

REVISTA

DE LA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

(MIEMBRO DEL PATRONATO DE LA MATHEMATICAL REVIEWS)

ORGANO DE LA

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

Director: José Babini

Redactores de la U. M. A.: Julio Rey Pastor, Luis A. Santaló, Mischa Cotlar

Redactores de la A. F. A.: Enrique Gaviola, Richard Gans, Guido Beck



MIEMBROS TITULARES DE LA U. M. A.

J. BABINI (Santa Fe) (fundador). — M. BALANZAT (San Luis). — J. BARRAL SOUTO (B. Aires) (fundador). — C. A. BULA (Rosario) (fundador). — E. CORMINAS (Mendoza). — A. DURANOÑA y VEDIA (B. Aires). — FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES (B. Aires) (fundador). — FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS (Rosario) (fundador). FACULTAD DE QUÍMICA INDUSTRIAL (Santa Fe) (fundador). — A. FARENGO DEL CORRO (B. Aires). — Y. FRENKEL (B. Aires). — E. GASPAR (Rosario) (fundador). — F. L. GASPAR (Rosario) (fundador). — J. GIANNONE (Rosario) (fundador). — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ (Buenos Aires) (fundador). — J. GONZÁLEZ GALÉ (Buenos Aires) (fundador). — W. S. HILL (Montevideo) (fundador). — OBSERVATORIO ASTRONÓMICO (La Plata). — A. LASCURAIN (Buenos Aires). — J. OLGUIN (Rosario) (fundador). — D. PAPP (Buenos Aires). — P. Pí CALLEJA (San Juan). — E. R. RAIMONDI (Buenos Aires) (fundador). — J. E. REYNAL (Buenos Aires). — J. REY PASTOR (Buenos Aires) (fundador). — A. E. SAGASTUME BERRA (La Plata). — E. L. SAMATÁN (Buenos Aires) (fundador). — J. SORTHEIX (Tucumán) (fundador). — D. T. A. DE SPELUZZI (Buenos Aires) (fundador). — F. TORANZOS (Mendoza). — C. A. TREJO (La Plata). — J. C. VIGNAUX (Buenos Aires). — E. H. ZARANTONELLO (La Plata).



BUENOS AIRES

1951



UNION MATEMATICA ARGENTINA

La U. M. A. reconoce cuatro categorías de miembros: honorarios, protectores, titulares y adherentes. El miembro protector paga una cuota anual de 100 \$, por lo menos; el titular una cuota mensual de 5 \$ o anual de 50 \$; y el adherente una cuota anual de 10 \$. Los pagos deberán efectuarse por cheque, giro u otro medio libre de gastos, a la orden de la Tesorera, Prof. Clotilde A. Bula, Rioja 3681. Olivos F.C.M.

Por ser la U. M. A. miembro del patronato de la Mathematical Reviews (sponsoring member), los socios de la U. M. A. tienen derecho a suscribirse a esa importante revista de bibliografía y crítica con 50 % de rebaja sobre el precio de suscripción que es de 20 dólares por año. Los socios de la U. M. A. pagarán por tanto sólo 10 dólares por año.

Los autores de trabajos reciben gratuitamente una tirada aparte de 50 ejemplares. Las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

JUNTA DIRECTIVA

Presidente, Julio Rey Pastor, Yerbal 898, Buenos Aires.
Vicepresidentes, César A. Trejo, Félix E. Herrera. Secretario general, Máximo Valentinuzzi. Secretarios locales, O. A. Varsavsky (Bs. Aires), R. A. Ricabarra (La Plata), P. L. Checchi (Córdoba), E. Gaspar (Rosario), S. Fernández Long (Bahía Blanca), I. C. Guglielmo (Tucumán), S. Sispanov (San Juan). J. de Dios Olivieri (Santa Fe), M. Balanzat (San Luis), F. Toranzo (Mendoza). Tesorera, Clotilde A. Bula, Protesorera, Maria Josefina Erramuspe, Director de Publicaciones, J. Babini.

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

La A. F. A., asociación privada de investigadores, profesores y estudiantes de física y de astronomía, tiene por objeto fomentar el progreso de la enseñanza de dichas materias por medio de reuniones científicas periódicas y de la publicación de trabajos originales.

Podrán ingresar como socios activos quienes hayan efectuado investigaciones originales; pueden ser socios adherentes los profesores que no cumplan este requisito; y socios estudiantes los que hayan aprobado el primer año de estudios de física o de astronomía.

Las solicitudes de ingreso, que deberán llevar la firma de dos socios activos o adherentes, habrán de dirigirse al secretario local que corresponda. Los socios activos abonarán una cuota mensual de 7 \$, los adherentes de 5 \$ y los estudiantes de 3 \$. En estas cuotas están incluidas las suscripciones al órgano de la A. F. A. y a la revista "Ciencia e Investigación".

Los manuscritos destinados a la publicación y la correspondencia administrativa deberán enviarse al delegado de la A. F. A., Guido Beck, Laprida 922, Córdoba.

Para la redacción y presentación de los trabajos se agradecerá si tengan en cuenta las *Normas generales* distribuidas con esta revista en 1945.

COMISION DIRECTIVA

Presidente: Ricardo Gans
Tesorera: Estrella Mazzolli de Mathov, San Juan 1931, Buenos Aires.
Secretarios locales: Ernesto E. Galloni, Buenos Aires, Yerbal 1763.
Marco A. Poggio, La Plata, calle 41 N° 764.
Guido Beck, Córdoba, Laprida 922.
Augusto Battig, Tucumán, 25 de Mayo 731.

Abonnement annuel à l'étranger: 4.00 dollars (Etats-Unis).

Prière d'adresser toute la correspondance scientifiques, administrative et les échanges à l'adresse ci-dessous:

REVISTA DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA
Casilla de Correo 3588
Buenos Aires (Argentina)

JOSE WÜRSCHMIDT †

(1886 - 1950)

Tenemos que rendir homenaje a la obra de José Würschmidt, fallecido el día 6 de julio de 1950 en Yerba Buena, Tucumán.

Nacido en 1886 en Bayreuth (Alemania), José Würschmidt se doctoró en física en la Universidad de Erlangen como alumno del profesor Wiedemann en 1909 con un trabajo de tesis «sobre descargas discontinuas y la llamada capacidad de tubos de descarga». Erlangen era, entonces, un importante centro de investigaciones, del cual salió, entre otros, el compañero de estudios de Würschmidt H. Geiger.

El trabajo de tesis abrió a Würschmidt la carrera académica, cuyas etapas principales indicamos brevemente: Privatdozent (Erlangen, 1911), a. o. Professor (Erlangen, 1916), Jefe de sección del Departamento Climatológico (Estambul, 1917), Jefe de sección del Laboratorio de Investigaciones (Krupp, Essen, 1921), a. o. Professor (Colonia, 1924), Director del Instituto de Física (Tucumán, 1925), Presidente de la Academia de Ciencias y Tecnología (Tucumán, 1949), Dr. h. c. (Tucumán, 1950).

Según la costumbre, damos al final de la presente nota la lista de publicaciones de José Würschmidt. La obra es impresionante. Comprende 125 publicaciones, como resultado de un trabajo académico de 40 años.

En el año 1925 José Würschmidt llegó a este país. Vale la pena hacer recordar este momento y vale la pena hacer recordar el procedimiento ortodoxo que condujo a esta llegada, el único que puede dar resultados seguros. El rector de la Universidad de Tucumán, recientemente fundada, se dirigió al director del Instituto de Física de la Universidad de La Plata, entonces internacionalmente conocido, encargándole contratar a un hombre apropiado para crear y dirigir un instituto de física en Tucumán, proveyéndolo de los poderes necesarios a tal fin. El paso final fué dado en Hamburgo, donde el Dr. R. Gans se encontró con el Dr. Würschmidt y, en el nombre del rector, formuló y firmó el con-

trato. El resultado quizás no es suficientemente conocido en el país, pero es ampliamente reconocido en el ambiente tucumano. Consiste en que José Würschmidt contribuyó, en una de las posiciones más destacadas, a que la pequeña universidad, en la lejana provincia y sin tradiciones formadas, se acercara más al espíritu de una universidad tradicional que cualquier otra en el país.

La lista de publicaciones deja ver claramente el sacrificio que José Würschmidt, como investigador, hizo para su universidad. A partir de 1925 sus publicaciones de trabajos de investigación se hacen más escasas y dan lugar a publicaciones de orden didáctico, necesarias para formar una enseñanza universitaria básica. Pocos serán los investigadores dispuestos a hacer tal sacrificio.

Un período de 25 años parece largo, pero no lo es en la vida de una universidad. José Würschmidt expresó muchas veces que no consideraba lo que había logrado como una obra completa. Era su deseo que, sobre la base que él había establecido, se desarrollase una intensa labor de investigación científica. Todavía durante los últimos días de su vida colaboró en la preparación de un reglamento para una escuela para graduados (carrera de doctorado), pensando en los alumnos que, en los últimos años de su actuación, empezaron a reunirse alrededor de él.

El Dr. Würschmidt consideraba que el momento más oportuno para asegurar el desarrollo del instituto a su cargo y la continuación de su obra era cuando la nueva ley universitaria dió amplias posibilidades y el ministerio favorecía, en particular, a la Universidad de Tucumán. No tuvo éxito con su iniciativa. Hace falta analizar las razones profundas que se oponían a la realización de su intención.

Concretamente, se trató de conseguir la colaboración de un joven físico experimental de reconocido talento. No se la consiguió, por la competencia de una universidad norteamericana. Una situación tal deja a cualquier universidad argentina completamente indefensa, lo que constituye un defecto básico estructural. No son los investigadores quienes tienen que competir para conseguir una cátedra, son las cátedras que tienen que conseguir los mejores investigadores ofreciéndoles los mejores medios de trabajo. Las autoridades universitarias argentinas no tienen autori-

dad para garantizarlos para un período superior a un año de presupuesto (*). Tienen sólo autoridad para garantizar títulos y sueldos. En muchas oportunidades ofrecen sueldos más elevados que sus eventuales competidores. No obstante, no pueden tener éxito. No se contrata a un profesor para que, después, cuando quiere trabajar, tenga que emplear su tiempo en luchar contra la administración para conseguir lo indispensable. Se contrata a un profesor para que pueda colaborar con la administración a fin de obtener el mayor número posible de resultados positivos. Para eso hace falta que todos los medios indispensables previsibles sean garantizados de antemano y no pedidos a posteriori. Este punto es esencial, porque no puede haber un desarrollo sistemático favorable de las universidades argentinas antes de que ese defecto estructural haya sido eliminado.

En una oportunidad, el Dr. Würschmidt se quejó, en una conversación, de no haber encontrado nunca reconocimiento de su trabajo de parte de sus colegas de otras universidades. He considerado tal deseo como prematuro. El reconocimiento de la obra de José Würschmidt no puede provenir sino de criterios conocidos y aceptados por todo el ambiente, criterios que apenas empiezan a imponerse. Pero sé que esta misma obra impone a aquellos que saben apreciarla, el deber de duplicar el esfuerzo para difundir estos criterios y para defenderlos.

Guido Beck

PUBLICACIONES DEL DR. J. WÜRSCHMIDT

1909

- (1) *Ueber diskontinuierliche Entladungen und die sogenannte Kapazitaet von Entladungsroehren.* Inaug.-Diss. Erlangen (49 p.).
- (2) *Ueber diskontinuierliche Entladungen und die Bestimmung der Dauer einer Entladung.* Verh. d. D. phys. Ges., 11 (10 p.).
- (3) *Ueber die sogenannte Kapazitaet von Entladungsroehren.* Verh. D. phys. Ges., 11 (10 p.).

(*) En los países anglosajones son las autoridades académicas quienes tienen esa autoridad. En la Europa continental los institutos (o cátedras) tratan, por esa razón, directamente con el ministerio competente.

1910

- (4) *Ueber die Anregbarkeit von Entladungsroehren mit Gluehkathode und ihre Verwendbarkeit fuer die drahtlose Telegraphie.* Verh. d. D. phys. Ges. 12 (9 p.).

1911

- (5) *Ueber das Spektrum des elektrischen Lichtbogens.* Jahrb. f. Photographie (2 p.).
(6) *Ueber den Potentialgradienten bei ganz schwachen Entladungen mit Wehneltkathode.* Verh. d. D. phys. Ges., 12 (10 p.).
(7) *Ueber Zweigstroeme in Entladungsroehren.* Hab. Schrift u. Sitz. Ber. der phys.-med. Soz. Erlangen 43 (67 p.).
(8) *Ueber Zyeigstroeme in Entladungsroehren.* Verh. d. D. phys. Ges. 13 (20 p.).
(9) *Ueber die Brennkugel.* Monatsh. f. den naturw. Unterr. (16 p.).
(10) *Neuere Fortschritte in der Physik: Die Relativitaetstheorie.* Monatsh. f. d. naturw. Unterr. (7 p.).

1912

- (11) *Untersuchungen ueber Volumaenderungen von Amalgamen, 1 Mitt.* Verh. d. D. phys. Ges., 14 (25 p.).
(12) *Geodaetische Messinstrumente und Messmethoden bei Gerbert und bei den Arabern.* Archiv. der Math. u. Physik., 19 (6 p.).
(13) *Die Glimmentladung im Magnetfeld und die magnetischen Strahlen.* Jahrb. f. Radioakt. u. Elektronik, 9 (26 p.).
(14) *Untersuchungen ueber Volumaenderungen von Amalgamen. 2. Mitt.* Verh. d. D. phys. Ges. 15 (10 p.).
(15) *Neuere Fortschritte in d. Physik: Die Plancksche Strahlungstheorie.* Monatsh. f. d. naturw. Unterr. (7 p.).

1913

- (16) *Joannis Verneri de meteoroscopiis libri sex.* Leipzig, Teubner (260 p.).
(17) *Einfache Aufgaben der Vermessungskunde u. Ihre Verwendung im Unterricht.* Monatsh. f. d. naturw. Unterr. (7 p.).
(18) *Neuere Fortschritte in der Physik: Die Glimmentladung im Magnetfeld und die magnetischen Strahlen.* Monatsh. f. d. naturw. Unterr. (6 p.).

1914

- (19) *Untersuchungen ueber Volumaenderungen von Amalgamen, 3. Mitt.* Verh. d. D. phys. Ges. 16. (14 p.).
(20) *Roger Bacons Art. des wissenschaftlichen Arbeiten, dargestellt nach seiner Schrift De speculis, Roger Bacon Comm. Ess.* (10 p.).
(21) *Dietrich von Freiberg: Ueber den Regenbogen und die durch Strahlen erzeugten Eindruecke.* Beitr. zur Gesch. d. Philosophie d. Mittelalters 12, 566. Muenster, Aschendorf. (15 y 204 p.).
(22) *Theorie des Regenbogens und des Halo bei Ibn al Haitam und bei Dietrich von Freiberg.* Met. Zeitschr. 31 (3 p.).
(23) *Neuere Fortschritte in der Physik: Die Physik der Legierungen.* Monatsh. f. d. naturw. Unterr. (5 y 6 p.).
(24) *Zur Theorie der Camara obscura bei ibn al Haitam.* Sitz. Ber. d. Phys. med. Soz. Erlangen, 46 (4 p.).

1915

- (25) *Zur Enantiopropie des Wismuts*, Festschr. Elster-Geitel. (7 p.).
- (26) *Das Meteoroskop*. Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr. 46 (8 p.).
- (27) *Zur Geschichte, Theorie und Praxis der Camera obscura*. Zeitschr. f. Math. u. naturw. Unterr. 46. (11 p.).
- (28) *Kriegsinstrumente im Altertum und Mittelalter*. Monatsh. f. d. naturw. Unterr. (10 p.).
- (29) *Reproduktion von Bildern, Hand- und Druckschriften mittels der Lochkamera*. Zentralblatt f. Bibliothekswesen. (1 p.).

1916

- (30) *Graphische Methode zur roentgenologischen Lagebestimmung von Fremdkörpern*. D. med. Wochenschrift. (4 p.).
- (31) *Photographieren mit der Lochkamera*. D. Optische Wochenschrift. (2 p.).
- (32) *Singende und empfindliche Flammen*. Verh. d. D. phys. Ges. 18. (25 p.).
- (33) *Ueber eine arabische kegelförmige Sonnenuhr*. Archiv f. d. Gesch. d. Naturw. u. d. Technik, 7. (18 p.).

1917

- (34) *Die Zeitrechnung der osmanischen Reiche*. D. Opt. Wochenschr. (3 p.).

1918

- (35) *Ein türkisch-arabisches Quadrantastrolab*. Archiv f. d. Gesch. d. Naturw. u. d. Technik, 8. (15 p.).

1919

- (36) *Die Bestimmung der krummen Stunden, der Deklination und der Gebetszeiten mittels des Astrolabs*. Mitt. z. Gesch. d. Med. u. d. Naturw., 18. (8 p.).
- (37) *Die Zone des Schweigens*. Sitz. Ber. d. phys. med. Soz. Erlangen, 51. (32 p.).
- (38) *Elementare Theorie der terrestrischen Refraktion und der atmosphärischen Spiegelungen*. Ann. d. Physik, 60. (32 p.).
- (39) *Darstellung des mittleren täglichen Temperaturganges durch Fouriersche Reihen*. Met. Zeitschr. 36. (3 p.).

1920

- (40) *Die Zone des Schweigens*, Natur. (3 p.).
- (41) *Terrestrische Refraktion und atmosphärische Spiegelungen*. D. Opt. Wochenschrift. (3 p.).
- (42) *Die Relativitätstheorie*. D. Opt. Wochenschr. (3 y 4 p.).
- (43) *Logarithmische und graphische Darstellung der musikalischen intervalle*. Zeitschr. f. Physik, 3. (9 p.).

1921

- (44) *Die neueren Anschauungen ueber den Aufbau der Materie*. Hochland. (10 p.).
- (45) *Die neueren Anschauungen ueber den Aufbau der Materie*. D. Opt. Wochenschrift. (3 y 4 p.).
- (46) *Die Einteilung des Tages*. D. Opt. Wochenschrift. (3 p.).
- (47) *Die Verdunstungsgeschwindigkeit*. Met. Zeitschr. 38. (7 p.).

- (48) *Zur Logarithmischen und graphischen Darstellung der musikalischen Intervalle.* Zeitschr. f. Physik, 5. (3 p.).
- (49) *Buschstabentonschrift und von Oettingensohes Tongewebe.* Zeitschr. f. Physik, 5. (10 p.).
- (50) *Die thermische Analyse binaerer und ternaerer Legierungen.* Zeitschr. f. Physik, 5. (14 p.).
- (51) *Zur graphischen Darstellung der Linsenformel.* D. Opt. Wochenschr. (3 p.).

1922

- (52) *Indilatans-Nickelstahl.* D. Uhrmacherzeitung. (1 p.).
- (53) *Zur theorie der reversiblen Permeabilitaet.* Zeitschrift f. Physik, 9. (16 p.).
- (54) *Die magnetische Pruefung von Dauermagneten.* Zeitschr. f. Physik, 10. (20 p.).
- (55) *Die magnetische Pruefung von Dauermagneten.* Kruppsche Monatshefte 3. (4 p.).
- (56) *Die magnetische Anfangspermeabilitaet.* Phys. Zeitschr. 23. (2 p.).
- (57) *Magnetische Anfangspermeabilitaet, scheinbare Remanenz und Verhalten bei Erschuetterungen.* Zeitschr. f. Physik, 12. (86 p.).

1923

- (58) *Zur Lichtbrechung in Zylindern und Kugeln.* Phys. Zeitschr. 22 (3 p.).
- (59) *Untersuchungen ueber die Anfangspermeabilitaet verschiedener Stahl-sorten.* Kruppsche Monatshefte, 4. (6 p.).
- (60) *Die Leistungfaehigkeit von Dauermagneten.* Zeitschr. f. Instrumenten-kunde, 43. (6 p.).
- (61) *Die Abhaengigkeit der Koerzitivkraft und der von der Magnetisierungs-feldstaerke.* Zeitschr. f. Physik, 16. (6 p.).
- (62) *Die Entmagnetisierungsfaktoren kreiszyllindrischer Staebe.* Zeitschr. f. Physik, 19. (10 p.).
- (63) *Das Tonwort, die Stimme,* 17. (9 p.).

1924

- (64) *Die Bewertung der Guete von Dauermagneten.* Zeitschr. f. Physik, 29. (11 p.).
- (65) *Ueber ein einfaches Verfahren zur Bestimmung der Waermeleitfaehig-keit.* Zeitschr. f. Feinmechanik und Praez., 32. (2 p.).
- (66) *Die Abhaengigkeit der Koerzitivkraft u. d. Remanenz von der Magne-tisierungsfeldstaerke.* Kruppsche Monatshefte, 5. (2 p.).
- (67) *Zur Temperaturmessung mittels Thermoelementen.* Zeitschr. f. Metallk. 4. p.).
- (68) *Die Bewertung der Guete von Dauermagneten.* Zeitschr. f. Feinmecha-nik u. Praezision, 32. (4 p.).
- (69) *Stromverteilung in einem Rade (mit F. Staeblein).* Archiv f. Elektro-technik, 14 (8 p.).
- (70) *Magnetische Pruefmethoden, insbesondere von Dauermagneten.* Stahl und Eisen (8 p.).
- (71) *Was wird von einem Dauermagnet verlangt?* Elektrische Nachrichten-technik, 2 (7 p.).

1925

- (72) *Die magnetischen Eigenschaften der Nickelstähle*. Kruppsche Monatsheften 6 (18 p.).
- (73) *Die roentgenspektroskopische Untersuchung von Eisen*. (Mit. F. Staeblein). Zeitschr. f. Feinmechanik u. Praez., 33 (3 p.).
- (74) *Magnetische Pruefmethoden, insbensodere von Dauermagneten*. Ber. d. Fachaussch. d. V. D. Eisenhuettenl. Werkstoffausschuss. Ber. N. 63 (19 p.).
- (75) *Theorie des Entmagnetisierungsfaktors*. Sammlung Vieweg N. 78. (118 p.).
- (76) *Theorien des Magnetismus (Uebersetzung)*. Sammlung: Die Wissenschaft N. 74 (309 p.).

1926

- (77) *Zur Theorie der Elementarmagnete I*. Zeitschr. f. Physik, 37 (30 p.).
- (78) *Klimabeobachtungen in Tucumán*. Met. Zeitschr. (1 p.).

1927

- (79) *Anfangspermeabilitaet und Maximal permeabilitaet*. Phys. Zeitschr. 28 (2 p.).
- (80) *Lupenvergroesserung*. D. Opt. Zeitschr. (7 p.).
- (81) *Signal und Gegensignal mit Ueberlichtgeschwindigkeit in der speziellen Relativitaetstheorie*. Phys. Zeitschr. 28 (4 p.).
- (82) *Hermann von Helmholtz*. Bol. Univ. Nac. Tucumán, 27 (6 p.).
- (83) *Teoría de los imanes elementales I*. Publ. Lab. Fís. Tucumán, 1 (36 p.).
- (84) *El aumento del microscopio simple*. Publ. Lab. Fís. Tucumán, 2 (7 p.).
- (85) *Die rationellen Tonsysteme im Quintenterzengewebe*. Zeitschr. f. Physik 46 (32 p.).
- (86) *Die Schriften Gedosis ueber die Hohenparallelen und ueber die Sinustafel*. Sitz-Ber. d. phys.-med. Soz. Erlangen, 60 (28 p.).
- (87) *Los sistemas de sonidos racionales en el tejido de quintas y terceras*. Publ. Lab. Fís. Tucumán, 3 (46 p.).
- (88) *Señal y contraseñal con una velocidad mayor que la de la luz*. Publ. Lab. Fís. Tucumán 4. (9 p.).
- (89) *Sobre las imágenes en espejos en ángulo*. Publ. Lab. Fís. Tucumán, 5 (10 p.).

1929

- (90) *Ueber die Bilder im Winkelspiegel*. Phys. Zeitschr. 30 (5 p.).
- (91) *Die Reflexion des Lichtes an einem bewegten Spiegel*. Zeitschr. d. Phys. 55 (30 p.).
- (92) *Hauptpunkte und Knotenpunkte*. D. Opt. Wochenschr (4 p.).
- (93) *La reflexión de la luz en un espejo móvil*. Publ. Lab. Fís. Tucumán 6 (38 p.).

1930

- (94) *Puntos principales y puntos nodales*. Publ. Lab. Fís. Tucumán 7 (18 p.).

1931

- (95) *Apuntes de Física Teórica. Fasc. I: Mecánica del punto material*. Publ. Lab. Fís. Tucumán, 8 (156 p.).

1932

- (96) *Aerodinámica y viscosidad*. Revista de Ingeniería (9 p.).
- (97) *La medición del tiempo, el tiempo local y la transformación de Lorentz*. Síntesis 1932 (incompleto). (4 p.).

1933

- (98) *Las constantes elásticas de los cuerpos isotrópos*. Revista de Ingeniería 1932 (15 p.).
- (99) *Zur Geschichte der Erklärung des Regenbogens*. D. Opt. Wochenschr. (3 p.).

1934

- (100) *Física Experimental*. Primera Parte. Publ. Dep. Física Tucumán 9

1937

- (101) *Resultados y problemas modernos de la Física*. Publ. Dep. de Física. Tucumán, 10 (102 p.).
- (102) *Estudios Meteorológicos*. Primera parte. Publ. Dep. de Física, Tucumán, 11 (35 p.).
- (103) *Apuntes de Física Teórica*. Fasc. 2. *Mecánica de los cuerpos rígidos y sistemas de puntos materiales*. Publ. Dep. de Física, Tucumán, 12 (166 p.).

1938

- (104) *Altimetría Barométrica*. Cuadernos de Mineralogía y Geología, tomo I, Nº 3, p. 25 (18 p.).
- (105) *Altimetría Barométrica*. Cuadernos de Mineralogía y Geología, tomo I, Nº 4, p. 30 (13 p.).
- (106) *Las Hipótesis de Planck-de Broglie y los Teoremas Fundamentales de la Propagación de la Luz*. Publ. Dep. de Física, Tucumán, 13 (15 p.).

1939

- (107) *Análisis Dimensional por P. W. Bridgeman*. Traducción. Publ. Dep. de Física, Tucumán, 14 (125 p.).
- (108) *Astronomía y Cosmología. Resultados y problemas*. Publ. de la Fac. de C. Mat. Físico-químico y naturales apl. a la industria. Univ. Nac. del Lit. Serie Conf. y Textos, 10 (39 p.).

1940

- (109) *Física Experimental*. Segunda parte. Publ. Dep. de Física de Tucumán, 15 (382 p.).

1942

- (110) *Las Relaciones entre las Magnitudes Mecánicas y Ondulatorias*. Publ. Dep. Fís. Tuc. 16. Rev. de Mat. y Fís. Teórica, vol. II, Nº 1 y 2, p. 79 (7 p.).
- (111) *Apuntes de Física Teórica*. Fasc. 3: *Mecánica de los Cuerpos Deformables*. Publ. Dep. Fís. Tucumán, Nº 17 (218 p.).
- (112) *Choque de Masas Variables y Ley de Reflexión para una Partícula*. Publ. Dep. Fís. Tucumán, Nº 18. Rev. de Mat. y Fís. Teórica, vol. III, N 1, p. 79 (32 p.).

1943

- (113) *Los Principios de Acción Variada y Estacionaria*. Publ. del Inst. de Mat., vol. V. Fac. C. Mat. etc. Univ. Nac. del Lit. Homenaje a Julio Rey Pastor (19 p.).

1944

- (114) *El Método de Ruechardt-Rinkel para la Determinación de $\alpha_p : \alpha_v$* . Publ. Dep. de Fís. Tucumán, 19 (12 p.).
(115) *La Ecuación de Estado de un Gas real*. Publ. Dep. de Física, Tucumán, 20. (35 p.).

1945

- (116) *Desintegración Radioactiva y Sistema Periódico*. Publ. Dep. de Física, Tucumán, 21 (19 p.).
(117) *Aberración, Efecto Doppler y Presión de Luz*. Revista Unión Matemática Argentina, vol. XI, p. 47 (22 p.).

1946

- (118) *Joseph John Thomson (1856-1940). Ciencia e Investigación*; vol. II, p. 449 (4 p.).
(119) *Leyes de Reflexión en un Espejo Móvil para Corpúsculos y para Fotones en el vacío y en un medio refringente*. Rev. de Mat. y Fís. Teórica, vol. V, p. 321 (13 p.).
(120) *En torno del Fotón en un Medio Material*. Rev. Unión Mat. Arg., vol. XII, p. 118 (11 p.).

1948

- (121) *Conmemoración de Max Planck*. Publ. Inst. de Física, Tucumán, 23 (44 p.).

1950

- (122) *Corrección de temperaturas medidas con pirómetros ópticos y de radiación*. Publ. Inst. de Física, Tucumán, 24 (28 p.).
(123) *Refracción atmosférica*. Rev. Unión Matem. Arg., vol. XIV, p. 156. Homenaje a Ricardo Gans (19 p.).
(124) *El sistema MKS y la enseñanza de la Física*. Publ. Inst. de Física, Tucumán, 29 (24 p.).
(125) *Una división racional del espectro visible*. Ciencia e Investigación, 1951).

GENERALIZACION DE UNA DESIGUALDAD DE H. HORNICH A ESPACIOS DE CURVATURA CONSTANTE

por L. A. SANTALÓ

1. *Enunciado del teorema.* Sea C una curva rectificable del espacio euclidiano n -dimensional y L la longitud de la misma. Si V representa el volumen cubierto por los puntos del espacio cuya distancia a C es igual o menor que R , vale la siguiente desigualdad establecida por H. Hornich ⁽¹⁾,

$$(1.1) \quad V \leq L \kappa_{n-1} R^{n-1} + \kappa_n R^n$$

siendo κ_n el volumen de la esfera euclidiana n -dimensional, de radio unidad, o sea, en general,

$$(1.2) \quad \kappa_i = \frac{\pi^{i/2}}{\Gamma(i/2+1)}.$$

De esta desigualdad dimos en otra oportunidad ⁽²⁾ una demostración distinta de la de Hornich, la cual permitía establecer los casos en que vale el signo de igualdad por un criterio más cómodo que el dado por Hornich ⁽³⁾.

El objeto de esta nota es demostrar una desigualdad análoga para el caso de curvas de un espacio de curvatura constante K . Demostramos el siguiente teorema:

Sea C una curva rectificable de longitud L del espacio n -dimensional de curvatura constante K . Sea V el volumen cubierto por los puntos del espacio cuya distancia a C sea $\leq R$. Entonces vale la desigualdad

$$(1.3) \quad V \leq k^{-(n-1)} (\kappa_{n-1} L \operatorname{sen}^{n-1} k R + n \kappa_n \int_0^R \operatorname{sen}^{n-1} k \rho \, d\rho)$$

donde κ_i está dado por (1.2) y se ha puesto $K = k^2$.

⁽¹⁾ H. HORNICH, *Bemerkungen zu einer allgemeinen Ungleichung für Kurven*, Monatshefte für Mathematik und Physik, t. 49, 1940.

⁽²⁾ L. A. SANTALÓ, *A theorem and an inequality referring to rectifiable curves*, American Journal of Mathematics, vol. 63, 1941, p. 635-644.

⁽³⁾ Observemos de paso que la desigualdad dada por Hornich para el caso

El signo de igualdad en (1.3) vale únicamente cuando son satisfechas las dos condiciones: a) C no puede ser cortada por una hipersuperficie esférica de radio R en más de 2 puntos (salvo para un conjunto de posiciones de la esfera de medida nula⁽⁴⁾); b) Toda esfera de radio R que contiene a los extremos de C en su interior, caso de ser esta curva abierta, contiene también a toda la curva.

Si $K < 0$, k resulta imaginario y en (1.3) para que figuren solamente valores reales basta introducir las funciones hiperbólicas de acuerdo con las relaciones

$$\operatorname{sen} ip = i \operatorname{senh} p, \quad \cos ip = \cosh p.$$

La demostración que vamos a dar es la generalización natural de la que dimos para el caso euclidiano ($K=0$) en el trabajo ya mencionado⁽²⁾.

Junto con el volumen (1.2) de la esfera euclidiana n -dimensional de radio unidad necesitaremos el área de la misma, que representaremos en general por ω_i y vale, como es sabido,

$$(1.4) \quad \omega_i = \frac{2\pi^{(i+1)/2}}{\Gamma((i+1)/2)}$$

existiendo por tanto la relación

$$(1.5) \quad \omega_i = (1+i) \omega_{i+1}.$$

2. *Una fórmula integral.* Consideremos una esfera de radio R y centro el punto P . Como estamos en el espacio de curvatura constante K , al decir esfera entendemos la variedad de $n-1$ dimensiones que se obtiene como lugar geométrico de los puntos cuya distancia geodésica a P es igual a R . Es sabido que el área de esta esfera vale

$$(2.1) \quad F(R) = k^{-(n-1)} \omega_{n-1} \operatorname{sen}^{n-1} kR$$

de curvas cerradas, pág. 106 del trabajo mencionado, no es correcta, como resulta evidente al considerar una circunferencia de radio muy pequeño, para la cual L es tan pequeña como se quiera y en cambio V tiende al área del círculo de radio R .

Tampoco es cierto que la condición 3ª que Hornich da para la igualdad en (1.1) sea necesaria como afirma el autor: basta considerar un segmento de longitud menor que $2R$.

(4) Es decir, un conjunto de esferas cuyos centros forman un conjunto de puntos de medida n -dimensional nula.

donde ω_{n-1} es el área de la esfera $n-1$ dimensional euclidiana de radio unidad, dada por (1.4).

Para cada punto P , sea n el número (finito o infinito) de puntos comunes de dicha esfera con la curva C . Llamando dP al elemento de volumen del espacio correspondiente al punto P , es sabido que vale la fórmula integral

$$(2.2) \quad \int n dP = 2 \frac{\kappa_{n-1}}{\omega_{n-1}} F L = 2 \kappa_{n-1} k^{-(n-1)} L \operatorname{sen}^{n-1} kR$$

extendida la integración a todos los puntos P para los cuales es $n \neq 0$.

3. *Otra fórmula auxiliar.* Consideremos un arco de geodésica del espacio de longitud D . El volumen cubierto por los puntos cuya distancia a este arco es $\leq R$, se puede calcular a partir de la fórmula que da el volumen del cuerpo paralelo exterior a otro a distancia R . Para aplicar esta fórmula utilizando la misma notación de C. B. ALLENDOERFER⁽⁵⁾ debemos tener en cuenta que las «curvaturas medias» de un arco de geodésica de longitud D (considerado como límite de la hipersuperficie paralela exterior a distancia ε cuando $\varepsilon \rightarrow 0$), son

$$M_0 = \omega_{n-1}, \quad M_1 = \omega_{n-2} D, \quad M_2 = M_3 = \dots = M_{n-1} = 0,$$

con lo cual el volumen buscado resulta valer

$$(3.1) \quad V_R = M_0 I_0 + M_1 I_1 = \omega_{n-1} I_0 + \frac{\omega_{n-2}}{n-1} D k^{-(n-1)} \operatorname{sen}^{n-1} kR$$

siendo

$$(3.2) \quad I_0 = \int_0^R k^{-(n-1)} \operatorname{sen}^{n-1} k\rho d\rho.$$

4. *Demostración del teorema.* Pasemos ahora a la demostración del teorema enunciado. Considerando cada punto del volumen V que figura en el enunciado del teorema como centro de una esfera de radio R , puede ocurrir que esta esfera corte a la curva C en 0, 1, 2, 3, ... puntos (el caso 0 significa que la esfera contiene totalmente a C en su interior).

⁽⁵⁾ C. B. ALLENDOERFER, *Steiner's formulae on a general S_{n+1}* Bulletin of the American Math. Society, Vol. 54, 1948.

Llamando m_i al volumen de los puntos P que son centros de esferas de radio R que tienen i puntos comunes con C , por definición de V es

$$(4.1) \quad m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + \dots = V.$$

Por otra parte (2.2) da

$$(4.2) \quad m_1 + 2m_2 + 3m_3 + 4m_4 + \dots = 2k^{-(n-1)} \kappa_{n-1} L \operatorname{sen}^{n-1} kR.$$

De estas igualdades se deduce

$$(4.3) \quad m_3 + 2m_4 + 3m_5 + \dots - (2m_0 + m_1) = \\ = 2k^{-(n-1)} \kappa_{n-1} L \operatorname{sen}^{n-1} kR - 2V.$$

Por otra parte, consideremos el arco de geodésica que une los extremos de C ; sea D la longitud del mismo, la cual será nula si C es cerrada. Llamando m_i^* al volumen cubierto por los puntos que son centros de esferas de radio R que tienen i puntos comunes con dicho arco de geodésica (solo puede ser $i=0, 1, 2$), según (3.1) será

$$(4.4) \quad m_0^* + m_1^* + m_2^* = \omega_{n-1} I_0 + \frac{\omega_{n-2}}{n-1} D k^{-(n-1)} \operatorname{sen}^{n-1} kR$$

y por la fórmula (2.2) aplicada al caso del arco de geodésica de longitud D vale también

$$(4.5) \quad m_1^* + 2m_2^* = 2\kappa_{n-1} k^{-(n-1)} D \operatorname{sen}^{n-1} kR$$

de cuyas igualdades resulta, teniendo en cuenta (1.5),

$$(4.5) \quad 2m_0^* + m_1^* = 2\omega_{n-1} I_0.$$

Observemos que si una esfera corta a C en un solo punto, debe también cortar al arco D en un solo punto; por tanto $m_1^* \geq m_1$. Además, si la esfera contiene totalmente a C en su interior, contendrá también totalmente al arco de geodésica que une sus extremos; por tanto es $m_0^* \geq m_0$. Es decir,

$$(4.6) \quad 2m_0^* + m_1^* \geq 2m_0 + m_1.$$

Esta desigualdad, junto con las igualdades (4.3), (4.5) y (1.5) da

$$(4.7) \quad \frac{1}{2}(m_3 + 2m_4 + \dots) + V \leq k^{-(n-1)} \kappa_{n-1} L \operatorname{sen}^{n-1} kR + n\kappa_n I_0.$$

Como las m_i son esencialmente no negativas, esta desigualdad contiene a la (1.3) que se trataba de demostrar.

Para que valga el signo de igualdad en (1.3), según (4.7) debe ser $m_i=0$ para $i \geq 3$, lo cual lleva consigo que sea $m_1=m_1^*$. Entonces como también debe valer la igualdad en (4.6) resulta $m_0=m_0^*$, con lo cual se tienen establecidas las dos condiciones necesarias y suficientes para la igualdad que figuran en el enunciado del teorema.

5. *Casos particulares.* Si $K=0$, hallando el límite del segundo miembro de (1.3) para $k=0$, resulta la desigualdad (1.1) de Hornich.

Para $n=2$, $k=1$, resulta

$$V \leq 2L \operatorname{sen} R + 2\pi(1 - \cos R)$$

que es la desigualdad conocida para curvas esféricas⁽⁶⁾.

6. *Observación.* Hemos basado la demostración en la fórmula (2.2). Esta fórmula se obtiene por métodos clásicos en Geometría Integral con demostración fácil si se supone que la curva C se compone de un número finito de arcos con tangente que varía con continuidad en cada uno de ellos. Para curvas que se supongan nada más rectificables la demostración de (2.2) no es tan fácil, si bien puede hacerse por el mismo método directo que seguimos en⁽²⁾ para el caso euclidiano. Sin embargo, para el caso actual, basta suponer establecida (2.2) para el caso de curvas compuestas de un número finito de arcos con tangente continua, por ejemplo para poligonales. En efecto, una vez establecida la desigualdad (1.3) para curvas de esta clase, aproximando por poligonales y pasando al límite, lo cual puede hacerse sin inconveniente pues tanto V como L tienden a los límites respectivos, queda demostrado el teorema para el caso general.

FAULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE LA PLATA.

⁽⁶⁾ Ver L. A. SANTALÓ, *Integral formulas in Crofton's style on the sphere...* Duke Mathematical Journal, Vol. 9, 1942, pág. 717.

SOBRE LA NO-NUMERABILIDAD DEL CONTINUO

por PEDRO PI CALLEJA

El objeto de la presente nota es dar una demostración elemental de la no-numerabilidad del continuo, prescindiendo de expresiones particulares más o menos complicados de los números reales. Nos basaremos en el teorema (que puede tomarse como definición) según el cual toda sucesión creciente acotada de números tiene límite real. Obsérvese que la demostración que desarrollamos no puede aplicarse a los números racionales porque una sucesión creciente acotada de números racionales puede no tener límite *racional*.

Vamos, pues, a demostrar que el conjunto de números reales del intervalo cerrado $[a, b]$ no es numerable. Supongamos que los puntos de $[a, b]$ puedan ponerse en sucesión numerable x_n ($n=1, 2, 3, \dots$) lo que nos llevará a un absurdo. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, aunque basta tomarlo $0 < \varepsilon < b - a$, hagamos corresponder a cada punto x_n el cubreintervalo abierto

$i_n = \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right)$ de longitud $|i_n| = \varepsilon/2^n$. Tendremos

así una sucesión s de cubreintervalos distintos i_n tal que la suma de longitudes de cualquier número finito de ellos será menor que ε . Diremos que un cubreintervalo (a_0, b_0) cubre el punto x_0 si se cumple $a_0 < x_0 < b_0$. De la sucesión s tomemos el primer cubreintervalo $j_0 = i_{n_0}$ que cubre $a = c_0$ y $c_1 > c_0$ el extremo derecho de j_0 . Volvamos a tomar en la sucesión s el primer cubreintervalo $j_1 = i_{n_1}$ que cubre c_1 con extremo derecho $c_2 > c_1 > c_0$, siendo por tanto $j_1 \neq j_0$. Sea nuevamente $j_2 = i_{n_2}$ el primer cubreintervalo de la sucesión s que cubre c_2 con extremo derecho $c_3 > c_2 > c_1 > c_0$, siendo por tanto $j_2 \neq j_1, j_0$. Sigamos así sucesivamente. No podrá ser infinita la sucesión creciente acotada de puntos $c_r \leq b$, es decir pertenecientes al intervalo $[a, b]$, pues en dicho caso tendría límite real $c \leq b$ y al punto c , pertenecientes a $[a, b]$, correspondería un cubreintervalo i_m de s ; entonces habría en i_m infinitos cubreintervalos

distintos $j_r = i_{n_r}$ con n_r creciendo más allá de toda cota, en particular llegaría a ser $n_r > m$ en contra de la hipótesis que define j_r . Tendremos así un número finito de cubreintervalos distintos $j_0, j_1, j_2, \dots, j_k$ de la sucesión s , tales que cada dos consecutivos tienen algún punto común, cubriendo j_0 al punto a y j_k al punto b . Por las leyes de monotonía de los números reales, será entonces $\sum_{r=0}^k |j_r| > b - a$. Esto contradice que la suma de longitudes de cualquier conjunto parcial de cubreintervalos i_n de la sucesión s es menor que $\varepsilon < b - a$, es decir $\sum_{r=0}^k |j_r| < \varepsilon < b - a$. Por tanto, hemos llegado a un absurdo suponiendo puedan ponerse en sucesión numerable los puntos reales del intervalo $[a, b]$ que es precisamente lo que nos proponíamos demostrar.

Nos hemos extendido minuciosamente en los detalles de la demostración anterior para evitar cualquier *elección arbitraria* y en ella queda involucrada la demostración del lema de Borel sobre cubrimientos numerables de conjuntos cerrados y acotados. Utilizando este lema, la demostración es muy corta y puede darse en la forma siguiente: Supongamos que el conjunto de puntos reales del intervalo cerrado $[a, b]$ fuese numerable, en cuyo caso, dado arbitrariamente ε tal que $0 < \varepsilon < b - a$, podríamos hacer corresponder a cada punto real x_n perteneciente a $[a, b]$ un intervalo i_n de longitud $|i_n| = \varepsilon/2^n$ que lo cubra. Por el lema de Borel bastaría entonces un número finito k de intervalos i_n para cubrir todo el conjunto $[a, b]$ y por la ley de monotonía de los números reales sería $\varepsilon > \sum_k |i_n| > b - a$, contra la hipótesis $\varepsilon < b - a$.

Esta es la demostración en realidad que está implícita en la consecuencia que suele sacarse de la teoría de la medida de Borel para afirmar que el conjunto de números reales del intervalo $[a, b]$ no puede ser numerable. A este respecto, conviene no caer en el error de suponer que basta definir la medida de un punto como nula, la de una suma de intervalos normampantes por la propiedad de aditividad infinita y la de un conjunto numerable como nula (por ser suma de las medidas de sus puntos), para creer que estas «convenciones» *demuestran* la no-numerabilidad del continuo, mientras no se haya

probado la no-contradicción de la propiedad de aditividad infinita.

Desarrollada la teoría de la medida de Borel en forma constructiva, se observa que el lema fundamental de la misma está en que si un conjunto lineal acotado puede considerarse de dos maneras distintas como suma de una infinidad numerable a lo más de intervalos no-rampantes, la suma de las medidas de estos intervalos es la misma en los dos casos. Este lema fundamental se demuestra precisamente (v. g. Ch. de la Vallée Poussin: «Intégrales de Lebesgue, Fonctions d'Ensemble, Classes de Baire», Col. Borel, 2ª. ed., París 1934, pág. 17) mediante el lema de Borel sobre cubrimientos (v. g. E. Borel: «Leçons sur la Théorie des Fonctions», Col. Borel, 2ª. ed., París 1914, pág. 228; inicialmente expuesto en E. Borel: Annales sc. éc. normale (3), 12, París 1895, pág. 51).

El Prof. Rey Pastor nos comunica esta otra sencilla demostración: Supongamos numerados los puntos de un segmento finito o infinito y designemos cada punto por su índice. Todos los interiores al intervalo $(0,1)$ tienen índices superiores a los extremos 0 y 1; si es i el menor de ellos y j el menor de los índices dentro de $(1,i)$ todos los puntos interiores a (i,j) tienen índice superior a los extremos i,j . Prosiguiendo, se forma una sucesión decreciente de intervalos tal que los índices interiores de cada uno, superan a los extremos. Como hay al menos un punto interior a todos los intervalos, su índice debería superar a los infinitos índices extremos, absurdo que prueba la imposibilidad de la numerabilidad supuesta.

La Plata, octubre 1949.

Nota. — Otras demostraciones, igualmente inmediatas, expuestas en nuestros cursos elementales, pueden merecer quizás divulgación.

Tal vez preferible a la anterior es esta variante no esencial: sean a, a' los dos índices mínimos interiores a $(0,1)$, sean b, b' los dos índices interiores al intervalo (a, a') ; sean c, c' los dos índices mínimos interiores al (b, b') ; ... el punto común a esta sucesión de intervalos encajados debería tener índice superior a todos estos extremos, imposible.

Si se prefiere evitar el principio del entero mínimo, basta bisecar el segmento $(0,1)$ y sea I_1 el segmento mitad que no contiene el 1; sea I_2 el segmento mitad que no contiene 2; sea I_3 la mitad que no contiene 3.... Como I_n sólo contiene índices superiores a n el punto común a todos los I_n debería tener índice infinitamente grande.

Otra demostración análoga dió Poincaré, por fraccionamiento en tres partes, a fin de eludir la libre elección, que también queda evitada en las arriba apuntadas. En efecto, si el punto medio de I_n fuese precisamente $n+1$, bastaría adoptar como I_{n+1} la primera mitad de la primera mitad.

J. R. P.

BIBLIOGRAFIA

COLLOQUE DE GÉOMÉTRIE ALGÈBRE. Centre Belge de recherches mathématiques, 1950. Un volumen de 198 páginas.

Se trata de las conferencias y trabajos comunicados al Coloquio de Geometría Algebraica organizado por el Centro Belga de Investigación matemática que preside L. Godeaux y que fué celebrado en Lieja durante los días 19, 20 y 21 de diciembre de 1949.

Tras una introducción del profesor Godeaux, empieza el volumen con una conferencia de Severi, altamente interesante por su propósito: "Desde hace algunos años circula entre los matemáticos una leyenda que encuentra cierta credulidad en círculos felizmente restringidos: es la leyenda de que la geometría algebraica italiana, si bien ingeniosa y rica en resultados importantes, no posee sin embargo todo el rigor necesario. Examinemos los fundamentos que esta leyenda pueda tener, no tanto por lo que pueda resultar enojosa para ciertos geómetras, como por el perjuicio que podría causar al progreso de nuestra rama de la geometría, el hecho de continuar dejándola correr sin reacción". A continuación hace Severi la historia de varios capítulos de la geometría algebraica italiana, para probar que en ellos no falta un rigor "substancial", si bien reconoce que pueden existir "ciertas omisiones de demostraciones explícitas de propiedades bien seguras, que los geómetras del tiempo (con acertada visión del porvenir) pensaban poder construir o reconstruir en ocasión de futuras exposiciones metódicas de las teorías".

Contiene después el volumen los siguientes trabajos, cuyo índice puede servir para dar una idea de su contenido y también para valorar la importancia del Coloquio a través de la lista de geómetras que a él concurrieron:

DUBREIL-JACOTIN (M. L.) y DUBREIL (P.), *Divers types d'anneaux intervenant en géométrie algébrique.*

- VAN DER WARDEN, B. L., *Les variétés de chaînes sur une variété abstraite.*
SAMUEL, P., *Multiplicités des composantes singulières d'intersection.*
CHATELET, F., *Application des idées de Galois a la géométrie algébrique.*
GARNIER, R., *Integration uniforme de certains systemes du quatrieme ordre, a deux variables independantes, attachés a une surface algebrique.*
SEGRE, B., *Problèmes arithmétiques en géométrie algébrique.*
LIBOIS, P., *La synthèse de la géométrie et de l'algèbre.*
BUREAU, F., *Quelques questions de géométrie suggerées par la théorie des équations aux dérivées partielles totalement hyperboliques.*
GODEAUX, L., *Applications de la théorie des involutions cycliques appartenant a une surface algébrique.*

Como se ve por este índice, en el Coloquio estuvieron representadas tanto la tendencia clásica, como la moderna, como la de las aplicaciones de la geometría algebraica a otros capítulos de la matemática.

La impresión y presentación del volumen es excelente.

L. A. Santaló

LIBROS Y REVISTAS RECIBIDOS

MAURICIO MATOS PEIXOTO, *Principios variacionais de Hamilton e da menor ação.* Río de Janeiro, 1947.

Se trata de una disertación presentada a la congregación de la Escuela Nacional de Ingeniería para obtener el título de libre docente de Mecánica Racional.

MARÍA LAURA MOURA MOUSINHO, *Espaços porjetivos: reticulado de seus subespaços.* Río de Janeiro, 1949.

Se trata de la tesis presentada por la Congregación de la Facultad Nacional de Filosofía para obtener el título de libre docente de la cátedra de Geometría.

HELMUT HASSE, *Höhere Algebra.* Walter de Gruyter. Berlín, 1951.

Se trata de dos tomitos de álgebra superior de la *Sammlung Götschen*. El primero se ocupa de Ecuaciones lineales, el segundo de Ecuaciones de grado superior.

D. VOELKER - G. DOETSCH, *Die Zweidimensionale Laplace-Transformation.* Verlag Birkhäuser. Basel, 1950.

Obra en un tomo dividida en dos partes. La primera trata de la transformación de Laplace en dos dimensiones y sus aplicaciones a problemas de contorno y la segunda contiene una tabla de correspondencias.

Staraniem Komitetu Jubileuszowego. Warszawa, 1949.

Se trata del libro jubilar del profesor W. Sierpinski, con la lista de publicaciones de este insigne matemático polaco.

Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana

Se han recibido los volúmenes I a VI y los números 1 y 2 del volumen VII, en los que hay trabajos sobre continuos de Birkhoff, teoría de la gravitación de Birkhoff, teoría de la elasticidad, espacios de Banach, transformación de Lorentz, etc.

Annales de la Société Polonaise de Mathématique. Tomo 20, 1948.

Este tomo está dedicado a la memoria de Stanislaw Zaremba, fundador de la Sociedad Polaca de Matemática y uno de los primeros organizadores de los estudios matemáticos modernos en Polonia. Contiene trabajos sobre módulo de determinantes complejos, objetos geométricos, aproximación de funciones, desigualdades diferenciales, ecuaciones a derivadas parciales, espacio alamágico, topología de espacios funcionales, etc.

Mathematica. Vol. 23, 1947-1948.

Se trata de la revista publicada por el Seminario de Matemática de la Universidad de Cluj (Rumania). Contiene estudios sobre derivadas logarítmicas, campo mesónico, coeficiente de conexión estadística de Gini-Salvemini, espacios no holónomos, sustituciones lineales, problema de los tres cuerpos, aritmética transfinita, etc.

Anais de Academia Brasileira de ciencias. Tomo 22, Nº 1, 1950.

Contiene trabajos sobre espacios de infinito número de dimensiones, cristalografía teórica, microscopía electrónica, etc.

The Bulletin of Mathematical Biophysics. Vol. 12, Nº 1, Marzo, 1950.

Contiene trabajos sobre radiogenética, radiobiología, coeficiente glicolítico, discriminación psicofísica, aspectos termodinámicos de la cinética de los sistemas químicos biológicos, etc.

M. V.

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

DECIMOQUINTA REUNION

CÓRDOBA, Observatorio Astronómico. - 26 y 27 de Mayo de 1950

Presidente: Dr. RICARDO PLATZECK

Informe:

LIVIO GRATTON (Observatorio Astronómico, La Plata): *Atmósferas estelares*

Comunicaciones:

1. E. E. GALLONI (Instituto de Física, Buenos Aires): *Efectos del desorden en los diagramas de estructuras tipo cadena.*

En estructuras formadas por cadenas de átomos agrupados paralelamente, se ha observado un debilitamiento de las reflexiones de Rayos X correspondientes a planos inclinados con respecto a la dirección de las mismas. Para explicarlo se supone un desorden de empaquetamiento consistente en corrimientos de las cadenas de átomos sobre su propia recta sostén. La aplicación de la teoría a estructuras estudiadas, conduce a resultados satisfactorios.

2. E. E. GALLONI y J. PUGLIESE (Instituto de Física, Buenos Aires): *Estudio preliminar de la estructura del $\text{Te}(\text{CH}_3)_2\text{I}_2$.*

Se han realizado diagramas de Rayos X por los métodos del cristal giratorio y Weissenberg, determinando las constantes de la celda elemental:

$$\begin{aligned} a &: 12,26 \pm 0.03 \text{ Angstrom} \\ b &: 21,89 \pm 0.04 \text{ »} \\ c &: 9,46 \pm 0.04 \text{ »} \\ \text{beta} &: 72^\circ 24' \pm 10' \end{aligned}$$

Con estas constantes y el valor de la densidad de los cristales, se determinó el número de moléculas por celda $Z:12$. Con las reglas de extinción deducidas de la lectura de los diagramas Weissenberg, se determinó el grupo especial: $C_{2h}^5 - P2_1/c$. De acuerdo con la multiplicidad máxima ($Z:4$) del grupo espacial C_{2h}^5 , se supone que las 12 moléculas no son idénticas.

3. R. H. BUSCH (Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Buenos Aires): *Sobre la oxidación directa del platino por oxígeno.* (Se leyó el título).

4. J. V. IRIBARNE (Laboratorio de Fisicoquímica, Buenos Aires): *Cálculos de frecuencias normales de vibración de moléculas e iones complejos del tipo $M(XY)_6$.*

Se estudió el problema de vibraciones para el tipo de molécula o ion complejo que responde a la fórmula $M(XY)_n$, suponiendo estructura octaédrica, correspondiente al grupo de simetría O_h . Se planteó la energía potencial con la hipótesis de fuerzas de valencia, incluyendo además algunos términos de interacción. Se determinaron las coordenadas de simetría. Se calculó la energía cinética por los métodos de Wilson y se redujo la ecuación secular.

Los resultados se aplicaron a las frecuencias Raman conocidas de tres iones complejos cianurados. Los datos experimentales sólo permiten calcular dos constantes de fuerza, correspondientes a las variaciones de longitud de las uniones metal-carbono y carbono-nitrógeno.

5. M. C. B. DE MORA y J. B. CORREA (Instituto de Física, Tucumán): *Separación y estudio físico, químico y biológico de los isómeros del hexacloruro de benceno*.

En primer término, se han estudiado estos isómeros de los cuales se conocen actualmente cinco, separándolos de polvos insecticidas suministrados por "Duperial".

Luego se ha obtenido hexacloruro de benceno por tres procedimientos:

- a) Cloración del benceno a la luz solar directa.
- b) a la luz difusa.
- c) a la luz de Hg.

Usando en los tres casos para la obtención de Cl , O_2Mn y HCl y como catalizador $NaOH$ al 1 %.

El procedimiento a la luz solar es el que dió mayor rendimiento.

Se han separado y purificado los isómeros por cristalizaciones sucesivas en disolventes orgánicos, obteniendo algunas formas cristalinas grandes y fáciles de identificar.

Las constantes físicas características de cada isómero sirvieron para su reconocimiento.

Siendo el isómero gamma el más tóxico como insecticida, se trató de hallar el procedimiento ideal para producirlo en mayor proporción.

6. P. SCONZO (Observatorio Astronómico, La Plata): *Un método laplaciano rapidísimo para el cálculo de una órbita circular*.

Es una adaptación del método general del mismo autor (*) para el caso de una órbita elíptica de un punto P que se mueve alrededor del Sol y se funda en la deducción de la posición P_0 (X_0, Y_0, Z_0) y de la velocidad v_0 ($dx_0/dt, dy_0/dt, dz_0/dt$) en un determinado instante t_0 , de los datos provistos por las observaciones. El caso particular de la órbita circular, correspondiente al verificarse de la relación $r \, dr/dt = 0$ se presenta en la práctica cuando de un cuerpo celeste no identificado y presumiblemente nuevo, se poseen solamente 2 posiciones en 2 instantes distintos y se requieren otras posiciones calculadas con el fin de seguir observando el cuerpo.

El método indicado por el autor y que conduce rápidamente al fin se puede resumir brevemente del modo siguiente: Se hacen 3 hipótesis distintas

(*) Aparecerá próximamente en las publicaciones del Observatorio Astronómico de La Plata.

y plausibles del valor que debe tener la distancia geocéntrica ρ_0 del cuerpo celeste en el instante t_0 . Para cada valor ρ_0 se calcula la posición y la velocidad y la diferencia $\epsilon = v^2_0 - 1/r_0$.

Las derivadas dx_0/dt , dy_0/dt , dz_0/dt que entran en v_0 es conveniente tomarlas con respecto al tiempo reducido, esto es, con respecto a la variable $\tau = kt$ siendo k la constante de Gauss. Con tal elección de la variable independiente, en una órbita circular resulta siempre $v^2 = 1/r$ y por lo tanto el valor de ρ_0 que resuelve el problema, se puede determinar fácilmente con un procedimiento de interpolación inversa con la condición que sea $\epsilon = 0$. Luego la determinación de los elementos orbitales no presenta ninguna dificultad.

7. C. O. R. JASCHEK (Observatorio Astronómico, La Plata): *Una observación referente al cálculo del tiempo de relajamiento.*

En el libro recientemente publicado de von der Pahlen "Einführung in die Dynamik von Stellsystemen", se sigue un método debido a Heckmann y Siedentopf para el cálculo del tiempo de relajamiento. El procedimiento es erróneo, debido a un error en el cálculo, quedando así confirmada la validez de las fórmulas de Chandrasekhar, que v. der Pahlen pone en duda.

G. BECK: Alrededor de 1922 escuché una conferencia (Oppenheimer, Viena) sobre el cálculo de $\gamma = c_p/c_v$ para un "gas de estrellas" y llegaba al valor $\gamma = 1,2$. Supongo que se usaban datos de la galaxia.

L. GRATTON: Me imagino que habrá hecho algo como con los gases: calcular el número de grados de libertad, luego los calores específicos, atribuyendo a cada grado de libertad una energía etc.

G. BECK: He hecho la referencia por la forma como se toman los conceptos como tiempo de relajamiento en el movimiento Browniano.

C. O. R. JASCHEK: Eso difiere de la teoría cinética en que aquí se desprecian los choques, de modo que el cálculo analítico se lleva en sentido distinto.

G. BECK: Uds. no consideran un equilibrio termodinámico.

L. GRATTON: Se hace el cálculo en ciertas condiciones. Si son las del centro de la galaxia o de la periferia, eso ya es otra cosa.

8. L. GRATTON y C. O. R. JASCHEK (Observatorio Astronómico, La Plata): *Determinación de la velocidad del sol respecto a la velocidad galáctica circular.*

Se utilizaron las cefeidas para la determinación del movimiento del sol con respecto a la velocidad circular en la Galaxia, dado que ellas forman el grupo de menor dispersión de velocidades. Se usó en el análisis la lista que presentó Joy en el Astrophysical Journal 89, p. 356. Las ecuaciones del movimiento fueron planteadas en la siguiente forma:

$$\rho = A r \sin 2(1 - l_0) \cos^2 b + V_0 \cos \lambda + K$$

Suponiéndose conocida la posición del ápex ($\alpha_0 = 271$, $\delta_0 = 28$) y la longitud del centro galáctico ($l_0 = 325$), se calculó A , V_0 y K . Un estudio del comportamiento de cuatro grupos clasificados por su distancia al sol, re-

veló: a) que la velocidad del sol crece con la distancia media de los grupos, b) que la dispersión permanece constante y c) que el término K es prácticamente cero. La explicación del punto a) se encontró en el hecho de que los centroides de los grupos se alejan del centro galáctico, al aumentar la distancia media de los grupos al sol. Este hecho permite una determinación independiente de A , resultando 20 km/seg kpc. La velocidad del sol fué determinada en 18,3 km/seg.

9. J. SAHADE y J. LANDI DESSY (Observatorio Astronómico, Córdoba): *La binaria espectroscópica Boss 4469*.

El espectro de la binaria espectroscópica Boss 4496 es de líneas dobles, las cuales corresponden a los tipos espectrales B3 y aproximadamente B8, respectivamente. Los espectrogramas tomados en Bosque Alegre han permitido determinar el período de la variación de las velocidades radiales derivadas de las líneas del H es menor que la correspondiente al He I.

El trabajo será publicado "in extenso" en "The Astrophysical Journal".

E. E. GALLONI: Yo querría insistir en una observación hecha vez pasada, viendo el problema desde afuera. No es la primera vez que nos presentan problemas de esta clase, en que las velocidades son funciones del elemento que emite la línea. Habrá, pues, que buscar alguna teoría que explique estos fenómenos sin atribuirlos a velocidades de estrellas. Parecería que hay otra cosa.

J. LANDI DESSY: El período de 3.170 se cumple siempre y no solo eso, sino que en el ordenamiento de la posición de los puntos con la fase no hay ningún conocimiento de ésta y el orden de variación es de 300 km/sec, de modo que es un efecto difícil de explicar.

L. GRATTON: Una posibilidad de explicarlo es con un tipo de emisión de materia como supuso Struve. La estrella se rodea de una espiral de materia que se va ensanchando. No puede ser un fenómeno eruptivo, casual, irregular.

10. J. SAHADE (Observatorio Astronómico, Córdoba): *La variable de eclipse S. Velorum*.

En máxima luz, el espectro de S Velorum es aproximadamente de tipo A4, y, en eclipse, este espectro aparece superpuesto con otro de tipo más tardío, el cual se estima en G. Las observaciones realizadas en Bosque Alegre muestran un efecto de rotación menor para el H que para los demás elementos, y una dispersión relativamente grande de las velocidades radiales fuera de eclipse, considerando la calidad de las líneas del espectro. Dos placas consecutivas tomadas con una hora de intervalo y cuyos resultados difieren para el H en alrededor de 30 km/seg (el error medio de cada placa es del orden de 3 km/seg) sugieren que la dispersión encontrada en las velocidades está ligada a una acción tipo prominencia.

El trabajo será publicado "in extenso" in "The Astrophysical Journal".

11. L. GRATTON (Observatorio Astronómico, La Plata): *El isótopo C_{13} del carbono en las estrellas gigantes del tipo K*.

El isótopo C_{13} ha sido identificado en las estrellas del tipo R y N por medio de observaciones de las bandas de las moléculas C_2 y CN (sistema rojo). Debido a la gran importancia que tiene la presencia de los isótopos en las es-

trellas, se trató de identificar el isótopo C_{13} por medio de las bandas violetas del CN en los espectros de algunas estrellas gigantes del tipo K . Las cabezas de banda de la molécula isotópica coinciden con algunos aspectos espectrales, cuyas variaciones de una estrella a la otra, siguen las de la molécula normal. Además, se pudieron identificar algunas líneas que coinciden con miembros rotacionales de la molécula isotópica y no tienen otra identificación conocida. Sin embargo no se considera la identificación como definitiva, sobre todo porque la falta de datos de laboratorio sobre las longitudes de onda de los miembros rotaciones de la molécula común no permite un estudio más detallado de la molécula isotópica.

G. BECK: Quería preguntar sobre los procesos que pueden establecer tal equilibrio.

L. GRATTON: Los del ciclo de Bethe. Se puede calcular la vida media de núcleos que participan en las reacciones.

G. BECK: En el interior de las estrellas llegamos a una constitución que Landau supuso ser neutrones. Al entrar desde afuera llegamos primero a un punto en que los núcleos se descargan debido a que el "top" de la distribución de Fermi se hace tan elevado que los electrones se absorben por los núcleos.

L. GRATTON: Para que puedan ocurrir tales procesos o la temperatura o la presión deben ser muy elevadas. En las enanas blancas conocidas estamos todavía a presiones cien veces debajo de lo que haría falta.

12. L. GRATTON y M. I. CORVALAN (Observatorio Astronómico, La Plata): *Contenido de hidrógeno y de helio en algunas estrellas binarias.*

Las fórmulas de la teoría de la constitución interna de las estrellas permiten calcular el contenido de H y de He partiendo de las masas, radios y luminosidades observadas. Para eso es necesario adoptar un modelo estelar particular, lo que conduce a algunas dificultades para una solución completa del problema (Schwarzschild).

Un medio para superar estas dificultades sería el de usar una sola de las condiciones teóricas (la relación masa-radio-luminosidad de Eddington) aplicándola a cada una de las componentes de una estrella doble, en la razonable suposición de que ambas tengan la misma composición química; el cálculo ha sido efectuado para las dos componentes de η Cas y α Cen que son las dos estrellas binarias para las cuales los datos son más seguros. El resultado ha sido negativo, en el sentido de que no es posible satisfacer al mismo tiempo a los datos de observación para las dos componentes de una binaria con la misma composición química. Es probable que esto se deba al hecho de que el modelo de Cowling es demasiado simplificado para esta clase de investigaciones, lo que permite poner en duda los resultados previamente obtenidos con este modelo.

13. O. A. VARSIVSKY (Instituto de Matemática, Buenos Aires): *Método para introducir condiciones de cuantificación.* Se leyó el título.

14. J. A. BALSEIRO (Instituto de Física, La Plata): *Paquetes de ondas en la electrodinámica cuántica.*

La descripción cuántica del campo de radiación ha sido desarrollada sólo

considerando campos estacionarios. En este esquema a cada frecuencia le está asociado un fotón, y la energía del campo y el número de fotones son cantidades diagonales.

Para obtener un esquema que permita describir procesos no estacionarios tales como aquéllos en los cuales interviene la propagación del campo, se introduce un formalismo en el que el número de fotones queda referido a los ejes principales, no así la energía. En esta forma es posible disponer de "paquetes cuánticos" que contienen un número conocido de fotones, y a los cuales ya no es posible asignarles una frecuencia definida. La densidad de energía media de uno de estos paquetes es la misma que la del correspondiente "paquete clásico", entendiendo por tal, un paquete de ondas que tiene la misma distribución de frecuencias que el paquete cuántico. Pero a este último, no es posible asignarle un campo medio, lo que está de acuerdo con la complementariedad entre el número de fotones y la intensidad de campo. El caso de paquetes que contienen un solo fotón es particularmente ilustrativo; el campo clásico correspondiente, en tal caso, aparece explícitamente determinando la distribución del fotón sobre las distintas frecuencias que definen al paquete cuántico.

15. G. BECK (Observatorio Astronómico, Córdoba) y J. F. WESTERKAMP (Instituto de Física, Buenos Aires): *Acerca del proceso elemental de emisión de luz.*

Comparando los modelos de emisión de luz de un dipolo dados por la electrodinámica clásica y la electrodinámica cuántica, encontramos correspondencia completa considerando el campo a una distancia de la fuente mayor que una longitud de onda.

En el caso que la distancia de la fuente sea inferior a la longitud de coherencia (fotón *in statu nascendi*) el campo se describe por una superposición de vibraciones libres y vibraciones forzadas, teniendo las dos clases de vibraciones características distintas.

A distancias menores de una longitud de onda encontramos dificultades en establecer correspondencia entre las descripciones clásicas y cuántica.

L. GRATTON: ¿La distancia característica es del orden L o λ ? Si es del orden λ , desde el punto de vista experimental, no se podría decidir.

G. BECK: Es del orden L ; R. Lennuier observaba con la línea de Hg 2537 a varios centímetros de distancia, son millones de λ .

E. GAVIOLA: Quería decir que es satisfactorio ver que la teoría de emisión y de absorción de radiación se está apartando cada vez más de las antiguas ondas virtuales de Bohr, que permitían que la absorción se produjera antes de la emisión.

G. BECK: La razón por que se ha podido, durante tanto tiempo, esquematizar el proceso de emisión es que γ es muy pequeño y porque se encontraron muchos fenómenos en los cuales γ no intervenía sensiblemente. Pero cuando se ha ido a los detalles, se encontraron de nuevo analogías con la teoría clásica.

16. A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ (Instituto de Matemática, Buenos Aires) *Sobre las funciones singulares de Schönberg - Schwingner.*

Partiendo de la conocida descomposición de una función definida en todo

el eje real en dos componentes que son límites de funciones holomorfas en el semiplano superior y en el inferior, respectivamente, el autor, en una comunicación anterior, ha justificado rigurosamente el uso de la δ_+ y δ_- de Heisenberg. En la presente comunicación se muestra que esas consideraciones pueden extenderse al caso de funciones de varias variables, lo cual permite legalizar el uso de las funciones singulares de varias variables (que generalizan conocidas funciones simbólicas de Pauli) introducidas recientemente por Schwinger.

17. J. J. GIAMBIAGI (Instituto de Física, Buenos Aires): *Aplicación del método de Hadamard al cálculo del campo electromagnético del electrón.*

Cuando se aplica la fórmula de Green al recinto tetradimensional definido por $r^2 = (t - \tau)^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2 - (z - \zeta)^2 \geq 0$ para resolver, con una adecuada elección de la solución fundamental, la ecuación hiperbólica, todas las integrales que aparecen son infinitas, Hadamard da sentido a estas integrales divergentes con su concepto de "parte finita de una integral divergente".

Con este método se calcula el potencial y el campo electromagnético del electrón en un punto fuera de la línea de universo y el campo electromagnético en la línea de universo.

Este método puede resultar útil para eliminar divergencias en la mecánica cuántica.

18. E. GAVIOLA (Cristalerías Rigolleau, Buenos Aires): *Sobre el mecanismo de la bomba difusión-condensación para alto vacío.*

Una vieja controversia entre las escuelas de Gaede y de Langmuir colorea la literatura sobre bombas a chorro de vapor. Gaede pone énfasis sobre la difusión del gas proveniente del recipiente de alto vacío contra la corriente de vapor de retroceso proveniente de la garganta de chupada. Langmuir pone énfasis sobre la condensación del chorro de vapor que arrastra al gas desde la garganta de chupada y lo deposita sobre la pared fría donde condensa. Ambos se refieren a zonas diferentes de una bomba a chorro. Para completar la descripción hay que agregar la difusión en contra del chorro de vapor desde la zona de la pared fría donde reina presión preliminar hasta la garganta de chupada, y tener en cuenta la ley de Bernoulli. Un borde visible de líquido condensado separa la zona de presión preliminar de la zona barrida por el chorro. La segunda difusión es linealmente proporcional a la inversa de la distancia del borde líquido a la garganta de chupada.

Conviene separar conceptualmente en una bomba la función de válvula de la función de compresor. Pueden construirse bombas a chorro que sirven de válvula pero no de compresor. El factor de compresión (relación entre la presión final P_2 y la preliminar P_1) o el trabajo de compresión correspondiente permiten una mejor descripción del mecanismo que el concepto usual de velocidad.

19. E. GAVIOLA (Cristalerías Rigolleau, Buenos Aires): *Un sencillo dispositivo para medir la velocidad de bombas de vacío.*

Generalmente úsase una válvula de aguja, un capilar graduado y una gota de mercurio que lo recorre a poca velocidad. Permítese así la entrada continua de una pequeña cantidad conocida de aire. Mientras la gota recorre el capilar

es necesario establecer un estado estacionario y medir la presión. Dicho dispositivo complicado puede substituirse con ventajas por un simple capilar de vidrio estirado. El capilar se calibra así: Se hace vacío, con el capilar cerrado; se cierra una válvula entre la cámara de vacío y las bombas; se mide la presión; se abre el capilar, quebrando unos milímetros de su extremo, durante un número n de segundos; se cierra el capilar con una llamita de gas; se mide la nueva presión. El aumento de presión por el volumen sobre n es el flujo. Este flujo, dividido por la presión en el estado estacionario, con la válvula abierta, da la velocidad del sistema de bombas.

Además de su simplicidad, el dispositivo tiene estas ventajas:

1. El estado estacionario no tiene límite de tiempo.
2. El flujo medio incluye los gases y vapores desprendidos de las paredes, cuya cantidad no es despreciable.
3. Se pueden colocar simultáneamente varios capilares de flujos diverso.
4. Puede variarse el flujo de un mismo capilar reduciendo progresivamente su longitud.

J. F. WESTERKAMP: Quería preguntar si hay diferencias en el funcionamiento de las bombas de Hg y las de aceite, porque tengo entendido que los diseños suelen ser diferentes.

E. GAVIOLA: Cualitativamente el funcionamiento es igual; las diferencias en constantes adiabáticas y en calores de condensación introducen variaciones cuantitativas en los diseños.

20. F. CALLISEN (Instituto de Física, Tucumán): *Medición de temperaturas en fábricas de productos químicos.*

Después de un breve resumen de los métodos, de los que se sirven en la industria química para medir temperaturas, se muestra en unos ejemplos como disminuir los errores por consideraciones físicas.

21. K. FRÄNZ (Instituto Radiotécnico, Buenos Aires): *El método variacional para el cálculo de las resonancias electromagnéticas de cavidades.* Se leyó el título.

22. M. ABELE (Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Córdoba): *Cálculo de un generador lineal de electrones veloces.*

Se calcula el campo electromagnético de una guía de onda apta para funcionar como acelerador de electrones. Se determinan las frecuencias de corte y se calcula la modulación de velocidad de los nudos de campo eléctrico sobre el eje de la guía.

23. L. ACOSTA (Instituto de Física, La Plata): *Sobre imanes permanentes.*

Se calculan las dimensiones óptimas de un imán permanente destinado a un instrumento de medición a bobina móvil.

Las dimensiones del imán resultan depender esencialmente de la energía acumulada en el entrehierro y, en menor grado, de la forma de la bobina móvil.

Para estos cálculos basta tener en cuenta la curva de histéresis del ferromagnético utilizado y la permeabilidad reversible que puede deducirse de la curva virgen de magnetización.

INTRODUCCION A LA TEORIA AERODINAMICA DE LAS BOMBAS DE ALTO VACIO A CHORRO DE VAPOR

por ENRIQUE GAVIOLA *Cristalerías Rigolleau* (*)

(Recibido el 13 de Set. 1950)

ABSTRACT. — *Introduction to the Aerodynamical Theory of the Vapor Jet high Vacuum Pump.* — Results obtained with three glass pumps of 2 and 3 stages, two of them used with mercury and with oil, allow to dis-entangle the factors governing their functioning. It is found that the lesser efficiency of mercury at low pressures is due to a higher Gaede's flow and that its reported higher efficiency at relatively high pressures is due mainly to the fact that the same Watt input develops larger boiler pressures with mercury. A valve and a compressor effects can be conceptually separated. A quantitative first approximation aerodynamical theory of the first is developed. It shows that supersonic speeds of vapor jets are common and that Mach's number is larger for mercury. Backing pressures of the order of millimeters can be obtained with oil as well as with mercury. With increasing gas flux the speed decreases at first and grows later to a "secondary" maximum. The reason for this is found in the behavior of Gaede's flow. The volume swept by the main vapor current is several times larger than the speed at low pressures, but it builds up the main resistance at higher pressures under dynamical conditions. The "second diffusion" limits the speed at higher pressures under static conditions. The factor of Sears constitutes the main resistance at the low pressure end of the velocity curve.

A general formula for the speed of a pump is written, taking account of six terms: Sears', Gaede's, throat, swept volume, second diffusion and tube resistances. The resistance of Gaede dominates the field under average working conditions.

Rules for desing of pumps are set down and it is shown that a single stage pump does not compare favorably with two- and three- stage pumps. In a multi-stage pump each stage performs a specific job, the first as compressor, the last as valve, the fore-last as helper of the last, etc.; the vapor density in each can and must be kept just right in order to hold the resistance of Gaede within bounds.

(*) (Ahora en Laprida 854, Córdoba).

INTRODUCCION

En la parte I de este trabajo (*) ensayos han sido descritos con «difusores» de uno y de dos escalones, con refrigeración a aire y a agua, funcionando con aceite. Ellos han permitido establecer que:

1. - Un difusor desempeña 2 funciones: válvula y compresor. Puede ser una buena válvula y no servir como compresor (velocidad cero).

2. - Conviene distinguir el comportamiento «estático», cuando la bomba funciona únicamente como válvula, del comportamiento *dinámico*, cuando trabaja también como compresor.

3. - La corriente Gaedeana de vapor que parte de la garganta de chupada y se mueve hacia el alto vacío limita la velocidad de la bomba como compresor, pudiendo reducirla a cero.

4. - La condensación del excedente de vapor en la zona cercana, a ambos lados, de la garganta de chupada (Langmuir) evita que la corriente de Gaede sea, en ciertos diseños, excesiva.

5. - Un borde de aceite visible por debajo de un escalón, cuando la presión preliminar crece, indica el lugar del torbellino del cual parte la segunda difusión a lo largo de la pared.

6. - La segunda difusión fija el límite a la presión preliminar que un difusor aguanta.

7. - El flujo de gas que chupa y comprime la bomba en condiciones dinámicas tiene diversos efectos sobre su funcionamiento: a) perturba al chorro de vapor reduciendo su velocidad y modificando su trayectoria; b) influye sobre la velocidad de la corriente de Gaede, pudiendo llegar a anularla; c) eleva la presión preliminar, acercando el *borde de aceite* a la garganta de chupada, con lo que crece la segunda difusión.

En esta segunda parte se hace un estudio comparado del comportamiento de tres bombas, dos de ellas con mercurio y con aceite, lo que permite terminar de limpiar el camino de prejuicios y desarrollar una introducción fenomenológica a una futura teoría aerodinámica; se plantea una fórmula general aproximada para la velocidad, y al final se discuten algunos puntos fundamentales sobre diseño de bombas.

(*) E. GAVIOLA, Rev. Unión Mat. Arg. 14, p. 444 (1950) citado en adelante como (I).

El Mercurio en las Bombas a Chorro de Vapor.

Desde que Gaede construyó el primer difusor en 1915 hasta que Burch comenzó a usar con éxito aceites de baja tensión de vapor en 1928, el mercurio reinó indiscutido en las bombas a chorro de vapor para alto vacío. El inconveniente del mercurio es su presión de vapor de 1,2 micrones a la temperatura de 20°C. Esa presión es tolerable en algunas aplicaciones, pero excesiva en otras. Su propiedad de alearse con muchos metales y su toxicidad hacen al mercurio indeseable en ciertos casos. Para mantener la presión de vapor de mercurio por debajo de 10^{-4} hace falta una trampa fría a una temperatura de unos 10° bajo cero; para hacerla bajar de 10^{-5} hay que llegar a 25° bajo cero.

Los aceites minerales y sintéticos usados a partir de Burch tienen menores tensiones de vapor a temperatura ambiente y, si bien requieren también el uso de trampas frías si se quiere evitar su presencia en los recipientes de alto vacío, basta, en general, la circulación de agua de la canilla por la trampa fría para mantener la presión por debajo de 10^{-4} . Los aceites tienen, en cambio, 3 desventajas con respecto al mercurio: 1) al calentarse se descomponen parcialmente dando origen a sustancias volátiles que limitan el valor del vacío final y a parafinas o breas que ensucian la bomba; 2) su menor tensión de vapor obliga a elevar la temperatura para alcanzar la misma presión de caldera, gastando más energía, a pesar de su menor calor de vaporización; 3) la elevación de temperatura está limitada por la creciente descomposición del aceite; ello limita la presión preliminar tolerable.

Una desventaja del mercurio no ha sido, hasta ahora, satisfactoriamente explicada: una misma bomba tiene, para presiones finas inferiores a 10^{-3} (flujos pequeños) menos velocidad (cerca de la mitad) con mercurio que con aceite (Figura 1). Esta desventaja ha sido exagerada en la literatura. En el excelente libro de Strong⁽¹⁾ puede leerse en p. 112: «Con aceite se tienen usualmente velocidades de decenas o centenas de litros por segundo mientras que con mercurio las velocidades son generalmente de una fracción de litro por segundo hasta algunos litros por segundo». Esta afirmación sugiere que la eficiencia del acei-

(1) J. STRONG, *Procedures in Experimental Physics*, N. Y., 1938.

te es unas 100 veces mayor que la del mercurio. Sin embargo, en el mismo libro puede leerse en página 97: «Un buen aceite para difusor tiene una eficiencia de alrededor de 0,5 o 0,6. La

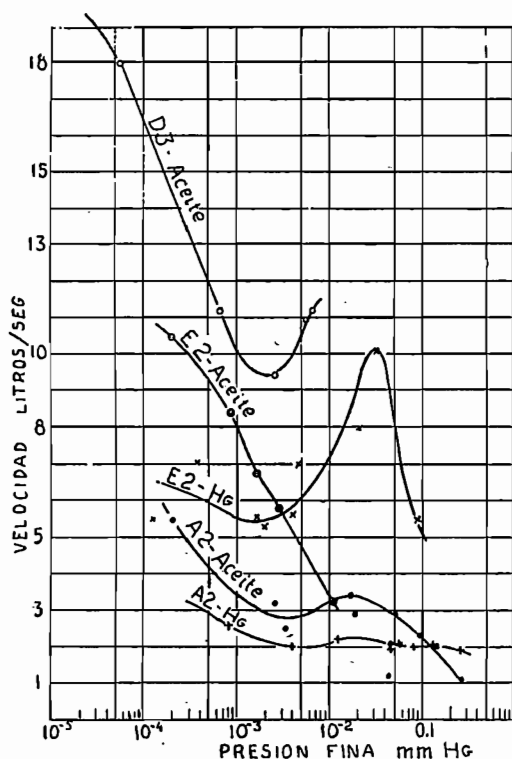


FIG. 1

Curvas dinámicas de velocidad volumétrica en función de la presión fina para las tres bombas A-2, E-2 y D-3; las dos primeras con aceite y con mercurio.

eficiencia de difusores a mercurio varía de 0,1 a 0,3». De acuerdo a esto la eficiencia del mercurio es solamente la mitad de la del aceite y no 100 veces menor como se sugiere en p. 112.

Otra diferencia es exagerada en la literatura: Alexander⁽²⁾ p. ej., afirma que «...bombas a vapor de aceite que tienen una alta eficiencia a presiones por debajo de 10^{-4} mm de mercurio son mucho menos eficientes a presiones por arriba de 10^{-3} mm que bombas a vapor de mercurio». ¿Cómo se explica este cu-

⁽²⁾ P. ALEXANDER, *J. Scient. Inst.* 25, p. 313 (Sept., 1948).

rioso hecho? Alexander trata de explicar la mayor eficiencia del aceite a bajas presiones, en parte, por su menor tensión de vapor, lo que aseguraría «una más completa condensación del mismo», sin indicar si esto reduce la contracorriente Gaedeana o

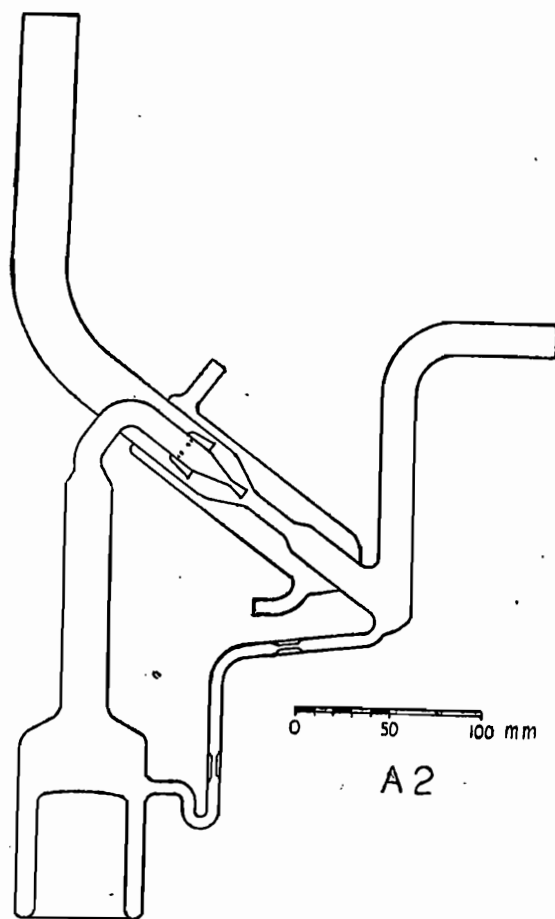


FIG. 2

Difusor amplificador (‘‘Booster’’) A-2 de 2 escalones, soplado con vidrio Pyrex

la presión en la zona de vacío preliminar. Es de creer que supone lo segundo, pues, en un trabajo anterior⁽³⁾ trató de demostrar teórica y experimentalmente que la contracorriente de Gaede o

⁽³⁾ ALEXANDER, *J. Scient. Inst.* 23, p. 11 (1946).

no existe o es despreciable. Supone, por otra parte, que el mayor diámetro de las moléculas de aceite es probablemente un «factor importante» para la velocidad de la bomba a bajas presiones.

TABLA I: A-2 CON ACEITE

Valores promediados por flujo

Nº	Wattos	P_c	P_2	P_1	Flujo lwg/s	V (l/s)	F	Estát. o dinámico	Observaciones
1	138	80	$2 \cdot 10^{-3}$	0,10	—	—	$5 \cdot 10^4$	Dinám.	
2	138	77	$2,0 \cdot 10^{-4}$	0,12	1,1	5,5	550	»	
3	138	70	$3,2 \cdot 10^{-3}$	0,26	8,0	2,5	81	»	
4	138	15	$2,45 \cdot 10^{-3}$	0,32	8,0	3,2	130	»	Aumento de V y de F con reducción de P_c
5	138	60	$1,85 \cdot 10^{-3}$	0,67	53	2,9	36	»	{ Caída de V y de F con reduc. de P_c
6	138	30	$4,30 \cdot 10^{-3}$	0,69	53	1,2	16	»	
7	138	65	$1,75 \cdot 10^{-3}$	0,72	60	3,4	41	»	
8	138	65	$4,5 \cdot 10^{-3}$	1,02	95	2,1	23	»	¿ P_c insuficiente?
9	138	70	$5,0 \cdot 10^{-3}$	1,15	146	2,9	23	»	P_c suficiente
10	138	70	$9,0 \cdot 10^{-3}$	1,34	204	2,3	15	»	
11	210	70	$13,0 \cdot 10^{-3}$	1,53	256	2,0	12	»	
12	210	70	$27,5 \cdot 10^{-3}$	1,73	307	1,1	6,2	»	¿Calefacción insufic.?
13			10^{-4}		0,72	7,2			Extrapolado

NOTAS: Los valores estáticos y los anteriores sin promediar, se encuentran en la tabla de la primera parte de este trabajo (I).

— P_c está indicada en milímetros de flalato de butilo, las demás presiones en milímetros de mercurio.

Si el menor diámetro de las moléculas de mercurio las hace menos eficientes a baja presión, ¿cómo se explica su mayor eficiencia a presiones mayores? Para salvar esta dificultad Alexander recurre al hecho de que es fácil producir con mercurio chorros de vapor de mayor densidad, debido a su mayor tensión de vapor y su estabilidad. Pero para que una comparación de eficiencia tenga sentido es necesario hacerla a *igual presión de*

caldera o a igual densidad. La eficiencia de una bomba con aceite también crece para presiones finas superiores a 10^{-3} si se aumenta la presión de caldera: véase, por ejemplo, la curva D-3 aceite de la figura 1.

TABLA II: A-2 CON MERCURIO

Valores promediados por flujo

Nº	Wattios	P_c	P_2	P_1	Flujo l/s	V (l/s)	F	Estát. o dinámico	Observaciones
1	138	8	10^{-3}	0,15	—	—	$1,5 \cdot 10^6$	Din.	Mercurio sucio
2	180	11	10^{-3}	0,11	—	—	$1,1 \cdot 10^6$	»	Mercurio casi limpio
3	138	8	$7,8 \cdot 10^{-4}$	0,14	2,0	2,6	180	»	
4	138	8	$4 \cdot 10^{-3}$	0,26	7,9	2,0	65	»	
5	138	8	$12 \cdot 10^{-3}$	0,44	26	2,2	37	»	
6	138	7	$4,5 \cdot 10^{-3}$	0,93	87	1,9	21	»	
7	138	8	$5,5 \cdot 10^{-3}$	1,08	114	2,1	20	»	
8	138	8	$8,0 \cdot 10^{-3}$	1,28	160	2,0	13	»	
9	138	8	$1,25 \cdot 10^{-2}$	1,66	160	2,1	13	»	
10	138	7	1,5	2,5	470	0,3	1,7	»	P_2 sube y fluctúa
11	180	12	$2,45 \cdot 10^{-1}$	2,445	470	1,9	10	»	Aumento calefacción y refrigeración
12	138	8	$8 \cdot 10^{-4}$	0,20	2,0	2,5	250	Est.	
13	138	8	$8 \cdot 10^{-4}$	0,40	2,0	2,5	500	»	
14	138	8	$9 \cdot 10^{-4}$	0,80	2,0	2,2	890	»	
15	138	8	$9 \cdot 10^{-4}$	1,10	2,0	2,2	1225	»	
16	210	10	$10 \cdot 10^{-4}$	1,40	2,0	2,0	1400	»	
17	210	12	$9 \cdot 10^{-4}$	1,60	2,0	2,2	1780	»	
18	210	13	$10 \cdot 10^{-4}$	1,80	2,0	2,0	1800	»	
19	210	14,5	$11 \cdot 10^{-4}$	2,00	2,0	1,8	1820	»	
20	210	15,5	$11 \cdot 10^{-4}$	2,35	2,0	1,8	2135	»	
21	210	15,5	$9 \cdot 10^{-4}$	2,60	2,0	2,2	2900	»	
22	210	16	$12 \cdot 10^{-4}$	3,60	2,0	1,7	3000	»	
23	210	16	$16 \cdot 10^{-4}$	3,80	2,0	1,2	2370	»	
24	210	16	$20 \cdot 10^{-3}$	4,02	2,0	0,1	201	»	Algodón algo seco
25	210	16	$20 \cdot 10^{-4}$	4,20	2,0	1,0	2100	»	Alg. mojado de nuevo
26	210	16	$10 \cdot 10^{-4}$	4,40	2,0	2,0	4400	»	Alg. mojado de nuevo
27	210	16	$60 \cdot 10^{-3}$	4,90	2,0	0,003	8	»	Cierro capilar y aumento calefacción
28	270	21	$6,5 \cdot 10^{-3}$	5,00	—	—	$8,3 \cdot 10^4$	»	
29			10^{-4}		0,33	3,3			Extrapolado

Conviene recordar que una bomba a chorro desempeña 2 funciones hasta cierto punto independientes: la de compresor y la de válvula. Hay que distinguir, pues, entre la eficiencia como compresor y la eficiencia como válvula. Alexander se refiere seguramente a la primera. Veremos que como compresor el aceite tiene mayor y como válvula casi igual eficiencia que el mercurio. Veremos, también, por qué.

Aparatos y Resultados Experimentales.

La figura 1 muestra las curvas dinámicas de velocidad volumétrica en función de la presión fina obtenidas con los difusores A-2 (figura 2), E-2 (figura 3) y D-3 (figura 4). Las tablas I, II, III, IV y V, indican los valores numéricos correspondientes, promediados por flujo, es decir, escribiendo los promedios de varias medidas (1 a 5) efectuadas para cada flujo, en condiciones comparables de presión de caldera. La figura 5 muestra las curvas de flujo o «velocidad molecular» en función de la presión fina y también las curvas de la bomba mecánica preliminar en función de la presión preliminar. Para esta se indican dos curvas: una corresponde al comportamiento con aceite recién puesto y la otra con aceite «usado», emulsionado con agua. La velocidad se reduce considerablemente en el segundo caso.

Las curvas de la figura 1 muestran elocuentemente la inconstancia de la velocidad (I). Cabe observar que las presiones finas han sido medidas con un Macleod (I), de modo que no se leen ni la presión de vapor de mercurio ni la del aceite condensable por presión a temperatura ambiente. Estas medidas corresponden, en cierto modo, a las presiones absolutas que se tendrían si se usaran trampas frías que no redujeran la velocidad, como el refrigerante superior de D-3 (figura 4), mantenidas a una temperatura inferior a -25° para mercurio y a 0° para aceite. Si se hubiera medido la presión absoluta, por otros métodos, sin el uso de trampas frías, las curvas descenderían a la izquierda rápidamente a cero al acercarse a la presión de vapor del líquido usado, o a la de los productos volátiles de su descomposición, a la temperatura ambiente.

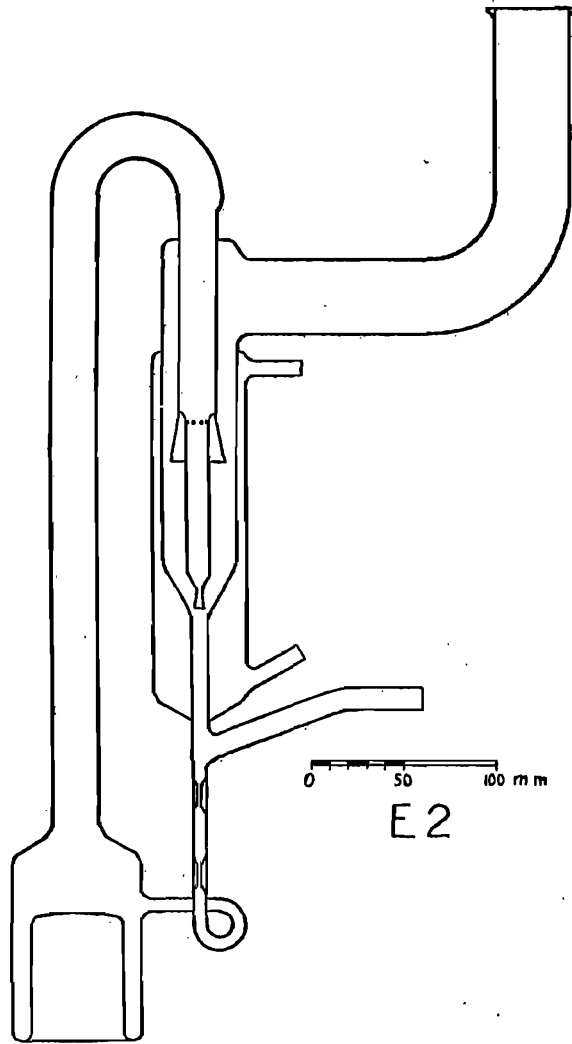


FIG. 3

Difusor de Ensayo E-2 de 2 escalones de vidrio Pyrex. El desnivel entre caldera y tubo de presión preliminar ha sido aumentado en el diseño con respecto al que tiene el modelo usado, al que se refieren las tablas III y IV y figuras 1, 5, 6 y 7.

El Cruce de las Curvas de Velocidad.

Tanto para la bomba E-2 como para la A-2 se obtienen velocidades menores con mercurio que con aceite para presiones

finas bajas. Aumentando el flujo, y con ello la presión fina, se alcanza un punto en el que las curvas se cruzan, siendo la eficiencia aparente del mercurio superior a la del aceite para presiones finas mayores que las del punto de cruce. Esto parece justificar la aseveración de Alexander.

TABLA III: E-2 CON ACEITE

Valores promediados por flujo

Nº	Wattos	P_c	P_s	P_i	Flujo l/s	V (l/s)	F	Estát. ρ dinámico	Observaciones
1	278	44	$2,0 \cdot 10^{-4}$	0,063	2,1	10,5	315	Din.	Casi no se ven bordes
2	278	39	$8,5 \cdot 10^{-4}$	0,116	7,1	8,4	136	»	Borde a 30mm. en escalón fino, a 22mm. en tobera.
3	278	39	$1,5 \cdot 10^{-3}$	0,145	10	6,7	97	»	Borde de aceite a 20mm. de escalón fino.
4	278	38	$10,4 \cdot 10^{-3}$	0,27	34	3,3	26	»	Se ven bordes en ambos escalones.
5	278	44	$2,95 \cdot 10^{-3}$	0,183	17	5,8	62	»	Se ven bordes en ambos escalones.
6	278	36	$2 \cdot 10^{-3}$	0,05	—	—	$2,5 \cdot 10^4$	»	
7	278	45	$8 \cdot 10^{-5}$	0,55	—	—	$6,9 \cdot 10^3$	Est.	
8	278	45	$3 \cdot 10^{-4}$	0,60	—	—	$2 \cdot 10^3$	»	
9	278	45	$7 \cdot 10^{-3}$	0,667	—	—	95	»	¿ P_c insuficiente?
10	278	45	$1,9 \cdot 10^{-3}$	0,679	—	—	36	»	P_c insuficiente
11	278	45	$5 \cdot 10^{-3}$	0,72	—	—	14	»	P_c insuficiente
12	278	45	$11 \cdot 10^{-3}$	0,78	—	—	7	»	P_c insuficiente
13	278	45	$27 \cdot 10^{-3}$	0,77	—	—	2,8	»	P_c insuficiente
14	278	45	$15 \cdot 10^{-3}$	0,80	—	—	5,3	»	P_c insuficiente

NOTA: P_c está indicado en milímetros de ftalato de butilo; las demás presiones en milímetros de mercurio.

Observemos que el cruce se produce para el difusor E-2 a una presión fina de $3,5 \cdot 10^{-3}$ y una velocidad de 5,7 litros por segundo, lo que corresponde a un flujo de 20 litros micrón por

segundo. Pero la presión de caldera era en el caso del aceite de 44 mm de este líquido, lo que corresponde a 3,4 mm de mercurio, mientras que en el otro caso la presión de caldera era de 15 mm de mercurio, es decir, más de 4 veces mayor. Debemos

TABLA IV: E-2 CON MERCURIO

Nº	W atios	cP	P ₂	P ₁	Flujo lwg/s	V (l/s)	F	Estát. o dinámico	Observaciones
1	278	15	12.10 ⁻⁵	0,014	0,65	5,5	123	Din.	
2	278	15	3,5.10 ⁻⁴	0,04	2,5	7,1	114	»	
3	278	15	1,6.10 ⁻³	0,09	9,0	5,6	56	»	
4	278	15	1,9.10 ⁻³	0,09	10	5,3	47	»	
5	278	15	3,9.10 ⁻³	0,12	22	5,6	32	»	
6	278	15	4,5.10 ⁻³	0,205	32	7,0	46	»	
7	278	15	2,0.10 ⁻³	0,62	160	8,0	31	»	
8	278	14	3,2.10 ⁻³	1,05	333	10,1	32	»	
9	278	14	8,7.10 ⁻³	1,37	440	5,4	17	»	¿P _c insuficiente?

suponer que la impresionante caída de la curva para aceite, por encima de 10⁻³ mm, se debe a insuficiente presión de caldera para efectuar el trabajo de compresión $\int d(pV)$ y para mantener a raya la presión preliminar. A este supuesto conduce la observación de las curvas D-3 y A-2 con aceite, las que después de la caída inicial entre 10⁻⁵ y 10⁻³, estabilizan su velocidad alrededor de 3. 10⁻³, con una presión de caldera de 70 mm (5,4 mm mercurio), para subir después a un máximo secundario por arriba de 10⁻². En la bomba E-2 ensayada no era posible aumentar la presión de caldera con aceite por encima del valor anotado por defecto de construcción. Este defecto está subsanado en figura 3.

El cruce no se debe, pues, a una mayor eficiencia del mercurio por encima de una presión fina 3. 10⁻³, sino a falta de presión de caldera con aceite.

Para el difusor amplificador A-2 el cruce se produce a una presión fina 36 veces mayor, P₂=0,125 mm de mercurio, y a

una velocidad de 2,0 litros por segundo para un flujo de 250 litros micrones por segundo. Observemos, también en este caso (Tablas I y II) que la presión de caldera en el caso del aceite

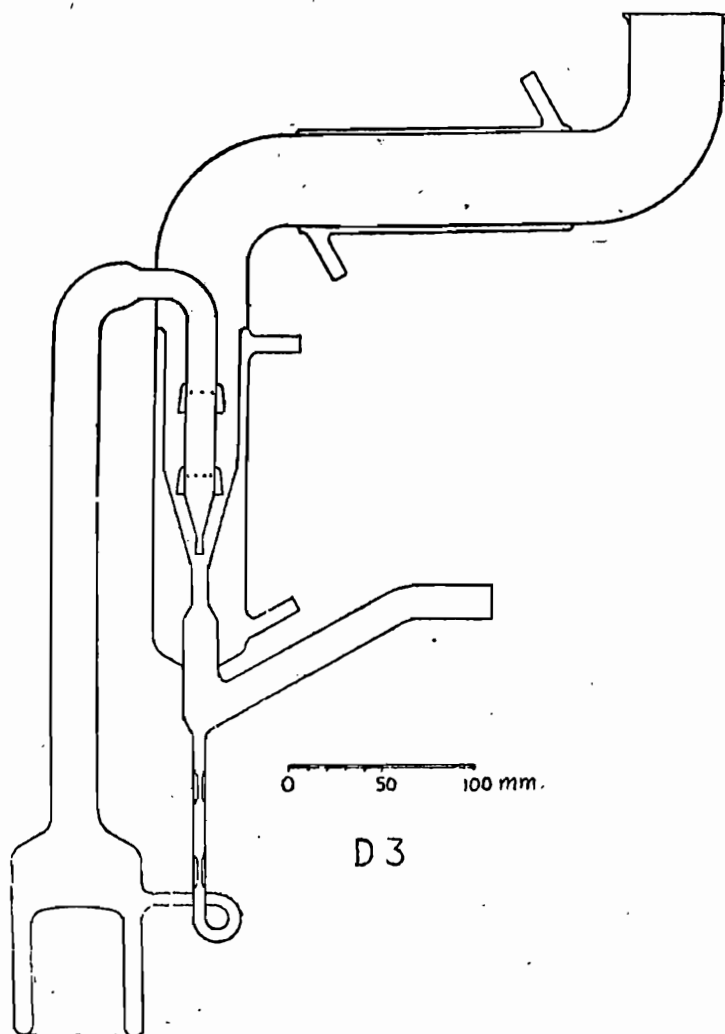


FIG. 4

Difusor de 3 escalones D-3 con vidrio Pyrex. El diámetro del tubo de chupada ha sido aumentado en el diseño a partir del manto refrigerante del cuerpo de la bomba y se han introducido 2 codos para aumentar el efecto del refrigerador adicional. En el modelo usado, al que se refieren la tabla V y figuras correspondientes, el tubo de chupada es recto y tiene 40 mm. de diámetro (37 mm. interior).

era de 70 mm de aceite (5,4 mm de mercurio), mientras que en el caso del mercurio era de alrededor de 8 mm, es decir, unas 1,5 veces mayor. Ahora bien, ya para un flujo de 53 litros micrones por segundo (tabla I, Nos. 5 y 6) el descenso de la presión de caldera de 60 a 30 mm de aceite produjo una caída de velocidad de 2,9 a 1,2 litros por segundo; un aumento posterior de la presión de caldera a 65 mm de aceite elevó, en cambio, la velocidad a 3,4 (tabla I, N^o. 7) a pesar de un ligero

TABLA V: D-3 CON ACEITE

Valores promediados por flujo

N ^o	Wattos	P _c	P ₂	P ₁	Flujo l _w /s	V (l/s)	F	Estát. o dinámico	Observaciones		
1	138	55	2.10 ⁻⁵	0,07	—	—	3,5.10 ⁴	Din.			
2	138	49	5,6.10 ⁻⁵	0,128	1,0	17,8	2,3.10 ³	»			
3	138	47	6,7.10 ⁻⁴	0,23	7,5	11,2	344	»			
4	210	70	2,45.10 ⁻⁵	0,40	23	9,4	163	»			
5	210	75	5,5.10 ⁻⁵	0,806	60	10,9	146	»	} Poca presión de aceite en escalón intermedio		
6	210	78	6,5.10 ⁻⁵	0,922	73	11,2	142	»			
7	138	50	5,5.10 ⁻⁵	0,13	1,0	18,2	2,6.10 ³	Est.			
8	138	50	5,5.10 ⁻⁵	0,20	1,0	18,2	4.10 ³	»			
9	138	50	5,5.10 ⁻⁵	0,40	1,0	18,2	8.10 ³	»			
10	210	60	5,5.10 ⁻⁵	0,70	1,0	18,2	14.10 ³	»			
11	210	60	5,5.10 ⁻⁵	0,80	1,0	18,2	16.10 ³	»			
12	210	65	5,5.10 ⁻⁵	0,95	1,0	18,2	19.10 ³	»	Distancia de bordes de aceite en escalon.		
13	210	65	6.10 ⁻⁵	1,20	1,0	16,7	20.10 ³	»	3 ^o	2 ^o	1 ^o
14	210	70	7.10 ⁻⁵	1,40	1,0	14,3	20.10 ³	»	5 mm. 25		
15	210	70	7.10 ⁻⁵	1,50	1,0	14,3	21,4.10 ³	»			
16	210	70	12.10 ⁻⁵	1,70	1,0	8,3	14,15	»			
17	210	70	8.10 ⁻⁵	1,808	1,0	0,1	226	»	5	3	20
18	210	60	33.10 ⁻⁵	1,63	—	0,001	5	»			
19	210	65	26.10 ⁻⁵	1,76	—	0,001	7	»			
20	300	75	3.10 ⁻⁵	2,03	—	0,003	68	»	2	1	5

NOTA: P_c está indicada en milímetros de ftalato de butilo, las demás presiones en milímetros de mercurio.

aumento en el flujo. Si para presiones finas de 2 a 5 centésimas y flujos de 53 a 60 l μ /s, una presión de caldera inferior a 65 mm de aceite era insuficiente para producir el trabajo de compresión y para contener la presión preliminar sin dejar caer la velocidad, es de suponer que para el punto de cruce, con una presión fina superior al doble, un flujo más de 4 veces mayor y una presión preliminar de un milímetro y medio, la presión de caldera de 70 mm de aceite también era insuficiente para mantener la velocidad.

Estamos, pues, en el mismo caso anterior. El cruce no se debe a mayor eficiencia del mercurio por encima de $P_2=0,125$ sino a insuficiente presión de la caldera de aceite.

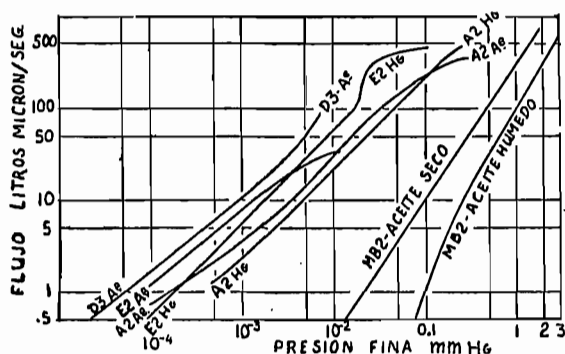


FIG. 5

Curvas de flujo ("velocidad molecular") en función de la presión fina para los difusores D-3, A-2 y E-2 y para la bomba mecánica preliminar "Micro-pal B2" con aceite seco y con aceite emulsionado por la humedad después de un tiempo de uso.

Conviene observar, de paso, que para flujos pequeños la velocidad aumenta al reducir la presión de caldera, lo contrario de lo que hemos visto para flujos mayores. Las medidas Nos. 4 y 3, de tabla I muestran que para un flujo de 8 l μ /s la velocidad aumenta de 2,5 a 3,2 l/s si se reduce la presión de caldera de 70 a 15 mm de aceite. Este hecho puede observarse en cualquier bomba, para flujos pequeños. Es importante para explicar la caída de la velocidad entre 10^{-5} y 10^{-3} mm de presión fina. De ello nos ocuparemos más adelante.

Presión Preliminar y Efecto Válvula.

La potencia de caldera se usa, pues, para efectuar un tra-

bajo de compresión y para atajar la presión preliminar manteniendo el borde de aceite a suficiente distancia (I). Si deseamos separar experimentalmente estos dos efectos, con el fin de hacer un balance energético, podemos hacer tender el trabajo de compresión a valores muy pequeños, reduciendo el flujo suficientemente y manteniendo presiones preliminares elevadas (caso estático). En este caso la bomba trabaja casi únicamente como válvula. La presión preliminar máxima que soporta en condiciones dadas nos permitirá establecer un criterio relativo de eficiencia entre aceite y mercurio.

Es creencia generalizada que el mercurio es más «eficiente» para aguantar presiones preliminares elevadas. El hecho observado es que una misma bomba con una misma calefacción y aislación soporta mayores presiones preliminares «estáticas» con mercurio que con aceite. Pero, en esas condiciones, también la presión de caldera es mayor (a menudo varias veces mayor) con mercurio que con aceite. Ello se debe a que el mercurio es más volátil.

Para hacer una comparación en condiciones bien definidas habría que trabajar en ambos casos con igual presión de caldera a igual temperatura del chorro de vapor. Igualar las presiones de caldera es fácil; las temperaturas no tanto. Las curvas de presión de vapor de mercurio y de éter de butilo se cortan recién a cerca de 300°C y 247 mm de presión. Por debajo de ese punto la temperatura del vapor de mercurio es inferior a la del aceite a igualdad de presión. Para igualar las temperaturas habría que sobrecalentar el vapor de mercurio. Sin llegar a esto, podemos contentarnos con comparar aceite y mercurio a iguales presiones de caldera.

Sea una tobera como las del 2º. escalón de *E-2* y *A-2* y del 3er. escalón de *D-3*. Supongamos que las bombas trabajen con flujo tendiendo a cero, pero contra una presión preliminar estática del orden de 1 milímetro de mercurio. La velocidad de salida del chorro de vapor a la altura del cuello de la tobera, será, según la teoría aerodinámica, muy cercana a la del sonido. Sean T_d y P_d la temperatura y la presión del vapor saturado encima de la tobera. En el cuello de la tobera, la temperatura T_t , la presión P_t y la velocidad del sonido a_t serán menores, debido a la expansión. El vapor estará allí sobresaturado, pues la expansión es adiabática, no habiendo tiempo para que se produz-

ca condensación, y las curvas de tensión de vapor tienen una pendiente grande. Las densidades variarán menos rápidamente que las presiones, pues el cambio de temperatura compensa, en parte, el cambio de presión, con respecto a aquellas.

Después de pasar el cuello de la tobera y hasta llenar el tubo de impulsión, se produce una nueva y mayor expansión adiabática. Los nuevos valores de P, T, ρ y a dependerán de la relación b entre las secciones del cuello de la tobera y del tubo de impulsión, y del diseño de la tobera misma. Este tendrá influencia sobre el valor de la velocidad supersónica del chorro de vapor

$$v = N a \quad (1)$$

donde N es el número de Mach y $a = a_t (T/T_t)^{\frac{1}{2}}$ (2), y con ello sobre dichos valores de P, T y ρ . Si V_t es un elemento de volumen en el cuello de la tobera, donde suponemos que la velocidad del chorro es a_t y V es el mismo elemento en el tubo de impulsión, podemos escribir

$$\frac{V_t}{V} = \frac{b}{N} \left(\frac{T_t}{T} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

donde N es usado como un parámetro de valor a determinar. Como la relación de densidades es inversa a la de los volúmenes, que contienen igual masa (condición de continuidad)

$$\frac{\rho}{\rho_t} = \frac{V_t}{V} = \left(\frac{b}{N} \right)^{\frac{2}{\gamma+1}}; \quad \frac{P}{P_t} = \left(\frac{b}{N} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}};$$

$$\frac{T}{T_t} = \left(\frac{b}{N} \right)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma+1}}; \quad \left(\frac{a}{a_t} \right)^2 = \frac{T}{T_t}. \quad (4)$$

El chorro de vapor es frenado en el tubo de impulsión por el gas en relativo reposo a la presión preliminar P_1 y condensa sobre las paredes enfriadas. Para calcular el valor de P_1 apliquemos la ecuación de Bernoulli para fluidos compresibles en condiciones adiabáticas

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{const.} \quad (5)$$

al chorro en movimiento primero y en reposo después

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} a^2 N^2 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1}. \quad (6)$$

Recordando que

$$a^2 = P \gamma / \rho \quad (7)$$

y que

$$\rho_1 / \rho = (P_1 / P)^{1/\gamma}$$

se llega a

$$P_1 = P \left(1 + \frac{1}{2} (\gamma - 1) N^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (8)$$

Reemplazando P de (4): obtenemos

$$P_1 = P_t \left(\frac{b}{N} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}} \left(1 + \frac{1}{2} (\gamma - 1) N^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (9)$$

Nos falta tener el valor de P_t en función de la presión de caldera $P_c + P_1$. A lo largo del tubo que lleva el vapor desde la caldera hasta la tobera se produce una caída de presión debida al frotamiento, al enfriamiento y a la condensación. El valor de la caída depende de la sección, del largo y de la aislación térmica del tubo. Si suponemos un tubo ancho, corto y bien aislado, podemos esperar una pequeña caída de presión. Podemos

$$P_d = \frac{9}{10} (P_c + P_1) \quad (10)$$

donde P_d es la presión en la parte ancha del tubo pocos centímetros encima de la tobera.

Aplicando de nuevo la ecuación de Bernoulli para la salida, a velocidad del sonido, del vapor por el cuello de la tobera, tenemos

$$\frac{P_t}{P_d} = \left(\frac{1 + \frac{1}{2} (\gamma - 1) N_d^2}{1 + \frac{1}{2} (\gamma - 1) N_t^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (11)$$

donde supondremos $N_d^2=1$ y el número de Mach en el tubo de vapor $N_d=1/16$. Substituyendo (11) y (10) en (9) resulta finalmente

$$P_1 = \frac{9}{10} (P_c + P_1) \left(\frac{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1)N_d^2}{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1)N_t^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\left(\frac{b}{N} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}} \left(1 + \frac{1}{2}(\gamma-1)N^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (12)$$

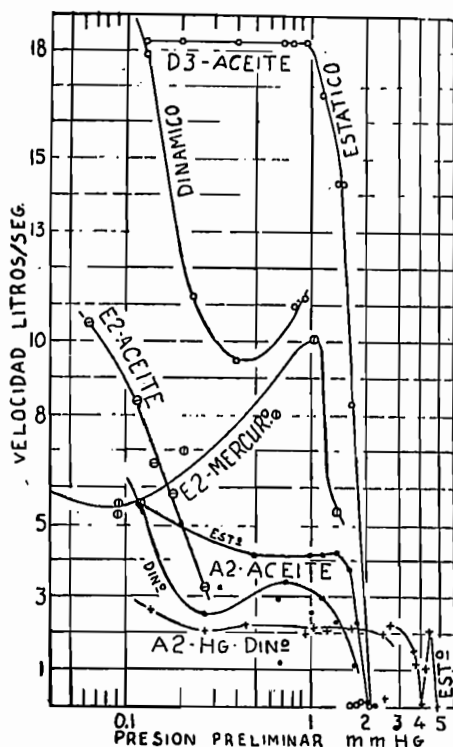


Fig. 6

Velocidades estáticas y dinámicas para D-3 con aceite, para A-2 con aceite y con mercurio y dinámicas para E-2 con aceite y con mercurio en función de la presión preliminar.

El valor de la constante adiabática para mercurio es conocido $\gamma=1,67$; para ftalato de butilo no he encontrado valor en las tablas. A juzgar por el valor para moléculas de semejante complejidad podemos suponer $\gamma=1,08$ como valor provisorio.

En la bomba A-2 es $b=0,184$. Este difusor soporta, en condiciones estáticas, una presión preliminar $P_1=2,2$ mm con una presión diferencial de caldera $P_c=5,0$ mm, trabajando con aceite. Con estos datos y los indicados anteriormente, podemos calcular un valor de N que satisfaga (12). Resulta el número de Mach $N=1,95$. Es decir que la velocidad «efectiva» del chorro de vapor de aceite en el tubo de impulsión es cerca de dos veces la velocidad del sonido y

$$P_1=0,306 (P_c + P_1). \quad (13)$$

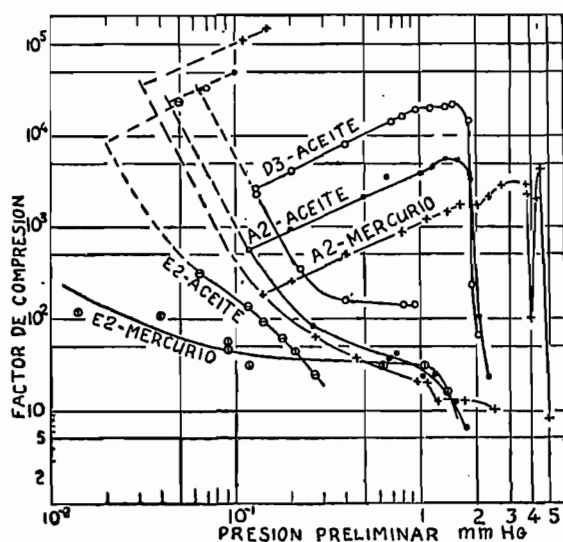


Fig. 7

Curvas estáticas y dinámicas de factor de compresión para D-3 con aceite, A-2 con aceite y con mercurio y dinámicas para E-2 con aceite y con mercurio en función de la presión preliminar.

Repetamos el cálculo para el caso de la misma bomba A-2 operando con mercurio. No se han hecho mediciones a igual presión de caldera. Con $P_c=16$ mm soporta $P_1=4,9$ mm. De (12) resulta, con $\gamma=1,67$ y $N=2,0$: $P_1=0,187 (P_c + P_1) = 3,9$ mm. Como la presión preliminar observada es mayor que la calculada para $N=2$, quiere decir que en el caso del mercurio la velocidad relativa al sonido es mayor, lo que no significa que la velocidad en cm/seg. del chorro de vapor sea mayor, pues T y α son menores para mercurio. Se alcanza el valor observado con

$N=2,18$. Resulta ahora

$$P_1 = 0,234 (P_c + P_1) \quad (14)$$

para mercurio.

En los números escritos más arriba no debe atribuirse significado a la tercera cifra significativa: se la escribe para no aumentar los errores, innecesariamente, al redondear el cálculo numérico.

Podemos encarar ahora la cuestión de la eficiencia relativa de aceite y mercurio en cuanto a sostener presión preliminar. De la comparación de (13) y (14) resulta una mayor eficiencia para el aceite, contrario a la creencia generalizada. Ello se debe al menor valor de la constante adiabática para aceite. El número de Mach es, en cambio, mayor para el mercurio que para aceite. Esto puede deberse a que el mercurio no moja el vidrio y el aceite si, por lo que en el chorro de mercurio que sale de la tobera las velocidades son probablemente más uniformes que en el de aceite, donde el promedio es rebajado por una mayor fricción contra la pared.

La comparación puede hacerse, también, para igual presión en el cuello de la tobera. Como $P_t = 0,53 (P_c + P_1)$ para aceite y $0,437 (P_c + P_1)$ para mercurio, resulta $P_1 = 0,577 P_t$ para aceite y $0,536 P_t$ para mercurio. El coeficiente del mercurio es todavía menor, pero, mientras con respecto a la presión de caldera la relación entre las eficiencias es 1,31, con respecto a la presión en el cuello de la tobera ésta se reduce a 1,075.

Cabe recordar que la refrigeración de A-2 resultó insuficiente para calefacción superior a 138 watios, con mercurio, y que fué suplementada con algodón mojado alrededor del tubo que conduce a la bomba preliminar. Este tipo de refrigeración es ineficiente. Con refrigeración adecuada N podría resultar mayor aún para mercurio (*).

Continuará

(*) En la figura 2 la superficie de refrigeración ha sido aumentada.

PUBLICACIONES DE LA U. M. A.

Revista de la U. M. A. — Vol. I (1936-1937); Vol. II (1938-1939); Vol. III (1938-1939); Vol. IV (1939); Vol. V (1940); Vol. VI (1940-1941); Vol. VII (1940-1941); Vol. VIII (1942); Vol. IX (1943); Vol. X (1944-1945).

Revista de la U. M. A. y órgano de la A. F. A. — Vol. XI (1945-1946); Vol. XII (1946-1947); Vol. XIII (1948); Vol. XIV (1949-1950).

Los volúmenes III, IV, V y VI comprenden los siguientes fascículos separados:

Nº 1. GINO LORIA. *Le Matematiche in Ispagna e in Argentina.* — Nº 2. A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre las series de funciones de Hermito.* — Nº 3. MICHEL PETROVICH. *Remarques arithmétiques sur une équation différentielle du premier ordre.* — Nº 4. A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Una nueva demostración del teorema límite del Cálculo de Probabilidades. Condiciones necesarias y suficientes para que una función sea integral de Laplace.* — Nº 5. NIKOLA OBRECHKOFF. *Sur la sommation absolue par la transformation d'Euler des séries divergentes.* — Nº 6. RICARDO SAN JUAN. *Derivación e integración de series asintóticas.* — Nº 7. Resolución adoptada por la U. M. A. en la cuestión promovida por el Sr. Carlos Biggeri. — Nº 8. F. AMODEO. *Origen y desarrollo de la Geometría Proyectiva.* — 9. CLOTILDE A. BULA. *Teoría y cálculo de los momentos dobles.* — Nº 10. CLOTILDE A. BULA. *Cálculo de superficies de frecuencia.* — Nº 11. R. FRUCHT. *Zur Geometria auf einer Fläche mit indefiniter Metrik (Sobre la Geometría de una superficie con métrica indefinida).* — Nº 12. A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre una memoria del Prof. J. C. Fignaux.* — Nº 13. E. TORANZOS. *Sobre las singularidades de las curvas de Jordan.* — Nº 14. M. BALANZAT. *Fórmulas integrales de la intersección de conjuntos.* — Nº 15. G. KNIE. *El problema de varios electrones en la mecánica cuantista.* — Nº 16. A. TERRACINI. *Sobre la existencia de superficies cuyas líneas principales son dadas.* — Nº 17. L. A. SANTALÓ. *Valor medio del número de partes en que una figura convexa es dividida por n rectas arbitrarias.* — Nº 18. A. WINTER. *On the iteration of distribution functions in the calculus of probability (Sobre la iteración de funciones de distribución en el cálculo de probabilidades).* — Nº 19. E. FERRARI. *Sobre la paradoja de Bertrand.* — Nº 20. J. BABINI. *Sobre algunas propiedades de las derivadas y ciertas primitivas de los polinomios de Legendre.* — Nº 21. R. SAN JUAN. *Un algoritmo de sumación de series divergentes.* — Nº 22. A. TERRACINI. *Sobre algunos lugares geométricos.* — Nº 23. V. y A. FRAILE y C. CRESPO. *El lugar geométrico y lugares de puntos áreas en el plano.* — Nº 24. R. FRUCHT. *Coronas de grupos y sus subgrupos, con una aplicación a los determinantes.* — Nº 25. E. R. RAIMONDI. *Un problema de probabilidades geométricas sobre los conjuntos de triángulos.*

En 1942 la U. M. A. ha iniciado la publicación de una nueva serie de "Memorias y monografías" de las que han aparecido hasta ahora las siguientes:

Vol. I; Nº 1. — GUILLERMO KNIE, *Mecánica ondulatoria en el espacio curvo.* Nº 2. — GUIDO BECK, *El espacio físico.* Nº 3. — JULIO REY PASTOR, *Integrales parciales de las funciones de dos variables en intervalo infinito.* Nº 4. — JULIO REY PASTOR, *Los últimos teoremas geométricos de Poincaré y sus aplicaciones. Homenaje póstumo al Prof. G. D. BIRKHOFF.*

Vol. II; Nº 1. — YANNY FRENKEL, *Criterios de biconvexidad y de H -completitud de un espacio topológico accesible de Frechet-Riesz.* Nº 2. — GEORGES VALIRON, *Fonctions entières.*

Además han aparecido tres cuadernos de *Miscelánea matemática.*

S U M A R I O

	Pág.
José Würschmidt † (1886-1950), por G. BECK	53
Generalización de una desigualdad de H. HERNIICH a espacios de curvatura constante, por L. A. SANTALÓ	62
Sobre la numerabilidad del continuo, por P. P. CALLEJA con una nota de J. R. P.	67
<i>Bibliografía.</i> Colloque de Géométrie algebrique (L. A. Santaló). Libros y revistas recibidos (M. V.)	70
Informes y comunicaciones de la XV Reunión de la Asociación Física Argentina	73
Introducción a la teoría aerodinámica de las bombas de alto vacío a chorro de vapor, por E. GAVIOLA	81

UNION MATEMATICA ARGENTINA

MIEMBROS HONORARIOS

Tulio Levi-Civita (†); Beppo Levi; Alejandro Terracini; George D. Birkhoff (†); Marshall H. Stone; Georges Valiron, Antoni Zygmund.

REPRESENTANTES EN EL EXTRANJERO

Ing. Rafael Laguardia (Uruguay). Ing. José Luis Massera (Uruguay). Dr. Godofredo García (Perú). Dr. Leopoldo Nachbin (Brasil). Dr. Roberto Frucht (Chile). Dr. Peter Thullen (Ecuador). Dr. Mario González (Cuba). Dr. Alfonso Nápoles Gandara (México). Pedro Puig (España). Georges Valiron (Francia). Alejandro Terracini (Italia).

Contribuyen especialmente al sostenimiento de las publicaciones de la UNION MATEMATICA ARGENTINA los siguientes

MIEMBROS PROTECTORES

COMPANÍA INDUSTRIAL DEL NORTE DE SANTA FE. INGENIO AZUCARERO "ARNO" (Villa Ocampo. F. C. S. F.). — JULIO REY PASTOR (Buenos Aires). — EMILIA J. DE DOMÍNGUEZ (Buenos Aires). — TRICERRI HNOS. (Rosario). — CLOTILDE A. BULA (Rosario). — ELBA R. RAIMONDI (Buenos Aires). — FERNANDO L. GASPAR (Rosario).