

REVISTA
DE LA
UNION MATEMATICA ARGENTINA
(MIEMBRO DEL PATRONATO DE LA MATHEMATICAL REVIEWS)
ORGANO DE LA
ASOCIACION FISICA ARGENTINA

Director: José Bahini

Redactores de la U. M. A.: Julio Rey Pastor, Luis A. Santaló, Mischa Cotlar

Redactores de la A. F. A.: Enrique Gaviola, Richard Gans, Guido Beck



MIEMBROS TITULARES DE LA U. M. A.

J. BABINI (Santa Fe) (fundador). — M. BALANZAT (San Luis). — J. BARRAL Souto (B. Aires) (fundador). — C. A. BULA (Rosario) (fundador). — E. COROMINAS (Mendoza). — A. DURAÑONA Y VEDIA (B. Aires). — FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES (B. Aires) (fundador). — FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS (Rosario) (fundador). — FACULTAD DE QUÍMICA INDUSTRIAL (Santa Fe) (fundador). — A. FARENGO DEL CORRO (B. Aires). — Y. FRENKEL (B. Aires). — E. GASPAR (Rosario) (fundador). — F. L. GASPAR (Rosario) (fundador). — J. GIANNONE (Rosario) (fundador). — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ (Buenos Aires) (fundador). — J. GONZÁLEZ GALÉ (Buenos Aires) (fundador). — W. S. HILL (Montevideo) (fundador). — OBSERVATORIO ASTRONÓMICO (La Plata). — A. LASCURAIN (Buenos Aires). — J. OLGUIN (Rosario) (fundador). — D. PAPP (Buenos Aires). — P. PI CALLEJA (San Juan). — E. R. RAIMONDI (Buenos Aires) (fundador). — J. E. REYNAL (Buenos Aires). — J. REY PASTOR (Buenos Aires) (fundador). — A. E. SAGASTUME BERRA (La Plata). — E. L. SAMATÁN (Buenos Aires) (fundador). — J. SORTHEIX (Tucumán) (fundador). — D. T. A. DE SPELUZZI (Buenos Aires) (fundador). — F. TORANZOS (Mendoza). — C. A. TREJO (La Plata). — J. C. VIGNAUX (Buenos Aires). — E. H. ZARANTONELLO (La Plata).



BUENOS AIRES

1951

UNION MATEMATICA ARGENTINA

La U. M. A. reconoce cuatro categorías de miembros: honorarios, protectores, titulares y adherentes. El miembro protector paga una cuota anual de 100 \$, por lo menos; el titular una cuota mensual de 5 \$ o anual de 50 \$; y el adherente una cuota anual de 10 \$. Los pagos deberán efectuarse por cheque, giro u otro medio libre de gastos, a la orden de la Tesorera, Prof. Clotilde A. Bula, Rioja 3681. Olivos F.C.M.

Por ser la U. M. A. miembro del patronato de la *Mathematical Reviews* (sponsoring member), los socios de la U. M. A. tienen derecho a suscribirse a esa importante revista de bibliografía y crítica con 50 % de rebaja sobre el precio de suscripción que es de 20 dólares por año. Los socios de la U.M.A. pagarán por tanto sólo 10 dólares por año.

Los autores de trabajos reciben gratuitamente una tirada aparte de 50 ejemplares. Las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

JUNTA DIRECTIVA

Presidente, Julio Rey Pastor, Yerbal 898, Buenos Aires.

Vicepresidentes, César A. Trejo, Félix E. Herrera. Secretario general, Máximo Valentinuzzi. Secretarios locales, O. A. Varsavsky (Bs. Aires), R. A. Ricabarra (La Plata), P. L. Checchi (Córdoba), E. Gaspar (Rosario), S. Fernández Long (Bahía Blanca), I. C. Guglielmone (Tucumán), S. Sispánov (San Juan), J. de Dios Olivieri (Santa Fe), M. Balanzat (San Luis), F. Toranzos (Mendoza). Tesorera, Clotilde A. Bula, Protesorera, María Josefina Erramuspe, Director de Publicaciones, J. Babiní.

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

La A. F. A., asociación privada de investigadores, profesores y estudiantes de física y de astronomía, tiene por objeto fomentar el progreso de la enseñanza de dichas materias por medio de reuniones científicas periódicas y de la publicación de trabajos originales.

Podrán ingresar como socios activos quienes hayan efectuado investigaciones originales; pueden ser socios adherentes los profesores que no cumplan este requisito; y socios estudiantes los que hayan aprobado el primer año de estudios de física o de astronomía.

Las solicitudes de ingreso, que deberán llevar la firma de dos socios activos o adherentes, habrán de dirigirse al secretario local que corresponda. Los socios activos abonarán una cuota mensual de 7 \$; los adherentes de 5 \$ y los estudiantes de 3 \$. En estas cuotas están incluidas las suscripciones al órgano de la A. F. A. y a la revista "Ciencia e Investigación".

Los manuscritos destinados a la publicación y la correspondencia administrativa deberán enviarse al delegado de la A. F. A., Guido Beck, Laprida 922, Córdoba.

Para la redacción y presentación de los trabajos se agradecerá se tengan en cuenta las *Normas generales* distribuidas con esta revista en 1945.

COMISION DIRECTIVA

Presidente: Ricardo Gans

Tesorera: Estrella Mazzoli de Mathov, San Juan 1931, Buenos Aires.

Secretarios locales: Ernesto E. Galloni, Buenos Aires, Yerbal 1763.

Marco A. Poggio, La Plata, calle 41 N° 764.

Guido Beck, Córdoba, Laprida 922.

Augusto Battig, Tucumán, 25 de Mayo 731.

Abonnement annuel à l'étranger: 4.00 dollars (Etats-Unis).

Prière d'adresser toute la correspondance scientifique et administrative à l'adresse ci-dessous:

UNION MATEMATICA ARGENTINA. — Instituto de Matemática. —

Presidente Luis Sáenz Peña 1465 - Buenos Aires (Argentina)

Adresser les échanges a: Casilla de Correos 2307. - Buenos Aires

REVISTA .
DE LA
UNION MATEMATICA ARGENTINA
(MIEMBRO DEL PATRONATO DE LA MATHEMATICAL REVIEWS)
ORGANO DE LA
ASOCIACION FISICA ARGENTINA

VOLUMEN XV
1951

BUENOS AIRES
1951

NOTAS SOBRE LAS DISTRIBUCIONES DE POISSON

por A. BLANC-LAPIERRE

Las *distribuciones de Poisson* son muy conocidas. Bastará, pues, recordar rápidamente una de las definiciones posibles. Se trata de una distribución aleatoria de puntos sobre el eje de las t [$-\alpha < t < +\alpha$]. Se parte de una función cierta $\rho(t)$ que será la *densidad* de la distribución. Se supone que se verifican las condiciones siguientes:

α) la probabilidad de que un punto de la distribución caiga entre t y $t + \Delta t$ es un infinitamente pequeño equivalente a $\rho \Delta t$;

β) la probabilidad de que más de un punto de la distribución caiga entre t y $t + \Delta t$ es un infinitamente pequeño de orden superior;

γ) si $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots$ son intervalos disjuntos, los números de puntos $N_1, N_2, \dots$ que caigan respectivamente en $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots$ son variables aleatorias independientes.

Se puede mostrar que si estas hipótesis se verifican, entonces el número N de puntos de la distribución que caen en un intervalo Δt es una variable aleatoria que satisface a la *ley de Poisson*, es decir, que la probabilidad de que N tome un valor m (entero) es

$$P(m) = \frac{(\alpha)^m e^{-\alpha}}{m!} \quad (1)$$

con

$$\alpha = \int_{t_1}^{t_2} \rho(\vartheta) d\vartheta. \quad (2)$$

Un caso particular muy importante es el que corresponde a $\rho(\vartheta) = \rho_0 = \text{constante}$ (distribución uniforme).

En general, cuando se trata de distribuciones de Poisson, se presta sobre todo atención al número de puntos que caen en un intervalo, dejando de lado el estudio de las propiedades estadísticas de las magnitudes de los intervalos que separan dos puntos suce-

sivos consecutivos. A pesar de eso, parece que la consideración de estos intervalos puede conducir a demostraciones muy sencillas (*).

I. *Teorema directo.* — Si se sabe que el principio de un intervalo está en t_1 , entonces la probabilidad condicional de que la extremidad de este intervalo caiga entre t_2 y $t_2 + dt_2$ es

$$f(t_1, t_2) dt_2$$

con

$$f(t_1, t_2) = e^{-\int_{t_1}^{t_2} \rho(t) dt} \rho(t_2). \quad (3)$$

La demostración es inmediata; la probabilidad buscada es la probabilidad de realización simultánea de los dos sucesos independientes siguientes:

1º. No existe ningún punto entre t_1 y t_2 ;

2º. Existe, por lo menos, un punto entre t_2 y $t_2 + dt_2$.

Más interesante es el teorema recíproco, puesto que da un método de introducción de las distribuciones de Poisson.

II. *Teorema recíproco.* — Sea una función $f(t_1, t_2)$ que supondremos acotada y de derivadas continuas en la región $t_2 \geq t_1$. Vamos a construir una distribución de puntos sobre la parte positiva del eje de las t .

l_1 es una variable aleatoria de densidad de probabilidad $f[0, l_1]$;

l_2 es una variable aleatoria cuya densidad de probabilidad condicional, cuando el valor l_1 es conocido, es $f[l_1, l_2]$;

l_3 es una variable aleatoria cuya densidad de probabilidad condicional, cuando se conocen el valor de l_1 y el valor de l_2 , es $f[l_1 + l_2, l_3]$, ..., etc.

Estas definiciones suministran un mecanismo de pruebas sucesivas que permite definir la sucesión $l_1, l_2, l_3, \dots$. A esta sucesión asociemos la distribución de los puntos de abscisas $t_0, l_1, t_2, \dots$ iguales a

(*) La idea de la demostración del teorema recíproco que sigue me vino después de interesantes conversaciones mantenidas con el Doctor S. Selzer.

$$t_0 = 0$$

$$t_1 = l_1$$

$$t_2 = l_1 + l_2$$

$$t_3 = l_1 + l_2 + l_3$$

$$\dots\dots\dots$$

$$t_n = l_1 + l_2 + l_3 + \dots l_n.$$

Teorema. — Sea ϑ un número arbitrario positivo. Si, en la distribución precedente hay independencia estadística entre el campo $t > \vartheta$ y el campo $0 \leq t \leq \vartheta$, entonces esta distribución es una distribución de Poisson.

Para demostrarlo vamos a probar que la función f tiene, bajo la condición impuesta, la forma (3).

1º. La probabilidad de que exista por lo menos un punto entre ϑ y $\vartheta + \Delta\vartheta$ es un infinitamente pequeño equivalente a $f(\vartheta, \vartheta) \Delta\vartheta$. En efecto, usando la propiedad de independencia, esta probabilidad puede calcularse suponiendo que existe un punto en ϑ .

2º. Calculemos de dos maneras la probabilidad de que el primer punto de la distribución, de abscisa superior a x , caiga entre y e $y + \Delta y$ [$y > x$].

α) En virtud de la admitida independencia se puede suponer que existe un punto en x sin modificar las probabilidades relativas a acontecimientos futuros con respecto a x : entonces la probabilidad buscada es

$$f[x, y] \Delta y.$$

β) Las posibilidades pueden clasificarse en categorías disjuntas de la manera siguiente. Sea ϑ la abscisa del punto de la distribución de abscisa inmediatamente inferior a y (este punto siempre existe, puesto que $t_0 = 0$ es un punto de la distribución). Si Δt_1 y Δt_2 son dos intervalos disjuntos, ϑ no puede pertenecer simultáneamente a ambos y , por eso, la clasificación de las pruebas según el valor de ϑ conduce a una clasificación en categorías disjuntas. Por otra parte, decir que ϑ pertenece a un intervalo $\vartheta_0, \vartheta_0 + d\vartheta$, es decir

1º. que, por lo menos, hay un punto en este intervalo (la probabilidad de esto es $f[\vartheta_0, \vartheta_0] d\vartheta$);

2º. Que el intervalo que principia entre ϑ_0 y $\vartheta_0 + d\vartheta$ tiene su extremidad entre y e $y + dy$, (probabilidad $f[\vartheta_0, y] \Delta y$). No se debe olvidar el caso $\vartheta = t_0 = 0$, que tiene una probabilidad $f[0, y] \Delta y$. Sumando todas las posibilidades se halla una probabilidad igual a

$$\Delta y_0 \int_0^x f[\vartheta, y] f(\vartheta, \vartheta) d\vartheta + f(0, y).$$

Igualando las dos expresiones de la misma probabilidad resulta:

$$f[x, y] = \int_0^x f[\vartheta, y] f(\vartheta, \vartheta) d\vartheta + f(0, y). \quad (4)$$

Esta expresión es una identidad en x [$x \leq y$].

Derivando con respecto a x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f(x, x) f(x, y). \quad (5)$$

Se ve que la solución de esta ecuación depende de una función ρ arbitraria de una variable y se escribe

$$\hat{f}(x, y) = \rho(y) e^{-\int_x^y \rho(u) du}. \quad (6)$$

Esta expresión es la misma que (3), con lo cual queda demostrado el teorema.

ASOCIACION FISICA ARGENTINA.

DECIMOCUARTA REUNION

Celebrada en el Instituto de Física de La Plata los días 22 y 23 de setiembre de 1949 con las presidencias de los Dres. Ricardo Gans y José Würschmidt, el Ing. Ernesto E. Galloni y los Dres. Gans y Platzek sucesivamente.

CRONICA

El Instituto de Física de La Plata fué el escenario de la reunión de primavera de 1949. Dos días repletos de sesiones de comunicaciones originales, conferencias, informes, reuniones de C. D., asamblea y sesiones culinarias dejaron a la abundante concurrencia cansada, pero satisfecha. Las enfermedades infantiles de la física y la astrofísica han sido, en buena parte, superadas, apareciendo síntomas de sano crecimiento. Hemos visto un buen número de caras nuevas incorporadas a la ciencia argentina: algunas de hombres ya formados en latitudes de otro signo que nos traen su valiosa colaboración, otras de jóvenes de nuestras universidades que principian a producir.

En la sesión inaugural del 22 el profesor Ricardo Gans pronunció una conferencia magistral sobre magnetismo, ilustrada por un buen número de demostraciones experimentales. A continuación efectuó una demostración de su nuevo estroboscopio, asistido por el Dr. Guillermo Bibl.

Al comienzo de la sesión de la tarde el profesor Beppo Levi nos brindó una medulosa y amena conferencia sobre la historia del principio de inercia en la época de Galileo y su relación con los conceptos modernos de la teoría de la relatividad.

De las 20 comunicaciones originales, 5 provenían del Instituto de Física de Buenos Aires, 4 del Instituto de Física de La Plata, 4 del Instituto de Matemáticas de Buenos Aires, 3 del Observatorio de La Plata, 3 del Observatorio de Córdoba y 1 de la Agrupación de Estudiantes de Física de La Plata. La

curva de distribución es satisfactoria; el nivel científico, en general, parejo y aceptable. Los trabajos de astrofísica fueron suficientes para llenar la sesión de comunicaciones del viernes 23 a la mañana. Pero no todo fué satisfactorio: la producción en física experimental fué insuficiente, de modo absoluto y de modo relativo: a 10 comunicaciones de física teórica se enfrentaron únicamente 3 de física experimental. Las 3, del laboratorio de rayos X de Galloni en Buenos Aires. ¿Qué hacen los otros laboratorios con sus valiosas instalaciones destinadas a física experimental? No tenemos aún un exceso de físicos teóricos y matemáticos, pero tenemos un defecto de físicos experimentales. El número de estos últimos debería ser varias veces mayor que el de los primeros, para un crecimiento armonioso. Conviene que los directores de institutos orienten un mayor número de jóvenes estudiantes hacia los trabajos experimentales.

Los informes del doctor Antonio E. Rodríguez, del Instituto de Física de La Plata, sobre la teoría general de los líquidos de Born y Green, y del Dr. Kurt Fränz, del Instituto Radiotécnico de Buenos Aires, sobre el ruido de fondo en receptores, fueron bien presentados y bien recibidos.

Como autoridades de la reunión fueron elegidos: presidente, Dr. Ricardo Gans; vicepresidentes, Dr. José Würschmidt, Ing. Ernesto E. Galloni y Dr. Ricardo Platzeck; secretario, Sr. Marco A. Poggio y taquígrafo, Dr. José Westerkamp.

La Asamblea resolvió someter al voto postal de los socios:

1. - Agregar a la C. D. un Director de Publicaciones;
2. - Aumentar las cuotas a 3, 5 y 7 pesos mensuales para socios estudiantes, adherentes y activos, autorizando el pago por adelantado con un descuento de $1/12$;
3. - Fijar \$ 100 como cuota anual mínima para socios protectores (Art. 7);
4. - Autorizar a la C. D. para aumentar nuevamente las cuotas, si fuera necesario.

La C. D. resolvió: 1) cobrar a los autores por las tiradas aparte de los artículos de la Revista una suma razonable, cuyo

pago se espera sea hecho, en la mayoría de los casos, por las instituciones en que trabajan; y 2) autorizar la publicación en la Revista de trabajos redactados en otros idiomas, debiendo el resumen estar en español.

Una brillante cena de despedida en el Jockey Club de La Plata y una no menos brillante tormenta de verano en primavera cerraron dignamente la décimocuarta reunión.

E. Gaviola.

INFORMES

RICARDO GANS (Instituto de Física, La Plata): *Sobre el magnetismo* (con demostraciones experimentales).

RICARDO GANS y GUILLERMO BIBL (Instituto de Física, La Plata): *Sobre estroboscopios*.

BEPPLO LEVI (Universidad del Litoral): *Sobre la historia del principio de inercia*.

EMILIO ROXIN (Instituto de Física, Buenos Aires): *El ultrasonido, su obtención y estudio*.

ANTONIO E. RODRÍGUEZ (Instituto de Física, La Plata): *La teoría cinética general de los líquidos, de Born y Green*.

KURT FRÄNZ (Instituto Radiotécnico de la Universidad de Buenos Aires): *Sobre el ruido de fondo en los receptores*.

RESUMENES DE LAS COMUNICACIONES

1. ALBERTO GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ (Instituto de Matemática, Buenos Aires): *Criterios de estabilidad para circuitos lineales*.

Se dan criterios de estabilidad, del tipo del de Nyquist, para circuitos con constantes distribuidas. La demostración se basa en el teorema según el cual la función:

$$G(p) = \frac{f(p)}{1-f(p)}, \quad p = x + iy$$

es la integral de Laplace de una función sumable si $f(p)$ goza de igual propiedad, y es además: $f(p) \neq 1$ para $x \geq 0$.

2. RICARDO GANS (Instituto de Física, La Plata): *Antena de cuadro circular*.

Gracias al alto grado de simetría del círculo el comporta-

miento de una antena de cuadro circular es particularmente sencillo. Para la intensidad de corriente vale

$$I = E_0 \sum_n \frac{e_n \cos n\varphi + f_n \sin n\varphi}{R_n + L_n \omega i - \frac{n^2 i}{r^2 C_n \omega}}$$

siendo las e_n y f_n los coeficientes de Fourier de la onda incidente E_0 , su amplitud, es decir, existen resistencias R_n , self-inducción L_n y capacidad C_n , todas por unidad de longitud, pero son funciones de n y de $\frac{2\pi r}{\lambda}$ (r radio de la antena, λ longitud de onda).

3. MANUEL BEMPORAD (Instituto de Física, La Plata): *La impedancia de antenas rectilíneas.*

Partiendo de la ecuación de Hallén, se obtiene la distribución de la corriente en una antena rectilínea de longitud $2l$ mediante un método sugerido por el Profesor Gans, basado en un desarrollo en serie de Fourier de $I(z)$. De esta manera es posible calcular la corriente en cualquier aproximación, sin que se complique mucho el aparato matemático. Conociendo la corriente en el punto de alimentación y el voltaje, la impedancia se obtiene de inmediato. Como ejemplo se ha calculado numéricamente la impedancia de una antena en tres aproximaciones y comparado los resultados con los de Hallén.

4. CECILIA MOSSIN KOTIN (Instituto de Física, Buenos Aires): *Sobre el proceso radiativo de segundo orden.*

El elemento de matriz que, en la teoría de la radiación, corresponde a un proceso de segundo orden, consta, en la representación hipercompleja, de dos partes, de primera y de segunda clase, respectivamente. Estas dos partes corresponden a dos procesos distintos: al efecto de Compton y a la creación o aniquilación de un par por absorción o emisión de dos fotones. Evaluando así el elemento de matriz se obtienen de ellas las fórmulas de Klein-Nishina (efecto Compton) y la fórmula de Dirac (aniquilación de un par en el vacío).

5. GUIDO BECK. (Observatorio Astronómico, Córdoba): *Acercas de la variación de masa de una partícula elemental.*

La cuestión de la variación de masa de una partícula ele-

mental está estrechamente vinculada a la del defecto de masa de un sistema compuesto. Consideraciones elementales relativas al comportamiento de sistemas que contienen corrientes eléctricas nos enseñan, que el campo estático contribuye en $(1/8\pi)(E^2 - H^2)$ a la densidad invariante de la masa del sistema. Estas consideraciones, obtenidas a base de modelos clásicos, concuerdan con los resultados que fluyen, en el caso correspondiente, de la electrodinámica cuántica pero difieren esencialmente de la descripción habitual del campo estático clásico por su tensor de energía e impulso.

6. OSCAR A. VARSAVSKY (Instituto de Matemática, Buenos Aires):
Sobre la definición de vacío de Schwinger.

Se hace notar que la definición de vacío dada por Schwinger (Phys. Rev. 75-651-1949) se puede aplicar, *mutatis mutandis*, para definir un estado de máxima energía en el cual se observarían los mismos fenómenos de fluctuación que en el vacío. Se define además un «vacío matemático» en el cual no puede haber fluctuaciones.

7. OSCAR A. VARSAVSKY: *Una generalización de las ecuaciones de Schrödinger - Gordon y Dirac.*

Se trata de describir, mediante una ecuación del tipo de S-G un campo de partículas de espectro de masas dado $m(p_0^2 - p^2)$ en función del invariante lorentziano $p_0^2 - p^2$ del espacio energía-impulso. La ecuación que se obtiene es:

$$\square \psi(x_0, x) + \mu^{*2}(x_0, x) * \psi(x_0, x) = 0$$

donde el símbolo $*$ indica el producto de composición de las funciones; $\mu(x_0, x)$ es la transformada de Fourier (cuádruple) de m ; y $\mu^{*2} \equiv \mu * \mu$.

Se construye un lagrangiano del cual puede derivarse esta ecuación mediante las fórmulas de Euler, y a partir de éste un hamiltoniano que se cuantifica para el caso en que ψ es escalar y real llegándose a un potencial estático de intercambio entre partículas que emitan estos «mesones variables» del tipo de Yukawa, pero que no diverge necesariamente:

$$U(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i(x, p)} dp}{p^2 + m^2(0, p^2)}.$$

Por supuesto, en las reglas de conmutación la función $D(x_0, x)$ invariante debe ser reemplazada por otra D^* también invariante y que la contiene como caso particular:

$$D^*(x_0, x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(p, x)} \frac{\sin x_0 \sqrt{p^2 + m^2(0, p^2)}}{\sqrt{p^2 + m^2(0, p^2)}} dp.$$

Por último, la nueva ecuación de $S-G$ puede también factorizarse para obtener una ecuación de Dirac generalizada, que contiene en lugar del término $m \cdot \psi$ el término $\mu^* \psi$.

8. OSCAR A. VARSASVSKY: *Sobre el promedio de una sucesión infinita de mediciones iguales en mecánica cuántica.*

Se demuestra que una sucesión de mediciones de la misma magnitud física no se puede considerar como un proceso aleatorio estacionario; más aún, que no puede medirse la función de correlación para dos tiempos cualesquiera salvo casos triviales, contrariamente a lo expresado por Arnous-Massignon (*Compt. Rend.*, 226-318 y 557-1948).

Se afirma que una sucesión de mediciones cuánticas constituye una cadena de Markov, que será simple si el método de medición puede ser cualquiera en cada etapa. Se calcula el promedio temporal de la permanencia de un sistema en una celda del espacio de las fases (supuesto de volumen finito) con este método y resulta ser igual al volumen relativo de la celda, de manera que el proceso es ergódico.

9. FRANCISCO GARCÍA OLANO (Universidad de Buenos Aires): *Teorías de rotura. Aspectos físicos.*

Han sido propuestas numerosas teorías de rotura partiendo de consideraciones teóricas o de resultados experimentales. Pero en general, es muy reducida la consideración que se ha dado a los aspectos físicos esenciales del problema.

Como primer punto de partida estima el autor que debe tomarse el llamado «teorema» Ross que dice: «Cada material exige una teoría propia de rotura, como consecuencia de su estructura interna y de su comportamiento bajo deformación».

Entrando a estudiar los procesos físicos que conducen a la rotura, el autor cree posible agruparlos en tres grandes grupos: 1) en los cuerpos en estado dúctil en que es determinante la estructura cristalina, el proceso esencial es el deslizamiento

por tensiones tangenciales. Para esos cuerpos vale la teoría de Huber-Hencky-von Mises de «máxima energía de distorsión» a la que se da nueva interpretación física; 2) en los cuerpos de estado frágil en que el proceso determinante es el deslizamiento sobre superficies en que existen fuertes rozamientos, la mejor teoría es la de Mohr; 3) para los cuerpos en estado plástico, vítreo o viscoso las acciones se ejercen entre agrupaciones moleculares y la teoría se hace muy compleja.

Finalmente se explica por qué no son válidas las teorías de Born, Polanyi, Zwicky, de Boer, Taylor, Murnaghan, etc., que llevan a resultados extraordinariamente distintos a los observados.

10. LIVIO GRATTON (Observatorio Astronómico, La Plata): *El espectro de la Nova Pictoris 1925.*

Se exponen los resultados preliminares del estudio de los espectros de la Nova Pictoris 1925 tomados por Hartmann en el Observatorio de La Plata con un espectrógrafo montado en el ecuatorial astrográfico.

11. ENRIQUE GAVIOLA (Observatorio Astronómico, Córdoba): *La expansión de la nebulosa de la estrella Eta Carinae y su pavelaje.*

La nebulosa galáctica Eta Carinae y la nebulosa propia de la estrella de ese nombre son dos objetos sin relación física. Una serie de fotografías tomadas en Córdoba muestra la compleja estructura de la segunda. Se muestra que partes identificables de la nebulosa que habían sido medidas, en los últimos 30 años, como componentes de una estrella múltiple, se desplazan transversalmente con el tiempo, alejándose del núcleo. Las velocidades transversales son compatibles con el supuesto de que la materia que las forma fué emitida por la estrella en su erupción de 1843, cuando llegó el máximo brillo, o posteriormente.

Velocidades radiales de nubéculas particulares medidas en espectros con ranura y sin ranura permiten calcular la paralaje mediante hipótesis plausibles sobre simetría. Resulta una distancia de unos 2.000 parsecs.

12. LIVIO GRATTON (Observatorio Astronómico, La Plata): *Sobre la evolución de las estrellas que siguen la ley de Bethe para la producción de energía.*

Las ecuaciones diferenciales del modelo central han sido in-

tegradas para ocho valores de las condiciones en la superficie. Seis de estas soluciones permiten el empalme con la solución E de la ecuación de Emden para $n = \frac{3}{2}$. Correspondientemente

se dispone de una secuencia de seis configuraciones estelares con distintos valores de la razón entre el peso específico de la materia en la envoltura radiante y el de la materia en el núcleo adiabático (modelo de Cowling generalizado). Las soluciones de las ecuaciones del empalme han sido calculadas por un método aproximado; por esta razón, los resultados del cálculo son preliminares. Sucésivamente por medio de la ley de Bethe de la producción de energía se calcularon las luminosidades y los radios de las configuraciones en función de la masa, del contenido de hidrógeno del núcleo y del contenido de hidrógeno de la envoltura, aplicándose estos cálculos a la determinación de las líneas evolutivas de una estrella en el diagrama de Russell-Hertzsprung. Dos resultados de esta investigación se destacan por su importancia: a) La evolución de una estrella durante la fase de desarrollo del ciclo de Bethe se realiza sin desplazamiento sensible en el diagrama de Russell, es decir, sin variaciones prácticas de su luminosidad y de su temperatura efectiva; b) Las distintas posiciones de una estrella en el diagrama de Russell durante el desarrollo del ciclo de Bethe corresponden siempre a la secuencia principal del mismo, cualesquiera sean los valores de su masa y del contenido inicial en hidrógeno en el núcleo convectivo; por lo tanto para explicar la dispersión observada se necesita suponer una variación del contenido (inicial) de helio o del contenido de nitrógeno. Para las estrellas gigantes probablemente el modelo de Cowling no es suficiente.

13. LIVIO GRATTON y JORGE DVINIANIN (Observatorio Astronómico, La Plata): *Estudio sobre las estrellas de gran velocidad.*

Las estrellas conocidas con velocidad relativa más grande de 65 km/seg. han sido seleccionadas muy cuidadosamente, eligiéndose para esta finalidad: a) estrellas con paralaje bien conocida $p \geq 0,050$ y con velocidad espacial relativa $V \geq 65$ km/seg.; b) estrellas con paralaje cualquiera y velocidad radial $V_r \geq 65$ km/seg. En el cálculo de la velocidad relativa se tuvo en cuenta una velocidad del sol de 20 km/seg. hacia el apex

normal ($18' + 30^\circ$). El diagrama de Hertzsprung-Russell de las estrellas normales muestra como única diferencia notable la ausencia total de estrellas A y F de la secuencia principal; además las gigantes de los tipos G y K parecen relativamente menos abundantes que entre las estrellas normales. Las enanas de los tipos F5-M no muestran diferencias destacadas como diferencias en el diagrama. Se procedió luego al cálculo del apex y de la velocidad del sol relativa a las estrellas de gran velocidad usándose todas las estrellas de gran velocidad con velocidad radial conocida.

14. RICARDO PLATZECK (Observatorio Astronómico, Córdoba): *Construcción y funcionamiento de un divisor de imágenes.*

El segundo y tercer divisor de imágenes construido con el objeto de aumentar el rendimiento luminoso del espectrógrafo I del reflector de Bosque Alegre ha sido ensayado con resultado satisfactorio. Con imágenes de 4 a 6 segundos de diámetro el tiempo de exposición resulta aproximadamente tres veces menor que sin el dispositivo. El tercer sistema mencionado es de diseño simplificado, constando de sólo cuatro pares de prismas de cuarzo en lugar de catorce, como los anteriores. La calidad de los espectros obtenidos no es inferior a los que resultan cuando se trabaja en la forma convencional. Se nota sin embargo una leve subexposición en la zona central del espectro, la cual se debe a la sombra de la cruz que sostiene al espejo secundario del telescopio. Se espera poder salvar dicho inconveniente en el próximo juego que se construirá.

15. JOSÉ BALSEIRO (Instituto de Física, La Plata): *Influencia de la excentricidad en las guías coaxiales en los modos de propagación.*

Se da la solución general de las ondas transmitidas en una guía axial excéntrica y se discute el caso de pequeñas excentricidades correspondientes a errores de construcción de las guías coaxiales.

16. ANTONIO E. RODRÍGUEZ (Instituto de Física, La Plata): *El principio de reciprocidad y la masa de los mesones.*

El autor ha calculado ^(1, 2) las masas posibles de mesones

(¹) MAX BORN y A. E. RODRÍGUEZ, 1949. *Nature*, 163, 320.

(²) KAI-CHIA-CHENG y A. E. RODRÍGUEZ, 1949, *Nature*, 163, 368.

compatibles con la teoría deesarrollada por Max Born y H. S. Green (Proc. Roy. Soc. of Edinburgh, Vol. LXII, No. 50, pág. 470) usando el principio de reciprocidad. Se desprende de la teoría que existe un número infinito de partículas, la masa de las cuales en el caso de spin entero está dada por

$$(1) \quad \mu = \frac{hc}{e^2} K m = 137 K m$$

en donde K^2 son las raíces de la ecuación

$$K^k L_n^{k+1}(K^2) = 0 \text{ siendo } L_n^{k+1}$$

los polinomios asociados de Laguerre de orden n .

En la ecuación (1) m resulta ser la masa del electrón, supuesta como de origen puramente electromagnético.

El estado fundamental del espectro de masas corresponde a los valores $k=0$, $n=2$ y se obtiene en este caso $K^2=2$ y para μ el valor $\mu=194 m$, en acuerdo con la masa del mesón μ observado.

El primer estado excitado corresponde a los valores $k=0$, $n=3$. En este caso se obtienen dos masas: $\mu_1=298 m$, $\mu_2=154 m$. La primera correspondería al mesón π observado; el otro no parece haber sido observado todavía en forma concluyente.

17. R. H. BUSCH, A. CAIRO, E. E. GALLONI y J. RASKOVAN (Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Buenos Aires): *Preparación y estructura cristalina del PtO₂*.

Se ha preparado el bióxido de platino por el método estudiado por uno de los autores (J. Raskovan, Tesis, 1948) obteniéndose un producto semejante al que se conoce preparado por Adams. Se ha obtenido diagrama de rayos X por el método del polvo cristalino, cuyas líneas más intensas coinciden con las que han obtenido por difracción de electrones Finch, Stuart, Murison y Thomson. La estructura es hexagonal, $c/a=1,36$; $a=3,08 \text{ \AA}$; $c=4,19 \text{ \AA}$ grupo espacial C; una molécula por malla. Las coordenadas de los átomos, deducidas de la observación de intensidades, son:

$$\begin{array}{llll} 1. & Pt & 000 & - \\ 2 & O & 00u & 00\bar{u} \end{array}$$

con $u=0,34$. Los iones oxígeno se encuentran a $1.32 \text{ \AA}$, dis-

tancia que corresponde a la unión homopolar, y la distancia $Pt-O$ es de 1,43 Å. Del ancho de las líneas del diagrama se ha calculado un tamaño de partículas de 40 a 80 Å, lo que explica la dificultad para la obtención de buenos diagramas. Repetida la preparación por el método de Adams y luego de cuidadosa purificación se obtiene el PtO_2 muy puro, cuyo diagrama de rayos X coincide con el anterior. La densidad calculada es $d=11,1 \text{ g/cm}^3$ y los valores observados están comprendidos entre 9,5 y $10,7 \text{ g/cm}^3$.

18. R. H. BUSCH, R. GOTZULSKI y E. E. GALLONI (Facultad de Ciencias Exactas, Física y Naturales, Buenos Aires): *Preparación y estructura cristalina del PtO* .

Diversos autores han estudiado la preparación de óxidos de platino de fórmula Pt_1O_x para $0 < x < 1$ y del estudio con rayos X y difracción de electrones han concluido que más bien que la formación de un óxido se produce la absorción de oxígeno ya que en todos los casos se obtiene un diagrama análogo al del Pt .

Del análisis de los valores obtenidos para las densidades de los diversos compuestos y del estudio comparativo de los diagramas de rayos X se deduce que el fenómeno consiste en la sustitución de los iones Pt por iones O^{--} en la red de caras centradas del Pt . La arista del cubo elemental crece en un 1 %. La imposibilidad de obtener cristales únicos impide decidir si la sustitución se produce al azar o siguiendo un orden determinado.

Moore y L. Pauling han señalado la posibilidad de que el óxido de Pt tenga estructura tetragonal, pero es evidente que las tres líneas que han observado, en las cuales basan su aseveración, correspondían a PtO .

19. ERNESTO E. GALLONI (Instituto de Física, Buenos Aires). *Estructura cristalina de la Capillitita, carbonato triple de Mn, Fe y Zn*.

Se ha estudiado el mineral descrito por V. Angelelli con el nombre de *Capillitita*, o *Rodocrosita Ferrocincifera* de Capillitas, Catamarca, República Argentina.

De la interpretación del análisis químico, del estudio roentgenográfico y de los análisis térmicos diferenciales resulta la

evidencia de que se trata de un carbonato triple de Mn, Fe y Zn, de fórmula $(\text{C}_3\text{O})_4\text{Mn}_2\text{FeZn}$, isomorfo de la Rodocrosita o CO_3Mn .

Las dimensiones de la celda elemental no difieren apreciablemente de la rodocrosita, es decir: sistema romboédrico, $a=5,84 \text{ \AA}$, $\alpha=47^\circ 45'$.

Su índice de refracción es $n_0=1,836$ y su densidad $d=3,762 \text{ g/cm}^3$.

20. ABELARDO J. TEJO (Agrupación de Estudiantes de Física): *Significado de la constante en la ecuación de la polarografía.*

En la ecuación presentada en reemplazo de la de Ilkovic⁽¹⁾

$$i_t = 4 \sqrt{3} \pi \gamma n F D^{1/2} C t^{1/2} \quad (1)$$

aparece una constante γ , con las dimensiones de una superficie sobre un tiempo. Consideraciones energéticas muestran que dicha constante es proporcional a m , peso del mercurio que fluye por segundo en el electrodo de gotas. Haciendo el reemplazo, después de calcular la intensidad media mediante la (1), se obtiene, en buen acuerdo con los resultados experimentales

$$\frac{I_m}{mT^{1/2}} = k \quad (2)$$

donde I_m = intensidad media; T = período de goteo y k representa todos los parámetros que se mantienen constantes.

⁽¹⁾ Reuniones del Instituto de Investigaciones Físicas aplicadas a la Patología humana, Noviembre de 1948.

SOBRE EL PROBLEMA DE LA CONVERGENCIA EN LA TEORIA DE LA TRANSFORMACION DE LAPLACE

por G. DOETSCH

1. Una función $\varphi(z)$ analítica en un círculo de centro cero puede desarrollarse en la serie de potencias:

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

y ésta es convergente en el círculo máximo que no contiene ninguna singularidad de la función. Efectuando la transformación $z=e^{-s}$, que transforma un círculo del plano z en un semiplano de la derecha del plano s , obtenemos una serie de Dirichlet

$$\varphi(e^{-s}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-ns},$$

y reemplazando el índice de sumación n por una variable continua t llegamos a la transformación de Laplace

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt = \mathcal{L}\{F\}.$$

Análogamente a dicha propiedad de la serie se podría suponer 1) que cada función $f(s)$ analítica en un semiplano pudiera representarse por una integral de Laplace y 2) que ésta sea convergente en el semiplano máximo que no contiene ninguna singularidad de $f(s)$. Pero es sabido que estas dos suposiciones son falsas. Por eso en la teoría de la transformación de Laplace se plantean dos problemas: 1) ¿Cuáles funciones analíticas en un semiplano pueden representarse por una integral de Laplace? Este es el «problema de representación», de que no hablaré. 2) Si una integral de Laplace es convergente en cierto semiplano p , que tal vez no es el campo completo de convergencia, ¿en cuáles condiciones con respecto a la función analítica $f(s)$ representada por la integral puede afirmarse que la integral sea

convergente en un semiplano más extenso? Este es el «problema de la convergencia», de que trataré en lo que sigue.

2. Cuando se pregunta si la integral de Laplace es convergente en un punto s_0 , es preciso estudiar el comportamiento de la integral parcial

$$\int_0^t e^{-s_0 \tau} F(\tau) d\tau$$

para $t \rightarrow \infty$; y si la convergencia de esta integral parcial debe depender de las propiedades, no de la función $F(t)$, sino de la función $f(s)$, es preciso expresar la integral parcial mediante la función $f(s)$. Este es el problema.

3. Para atacarlo, recordamos el hecho que la integral parcial en el caso $s_0 = 0$, es decir $\int_0^t F(\tau) d\tau$, puede expresarse mediante una integral compleja de la función $f(s)$:

$$\int_0^t F(\tau) d\tau = V.P. \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts} \frac{f(s)}{s} ds.$$

Esta es la «forma integrada» ⁽¹⁾ de la conocida «fórmula compleja de inversión» de la transformación de Laplace, y vale, contrariamente a esta fórmula de inversión, sin restricción ninguna con respecto a la función $F(t)$, pero con una restricción importante con respecto a la abscisa x , a saber, que x no sólo debe estar situada en el semiplano p , donde la integral de Laplace se supone convergente, sino que x debe además ser mayor que cero; $x > 0$. Por eso, si se reemplaza $F(t)$ por $e^{-s_0 t} F(t)$, para llegar a $\int_0^t e^{-s_0 \tau} F(\tau) d\tau$, y análogamente $f(s)$ por $f(s+s_0)$:

$$\begin{aligned} (1) \quad \int_0^t e^{-s_0 \tau} F(\tau) d\tau &= V.P. \frac{1}{2\pi i} \int e^{ts} \frac{f(s+s_0)}{s} ds = \\ &= V.P. \frac{1}{2\pi i} \int e^{t(s-s_0)} \frac{f(s)}{s-s_0} ds, \end{aligned}$$

⁽¹⁾ G. DOETSCH, *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*. Berlin 1937, Verlag Julius Springer, p. 107.

la abscisa de la recta de integración debe ser mayor que $\mathcal{R}s_0$. En esta fórmula el punto s_0 puede ser cualquier punto del plano complejo, de acuerdo con el hecho que la integral parcial en el primer miembro existe para todo s_0 .

4. Pero dicha fórmula no basta para nuestros fines, pues la integral depende de los valores de $f(s)$ en el semiplano p , donde la convergencia de la integral de Laplace es conocida, mientras que es necesario introducir los valores de $f(s)$ en un semiplano más extenso, donde $f(s)$ es analítica y cumple ciertas condiciones. Por eso consideramos un rectángulo formado de dos rectas verticales de abscisas x y x_1 y dos rectas horizontales de ordenadas $\pm \infty$. Admitamos que x_1 esté situada en el semiplano p , donde la convergencia de $\mathcal{L}\{F\}$ está garantizada, y x en un semiplano p_1 más extenso, donde $f(s)$ es función analítica, y sea s_0 un punto del rectángulo ($x < \mathcal{R}s_0 < x_1$). Entonces la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int e^{t(s-s_0)} \frac{f(s)}{s-s_0} ds,$$

extendida a la periferia del rectángulo en sentido positivo, es igual al residuo de la función $e^{t(s-s_0)} f(s)/(s-s_0)$ en el único punto singular s_0 , es decir igual a $f(s_0)$. Según la fórmula (1)

la integral sobre la recta de abscisa x_1 converge a $\int_0^t e^{-s_0 \tau} F(\tau) d\tau$ para $\omega \rightarrow \infty$. Si suponemos que para $\mathcal{I}s = y \rightarrow \pm \infty$ el módulo $|f(s)|$ crece más lentamente que $|y|$, es decir ⁽²⁾

$$(2) \quad f(s) = o(|y|), \text{ uniformemente con respecto a } x \text{ en } p_1,$$

las integrales sobre los segmentos horizontales se anulan para $\omega \rightarrow \infty$, porque el intervalo de integración tiene longitud constante, $e^{t(s-s_0)}$ está acotado y $f(s)/(s-s_0) \rightarrow 0$. Por eso la integral sobre la recta de abscisa x tiene igualmente límite. Cambiando el sentido de integración y llevando la integral al otro miembro de la ecuación obtenemos:

$$(3) \quad \int_0^t e^{-s_0 \tau} F(\tau) d\tau = f(s_0) + V.P. \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{t(s-s_0)} \frac{f(s)}{s-s_0} ds, \quad \mathcal{R}s_0 > x.$$

⁽²⁾ Es sabido que esta propiedad se cumple en todo semiplano interior al campo exacto de convergencia de $\mathcal{L}\{F\}$, véase l.c. (1), p. 52. Luego es condición necesaria para que $\mathcal{L}\{F\}$ converja en puntos de p_1 .

5. Antes de proseguir hagamos una observación importante. Haciendo $t=0$, el primer miembro se anula y queda:

$$(4) \quad f(s_0) = V.P. \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{f(s)}{s-s_0} ds,$$

es decir: la prolongación analítica de una transformada de Laplace se expresa por la integral de Cauchy con una recta vertical como camino de integración, en todo el semiplano p_1 , donde $f(s)$ cumple la condición (2).

Reemplazando $f(s_0)$ en (3) por el valor (4), se obtiene la fórmula:

$$\int_0^t e^{-s_0\tau} F(\tau) d\tau = V.P. \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{e^{t(s-s_0)} - 1}{s-s_0} f(s) ds.$$

Como la fracción $(e^{t(s-s_0)} - 1)/(s-s_0)$ es holomorfa incluso en el punto s_0 , se puede demostrar que esta fórmula vale también cuando el camino de integración queda a la derecha de s_0 o atraviesa s_0 , no saliendo del semiplano p_1 .

6. Mediante la fórmula (3) se resuelve ahora el problema de la convergencia para el semiplano p_1 : La condición necesaria y suficiente, con respecto a la función $f(s)$, para que la integral de Laplace sea convergente en un punto s_0 de este semiplano, es la siguiente: Hay un valor $x < \Re s_0$ en p_1 , que tiene la propiedad:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V.P. \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{t(s-s_0)} \frac{f(s)}{s-s_0} ds = 0.$$

Observemos que en la integral $\Re(s-s_0)$ es negativo, luego $e^{t(s-s_0)} \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$. Si p. e.

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{|f(s)| ds}{|s|+1}$$

es convergente, se ve fácilmente que la condición se cumple.

(*) G. DOETSCH, *Handbuch der Laplace-Transformation*. I. BAND, *Theorie der Laplace-Transformation*. Basel 1950, Verlag Birkhäuser (5. Kapitel).

7. Como fin de estas consideraciones quisiera mencionar que la fórmula (3), aplicada a las series de Dirichlet, conduce a una nueva expresión para las sumas parciales de estas series, permitiendo atacar el problema de la convergencia de las series de Dirichlet. Más detalles se encontrarán en un nuevo libro mío⁽³⁾, que está por aparecer.

Universidad Nacional del Litoral. - Santa Fe.

BIBLIOGRAFIA

Libros y revistas

Matemática, Técnica e Ciencia. (Praia de Botafogo 244, A, 1º andar, Río de Janeiro).

Esta nueva revista científica y didáctica se edita en Brasil. Como su título lo anuncia abarca diferentes orientaciones del conocimiento humano puestas al alcance del estudiante. El primer número contiene, entre otras cosas, un *Método para resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$* ; *Cuestiones propuestas en exámenes de ingreso*; *Cálculo de correas para transmisión de movimientos*, etc.

JACOB STEINER, *Construcciones geométricas realizadas con la regla.*

Scripta Mathematica acaba de publicar, traducidas de la primera edición alemana (1833) por M. E. Stark y con introducción y notas de R. C. Archibald, *Jacob-Steiner's Geometrical Constructions with a ruler given a fixed circle with its center* (Yeshiva College, New York N. Y., 1950). Contiene algunas propiedades de figuras rectilíneas, algunas propiedades del círculo, solución de todos los problemas geométricos mediante la regla, etc.

DAVID EUGENE SMITH, *Portraits of Eminent Mathematicians.*

En 1946, *Scripta Mathematica*, Yeshiva College, publicó, con síntesis biográfica de Smith, una hermosa colección de retratos de matemáticos eminentes: Arquímedes, Copérnico, Viète, Galileo, Napier, Descartes, Newton, Leibniz, Lagrange, Gauss, Lobachevsky y Sylvester.

Handbook of the Japanese Societies of Natural Science and Cultural Science.

Se trata de una publicación del Ministerio de Educación del Japón, del año 1949. Son diez volúmenes impresos a mimeógrafo que abarcan referencias sobre entidades dedicadas a la ciencia pura, la agricultura, la ingeniería, la literatura, la historia, el derecho y la economía. A través de esta minuciosa enumeración de sociedades científicas y culturales del Japón se aprecia el importante desarrollo espiritual alcanzado por dicho país.

M. Valentínuzzi

APLICACION DEL METODO DE HADAMARD AL CALCULO DEL CAMPO ELECTROMAGNETICO DEL ELECTRON

por JUAN JOSE GIAMBIAGI
(Instituto de Física, Buenos Aires)
(Recibido el 14-7-1950)

A. *Potencial de un electrón puntual.*

Hadamard introdujo el concepto de parte finita de una integral divergente, que permite resolver la ecuación hiperbólica cuando el número de dimensiones es impar. Friedrichs mostró ⁽¹⁾ que la parte finita logarítmica juega un papel análogo cuando el número de dimensiones es par. Courant-Hilbert contiene ⁽²⁾ una breve exposición del método y una aplicación a la resolución de la ecuación de las ondas amortiguadas. A ella nos referiremos a menudo en el curso de este artículo. Designamos con $(\xi, \eta, \varsigma, \tau)$ las coordenadas del punto potenciado y con (x, y, z, t) las del punto fuente.

En el espacio lorentziano, la distancia entre dos puntos Z, X de coordenadas (x, y, z, t) y $(\xi, \eta, \varsigma, \tau)$ es la siguiente:

$$F^{1/2} = [(\tau - t)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2 - (\varsigma - z)^2]^{1/2}.$$

El vector $r_{QP} = X - Z$ tiene por módulo:

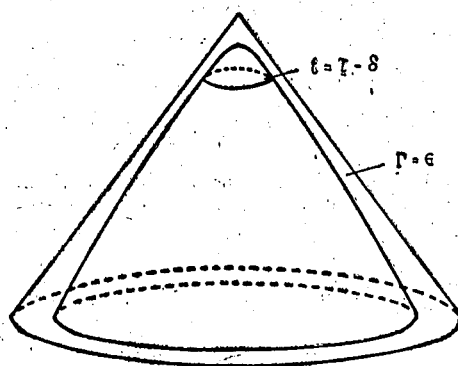
$$(I) \quad r_{QP} = (X - Z, X - Z)^{1/2}.$$

Tenemos que resolver para cada uno de los potenciales del campo electromagnético, la ecuación siguiente:

$$(II) \quad \square \phi_i = 4 \pi j_i$$

donde ϕ_i designa el potencial y j_i la tetracorrente. Vamos a considerar el volumen limitado por el hiperboloide $F = \epsilon$, el hiperplano $t = \tau - \delta$ y el hiperplano del infinito. En ese recinto aplicamos la fórmula de Green, designando con $G_{\epsilon\delta}$ el interior del cono, con $M_{\epsilon\delta}$ la superficie lateral y con $D_{\epsilon\delta}$ el hiperplano $t = \tau - \delta$. En el infinito, las condiciones iniciales son nulas, de

modo que el término correspondiente se anula. La fórmula de Green nos dice: (véase 2)



$$(III) \iiint_{G \in \delta} V 4 \pi j_i dx dy dz dt = \iiint_{M \in \delta} \left[V \frac{\partial \phi_i}{\partial S} - \phi_i \frac{\partial V}{\partial S} \right] do \\ + \iiint_{D \in \delta} \left[V \frac{\partial \phi_i}{\partial t} - \phi_i \frac{\partial V}{\partial t} \right] dx dy dz.$$

donde V es la solución fundamental de Hadamard:

$$V = \frac{U(X, Z)}{R^{\frac{n-2}{2}}} + W \log R + \dots$$

U , W y los puntos suspensivos indican funciones regulares. Además se cumple $L[W] = 0$. $\frac{\partial}{\partial s}$ significa la derivada según la conormal, es decir:

$$\frac{\partial}{\partial s} = t_v \frac{\partial}{\partial t} - x_v \frac{\partial}{\partial x} - y_v \frac{\partial}{\partial y} - z_v \frac{\partial}{\partial z}$$

Cada una de las integrales que aparecen en (III) es de la forma: (véase 2)

$$B_k(\epsilon) = a_k \log \epsilon + \frac{1}{\epsilon^{\frac{n-2}{2}}} (a_0 + a_1 \epsilon + \dots + a_{\frac{n-2}{2}} \epsilon^{\frac{n-2}{2}}) + (\epsilon)$$

y la parte finita logarítmica de esta expresión es a_k . Pasando en la (III) todo al primer miembro, dicha fórmula queda:

$$\sum_k a_k = 0.$$

U es igual, según la fórmula 51 de la página 447 de (2), a la función $J_0(\sqrt{-c}\Gamma)$ y $W = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-c}{\Gamma}} J_0'(\sqrt{-c}\Gamma) J_0 \sqrt{-c}\Gamma$ donde c es la constante que aparece en la ecuación de ondas amortiguadas.

$$\Phi_{tt} - \Phi_{xx} - \Phi_{yy} - \Phi_{zz} - c\Phi = f(xyzt).$$

En el caso que nos interesa, el campo electromagnético en el vacío, $c=0$ y, por lo tanto, $W=0$ y $U=1$. Los otros términos regulares dan integrales convergentes y que, por lo tanto, no contribuyen a la parte finita logarítmica. Queda, pues,

$$(IV) \quad V = \frac{1}{\Gamma}$$

El procedimiento consiste en hacer tender ε y δ a cero y quedarnos con la parte finita logarítmica de cada integral ⁽¹⁾.

La integral sobre $M_{\varepsilon\delta}$ no contribuye a la parte finita logarítmica, véase (2), pág. 446, fórmula 45, pues W es nula.

La parte finita logarítmica sobre $D_{\varepsilon\delta}$ es $-2\pi\phi_i$. Véase (2), fórmula 48.

La fórmula (III) se reduce a la siguiente:

$$\phi_i = -\frac{1}{2\pi} \iiint V 4\pi j_i dx dy dz dt = -2 \iiint \frac{j_i dx dy dz dt}{\Gamma}$$

Si se trata de un electrón puntual, esta expresión se reduce a una integral a lo largo de la línea del universo del electrón

$$(V) \quad \phi_i = -2c \int_{-\infty}^{s_\varepsilon} u_i(Q) \frac{ds}{\Gamma}.$$

⁽¹⁾ El Ing. Calderón demostró que el mismo resultado se obtiene tomando como recinto de integración al hiperboloide $\Gamma = \varepsilon$ y haciendo tender $\varepsilon \rightarrow 0$ sin necesidad de cortar con el hiperplano $t = \tau - \delta$.

donde u_i es la tetravelocidad del electrón, de módulo uno, y s_ε es la intersección de la línea del electrón con el hiperboloide $\Gamma = \varepsilon$.

Vamos a integrar respecto de Γ en lugar de hacerlo con s .
Tenemos:

$$\Gamma = (t-\tau)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - (z-\varsigma)^2$$

$$\frac{d\Gamma}{ds} = 2 \left[(t-\tau) \frac{dt}{ds} - (x-\xi) \frac{dx}{ds} - (y-\eta) \frac{dy}{ds} - (z-\varsigma) \frac{dz}{ds} \right].$$

Se tiene, según (I)

$$(VI) \quad \frac{d\Gamma}{ds} = -2 (\vec{r}, \vec{u}).$$

Si la velocidad espacial del electrón es menor que una constante menor que la velocidad de la luz, resulta que cuando $s \rightarrow -\infty$, $\Gamma \rightarrow \infty$.

El otro límite es ε . Queda:

$$(VII) \quad \begin{aligned} \phi_i &= -2e \int_{-\infty}^{\varepsilon} \frac{u_i(Q)}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{ds} Q d\Gamma = 2e \int_{-\infty}^{\varepsilon} \frac{u_i(Q)}{\Gamma} \frac{1}{2(\vec{r}, \vec{u})} d\Gamma = \\ &= e \int_{-\infty}^{\varepsilon} \frac{u_i(Q)}{(\vec{r}, \vec{u})} \frac{d\Gamma}{\Gamma} \end{aligned}$$

donde hemos usado la fórmula (VI).

Con la hipótesis hecha acerca de la velocidad del electrón, la siguiente integral resulta convergente:

$$\int_{-\infty}^A \frac{u_i}{(\vec{r}, \vec{u})} \frac{d\Gamma}{\Gamma}$$

donde A es un número positivo cualquiera.

Descomponemos la (VII) en suma de dos integrales $\int_{-\infty}^A + \int_A^{\varepsilon}$.

Como la primera es convergente, no contribuye a la parte finita logarítmica. Podemos por lo tanto, escribir:

$$(VIII) \quad \phi_i = e \int_A^{\epsilon} \frac{u_i}{\vec{(r, u)}} \frac{d\Gamma}{\Gamma}.$$

A esta integral vamos a sumarle y restarle la siguiente:

$$e \int_A^{\epsilon} \left\{ \frac{u_i}{\vec{(r, u)}} \right\}_0 \frac{d\Gamma}{\Gamma}$$

donde el subíndice cero indica que tomamos el valor en el tiempo retardado.

La (VIII) queda:

$$\phi_i = e \int_A^{\epsilon} \left\{ \frac{u_i}{\vec{(r, u)}} \right\}_0 \frac{d\Gamma}{\Gamma} + \int_A^{\epsilon} \left[\frac{u_i}{\vec{(r, u)}} - \left\{ \frac{u_i}{\vec{(r, u)}} \right\}_0 \right] \frac{d\Gamma}{\Gamma}.$$

El segundo término del segundo miembro da una integral convergente y no contribuye, por lo tanto, a la parte finita logarítmica. Queda sólo el primero.

$$\phi_i = e \int_A^{\epsilon} \left\{ \frac{u_i}{\vec{(r, u)}} \right\}_0 \frac{d\Gamma}{\Gamma} = e \left\{ \frac{u_i}{\vec{(r, u)}} \right\}_0$$

$$(IX) \quad \phi_i = e \left\{ \frac{u_i}{\vec{(r, u)}} \right\}_0.$$

B. Cálculo del campo.

Usando la notación tensorial, tendremos:

$$F_{uv} = \frac{\partial \phi_v}{\partial x^u} - \frac{\partial \phi_u}{\partial x^v}.$$

Habíamos llegado a la siguiente expresión para el potencial

$$\phi_v = -2e \int_{-\infty}^{s_e} \frac{u_v(Q)}{\Gamma} ds.$$

Se demuestra que la derivada de la parte finita logarítmica respecto de un parámetro es igual a la parte finita logarítmica de la derivada y que podemos derivar directamente bajo el signo de integral. Véase (3).

Es decir, tendremos:

$$F_{uv} = \frac{\partial \phi_v}{\partial \xi^\mu} - \frac{\partial \phi_\mu}{\partial \xi^v} = -2e \int_{-\infty}^{s_E} [u_v(Q) \frac{\partial}{\partial \xi^\mu} \left(\frac{1}{\Gamma} \right) - u_\mu \frac{\partial}{\partial \xi^v} \left(\frac{1}{\Gamma} \right)] ds$$

$$F_{uv} = 2e \int_{-\infty}^{s_E} \left[\frac{u_v \Gamma_{,\xi^\mu} - u_\mu \Gamma_{,\xi^v}}{\Gamma^2} \right] ds$$

o sea, en general:

$$(X) \quad F = 4e \int_{-\infty}^{s_E} \frac{[\vec{r}, \vec{u}]}{\Gamma^2} ds \quad \Gamma^2 = (x - \xi)_\mu (x - \xi)^\mu.$$

Tomando a Γ como variable de integración e integrando por partes, obtenemos:

$$F = 4e \int_{-\infty}^{\epsilon} \frac{[\vec{r}, \vec{u}]}{\Gamma^2} \frac{ds}{d\Gamma} d\Gamma = -2e \int_{-\infty}^{\epsilon} \frac{[\vec{r}, \vec{u}]}{(\vec{r}, \vec{u})} \frac{d\Gamma}{\Gamma^2} = -2e \int_A^{\epsilon} \frac{(\vec{r}, \vec{u})}{[\vec{r}, \vec{u}]} \frac{d\Gamma}{\Gamma^2}$$

$$F = 2e \left[\frac{[\vec{r}, \vec{u}]}{(\vec{r}, \vec{u})} \frac{1}{\Gamma} \right]_A^{\epsilon} - 2e \int_A^{\epsilon} \frac{d}{d\Gamma} \left(\frac{[\vec{r}, \vec{u}]}{(\vec{r}, \vec{u})} \right) \frac{d\Gamma}{\Gamma}$$

El primer término no contribuye a la parte finita logarítmica. En cuanto al segundo, procediendo igual que antes da, como parte finita logarítmica

$$\dot{F} = -2e \left\{ \frac{d}{d\Gamma} \left(\frac{[\vec{r}, \vec{u}]}{(\vec{r}, \vec{u})} \right) \right\}_0 = -2e \left\{ \frac{d}{d\tau} \left(\frac{[\vec{r}, \vec{u}]}{(\vec{r}, \vec{u})} \right) \right\}_0 \left(\frac{d\tau}{d\Gamma} \right)$$

$$(XI) \quad F = e \left\{ \frac{1}{(\vec{r}, \vec{u})} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{[\vec{r}, \vec{u}]}{(\vec{r}, \vec{u})} \right) \right\}_0$$

Compárese con el cálculo del campo hecho por Fremberg usando el método de Riesz (⁴).

C. Fuerza propia del electrón.

La fórmula (X) nos da el campo del electrón. Recordemos que el límite superior es el valor del tiempo propio que corresponde a la intersección con el cono $\Gamma = \epsilon$.

Como la integral $\int_{-\infty}^A 4e \frac{[\vec{r}, \vec{u}]}{\Gamma^2} ds$ es convergente, podemos poner

$$F = 4e \int_A^{s_0} \frac{[\vec{r}, \vec{u}]}{\Gamma^2} ds.$$

Desarrollemos el integrando en serie a partir del punto en que la línea del universo del electrón corta al cono retardado. Tomemos, para simplificar, $s=0$ en ese punto. Tendremos:

$$[\vec{r}, \vec{u}] = -\frac{s^2}{2} \left\{ [\vec{u}, \ddot{u}] - \frac{2}{3} [\ddot{u}, \vec{u}] s + \dots \right\}$$

donde hemos usado

$$\vec{r} = -\vec{u}_0 s - \ddot{u}_0 \frac{s^2}{2} - \ddot{u}_0 \frac{s^3}{9} + O(s^4)$$

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \ddot{u}_0 s + \ddot{u}_0 \frac{s^2}{2} + O(s^3)$$

$$r = \Gamma^{1/2} = -s + O(s^3)$$

En el límite superior podemos poner, teniendo en cuenta la última igualdad:

$$s_0 = -\epsilon^{1/2}.$$

Calculemos ahora la parte finita logarítmica.

$$F = 4e \int_{-A}^{-\sqrt{\epsilon}} \left\{ \frac{s^2}{2} [\vec{u}, \ddot{u}] - \frac{2}{3} [\ddot{u}, \vec{u}] s + O(s^2) \right\} \frac{ds}{\Gamma^2} = 4e \int_{-A}^{-\sqrt{\epsilon}} \frac{1}{3} [\ddot{u}, \vec{u}] \frac{ds}{|s|}$$

Si ahora sumamos y restamos

$$\frac{4}{3} e \int_{-A}^{-\sqrt{\epsilon}} \frac{\vec{u}, \vec{u}}{s} ds$$

obtenemos

$$F = \frac{4}{3} e \int_{-A}^{-\sqrt{\epsilon}} \frac{\vec{u}, \vec{u}}{s} ds + \frac{4}{3} e \int_{-A}^{-\sqrt{\epsilon}} \left\{ [\ddot{u}, u] - [\ddot{u}, u]_0 \right\} \frac{ds}{s}$$

Como la segunda integral es convergente, no contribuye a la parte finita logarítmica.

Queda finalmente

$$F = \frac{4}{3} e \int_{-A}^{-\sqrt{\epsilon}} \frac{\vec{u}, \vec{u}}{s} ds = \frac{2e}{3} [\ddot{u}, \vec{u}]_0 \quad (\text{XII})$$

Con esta fórmula del campo obtenemos la fuerza de Lorentz sobre el electrón, a saber:

$$(\text{XIII}) \quad f^\mu = F^{\mu\sigma} e u_\sigma = \frac{2e^2}{3} (\ddot{u}^\mu + \ddot{u}^2 u^\mu).$$

Estas ecuaciones fueron deducidas por Dirac⁽⁵⁾ y por Fremberg⁽⁴⁾, el primero por un método intuitivo y el segundo mediante el método de Riesz de prolongación analítica.

La fórmula (XII) coincide con la semidiferencia de los potenciales avanzado y retardado.

La aplicación del método al campo mesónico se publicará en una ulterior oportunidad.

BIBLIOGRAFIA

- (1) FRIEDRICH. Gött. Nach. 1927 S. 172.
- (2) COURANT-HILBERT II, página 430 y siguientes.
- (3) BUREAU, FLORENT. Bull. Cl. Sc (Ac. Royale de Belgique) 34, 480, 1948.
- (4) N.-E. FREMBERG. Proc. Roy. Soc. 188. 1946.
- (5) DIRAC. P. A. M. 1938, Proc. Roy. Soc.

SOLUCIONES SINGULARES DE LA ECUACION POTENCIAL EN EL CASO DE LOS PROBLE- MAS DE DIRICHLET Y NEUMANN EN EL PRIMER CUADRANTE

por DIETRICH VOELKER
Buenos Aires

La ecuación potencial en dos variables es

$$\Delta F(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} = 0. \quad (1)$$

Para el primer cuadrante como dominio de integración, los valores de contornos de $F(x, y)$ y de las primeras derivadas sean los siguientes

$$A(x) = \lim_{y \rightarrow 0} F(x, y)$$

$$B(y) = \lim_{x \rightarrow 0} F(x, y)$$

$$A_1(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$$

$$B_1(y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}$$

La ecuación (1) se transforma por intermedio de la transformación de Laplace de dos variables⁽¹⁾ en la ecuación algebraica

$$[u^2 f(u, v) - u b(v) - b_1(v)] + [v^2 f(u, v) - v a(u) - a_1(u)] = 0,$$

donde las letras pequeñas significan, como siempre, las transformadas de las funciones con letras grandes, siendo u y v las variables correspondientes a x e y .

⁽¹⁾ Las reglas de cálculo para la transformación de Laplace de una y dos variables sean consideradas como conocidas.

Como solución transformada resulta

$$f(u, v) = \frac{ub(v) + b_1(v) + va(u) + a_1(u)}{u^2 + v^2}. \quad (2)$$

1. Soluciones singulares del problema de Dirichlet.

Para obtener soluciones singulares del problema de Dirichlet hay que cumplir la condición que los límites de la solución en el contorno se anulan:

$$A(x) \equiv B(y) \equiv 0$$

es decir

$$a(u) \equiv b(v) \equiv 0.$$

Así la solución (1) se reduce a

$$f(u, v) = \frac{a_1(u) + b_1(v)}{u^2 + v^2}. \quad (3)$$

Para que esta sea una transformada, debe ser regular en u y v en dos «semiplanos derechos» de u y v respectivamente, que no es el caso anulándose los dos factores del denominador $(u + iv)$ y $(u - iv)$ para valores arbitrariamente grandes de $Re\ u$ y $Re\ v$. Para obtener la solución (3) en una forma regular (con dos semiplanos derechos en u y v) renunciamos a la independencia de las funciones a_1 y b_1 , haciendo desaparecer el numerador para $u^2 = -v^2$.

Pongamos

$$a_1(u) = \alpha_1(u^2)$$

$$b_1(v) = \beta_1(v^2)$$

$$y \quad \alpha_1(-v^2) + \beta_1(v^2) = 0$$

$$o \quad \beta_1(v^2) = -\alpha_1(-v^2).$$

Con esto resulta de la solución (3) como solución singular del problema de Dirichlet en forma todavía transformada

$$f(u, v) = \frac{\alpha_1(u^2) - \alpha_1(-v^2)}{u^2 - (-v^2)} \quad (4)$$

siendo α_1 una función cualquiera, con la cual la función $f(u, v)$ resulta ser función del tipo transformado.

Ejemplo 1.

$$\text{Si } \alpha_1(z) \equiv \frac{1}{z^n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$\text{se tiene } f(u, v) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{u^{2n-2k}} \frac{1}{v^{2k+2}}$$

y antitransformando

$$F(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2n-2k-1}}{(2n-2k-1)!} \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

De esta solución de la ecuación potencial que desaparece en los contornos del primer cuadrante, son los primeros tres polinomios

$$n=1 \quad F(x, y) = xy$$

$$n=2 \quad F(x, y) = \frac{xy}{6} (x^2 - y^2)$$

$$n=3 \quad F(x, y) = \frac{xy}{12} \left(\frac{x^4}{10} - \frac{x^2 y^2}{3} + \frac{y^4}{10} \right)$$

Ejemplo 2.

$$\text{Poniendo } \alpha_1(z) \equiv \frac{1}{z+1}$$

$$\text{se tiene } f(u, v) = \frac{1}{u^2+1} \frac{1}{v^2-1}$$

$$\text{y } F(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y.$$

Ejemplo 3.

$$\alpha_1(z) \equiv \frac{1}{z^4+4}$$

$$f(u, v) = \frac{1}{u^4+4} \frac{v^2}{v^4+4} - \frac{u^2}{u^2+4} \frac{1}{v^4+4}$$

$$F(x, y) = \frac{1}{4} [\operatorname{sen} x \cosh x \cos y \operatorname{senh} y - \cos x \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y \cosh y].$$

Es posible hallar la antitransformada de (3) en general, si la escribimos en la forma

$$f(u, v) = \frac{1}{u+iv} \frac{a_1(u) - a_1(iv)}{u-iv} \quad (2)$$

y suponemos que la función a sea par. Entonces resulta por aplicación formal de unas reglas de cálculo de la transformación de Laplace como solución antitransformada

$$F(x, y) = \frac{i}{2} \int_{x-\frac{y}{i}}^{x+\frac{y}{i}} A_1(z) dz, \quad (5)$$

donde A_1 es la antitransformada de a_1 y una función impar. Como prueba es posible legitimar cada paso de la deducción, pero más sencillo es averiguar, que esta solución cumple la ecuación potencial (1) y tiene como valores contornos en los semi-ejes positivos el valor cero. Tal averiguación directa tiene además la ventaja que no es más necesario que la función (analítica en el primer cuadrante) A_1 tenga una transformada de Laplace. Por ejemplo: A_1 puede ahora crecer en el infinito arbitrariamente rápido.

Advertencia: La expresión (5) representa un conjunto de soluciones singulares del problema de Dirichlet, pero no es seguro si no haya otras.

2. Soluciones singulares del problema de Neumann.

Las soluciones singulares del problema de Neumann son las soluciones cuya derivada es cero en el contorno, tomada la derivada en el sentido normal al contorno, y entendida como el límite allí.

Para obtener tales soluciones hay que poner en (2) las transformadas de las derivadas igual a cero:

$$a_1(u) \equiv b_1(v) \equiv 0.$$

(2) por poner $b_1(v) = -a_1(iv)$, por lo cual renunciamos a la libre elegibilidad de la derivada de contorno $B_1(y)$.

Así queda como solución

$$f(u, v) = \frac{va(u) + ub(v)}{u^2 + v^2} \quad (6)$$

Para la antitransformación tenemos que determinar las funciones a y b de tal manera que resulta una función del tipo transformada, o sea al menos regular en u y v en dos semiplanos derechos y anulándose para $Ru, v \rightarrow \infty$.

Ejemplo 1.

$$a(u) \equiv \frac{1}{u} \quad b(v) \equiv \frac{1}{v}$$

$$f(u, v) = \frac{1}{uv}$$

$$F(x, y) = 1.$$

Ejemplo 2.

$$a(u) \equiv \frac{1}{u(u^2+1)} \quad b(v) \equiv \frac{-1}{v(v^2-1)}$$

$$f(u, v) = \frac{1}{uv} - \frac{u}{u^2+1} - \frac{v}{v^2-1}$$

$$F(x, y) = 1 - \cos x \cosh y.$$

Ejemplo 3.

$$a(u) \equiv \frac{1}{u^{2n-1}} \quad b(v) \equiv -\frac{(-1)^n}{v^{2n-1}} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$f(u, v) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{u^{2n-1-2k}} - \frac{1}{v^{2k+1}}$$

$$F(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2n-2-2k}}{(2n-2-2k)!} - \frac{y^{2k}}{(2k)!}$$

siendo los cuatro primeros polinomios

$$n=1 \quad F(x, y) = 1$$

$$n=2 \quad F(x, y) = \frac{x^2}{2!} - \frac{y^2}{2!}$$

$$n=3 \quad F(x, y) = \frac{x^4}{4!} - \frac{x^2}{2!} \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!}$$

$$n=4 \quad F(x, y) = \frac{x^6}{6!} - \frac{x^4}{4!} \frac{y^2}{2!} + \frac{x^2}{2!} \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!}$$

Para la antitransformación general de (6) pongamos

$$b(v) = -\frac{1}{i} a(iv) = \frac{1}{i} a(-iv)$$

(por lo cual la función a debe ser impar) y tenemos como solución transformada

$$f(u, v) = \frac{1}{i} \frac{1}{u+iv} \frac{iv a(u) - u a(iv)}{u-iv},$$

de donde viene por las reglas de la antitransformación formal

$$F(x, y) = +\frac{1}{2} \left[A \left(x + \frac{y}{i} \right) + A \left(x - \frac{y}{i} \right) \right] \quad (7)$$

donde la función A es par.

Como en el problema de Dirichlet, se averigua directamente que (7) cumple el problema de valores contornos de Neumann, con la especialidad que dichos valores son cero.

La función A debe ser analítica en el primer y cuarto cuadrante.

Además valen las mismas advertencias como en el caso del problema de Dirichlet.

Buenos Aires, 30/6/1950.

TERCERAS JORNADAS MATEMATICAS ARGENTINAS

Con todo éxito se realizaron en la primera quincena de julio, las *Terceras Jornadas Matemáticas Argentinas*, organizadas por la Unión Matemática Argentina. Además de numerosos participantes locales, concurrieron a ellas delegaciones científicas del interior y del Uruguay.

Han de destacarse especialmente el apoyo prestado por el señor Decano de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniero Quinterno y la hospitalidad y cordialidad del señor Director del Instituto Radiotécnico, doctor Vignaux, que merecen un agradecimiento especialísimo.

La calidad y cantidad del público matemático concurrente tuvo su agradable nota complementaria en los refrigerios servidos en homenaje a los participantes y sus familiares.

La organización de las *Jornadas*, que resultó perfecta, estuvo a cargo de los colegas M. Sadosky, O. Varsavsky y L. A. Santaló.

Las *Jornadas* fueron iniciadas por una interesante alocución de J. Rey Pastor, desarrollándose a continuación el programa fijado.

Lunes 10 de Julio 17 horas. Sesión inaugural

G. DOETSCH. Sobre el problema de la convergencia en la teoría de la transformación de Laplace.

Martes 11 de Julio 9 horas. Sesión dedicada a Algebra, Geometría y Topología

A. DURAÑONA. Sobre el cálculo exterior de Cartan.

J. L. MASSERA. Estabilidad condicional de un homeomorfismo en el entorno de un punto fijo.

R. RICABARRA - M. COTLAR. Sobre el Análisis Armónico en grupos abelianos.

E. O. ROXIN. Sobre el concepto de ordenación en grupos.

A. E. SAGASTUME LERRA. Divisibilidad en grupoides.

L. A. SANTALÓ. Unas desigualdades entre los elementos de un tetraedro en geometría no-euclidea.

O. E. VILLAMAYOR. Nil-p anillos.

C. VILLEGAS MAÑÉ. Un teorema sobre inversión local de transformaciones.

J. J. SCHAEFFER. Figura mínima que cubre puntos de una red.

Además, otro trabajo de C. Villegas Mañé y dos comunicaciones de R. Laguardia y A. Monteiro, respectivamente.

15 horas. Sesión dedicada a Análisis

M. COTLAR - Y. FRENKEL. Mayorantes no aditivas en la teoría de Perron-Denjoy.

M. COTLAR - R. RICABARRA. Series lacunares trigonométricas de dos variables.

Y. FRENKEL - M. COTLAR. Sobre un lema de F. Riesz.

- A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. Sobre una representación de la delta cónica.
M. GUTIÉRREZ BURZACO. Nota a la memoria de Cotlar-Ricabarra sobre la integral de Caratheodory.
L. KOSCHMIEDER. Una contribución a la teoría de las funciones elípticas.
J. L. MASSERA. Sistemas de ecuaciones diferenciales periódicas de período T con respecto a la variable independiente y que admiten soluciones de período T' inconmensurable con T .
P. PI CALLEJA. Sobre las funciones absolutamente continuas.
D. VOELKER. Sobre las soluciones singulares de la ecuación de Laplace en el primer cuadrante.

Miércoles 12 de Julio. 9 horas. Sesión dedicada a Metodología y Didáctica

- R. G. CARRANZA. Sobre el significado de la ley débil de los grandes números desde el punto de vista de la inferencia estadística.
R. GARCÍA. Fundamento semántico del concepto de número.
M. C. DE MACAENO. El método de laboratorio en la enseñanza de la Matemática.
P. PI CALLEJA. Nombramiento de profesores de Matemática en la enseñanza media.
— — Espiritu y orientación de la Matemática en el bachillerato.

15 horas. Sesión dedicada a Fisicamatemática y Matemática Aplicada

- K. FRÄNZ. Teoría de los servomecanismos lineales de alta precisión.
J. J. GIAMBIAGI. Aplicación del método de Hadamard al cálculo del campo mesónico.
E. A. M. MACHADO. Cálculo del promedio mensual de temperatura en base a los promedios mensuales de 8, 14 y 20 horas.
S. SISPA NOV. Oscilaciones en el caso de resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad.
O. A. VARSAVSKY. Aplicación de algunos conceptos de grupos topológicos a la Mecánica Cuántica.

RESÚMENES DE LOS TRABAJOS PRESENTADOS

Damos a continuación los resúmenes de la mayoría de los trabajos presentados a las «Terceras Jornadas Matemáticas Argentinas», celebradas en Buenos Aires los días 10, 11 y 12 de julio de 1950. De algunos trabajos (Doetsch, Voelker, Giambiagi) no se publican los resúmenes, pues en este mismo número los trabajos aparecen in extenso. En números sucesivos irán apareciendo también algunos trabajos in extenso de los que aquí damos su resumen.

Trabajos de Algebra, Geometría y Topología.

- J. L. MASSERA. *Estabilidad condicional de un homeomorfismo en el entorno de un punto fijo.*

Sea Z un espacio de Banach, producto topológico de dos

espacios X, Y , uno de los cuales, por lo menos, se supone euclidiano (de dimensión finita). Sea T un homeomorfismo en Z con O como punto fijo. Admitimos que T tiene una diferencial de Fréchet en O : $Tz = Nz + o(\|z\|)$, N lineal; más precisamente, si $z = (x, y)$, $\zeta = Tz = (\xi, \eta)$, $x, \xi \in X$, $y, \eta \in Y$, entonces $\xi = Lx + o(\|z\|)$, $\eta = My + o(\|z\|)$, L, M lineales. Bajo hipótesis generales acerca de las normas de L, M , se demuestra la existencia de un «conjunto de estabilidad», es decir, de un conjunto S tal que: a) $TS \subseteq S$; b) si $z \in S$, $T^n z \rightarrow 0$; c) S es el máximo conjunto con las propiedades a) y b). S tiene una propiedad de separación con respecto al espacio Z .

Si se aumentan las restricciones sobre T se obtiene gradualmente resultados que aclaran la naturaleza topológica y analítica de S . Por ejemplo, si T admite una diferencial de Fréchet continua en el contorno de O (si T es analítica), S es el gráfico de una función $y = F(x)$ que admite una diferencial de Fréchet continua (que es analítica) en el entorno de O . Sin estas hipótesis suplementarias S puede ser un conjunto bastante complicado, a saber, puede no ser un continuo o puede ser un continuo que no es de conexión curvilínea.

R. A. RICABARRA y MISCHA COTLAR, *Sobre el análisis armónico en grupos abelianos*.

La fundamentación del análisis armónico suele hacerse o bien usando la teoría de ideales de anillos normados (Raikoff, Gelfand), o combinando el método de puntos extremos con la teoría de representaciones de espacios de Hilbert (Cartan, Godelement). En el presente trabajo se ofrece una exposición simplificada y elemental de esta teoría, prescindiendo de la teoría de operadores de espacios de Hilbert y simplificando las demostraciones de los teoremas de Bochner y de Plancherel.

EMILIO O. ROXIN, *Sobre el concepto de ordenación en grupos*.

El concepto de orden, es decir de conjunto ordenado, ha demostrado ser de una fecundidad extraordinaria en la historia de la matemática. Resulta, pues, lógico, tratar de aplicarlo a una estructura tan importante como ser el grupo. Eso es, sin embargo, en general imposible. Cuando se trata de un semigrupo positivo, se hace sin dificultad y el semigrupo resulta convertido en un látice. En cambio en los grupos más sencillos, los cíclicos, no es lógicamente aplicable el concepto de ordenación, ya sea lineal

o parcial. A ellos se puede aplicar, a su vez, la noción de orden cíclico.

Los postulados del orden cíclico fueron establecidos por E. V. Huntington: «Sets of completely independent postulates for cyclic order», Proc. Nat. Acad. Sci., 1924, aún cuando el origen de estos postulados corresponde evidentemente a los trabajos, anteriores, de fundamentación rigurosa de la geometría. Huntington enuncia los siguientes postulados:

Dado un conjunto de elementos $a, b, c, \dots$ definimos una relación ternaria, tal que 3 elementos a, b, c (distintos) pueden estar en una relación de sucesión que escribimos abc , tal que satisface a:

E) $abc \rightarrow cab$.

B) Si a, b, c son distintos, se cumple por lo menos una de las relaciones $abc, bca, cab, acb, cba, bac$.

C) Si a, b, c son distintos, las relaciones abc, acb se excluyen.

D) Si se verifica la relación abc , son a, b, c distintos.

2) $xab, ayb \rightarrow xay$.

3) $xab, ayb \rightarrow xyb$.

9) Si a, b, c, x son distintos y se cumple abc , entonces se cumple una de las dos relaciones abx, xbc .

Para determinar el orden cíclico pueden utilizarse, como demuestra Huntington, indistintamente los siguientes sistemas de postulados: $E, B, C, D, 2$ — $E, B, C, D, 3$ — $E, B, C, D, 9$. Huntington también demuestra la independencia de estos postulados.

Evidentemente, como un grupo puede, en general, contener subgrupos cíclicos de orden finito y de orden infinito, un concepto de orden más general, para ser aplicable en grupos, debe incluir los de orden lineal (o mejor, parcial) y de orden cíclico.

Damos a continuación un sistema de postulados que incluye ambos conceptos de orden; y que llamamos ordenación ternaria:

I) Dados 3 elementos a, b, c distintos, pueden estar ellos en una relación de sucesión que escribimos abc .

II) abc es incompatible con cualquiera de las permutaciones impares acb, bac, cba .

III) $abc, axb \rightarrow xbc, axc$.

IV) $abc, bxc \rightarrow abx, axc$.

V) $abc, cda \rightarrow bca$.

Se discuten estos postulados, mediante los que se llega a lo que parece la propiedad más fundamental:

Teorema: Si se verifica abc, cda , también se verifica: $abd, acd, bcd, bca, bda, cdb, cab, dab, dac, dbc$. Es decir, estamos en presencia del orden cíclico.

Toda ordenación parcial da origen a una ordenación ternaria, que a su vez queda determinada por esta última, con tal que toda cadena que aparezca en la ordenación parcial tenga más de dos elementos.

Las aplicaciones a la teoría de grupos son evidentes en los casos más sencillos, pero es de esperar que en casos más complicados este concepto de orden también pueda ser de utilidad.

ALBERTO E. SAGASTUME BERRA. *Divisibilidad en grupoides*.

Sea G un *grupoide* o sistema cerrado con respecto a un producto asociativo (conmutativo y con unidad 1). Si se da una ley M que a cada $a \in G$ haga corresponder un subconjunto $M(a)$ de un conjunto fijo M , a se dice *divisor de b según M* , $a|b(M)$, cuando $M(b) \subseteq M(a)$. Los conjuntos $M(a)$ deben cumplir solamente la condición $M(ab) \subseteq M(a)$. Queda así generalizada la noción de divisibilidad, cumpliéndose muchas de las propiedades elementales referentes a múltiplos, submúltiplos, unidades, elementos asociados e ideales: un (M) -ideal es un subconjunto que, simultáneamente con un $a \in G$, contiene a todos sus múltiplos (M) .

El sistema $\{I\}$ de todos los (M) -ideales $I \subseteq G$ goza de propiedades que son características y permiten, por lo tanto, inversamente, determinar la divisibilidad (M) . Otro tanto ocurre con las clases $A, B, \dots$ de elementos asociados (M) . Se tienen así dos procedimientos para determinar todas las posibles (M) .

Una divisibilidad (M) se dice *incluida* en otra (M') (de un mismo grupoide G), $(M) \subseteq (M')$, cuando $a|b(M')$ implica $a|b(M)$. Queda así definido un ordenamiento parcial a cuyo respecto todas las divisibilidades constituyen un *lattice* completo $L = L(G)$; reunión e intersección de (un conjunto arbitrario de) divisibilidades, dan también divisibilidades en G . El cero de este *lattice* L es la divisibilidad *trivial* (T) , caracterizada por $a|b(T)$ cualesquiera sean a y b ; la unidad de L es la divisibilidad absoluta (A) , caracterizada por ser $a|b(A)$ si y sólo si $b = a \cdot c$.

Se puede definir el grupoide *asociado* G^* de G , que se obtiene identificando los elementos de G que pertenecen a cada

clase de asociados absolutos, y definiendo entre estos nuevos elementos de G^* , o entre las clases de asociados (A) de G , un producto $C(a) \cdot C(b) = C(ab)$, donde $C(x)$ es la clase que contiene a x . La propiedad más importante de G^* y que justifica su introducción consiste en que los *lattices* $L(G^*)$, $L(G)$ son isomorfos.

El trabajo termina con la consideración de algunas divisibilidades especiales y ejemplos. En particular se construye el grupoide asociado E_m^* del grupoide E_m de (clases de) restos módulo m en el campo de los enteros. Si el módulo se descompone en factores primos, $m = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$, E_m^* depende solamente de los e_i y no de los p_i . En particular, el *lattice* $L(E_{p^n}^*)$ es isomorfo al de subconjuntos de un conjunto de n elementos.

L. A. SANTALÓ. *Unas desigualdades entre los elementos de un tetraedro en geometría no-euclidiana.*

Pólya ha demostrado, mediante las probabilidades geométricas, que entre las longitudes l_i de las aristas de un tetraedro y los ángulos diedros α_i correspondientes existen las desigualdades

$$\frac{\pi}{3} \sum_1^6 l_i < \sum_1^6 l_i \alpha_i < \frac{\pi}{2} \sum_1^6 l_i.$$

Se trata de la generalización de estas desigualdades a las geométricas no-euclidianas.

ORLANDO E. VILLAMAYOR. *Nil - p - anillos.*

Estudio sobre los anillos que cumplen las condiciones $(x - xp)^i = 0$, $(px)^j = 0$, donde p es un número primo fijo e i y j funciones de x , la primera de ellas acotada. (La segunda condición no es necesaria para $p=2$). Se estudian los ideales primos, se da un teorema de representación y se estudia la aritmética de los ideales en esta clase de anillos.

CESÁREO VILLEGAS MAÑÉ. *Un teorema sobre inversión local de transformaciones.*

Diremos que un punto $\alpha \in E_\xi$ es regular para la transformación $x = x(\xi)$ si esta transformación es continua en α y localmente topológica en todos los puntos de un entorno reducido de α .

De los teoremas de inversión local y de prolongación continua de transformaciones interiores, ambos debidos a Stoilow, se deduce inmediatamente que si E_x y E_ξ son localmente homeomor-

fos a E_2 , la transformación $x=x(\xi)$ en un punto regular es localmente equivalente a la transformación $z=\zeta^p$ en $\zeta=0$, siendo z y ζ variables complejas.

El teorema de inversión en los puntos regulares extiende este resultado a espacios menos restringidos en la siguiente forma:

Teorema: Si α es un punto regular para una transformación $x=x(\xi)$ de un espacio E_ξ regular, localmente compacto, que satisface el primer axioma de numerabilidad, a un espacio E_x localmente homeomorfo a E_n , dado un entorno U de α y un entorno V de su imagen a , se puede determinar una esfera centrada en a y un dominio $D \subset U$ que contiene a α y $K \subset V$ tal que $D - (\alpha)$ se divide en m dominios desunidos D_h de tal manera que:

1) si $n \geq 3$ cada $C_h = D_h \cup (\alpha)$ se transforma topológicamente en K ;

2) si $n=2$ se puede hallar una correspondencia topológica T_h entre C_h y un círculo K_h del plano complejo E_ζ , con centro en el origen $\zeta=0$, de tal manera que si $\xi\zeta$ se corresponden mediante T_h es, considerando también a x como variable compleja,

$$x(\xi) = a + \zeta^{kh};$$

3) si $n=1$ la esfera K es un intervalo I cuyo punto medio es a , y es por lo tanto la unión de los intervalos semicerrados $I^- I^+$ cuyo único punto común es a , y hay p conjuntos C_h que se transforman topológicamente en I^+ y q que se transforman topológicamente en I^- , siendo $m = p + q$.

CESÁREO VILLEGAS MAÑÉ. *Sobre algunas fórmulas relativas al movimiento de flúidos.*

Se dan demostraciones rigurosas de las siguientes fórmulas, ampliamente conocidas

$$\frac{d}{dt} \int_{A(t)} f dA = \int_{S(t)} f(\overline{VN}) dS + \int_{A(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dA \quad (1)$$

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{dW_R}{dt} = G \left(h_2 + \frac{1}{2} V_2^2 + Z_2 \right) - G \left(h_1 + \frac{1}{2} V_1^2 + Z_1 \right) + \varepsilon \quad (2)$$

$$\frac{dW_R}{dt} = G \left[\int_{P_1}^{P_2} v dp + \frac{1}{2} V_2^2 - \frac{1}{2} V_1^2 + Z_2 - Z_1 \right] + \varepsilon' \quad (3)$$

$$\frac{dW_R}{dt} = G(\bar{V}_2 \bar{V}_2^* - \bar{V}_1 \bar{V}_1^*) + \varepsilon''. \quad (4)$$

La fórmula (1) da la derivada respecto al tiempo de la integral de una función cualquiera f cuando el dominio de integración es el volumen $A(t)$ ocupado en el instante t por una determinada masa de fluido.

Las fórmulas restantes se refieren al funcionamiento en régimen de aparatos a través de los cuales circula el fluido.

Estos aparatos pueden tener o no partes giratorias, como las turbinas.

$\frac{dW_R}{dt}$ es el trabajo que entra al aparato por unidad de tiempo a través de sus partes giratorias; $\frac{dQ}{dt}$ es el calor recibido por unidad de tiempo por el fluido circulante; G es la cantidad de fluido que pasa por unidad de tiempo. Las demás variables tienen los significados usuales.

JOSÉ L. MASSERA - JUAN J. SCHÄFFER. *Figura mínima que cubre puntos de una red.*

Consideremos la red de puntos de coordenadas enteras respecto de un par de ejes ortogonales. Una figura plana F se llamará una figura recubridora cuando, por cualquier posición de F en el plano, por lo menos un punto de la red es cubierto por ella. El problema consiste en: hallar, entre todas las figuras recubridoras, aquella de área mínima.

Se estudia el caso de las figuras convexas, se hallan acotaciones para el área de figuras recubridoras, y caracterizaciones geométricas de las mismas, algunos criterios para figuras «minimales» o indisminuibles, y una serie de ejemplos interesantes.

Trabajos de Análisis.

MISOHA COTLAR y YANNY FRENKEL. *Mayorantes no aditivas en la teoría de Perron y Denjoy.*

En la teoría clásica de integral de Perron (o de Denjoy) se prueba que si una función de punto $p(x)$ admite por lo menos una mayorante y una minorante, entonces $p(x)$ es integrable Perron (Denjoy). Aquí las mayorantes o minorantes son funciones de intervalo *aditivas*. El objeto del presente trabajo es

probar que el mismo resultado subsiste si $p(x)$ admite una mayorante y una menorante cualesquiera, *aditivas* o no. Para tal fin se extienden previamente a funciones no aditivas teoremas fundamentales de la teoría de Perron-Denjoy.

MISCHA COTLAR - R. A. RUCABARRA. *Sobre series ortogonales lacunares de dos variables.*

Se prueba que las principales propiedades de las series trigonométricas lacunares, y las de Rademacher, subsisten para una clase más amplia de las series ortogonales que verifican determinadas condiciones generales, obteniéndose así un método unificado de demostración. El mismo método permite extender al caso de series lacunares de 2 variables los resultados clásicos demostrados para 1 variable.

YANNY FRENKEL - MISCHA COTLAR. *Sobre un lema de F. Riesz.*

F. Riesz probó en forma muy elegante el teorema fundamental de la integral de Lebesgue, haciendo uso de un simple lema, que resultó útil también para otras cuestiones; así por ejemplo, Hartman mostró que el mismo lema puede ser usado para la demostración del teorema ergódico. En la presente nota se prueba que dicho lema, convenientemente generalizado, puede servir para demostrar el teorema correspondiente de la integral de Denjoy.

ALBERTO GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre una representación integral de la delta cónica.*

Sea $F(t)$ una función definida en todo el eje real. Supongámosla, para simplificar, sumable (aunque las consideraciones que siguen tienen validez en casos mucho más generales). Formemos con ella la integral

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{F(t) dt}{t^2 - z^2}.$$

Según que $\operatorname{Re}(z) \geq 0$, esta integral define dos funciones regulares en los semiplanos superior e inferior respectivamente. Puede demostrarse que al tender z a x se verifica

$$\lim_{z \downarrow x} \Phi_1(z) = \lim_{z \uparrow x} \Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{F(t) dt}{t^2 - x^2} = \Phi_1(x) = \frac{1}{2x} [F(x) + F(-x)] +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{F(t) dt}{t^2 - x^2}, \quad z = x + y, \quad y > 0, \\
 \lim_{\uparrow x} \phi_2(z) = \lim_{\downarrow x} & - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{F(t) dt}{t^2 - z^2} = \phi_2(x) = \frac{1}{2x} [F(x) + F(-x)] - \\
 & - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{F(t) dt}{t^2 - x^2}, \quad y < 0.
 \end{aligned}$$

Es decir, que el efectuar sobre $F(t)$ las operaciones indicadas obteniendo $\phi_1(x)$ y tomar la parte real de esta función, equivale a operar sobre $F(t)$ con la delta cónica $\delta(t^2 - x^2)$ de Dirac. Igualmente el operador que transforma $F(t)$ en $F_1(x)$ equivale a la que puede llamarse «delta cónica positiva». Consideraciones similares valen para la función $F_2(x)$.

MARIO GUTIÉRREZ BURZACO. *Nota a la memoria de Cotlar-Ricabarra sobre la integral de Caratheodory.*

La teoría de la integral y medida de Daniell-Stone-Bourbaki considera una funcional *lineal* sobre un látice vectorial. Cotlar y Ricabarra, por analogía con la medida exterior de Caratheodory, consideran una funcional *convexa* y logran una teoría mucho más amplia.

Se simplifica en esta nota la caracterización del látice vectorial de las funciones «integrables Caratheodory», sobre el cual la funcional es lineal.

J. L. MASSERA. *Sistemas de ecuaciones diferenciales periódicas de período T con respecto a la variable independiente y que admiten soluciones de período T' incommensurable con T .*

Para sistemas de orden $n=1$ (una sola ecuación de primer orden) o para sistemas lineales de orden $n \leq 2$, se demuestra que la existencia de tales soluciones es imposible. En cambio, si el orden es mayor, pueden existir tales soluciones y es posible hallar condiciones necesarias y suficientes para que tal cosa ocurra. Estas condiciones dicen, esencialmente, que la trayectoria de esas soluciones excepcionales es una curva simple y cerrada sobre la cual los segundos miembros de las ecuaciones no dependen, en realidad, de la variable independiente.

PEDRO PI CALLEJA. *Sobre las funciones absolutamente continuas.*

Se da un ejemplo muy sencillo y se discuten las demostraciones de los teoremas referentes a la superposición de funciones.

Trabajos de Metodología y Didáctica.

ROQUE G. CARRANZA. *Sobre el significado de la ley débil de los grandes números desde el punto de vista de la inferencia estadística.*

La forma habitual de enunciar el teorema de Bernouilli conduce a confusiones, que desaparecen al considerarlo desde el punto de vista de la teoría de la inferencia estadística desarrollada modernamente, y para la que puede servir como un ejemplo que tiene la ventaja de su sencillez y de ser de fácil demostración.

ROLANDO VÍCTOR GARCÍA. *Fundamento semántico del concepto de número.*

El objeto de este trabajo consiste en una exposición del procedimiento por el cual es posible obtener los conceptos matemáticos (en particular el concepto de número) a partir de nociones puramente lógicas. Los puntos tratados son los siguientes:

1) *Importancia del problema*: Se señala la importancia de la fundamentación de la matemática a partir de nociones lógicas, ya que ella permite un tratamiento científico de problemas que habían sido con frecuencia objeto de especulación metafísica. Se indica la notable contribución de la escuela logística en este terreno.

2) *Ubicación del problema*: Se discute el problema de dónde encontrar una línea divisoria entre lógica y matemática. Se analiza la sugestión de W. V. O. Quine, según la cual la lógica se ocupa del cálculo proposicional y de la teoría de la cuantificación, mientras que la matemática comienza con el estudio de la relación «member-ship» (para Quine la posición loigcista se reduce al hecho de que toda la matemática se reduce a teoría de clases). Se precisa con nitidez cuál es el sistema semántico que involucra la posición mínima de Quine, y se plantea el problema de si el ámbito U' de objetos de la teoría de clases agrega algún contenido al universo de los «designata» de aquel sistema semántico.

3) *Clases y propiedades*. Se pasó revista a las distintas formas en que ha sido concebida la teoría de las clases. a) Russell y las clases como símbolos incompletos; b) Quine y las razones para

adoptar «clase» como concepto primitivo, y no «propiedad»; c) Carnap, y la teoría según la cual «clase» y «propiedad» no son sino aspectos semánticos distintos de entidades neutrales.

4) *Las paradojas*. Se estudia la influencia que tuvieron las paradojas lógicas en el estudio de la teoría de las clases. La clasificación de las paradojas en paradojas lógicas y paradojas semánticas. La teoría de los tipos de Russell. Los tipos ramificados. El axioma de reducibilidad y el axioma de extensionalidad. Inconvenientes de la teoría de los tipos, aún de la simple. La solución de Quine: abolir los tipos y restringir el empleo de «membership». Cómo maneja Quine la abstracción de clases y cómo evita las paradojas lógicas.

5) *La definición de número*. Se estudian los pasos necesarios para obtener una definición rigurosa de número natural en el sistema semántico mínimo del que se ha partido. Se definen los números cardinales y se demuestra que las definiciones son adecuadas. Se define luego el «número de miembros de una clase dada» y el «número cardinal» de manera general. Se definen las relaciones de sucesor y ancestral.

6) *El principio de inducción completa*. Se estudia con detalle la relación «ancestral» y se muestra con detalle cómo es posible utilizarla para una completa formalización del principio de inducción completa.

7) *El axioma del infinito*. Se analizan las presuposiciones semánticas involucradas por el axioma del infinito. Se plantean dos vías para solucionar la dificultad: a) Abolición de la teoría de los tipos —siguiendo a Quine— y demostrar como teorema al «axioma del infinito», siendo para ello estudiar las clases engendradas a partir de la clase nula; b) Adoptar —siguiendo a Carnap— un determinado lenguaje coordinado semejante al que sirve de base a este trabajo.

Nota: Definiciones adoptadas en el trabajo:

$$\langle 0 \rangle = DF \langle (\lambda f) \sim (\exists x) (fx) \rangle$$

$$\langle 1 \rangle = DF \langle (\lambda f) [(\exists x) (fx \cdot (z) (fz \equiv (z \equiv x)))] \rangle$$

$$\langle 2 \rangle = DF \langle (\lambda f) [(\exists x) (\exists y) \{ \sim (x \equiv y) \cdot (z) (fz \equiv (z \equiv x) \vee (z \equiv y)) \}] \rangle$$

$$\langle Nn'f \rangle = DF \langle (\lambda g) [Is(g, f)] \rangle \text{ «}(Is(g, f) \text{» significa «} g \text{ es isomorfo cont.»}$$

$$\langle S'n \rangle = df \langle (\lambda f) E)y [fy \cdot (g) ((g \equiv f \cap \bar{y}) \supset n(g))] \rangle$$

$$\langle *R \rangle = df \langle x z(g) [\{ \langle R \rangle g \subset g \} . (gz)] \supset gx \rangle$$

$$\langle *S \rangle_{10} = df \langle (\lambda n) \{ n o(a) [(\langle s \rangle \alpha \subset \alpha) . \alpha(o)] \supset \alpha(n) \} \rangle$$

$$\langle Nn \rangle = df \langle *S''_{10} \rangle.$$

MATILDE C. DE MACAGNO. *El método de laboratorio en la enseñanza de la matemática.*

En relación con la dificultad que se presenta a la mayor parte de los alumnos secundarios, se informa en este trabajo, acerca del método de laboratorio para la enseñanza de la matemática, en el ciclo medio, en especial, en las escuelas técnicas industriales y comerciales.

Un breve comentario de los distintos métodos de enseñanza, en especial, el método heurístico, antecede al tema principal.

Se comenta la historia del método de laboratorio. Se hacen consideraciones generales sobre la aplicación e importancia del mismo y se encara su realización por medio de la creación de un laboratorio. Se da una lista de elementos que puede contener el mismo y, al final, se dan los enunciados de trabajos prácticos, como ejemplos de aplicación del método.

Moción: Se propone la formación de una comisión, dentro de la U. M. A. para que estudie el problema de la enseñanza de la Matemática en la escuela secundaria, que podría organizarse con el siguiente plan:

- 1) Formación del profesorado.
- 2) Métodos de enseñanza.
- 3) Programas. — Modificaciones, innovaciones y reestructuración de los mismos

PEDRO PI CALLEJA. Contribución a los temas programados: *Nombramiento de profesores de Matemática en la enseñanza media. Espíritu y orientación de la Matemática en el bachillerato.*

Trabajos de Fisiomatemática y Matemática aplicada.

KURT FRÄNZ, *Teoría de los servomecanismos lineales de alta precisión.*

La siguiente teoría se refiere a los servomecanismos lineales de alta precisión que sirven para el control de magnitudes continuas. Tratamos por ejemplo los dispositivos electromecánicos para la estabilización automática del rumbo de una nave o para mantener una antena directiva de recepción en la dirección de incidencia de las ondas emitidas por un avión.

Sea $x(t)$ el valor preciso de la magnitud controlada (por ejemplo el ángulo de incidencia) y $X(t)$ el valor indicado por el servomecanismo. En un servomecanismo lineal $X(t)$ satisface una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes. A la excitación $x(t) = e^{pt}$ corresponde la respuesta del mecanismo $X(t) = T(p) e^{pt}$. Esta magnitud, la llamada transferencia del sistema admite una sencilla determinación experimental y teórica. Para una excitación arbitraria $x(t)$ resulta

$$X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T(g\omega) f(g\omega) e^{g\omega t} d\omega$$

con $f(g\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-g\omega t} dt.$

En general es difícil evaluar tales integrales de Fourier; pero en el caso de un servomecanismo de alta precisión y de una variable continua $x(t)$ la convergencia numérica de la siguiente serie convergente o semiconvergente para el error del sistema es excelente.

$$\Delta(t) = X(t) - x(t) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n T}{dp^n} \right)_{p=0} \frac{d^n x}{dT^n}.$$

La respuesta del sistema a las perturbaciones de carácter estadístico (al ruido de fondo del receptor o al fading de las ondas) es proporcional al ancho de banda del sistema

$$\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} |T|^2 d\omega$$

mientras el error sistemático Δ disminuye si el ancho de banda aumenta. Se determinan transferencias óptimas (funciones racionales de p) para las cuales se anulan las primeras n derivadas

$$\left(\frac{d^n T}{dp^n} \right)_{p=0}$$

y asume su valor mínimo la magnitud

$$\left(\frac{d^{n+1} T}{dp^{n+1}} \right) \Omega^{n+1} \rightarrow \text{Mín.}$$

Posee transcendencia práctica sobre todo la transferencia óptima con $n=1$

$$T(p) = \frac{1 + \frac{p}{\omega_0}}{1 + \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

a la cual corresponde

$$\left(\frac{d^2T}{dp^2}\right)_{p=0} \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 = -4\pi.$$

Eligimos el ancho de banda óptimo de manera que resulta un error sistemático Δ igual al error estadístico. Las transferencias «óptimas» con valores $n \geq 2$ corresponden a circuitos poco amortiguados. Tal servomecanismo ($n \geq 2$) presentaría transitorios de grán amplitud y duración y de carácter oscilatorio, al iniciar su funcionamiento, mientras después que los transitorios iniciales estén amortiguados, el error $\Delta(t)$ resulta pequeño.

SERGIO SISPANOV. *Oscilaciones en el caso de resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad.*

Se considera el movimiento de un punto material bajo la influencia de una fuerza proporcional a la distancia, y teniendo en cuenta la resistencia del medio proporcional al cuadrado de la velocidad. Mediante una sustitución la ecuación diferencial del movimiento se reduce a la de Bernoulli y se integra por cuadraturas.

Se dan fórmulas exactas para los alejamientos sucesivos y un método gráfico para su rápida construcción. Las integrales que figuran en las expresiones para los períodos sucesivos conducen a las fórmulas aproximadas muy sencillas.

OSCAR A. VARSAVSKY. *Sobre los postulados de la mecánica cuántica.*

Se obtienen los postulados fundamentales de la Mecánica Cuántica agregando al formalismo clásico los siguientes dos principios:

1º) Variables canónicamente conjugadas toman sus valores en espacios topológicos duales.

2º) Existe para cada sistema físico una función de cuadrado sumable en el espacio de coordenadas cuyo módulo mide la densidad de probabilidad en dicho espacio. Su transformada de Fourier mide de la misma manera la densidad de probabilidad en el espacio de impulsos.

PUBLICACIONES DE LA U. M. A.

Revista de la U. M. A. — Vol. I (1936-1937); Vol. II (1938-1939); Vol. III (1938-1939); Vol. IV (1939); Vol. V (1940); Vol. VI (1940-1941); Vol. VII (1940-1941); Vol. VIII (1942); Vol. IX (1943); Vol. X (1944-1945).

Revista de la U. M. A. y órgano de la A. F. A. — Vol. XI (1945-1946); Vol. XII (1946-1947); Vol. XIII (1948); Vol. XIV (1949-1950).

Los volúmenes III, IV, V y VI comprenden los siguientes fascículos separados:

Nº 1. GINO LORIA. *Le Matematiche in Ispagna e in Argentina.* — Nº 2. A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre las series de funciones de Hermite.* — Nº 3. MICHEL PETROVICH. *Remarques arithmétiques sur une équation différentielle du premier ordre.* — Nº 4. A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Una nueva demostración del teorema límite del Cálculo de Probabilidades. Condiciones necesarias y suficientes para que una función sea integral de Laplace.* — Nº 5. NIKOLA OBRECHKOFF. *Sur la sommation absolue par la transformation d'Euler des séries divergentes.* — Nº 6. RICARDO SAN JUAN. *Derivación e integración de series asintóticas.* — Nº 7. Resolución adoptada por la U. M. A. en la cuestión promovida por el Sr. Carlos Biggeri. — Nº 8. F. AMODEO. *Origen y desarrollo de la Geometría Proyectiva.* — Nº 9. CLOTILDE A. BULA. *Teoría y cálculo de los momentos dobles.* — Nº 10. CLOTILDE A. BULA. *Cálculo de superficies de frecuencia.* — Nº 11. R. FRUCHT. *Zur Geometrie auf einer Fläche mit indefiniter Metrik (Sobre la Geometría de una superficie con métrica indefinida).* — Nº 12. A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre una memoria del Prof. J. C. Vignaux.* — Nº 13. E. TORANZOS. *Sobre las singularidades de las curvas de Jordan.* — Nº 14. M. BALANZAT. *Fórmulas integrales de la intersección de conjuntos.* — Nº 15. G. KNIE. *El problema de varios electrones en la mecánica cuantista.* — Nº 16. A. TERRACINI. *Sobre la existencia de superficies cuyas líneas principales son dadas.* — Nº 17. L. A. SANTALÓ. *Valor medio del número de partes en que una figura convexa es dividida por n rectas arbitrarias.* — Nº 18. A. WINTNER. *On the iteration of distribution functions in the calculus of probability (Sobre la iteración de funciones de distribución en el cálculo de probabilidades).* — Nº 19. E. FERRARI. *Sobre la paradoja de Bertrand.* — Nº 20. J. BABINI. *Sobre algunas propiedades de las derivadas y ciertas primitivas de los polinomios de Legendre.* — Nº 21. R. SAN JUAN. *Un algoritmo de sumación de series divergentes.* — Nº 22. A. TERRACINI. *Sobre algunos lugares geométricos.* — Nº 23. V. y A. FRAILE y C. CRESPO. *El lugar geométrico y lugares de puntos áreas en el plano.* — Nº 24. R. FRUCHT. *Coronas de grupos y sus subgrupos, con una aplicación a los determinantes.* — Nº 25. E. R. RAIMONDI. *Un problema de probabilidades geométricas sobre los conjuntos de triángulos.*

En 1942 la U. M. A. ha iniciado la publicación de una nueva serie de "Memorias y monografías" de las que han aparecido hasta ahora las siguientes:

Vol. I; Nº 1. — GUILLERMO KNIE, *Mecánica ondulatoria en el espacio curvo.* Nº 2. — GUIDO BECK, *El espacio físico.* Nº 3. — JULIO REY PASTOR, *Integrales parciales de las funciones de dos variables en intervalo infinito.* Nº 4. — JULIO REY PASTOR, *Los últimos teoremas geométricos de Poincaré y sus aplicaciones. Homenaje póstumo al Prof. G. D. BIRKHOFF.*

Vol. II; Nº 1. — YANNY FRENKEL, *Criterios de biocompacidad y de H -completitud de un espacio topológico accesible de Frechet-Riesz.* Nº 2. — GEORGES VALIRON, *Fonctions entières.*

Además han aparecido tres cuadernos de *Miscelánea matemática.*

S U M A R I O

	Pág.
Notas sobre las distribuciones de Poisson, por A. BLANC-LAPIERRE	3
Asociación Física Argentina. Crónica. Informe y resúmenes de la décimo-cuarta reunión	7
Sobre el problema de la convergencia en la teoría de la transformación de Laplace, por G. DOETSCH	19
<i>Bibliografía.</i> Libros y revistas, por M. VALENTINUZZI	23
Aplicación del método de Hadamard al cálculo del campo electromagnético del electrón, por JUAN JOSÉ GIAMBIAGI	24
Soluciones singulares de la ecuación potencial en el caso de los problemas de Dirichlet y Neumann en el primer cuadrante, por DIETRICH VOELKER	32
Terceras Jornadas Matemáticas Argentinas. Crónica y resúmenes de los trabajos presentados	38

UNION MATEMATICA ARGENTINA

MIEMBROS HONORARIOS

Ennio Levi-Civita (†); Beppo Levi; Alejandro Terracini; George D. Birkhoff (†); Marshall H. Stone; Georges Valiron; Antoni Zygmund.

REPRESENTANTES EN EL EXTRANJERO

Ing. Rafael Laguardia (Uruguay). Ing. José Luis Massera (Uruguay). Dr. Godofredo García (Perú). Dr. Leopoldo Nachbin (Brasil). Dr. Roberto Frucht (Chile). Dr. Peter Thullen (Ecuador). Dr. Mario González (Cuba). Dr. Alfonso Nápoles Gandara (México). Pedro Puig (España). Georges Valiron (Francia). Alejandro Terracini (Italia).

Contribuyen especialmente al sostenimiento de las publicaciones de la UNION MATEMATICA ARGENTINA los siguientes

MIEMBROS PROTECTORES

COMPAÑIA INDUSTRIAL DEL NORTE DE SANTA FE. INGENIO AZUCARERO "ARNO" (Villa Ocampo. F. C. S. F.). — JULIO REY PASTOR (Buenos Aires). — EMILIA J. DE DOMÍNGUEZ (Buenos Aires). — TRICERRI HNOS. (Rosario). — CLOTILDE A. BULA (Rosario). — ELBA R. RAIMONDI (Buenos Aires). — FERNANDO L. GASPAR (Rosario).