 3. ELECTRODOS UTILIZADOS

Los electrodos empleados fueron de *Fe*, *Ag*, *Pt*, *Cu* o *Ni*, según conviniera, por la longitud de onda, de las líneas últimas de los elementos disueltos.

Los electrodos de hierro se utilizaron para obtener las placas patrones y de los otros citados, los más utilizados fueron los de cobre por ser fácil conseguir cobre relativamente puro, y tener este elemento un espectro poco complicado.

En algunos casos especiales hemos utilizado electrodos de carbón o grafito con porta electrodos *B* de platino.

Los electrodos de carbón o grafito, tienen el inconveniente de dar un fuerte espectro de fondo y, además de desgastarse mucho en el arco de llama, y sus impurezas son un inconveniente muchas veces insalvable.

Los espectros propios de los electrodos los hemos obtenido, en todos los casos, excitando con arco de llama y haciendo circular por las pipas agua tridestilada y estos espectros de fondo se utilizaron como espectro de comparación.

En la figura 6 se reproduce la copia fotográfica del soporte de electrodos diseñado para ajustar fácilmente el arco de llama. Sobre la cremallera *C*, está sólidamente fija la chapa metálica *m*, a la que se ha fresado paralelamente a su borde anterior una ranura por donde pueden correr las piezas *d*, que llevan soldados los soportes tubulares *b*, que pueden ser ajustados a la chapa *m* con tornillo de mariposa.

La distancia entre electrodos se hace moviendo las piezas *d* y luego el ajuste final con el tornillo de paso fino *o*.

Los brazos *p* tienen en su extremo un collarín elástico donde se fijan los tubos normalmente soldados a los cuerpos de las pipas, lo que permite inclinar los electrodos metálicos para que la solución moje sus extremos.

Para poder regular la altura de los electrodos y disponerlos

en un mismo plano los brazos *p* corren y giran en los soportes tubulares *b*.

El tornillo *t*, que actúa sobre el piñón de la cremallera, ajusta finamente en altura el arco de llama y los otros tornillos centran la imagen haciendo girar sobre su eje todo el soporte.

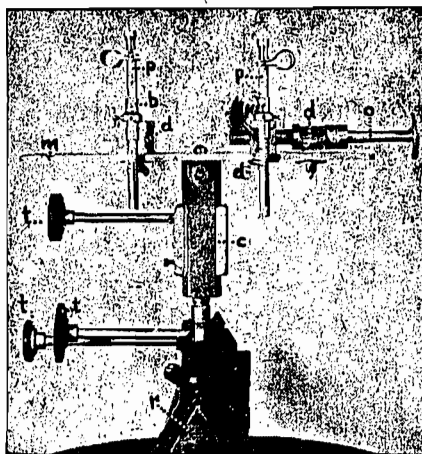


Fig. 6

§ 4. LAS SOLUCIONES

Las soluciones fueron preparadas casi siempre con elementos al estado de cloruros disueltos en agua tridestilada y los aparatos destiladores para obtenerla se construyen totalmente de vidrio pyrex, a los que se sometió previamente a continuados lavados con soluciones ácidas.

Los reactivos químicos utilizados para preparar las soluciones fueron estudiados por vía espectral antes de ser utilizados.

Para preparar las soluciones de muestras animales o vegetales, hemos destruido previamente, la materia orgánica ya sea utilizando el método químico o reduciendo la muestra inicial a cenizas.

En el primer caso se trata la muestra con ácido nítrico y perclórico, se la evapora a sequedad y el residuo se disuelve en agua.

En el segundo caso se reduce la muestra a carbón y se tratan las cenizas con solución de HCl , se evapora a sequedad y se disuelve en agua.

Cuando se utilice el método químico debe procederse con mucha cautela por el riesgo que significa el empleo del ácido perclórico.

§ 5. LOS ESPECTROGRAMAS Y LOS METODOS DE EXCITACION

Todos los espectrogramas que se publican han sido logrados con el espectrógrafo de Zeiss de tres prismas de vidrio y cámara de 84 cm. de distancia focal.

El método de excitación para muestras líquidas fué siempre el de arco de llama y cuando se estudiaron muestras orgánicas reducidas a cenizas, se utilizó el arco cortado de corriente continua.

El arco de llama lo obtuvimos conectando directamente los terminales del secundario del transformador a los electrodos, por cuyo motivo al producirse este, la tensión cae enormemente. Así, por ejemplo, para una distancia entre electrodos de más o menos 1,5 mm. con tensión en el secundario del transformador de 1200 V la tensión medida entre electrodos es aproximadamente 600 V.

Los dos transformadores utilizados fueron donados por la Compañía CADE al Instituto de Física. El primero es de 1,5 KVA con tensión de entrada 220 V y tensión en el circuito secundario de 4000 V. El otro transformador es 20 KVA para la misma tensión de entrada y ha sido construido con bobinas secundarias múltiples, de manera que según cómo se las conecte, puede dar por etapas iguales de 1500 V tensiones entre esta y 12000 V.

En el primario una resistencia conectada en serie permite regular la intensidad. Para el transformador de gran potencia ésta fué construida con alambres Kanthal, con 10 puntos de contacto y trabaja sumergida directamente en un recipiente de hierro por donde circula continuamente agua.

En adelante, para definir las características del arco de llama, daremos la tensión aproximada en el secundario del transformador en circuito abierto y la intensidad que circula por los electrodos funcionando el arco de llama.

Las placas utilizadas fueron generalmente las que se emplean para uso fotográfico común tipo H.P.3, fabricadas por Ilford, para la zona infrarroja hemos recurrido a placas especiales de Eastman Kodak.

Los negativos logrados, en todos los casos, son sumamente nítidos lo que no puede ser apreciado en las reproducciones que se publican.

En la figura 7 el espectrograma superior corresponde a una solución en agua de concentración 1 gramo por litro de cenizas de sangre humana; arco de llama 12000 Volts; $I=3$ Amp. $T=5$ m; placa *IL* de Eastman Kodak, electrodos de cobre.

El espectrograma inferior se registró utilizando arco cortado de corriente continua con una intensidad de 8 Amp. y utilizando 10 miligramos de la misma ceniza de sangre exponiendo hasta su consumo total, en un electrodo tubular fabricado con el mismo cobre que el empleado en el arco de llama.

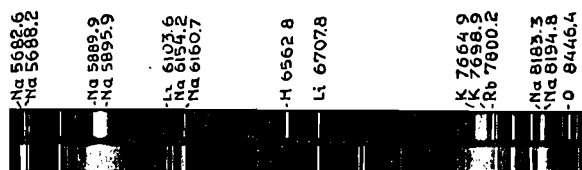


Fig. 7

En los dos espectrogramas aparecen nítidamente las líneas últimas de *Na*, *Li*, *K* y *Rb* y otras de menor intensidad de *Ca* y *Fe*.

Si comparamos los espectrogramas obtenidos con los dos métodos de excitación se puede observar que algunas líneas, que pueden ser reforzadas ampliamente aumentando la concentración de la solución, son menos intensas en el arco de llama pero que este no tiene el inconveniente del espectro de fondo en la zona infrarroja que no puede ser evitado en el espectrograma de arco cortado.

Por otra parte, conviene destacar que para obtener el espectrograma con arco cortado se gastaron totalmente los 10 miligramos de cenizas, que es la quinta parte de la cantidad contenida en los 50 centímetros cúbicos de solución que se utilizaron en el arco de llama y que con este volumen se pueden ob-

tener un número grande de registros sin variar sensiblemente la intensidad de las líneas, completando después de cada experiencia su volumen al inicial, para no variar la concentración de la muestra, por ser muy pequeño, como veremos luego, el consumo espectral.

La figura 8 es el espectrograma obtenido utilizando terminales de *Fe* puro de Hilger, circulando por ellos agua tri-distilada. Arco de llama 12000 V; $I=1,6$ A; $T=10$ s. Placa H.P.3.

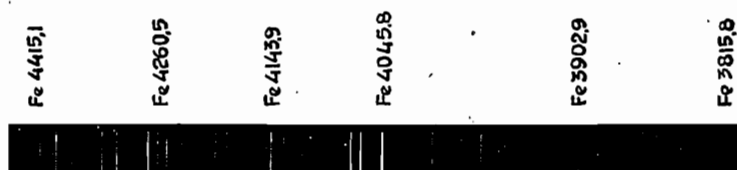


Fig. 8

En esta placa que hemos utilizado como patrón, el número de líneas nítidas y perfectamente medibles pasa de 200 y el negativo no tiene espectro de fondo.

La figura 9 es la reproducción de un espectrograma obtenido con una solución de cloruro de *Sr* y concentración 0,1 gramo por litro. Arco de llama 4000 V; $I=1,6$ A; $T=3$ m, placa H.P.3. Electrodo de *Pt*. Aparecen nítidamente como impurezas *Ba*, *Rb*, *Mg* y *Fe*.

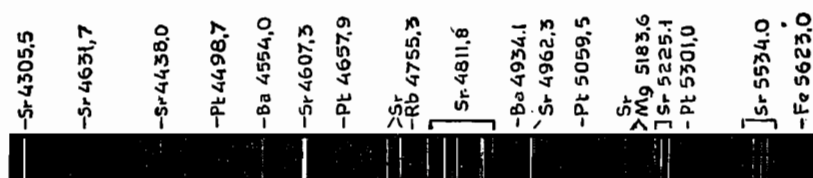


Fig. 9

De estos elementos no figura *Rb* como impureza en la tabla de análisis de la droga. Como la línea registrada fué la 4755 Å que es muy débil, para comprobar si realmente existía este elemento como impureza estudiamos la misma solución en la zona infrarroja donde están las líneas últimas de *Rb* y

comprobamos que efectivamente existe en la muestra estudiada de Sr como impureza *Rb*.

La figura 10 es una copia fotográfica del agua potable de la ciudad de La Plata. Arco de llama 4000 V; $I=1,6$ A; $T=3$ m. Placa H.P.3. Electrodo de *Pt*.

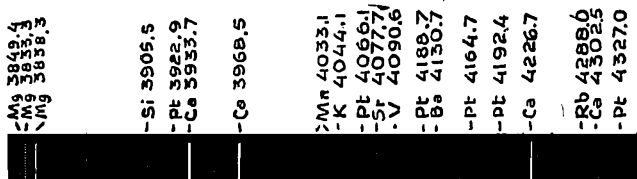


Fig. 10

Se destacan nítidamente las líneas correspondientes a *Mg*, *Ca*, *Mn*, *Si* y débiles las de *Rb* y *V*.

La figura 11 corresponde a un registro de dos espectrogramas obtenidos con ranura de contacto; para ambos; arco de llama de 6000 V; $I=6$ A; $T=5$ m. Placa de Eastman Kodak. Electrodo de cobre.

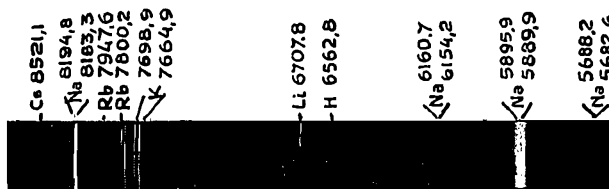


Fig. 11

El espectrograma superior corresponde a una solución de *CuNa* purísimo de concentración 1 gramo por litro. El espectrograma inferior corresponde a la misma solución a la que se agregó 0,2 miligramos por litro de cloruros de *Li*, *Rb* y *Cs*.

Las líneas últimas de estos tres elementos, aparecen entonces nítidamente y por comparación se verifica que el *CuNa* purísimo no tiene *Cs* pero sí vestigios de *Li* y *Rb* que no se indican en la tabla de certificación de impurezas.

Se estudiaron en las mismas condiciones anteriores 6 muestras de *CuNa* purísimo de las cuales, en 4 aparecieron como impureza *Li* y *Rb* y en ninguna de ellas *Cs*.

La figura 12 corresponde a 4 espectrogramas de solución con cloruros de *Ba*, *Sr* y *Tl*. Arco de llama 12000 V; $I=3$ A; $T=5$ m. Placa H.P.3. Electrodo de cobre.

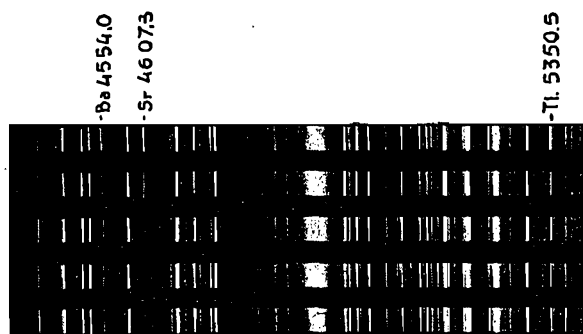


Fig. 12

La concentración para los tres elementos es la misma: 0,001; 0,01; 0,1 y 1 miligramos por litro. Con estas soluciones se han obtenido, exponiendo primero la solución de menor concentración y sucesivamente las otras, los cuatro registros espectrográficos superiores. El último de los espectrogramas corresponde al agua tridestilada que se utilizó para hacer la solución y su registro hecho en las mismas condiciones que los otros, certifica en esta la ausencia de los tres elementos estudiados.

La figura 13 es la reproducción de los espectrogramas de las mismas soluciones obtenidos en dos trozos de la misma placa virgen, tipo *IN* de Eastman Kodak para zona infrarroja.

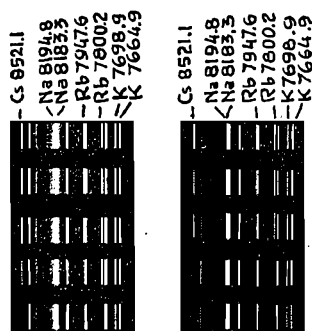


Fig. 13

Para las dos placas la solución es de cloruro de *Cs* y *Rb* disueltos en agua tridestilada de concentraciones 4, 3, 2, 1 y 0,1 miligramos por litro. Con estas cinco soluciones se han obtenido los cinco registros que fueron hechos comenzando por la solución de menor concentración para no tener que lavar los electrodos metálicos entre una y otra exposición.

En todos los espectrogramas se expuso el mismo tiempo 3m; en todos se excitó con arco de llama con dos transformadores de la misma tensión en el secundario para circuito abierto, pero de distinta potencia; uno de ellos de 2 KVA y el otro de 15 KVA.

El resultado, que por cierto tiene solamente valor cualitativo, es que la sensibilidad usando el transformador de pequeña potencia, es 10 veces menor que la sensibilidad usando el transformador de gran potencia.

El cuadro siguiente da los valores de la sensibilidad para los elementos estudiados por nosotros disueltos en agua tridestilada, utilizando el espectrógrafo Zeiss de tres prismas de vidrio, excitando con arco de llama de 12000 V y siendo 3 A la intensidad.

<i>Elemento</i>	<i>En Å° registrada</i>	<i>Tiempo t en minutos</i>	<i>Sensibilidad</i>
Ba	4554.0	5	10 ⁻⁶
Ca	3933.7	3	10 ⁻¹¹
Cr	4254.4	8	10 ⁻⁶
Cs	8521.1	10	10 ⁻⁶
K	7664.9	10	10 ⁻¹⁰
Li	6707.8	10	10 ⁻¹¹
Mn	4030.7	8	10 ⁻⁶
Rb	7800.2	10	10 ⁻⁶
Sr	4607.3	5	10 ⁻⁶
Tl	5350.5	5	10 ⁻⁶
V.	4379.2	8	10 ⁻⁷

§ 6. CONSUMO ESPECTRAL

Definimos como consumo espectral, la cantidad de elemento que estando en una muestra dada con cierta concentración, se pierde para obtener el registro fotográfico de su línea úl-

tima, utilizando cierta placa con un espectrógrafo dado y con determinados métodos de excitación.

En nuestro caso para *Li* disuelto en agua con una concentración de 2 miligramos por litro el consumo espectral sería: la cantidad de *Li* que se pierde para obtener el registro fotográfico de la línea 6707 Å° utilizando placa H.P.3 en el espectrógrafo Zeiss de tres prismas iluminado con arco de llama generado por un transformador de 20 KVA, siendo la tensión en circuito abierto de 12000 V, la tensión medida entre punto de los electros 600 V, la intensidad de 3 A y utilizando electrodos de cobre.

Hemos realizado la experiencia en las condiciones dadas como ejemplo.

Por dos agujeros diametrales hechos en un balón de vidrio pyrex de 8 cm. de diámetro penetran los electrodos de cobre, entre los que se produce el arco de llama. Los vapores desprendidos escapan por un tubo soldado en la parte superior del balón y se condensa en un recipiente enfriado con mezcla frigorífica; el agua de derrame se recoge por una salida inferior después de enfriarse con hielo.

El volumen inicial de solución utilizado fué de 250 cm³ y el arco de llama funcionó sin interrumpirse 90 m., tiempo en el que se pudieron haber obtenido 2700 registros fotográficos de la línea 6707 Å°.

Al terminar la experiencia se recogieron 75 cm³ de vapor condensado, 165 cm³ de solución residual y se perdieron 10 cm³ por fuga de vapores y otras pequeñas pérdidas.

Estudiado el vapor condensado puede asegurarse, que la cantidad de *Li* arrastrada por el vapor es muy pequeña, que en la solución de derrame completando su volumen al inicial, varía muy poco la concentración en *Li* con respecto a la solución virgen y que el consumo espectral expresado en miligramos es inferior a 10⁻⁶.

B I B L I O G R A F I A

HARTLEY W. N. - 1882. F. Chem. Soc. 41 y 90.

— — 1884. Phil. Trans. 175,50.

POLLOK J. H. - 1907. Sci. Prac. Roy. - Dublin Soc. 11, 184-216.

POLLOK J. H. - LEONARD A. - 1907. Sci. Prac. Roy Soc. 11, 217-236. - 1907.

- DE GRAMONT A. - 1907. *Compte Rendu* 144, 1101-1104 y 145, v170-1173.
- B. A. LOMAQUIN. - "Neue Vorrichtung zur Erzeugung des Funkenspektrums von Lösungen" *Zeitschrift für Physik*, 40, 548, 1926.
- LOEWE F. - *Optische Messungen des Chemikers und Mediziners*. Dresden y Leipzig. 1939 (tercera edición).
- FR. GROMANN. - "Ein Beitrag zur quantitativen Spektralanalyse von Lösungen". *ZS. anorg. u. allg. Chemie*, 180, 257-274. 1929.
- H. LUNDEGARDH. - "Die quantitative Spektralanalyse der Elemente, 1 Jena: G. Fischer. 1929.
- H. LUCAS. - "Zur quantitativen Spektralanalyse von Alkalien" *Physikalische Zeitschrift*. 31, 803-805. 1930.
- F. TWYMAN and C. S. HITCHEN. - "Stimulation of Metals in Solutions by Means of their Arc Spectra". *Proc. Roy. Soc. A* 133, 72-92. 1931.
- W. GERLACH. - *Die Chemische Emissionsspektralanalyse*. Leipzig. Tomo I. en colaboración con E. SCHWEITZER. Año 1930, y tomo II. en colaboración con W. GERLACH. Año 1933.
- O. S. DUFFENDACK, F. H. WILEY and J. S. OWENS. - "Quantitative Analysis of Solutions by Spectrographic Means". *Ind. Engng. Chem. Analyt. Edit.* 7. 410-413. 1935.
- O. S. DUFFENDACK and K. B. THOMSON. - "Developments in the Quantitative Analysis of Solutions by Spectroscopic Means". *Proc. Amer. Soc. Testing Materials*. 36, 310. Año 1936.
- W. D. TRADWELL and R. WALTI. - "Helv. Chim. Acta, 23, 1446-56, 1940. "Zur Kenntnis der quantitativen Funkenspektrographie von Lösungen".
- LIVIO LIGABUE. - "Elektrische Bogenentladung mit einer Flüssigkeitselektrode in der Umgebung des Sättigungsdampfes. *Atti. Soc. Naturalisti Matematici Modena*, 72 (6,20) 197-99. 1941.
- F. TWYMAN, F. R. S. - *The spectrochemical analysis of metal and Alloys*. Chemical Publishing Co Inc. - Brooklyn. N. Y. 1941.

NOTA DE LA DIRECCION

El trabajo, destinado a este número, de A. González Domínguez, «Sobre algunos puntos de la teoría matemática de los circuitos lineales», no ha podido ser incluido, en virtud de haber llegado los originales cuando el número ya estaba preparado. Este trabajo se publicará en próximas entregas de la Revista.

PUBLICACIONES DE LA U. M. A.

Vol. I (1936-1937). Vol. II (1938-1939). Vol. VII (1940-1941). Vol. VIII (1942). Vol. IX (1943). Vol. X (1944-1945). Vol. XI (1945-1946). Vol. XII (1946-1947). Vol. XIII (1948)

Notas y memorias de J. BABINI, M. BALANZAT, J. BALSEIRO, J. BARRAL SOUTO, A. BATTIG, G. BECK, C. BIGGERI, G. BIRKHOFF, U. BRÖGGI, C. A. BULA, M. BUNGE, H. E. CALCAGNO, F. CERNUSCHI, A. W. CONWAY, E. COROMINAS, C. CRESPO, E. A. DE CESARE, J. DE CICCO, J. A. DEL PERAL, M. FASSINA, J. FAVET, E. FERRARI, V. y A. FRAILLE, Y. FRENKEL, R. FRUCHT, E. GASPARI, E. GAVIOLA, A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ, B. GROSS, A. J. GUARNIERI, H. HADWIGER, J. E. HERRERA, E. KASNER, G. KNIE, N. KRIVÓSHIN, T. LEVI-CIVITA, W. LUYTEN, W. MÄCHLER, J. L. MASSERA, L. NACHBIN, G. PALAMÀ, M. PETROVICH, M. M. PEIXOTTO, A. PETRACCA, P. A. PIZÀ, E. R. RAIMONDI, J. J. REBELLA, J. REY PASTOR, S. RÍOS, P. ROSSELL SOLER, M. SADOSKY, R. SAN JUAN, L. A. SANTALÓ, M. SCHÖNBERG, S. SISANOV, K. SITTE, A. TERRACINI, P. THUILLÉN, F. TORANZOS, J. V. USPENSKY, G. VALIRON, E. VIDAL ABASCAL, G. WATAGHIN, A. WINTNER, J. WÜRSCHMIDT.

Informes de las reuniones de la Asociación Física Argentina.

Soluciones de temas propuestos. Bibliografía, Crónica, etc.

Vol. III (1938-1939). Vol. IV (1939). Vol. V (1940). Vol. VI (1940-1942).

Fascículos separados

Nº 1. GINO LORIA. *Le Matematiche in Spagna e in Argentina*. — Nº 2. A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre las series de funciones de Hermito*. — Nº 3. MICHEL PETROVICH. *Remarques arithmétiques sur une équation différentielle du premier ordre*. — Nº 4. A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Una nueva demostración del teorema límite del Cálculo de Probabilidades. Condiciones necesarias y suficientes para que una función sea integral de Laplace*. — Nº 5. NIKOLA OBRÉCHKOFF. *Sur la sommation absolue par la transformation d'Euler des séries divergentes*. — Nº 6. RICARDO SAN JUAN. *Derivación e integración de series asintóticas*. — Nº 7. Resolución adoptada por la U. M. A. en la cuestión promovida por el Sr. Carlos Biggeri. — Nº 8. F. AMODEO. *Origen y desarrollo de la Geometría Proyectiva*. — Nº 9. CLOTILDE A. BULA. *Teoría y cálculo de los momentos dobles*. — Nº 10. CLOTILDE A. BULA. *Cálculo de superficies de frecuencia*. — Nº 11. R. FRUCHT. *Zur Geometria auf einer Fläche mit indefiniter Metrik (Sobre la Geometría de una superficie con métrica indefinida)*. — Nº 12. A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre una memoria del Prof. J. C. Vignaux*. — Nº 13. E. TORANZOS. *Sobre las singularidades de las curvas de Jordan*. — Nº 14. M. BALANZAT. *Fórmulas integrales de la intersección de conjuntos*. — Nº 15. G. KNIE. *El problema de varios electrones en la mecánica cuantista*. — Nº 16. A. TERRACINI. *Sobre la existencia de superficies cuyas líneas principales son dadas*. — Nº 17. L. A. SANTALÓ. *Valor medio del número de partes en que una figura convexa es dividida por n rectas arbitrarias*. — Nº 18. A. WINTNER. *On the iteration of distribution functions in the calculus of probability (Sobre la iteración de funciones de distribución en el cálculo de probabilidades)*. — Nº 19. E. FERRARI. *Sobre la paradoja de Bertrand*. — Nº 20. J. BABINI. *Sobre algunas propiedades de las derivadas y ciertas primitivas de los polinomios de Legendre*. — Nº 21. R. SAN JUAN. *Un algoritmo de sumación de series divergentes*. — Nº 22. A. TERRACINI. *Sobre algunos lugares geométricos*. — Nº 23. V. y A. FRAILLE y C. CRESPO. *El lugar geométrico y lugares de puntos áreas en el plano*. — Nº 24. R. FRUCHT. *Coronas de grupos y sus subgrupos, con una aplicación a los determinantes*. — Nº 25. E. R. RAIMONDI. *Un problema de probabilidades geométricas sobre los conjuntos de triángulos*.

En 1942 la U. M. A. ha iniciado la publicación de una nueva serie de "Memorias y monografías" de las que han aparecido hasta ahora las siguientes:

Vol. I; Nº 1. — GUILLERMO KNIE, *Mecánica ondulatoria en el espacio curvo*. Nº 2. — GUIDO BECK, *El espacio físico*. Nº 3. — JULIO REY PASTOR, *Integrales parciales de las funciones de dos variables en intervalo infinito*. Nº 4. — JULIO REY PASTOR, *Los últimos teoremas geométricos de Poincaré y sus aplicaciones. Homenaje póstumo al Prof. G. D. BIRKHOFF*.

Vol. II; Nº 1. — YANNY FRENKEL, *Criterios de bicompacidad y de H-completitud de un espacio topológico accesible de Frechet-Riesz*. Nº 2. — GEORGES VALIRON, *Fonctions entières*.

Además han aparecido tres cuadernos de *Miscelánea matemática*

S U M A R I O

HOMENAJE A RICARDO GANS EN SU 70º ANIVERSARIO

	PÁG.
Introducción, por E. Gaviola	101
Aspectos históricos de la supraconductividad, por M. v. Laue	109
Propagación de ondas electromagnéticas en la guía axial excéntrica, por J. A. Balseiro	118
Un resumen sobre los núcleos atómicos pesados, por W. Seelmann- Eggebert	125
Remanencia, factor de desmagnetización y fuerza coercitiva a la tem- peratura de Curie, por W. Gerlach y J. Kranz	135
Relaciones entre señal y espectro, por K. Fränzl	135
Cálculo aproximado de la función radial de distribución, por A. E. Domínguez	156
Refracción atmosférica, por J. Wüschmidt	163
Teoría de las aberraciones geométricas de los sistemas ópticos cen- trados, por R. Platzek	182
Espectroscopía de soluciones, por H. Isnardi	197

UNION MATEMATICA ARGENTINA

MIEMBROS HONORARIOS

Tullio Levi-Civita (†); Beppo Levi; Alejandro Terracini; George D. Birkhoff (†); Marshall H. Stone; Georges Valiron; Antoni Zygmund.

REPRESENTANTES EN EL EXTRANJERO

Ing. Rafael Laguardia (Uruguay). Ing. José Luis Massera (Uruguay).
Dr. Godofredo García (Perú). Dr. Leopoldo Nachbin (Brasil). Dr. Roberto Frucht (Chile). Dr. Peter Thullen (Ecuador). Dr. Mario González (Cuba).
Dr. Alfonso Napolés Gandara (México). Pedro Puig (España). Georges Valiron (Francia). Alejandro Terracini (Italia).

Contribuyen especialmente al sostenimiento de las publicaciones de
la UNION MATEMATICA ARGENTINA los siguientes

MIEMBROS PROTECTORES

COMPANÍA INDUSTRIAL DEL NORTE DE SANTA FE. INGENIO AZUCARERO "ARNO"
(Villa Ocampo. F. C. S. F.). — JULIO REY PASTOR (Buenos Aires). — EMILIA
J. DE DOMÍNGUEZ (Buenos Aires). — TRICERRI HNOS. (Rosario). — CLOTIL-
DE A. BULA (Rosario). — ELBA R. RAIMONDI (Buenos Aires). — FERNAN-
DO L. GASPAS (Rosario).