

REVISTA  
 DE LA  
**UNION MATEMATICA ARGENTINA**  
 (MIEMBRO DEL PATRONATO DE LA MATHEMATICAL REVIEWS)  
 Y DE LA  
**ASOCIACION FISICA ARGENTINA**

Director: José Babini

Redactores de la U. M. A.: Julio Rey Pastor, Luis A. Santaló, Mischa Cotlar

Redactores de la A. F. A.: Enrique Gaviola, Richard Gans, R. H. Busch



S U M A R I O

|  | PÁG. |
|--|------|
| Introducción a la teoría aerodinámica de las bombas de alto vacío a chorro de vapor (Conclusión), por E. GAVIOLA .....                   | 101  |
| Teoría de los servomecanismos lineales de alta precisión, por K. FRÄNZ ..  | 128  |
| Informes y comunicaciones de la XVI Reunión de la Asociación Física Argentina. Crónica de la misma por G. BROC .....                     | 149  |
| <i>Bibliografía.</i> Colloque de Topologie. H. Hasse, Höhere Algebra. W. G. Welchman, Introduction to Algebraic Geometry (L. A. Santaló) | 153  |
| Agradecimiento .....   | 156  |



BUENOS AIRES

1952

## UNION MATEMATICA ARGENTINA

La U. M. A. reconoce cuatro categorías de miembros: honorarios, protectores, titulares y adherentes. El miembro protector paga una cuota anual de 200 \$, por lo menos; el titular una cuota anual de 100 \$; y el adherente una cuota anual de 25 \$. Los pagos deberán efectuarse por cheque, giro u otro medio libre de gastos, a la orden de la Tesorera, Prof. Clotilde A. Bula, Piedras 325. Capital Federal.

Por ser la U. M. A. miembro del patronato de la *Mathematical Reviews* (sponsoring member), los socios de la U. M. A. tienen derecho a suscribirse a esa importante revista de bibliografía y crítica con 50 % de rebaja sobre el precio de suscripción que es de 20 dólares por año. Los socios de la U. M. A. pagarán por tanto sólo 10 dólares por año.

Los autores de trabajos reciben gratuitamente una tirada aparte de 50 ejemplares. Las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

### JUNTA DIRECTIVA

Presidente, Alberto González Domínguez, Paraguay 1327.  
Vicepresidentes, Luis A. Santaló, Antonio Monteiro. Secretario general, Máximo Valentinuzzi. Prosecretario, Roque Carranza. Secretarios locales, O. A. Varsavsky (Bs. Aires), R. A. Ricabarra (La Plata), P. L. Checchi (Córdoba), E. Gaspar (Rosario), José M. Arango (Bahía Blanca), I. C. Guglielmo (Tucumán), S. Sisánov (San Juan), J. de Dios Olivieri (Santa Fe), M. Balanzat (San Luis), F. Toranzos (Mendoza): Tesorera, Clotilde A. Bula, Protesorera, María Josefina Erramuspe, Director de Publicaciones, J. Babini.

## ASOCIACION FISICA ARGENTINA

La A. F. A., asociación privada de investigadores, profesores y estudiantes de física y de astronomía, tiene por objeto fomentar el progreso de la enseñanza de dichas materias por medio de reuniones científicas periódicas y de la publicación de trabajos originales.

Podrán ingresar como socios activos quienes hayan efectuado investigaciones originales; pueden ser socios adherentes los profesores que no cumplan este requisito; y socios estudiantes los que hayan aprobado el primer año de estudios de física o de astronomía.

Las solicitudes de ingreso, que deberán llevar la firma de dos socios activos o adherentes, habrán de dirigirse al secretario local que corresponda. Los socios activos abonarán una cuota mensual de 12 \$, los adherentes de 8 \$ y los estudiantes de 5 \$. En estas cuotas están incluidas las suscripciones al órgano de la A. F. A. y a la revista "Ciencia e Investigación".

Los manuscritos destinados a la publicación y la correspondencia administrativa deberán enviarse al delegado de la A. F. A., Rodolfo A. Busch, Martínez 71, Martínez (Pcia. de Bs. Aires).

Para la redacción y presentación de los trabajos se agradecerá se tengan en cuenta las *Normas generales* distribuidas con esta revista en 1945.

### COMISION DIRECTIVA

Presidente en ejercicio: Ernesto E. Galloni  
Tesorera: Estrella Mazzolli de Mathov, San Juan 1931, Buenos Aires.  
Secretarios locales: Ernesto E. Galloni, Buenos Aires, Yermal 1763.  
Marco A. Poggio, La Plata, calle 41 N° 764.  
Guido Beck, Córdoba, Laprida 922.  
Augusto Battig, Tucumán, 25 de Mayo 731.

Abonnement annuel à l'étranger: 4.00 dollars (Etats-Unis).

Prière d'adresser toute la correspondance scientifiques, administrative et les échanges à l'adresse ci-dessous:

REVISTA DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA  
Casilla de Correo 3588  
Buenos Aires (Argentina)

# INTRODUCCION A LA TEORIA AERODINAMICA DE LAS BOMBAS DE ALTO VACIO A CHORRO DE VAPOR

por ENRIQUE GAVIOLA *Cristalerías Rigolleau* (\*)

(Recibido el 13 de Set. 1950)

(Conclusión)

Mientras no se conozca el valor de la relación de calores específicos para ftalato de butilo y mientras no se hagan medidas a igual presión de caldera o a igual  $P_t$ , sin exceder la refrigeración, puede concluirse provisoriamente que las eficiencias son prácticamente iguales.

Esto ha sido confirmado por la siguiente experiencia: A partir de la medida N<sup>o</sup>. 21 de tabla II se produjo una rápida caída de la velocidad hasta llegar a 0,1 litros por segundo en la medición N<sup>o</sup>. 24. A esta corresponde una presión preliminar de 4 mm (véase figura 6, donde los puntos de la curva estática para A - 2 con mercurio están indicados a partir del N<sup>o</sup>. 26; no así los puntos anteriores por superponerse, prácticamente, a los de la curva dinámica). Al terminar la medición N<sup>o</sup>. 24 se notó que el algodón «mojado» estaba algo seco y caliente; al agregársele agua a temperatura ambiente, dejándolo gotear un poco, subió la velocidad rápidamente hasta 2 l/s (mediciones 25 y 26) a pesar del aumento de la presión preliminar a 4,4 mm. Al llegar ésta a 4,9 mm (medición 27) cayó de nuevo la velocidad, pero esta vez con el algodón bien mojado. La presión de caldera era ahora insuficiente. Aumentando ésta de 16 a 21 mm de mercurio (N<sup>o</sup>. 28) mejoró la presión fina en un factor 10<sup>4</sup>, soportando una presión preliminar de 5 mm. El número de Mach podría ser, pues, para mercurio, mayor aún que 2,18.

*Presión Fina y Efecto Compresor. El Máximo «Secundario».*

El mercurio es casi tan eficiente como el aceite en lo que al efecto válvula se refiere. Pero es menos eficiente a bajas presiones en cuanto a velocidad volumétrica, como lo muestran las curvas de la figura 1. Esto requiere una explicación.

Dicha figura nos muestra, también, que la velocidad, partiendo de un valor máximo para flujos pequeños, cae rápidamente hasta un valor mínimo para una presión fina entre 2 y  $5 \cdot 10^{-3}$  y que vuelve a ascender — si la presión de caldera es suficiente — hasta alcanzar un máximo secundario, a una presión fina entre 0,01 y 0,04 mm, para caer de nuevo, para flujos mayores, más o menos rápidamente, según sea la presión de caldera. El máximo «secundario» en el caso de E-2 con mercurio tiene un valor *mayor* que el máximo «primario» a  $10^{-4}$ . Esto requiere, también, ser explicado.

El comportamiento de E-2 con mercurio no es excepcional. D-3 con aceite se mueve hacia un bien marcado máximo con el crecer del flujo, pero no puede alcanzarlo por estar limitada la presión de caldera, en el modelo construido, por falta de desnivel en el tubo de retorno del aceite a la caldera. En la figura 4 el desnivel es mayor que en el modelo usado. A-2 con aceite presenta un máximo secundario bien definido. Los puntos que caen debajo de la curva, frente al máximo, (Nos. 5 y 6 en tabla I) se deben a insuficiente presión de caldera. A-2 con mercurio presenta un máximo secundario menos definido. En algunas de las bombas de Alexander pueden observarse máximos «secundarios» para mercurio, p. e. en su trabajo de 1946 (l. c. figuras 4 y 7) y para mercurio y glicerina en su publicación de 1948 (l. c.). Bull y Klemperer<sup>(5)</sup> obtienen con un diseño de refrigeración interna 20 litros por segundo a  $3 \cdot 10^{-6}$  y un aumento de velocidad a 90 litros por segundo al crecer la presión fina a  $5 \cdot 10^{-5}$  mm de mercurio. Este máximo «secundario» es cuatro y media veces mayor que el mínimo que le precede. En nuestro caso, la velocidad en el máximo de E-2 con mercurio apenas alcanza al doble del mínimo anterior.

Para explicar todos estos hechos es necesario ahondar en la teoría del efecto compresor esbozada en el trabajo anterior (I).

### *El Volumen Barrido.*

Así como la presión preliminar máxima que la bomba soporta depende, en bombas de más de un escalón, del último de ellos, la velocidad volumétrica máxima depende del primero. Se supone que está adecuadamente respaldado por el o los que le

(5) BULL and KLEMPERER, *J. Scient. Instr.* 20, p. 179 (1943).

siguen. En la consideración del efecto compresor nos ocuparemos, por ello, principalmente del primer escalón.

El factor positivo principal en el efecto compresor es el volumen barrido  $l/B$ . Para definirlo imaginémosnos un «frente de onda» o «frente molecular» en el chorro de vapor que sale de la boquilla del primer escalón (figura 8) y supongamos, por ahora, que el flujo de gas es cero. El frente se mueve con el promedio de las velocidades moleculares correspondientes a cada elemento de sección normal a la resultante de las trayectorias. El elemento de sección debe tomarse suficientemente amplio para que pasen por el mismo un número grande de moléculas. Este «frente molecular» se mueve hacia abajo con el chorro de vapor principal, pero también hacia arriba (hacia el lado del alto vacío  $P_2$ ) con la corriente Gaedeana. De esta parte nos ocuparemos en el párrafo siguiente.

Si al frente lo imaginamos plano al pasar por el cuello de la boquilla, no lo será al salir de su boca, pues la velocidad del chorro se reducirá en las cercanías de las paredes sólidas, para ser cero en contacto con éstas, si la corriente es laminar, o para «rodar» sobre un sistema de torbellinos si la velocidad es superior a la crítica. Si lo imaginamos plano al dejar la boquilla, su sección en el plano de figura 8, por debajo de la boquilla, adquirirá una forma ovalada, o semielíptica, hasta tocar las paredes sólidas exterior e interior. La pared exterior está refrigerada y podemos suponer, en primera aproximación, para el caso de líquidos que *mojan* la pared, que los elementos del frente que la tocan condensan sobre la misma. Si la pared interior existe y no está refrigerada, como en figura 8, las moléculas que la toquen, si «mojan» a la pared en cuestión, condensarán para ser reemitidas en todas direcciones con velocidad correspondiente a la temperatura de la pared, perturbando y frenando la corriente principal. Si el líquido no «moja» la pared, caso del mercurio, una fracción de las moléculas o átomos será reflejada elásticamente por la pared, conservando su velocidad y, si la superficie es «lisa», la componente axial de su impulso.

Llamamos  $l/B$  al volumen barrido por un frente molecular en el tiempo  $\Delta t$  posterior al instante en que toca la pared exterior, hacia abajo del plano de la garganta de chupada. El tiempo debe ser elegido suficientemente corto para que el chorro de vapor no llegue a ser sensiblemente frenado por el gas en relativo reposo

que forma la presión preliminar del primer escalón. El valor de  $1/B$  estará dado, en primera aproximación, por la media de las componentes axiales de las velocidades de las líneas de corriente del chorro en el intervalo de tiempo considerado, multiplicado por la sección correspondiente entre el tubo exterior y el interior.

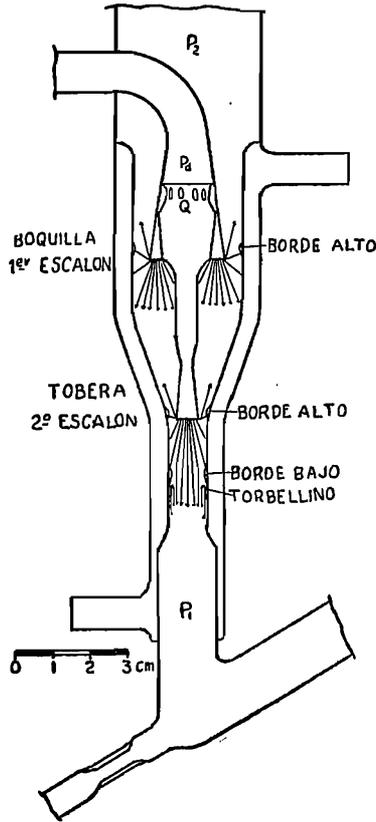


FIG. 8

Los 3 bordes de aceite y los chorros de vapor en un difusor amplificador a 2 escalones a boquilla y a tobera (esquemático).

Ya vimos que la velocidad efectiva del chorro de vapor emergente de la tobera es, para aceite, unas 2 veces la velocidad del sonido en el caso del difusor A-2, a pesar de correr contra una presión preliminar de 2,2 mm de mercurio, y que el número de Mach es mayor para mercurio. Debemos esperar que la velocidad de un chorro emergente de una boquilla como la del

primer escalón de figura 8, expandiéndose en un espacio prácticamente vacío (suponemos flujo pequeño o cero y presión preliminar baja) sea igual o mayor que la encontrada anteriormente. Supongamos que la velocidad efectiva es, como anteriormente, cerca de dos veces la del sonido. En tabla VI se encuentran indicados los valores calculados de presiones, temperaturas y veloci-

TABLA VI - EFECTO VALVULA

*Difusor A-2. Segundo Escalón, a Tobera*

|  |               |   | ACEITE                | MERCURIO              | MERCURIO |
|--|---------------|---|-----------------------|-----------------------|----------|
| Presión diferencial caldera                            |               | $P_c$   | 5,0 mm.               | 16,0 mm.              |          |
| Encima de tobera                                       | Presión total | $P_d$   | 6,48                  | 18,8                  | 6,48     |
|  | Temperatura   | $T_d$   | 457°K                 | 476°K                 | 443°K    |
| Cuello de tobera<br>Sec.<br>ción=0,071cm. <sup>2</sup> | Presión       | $P_t$   | 3,82                  | 9,12                  | 3,15     |
|  | Temperatura   | $T_t$   | 439°K                 | 356°K                 | 331°K    |
|  | Veloc. sonido | $at$  | 1,192.10 <sup>4</sup> | 1,56.10 <sup>4</sup>  |          |
| Chorro Sec.<br>ción=0,384cm. <sup>2</sup>              | Presión       | $P$   | 0,321                 | 0,461                 | 0,159    |
|  | Expansión     | $\left(\frac{b}{N}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}$ | 0,0840                | 0,0506                | 0,0506   |
|  | Temperatura   | $T$   | 365°                  | 108°K                 |          |
|  | Vel. sonido   | $a$   | 1,086.10 <sup>4</sup> | 0,895.10 <sup>4</sup> |          |
|  | Nº Mach       | $N$   | 1,95                  | 2,18                  |          |
| Presión preliminar                                     |               | $P_1$   | 2,2 mm.               | 4,9                   |          |
| Temperatura preliminar                                 |               | $T_1$   | 422°K                 | 278°K                 |          |
| Volumen barrido  |               | $1/B$   | 8,13 l/s.             | 7,49 l/s.             |          |

dades del sonido para el segundo escalón (a tobera) del difusor A-2 en las condiciones estáticas consideradas anteriormente, para aceite y para mercurio con presión total encima de la tobera  $P_d=6,48$  mm y para mercurio con presión diferencial de caldera  $P_c=16$  mm. En tabla VII se encuentran los valores calculados para el primer escalón (a boquilla) de la bomba de figura 8, con aceite y con mercurio a igual presión total de caldera. Es de notar que la temperatura del chorro cae relativamente poco con aceite, de 457° K encima de la boquilla a 319° en el chorro del 1er. escalón, pero mucho con mercurio, de 443 a 41° K (—232° C). Esta diferencia se debe al mayor valor de la constante adiabática del mercurio. La velocidad del sonido varía, en consecuencia, poco con aceite, pero cae en el chorro del primer escalón, con mercurio, a la tercera parte de la que reina en el

cuello de la boquilla. Esto tiene influencia en el valor del volúmen barrido. Si suponemos para ambos fluidos el mismo número de Mach 2, los volúmenes barridos serían 137 litros por segundo para aceite y 71,6 para mercurio. Si el número de Mach es mayor en el caso del mercurio, como parecen sugerirlo los ensayos

TABLA VII. - PRIMER ESCALON A BOQUILLA DEL DIFUSOR FIGURA 8

|   |                  |                 | ACEITE                | MERCURIO              |
|---|------------------|-----------------|-----------------------|-----------------------|
| Presión diferencial caldera                 |                  | $P_c$           | 5,0                   |                       |
| Encima de boquilla                          | Presión total    | $P_d$           | 6,48                  | 6,48                  |
|   | Temperatura      | $T_d$           | 457°K                 | 443°K                 |
| Chorro Sec-<br>ción = 6,78 cm. <sup>2</sup> | Presión          | $P_i$           | 0,050                 | 0,017                 |
|   | Relación de sec. | $r/q$           | 1/6                   | 1/6                   |
|   | Temperatura      | $T_i$           | 319°K                 | 41°K                  |
|   | Vel. sonido      | $a_i$           | 1,013.10 <sup>4</sup> | 0,529.10 <sup>4</sup> |
|   | Nº Mach          | $N_i$           | 2?                    | 2?                    |
| Densidad relativa entre escalones           |                  | $\rho_i / \rho$ | 0,178                 | 0,262                 |
| Volumen barrido                             |                  | $1/B$           | 137 l/s               | 71,6 l/s              |
| Presión de choque                           |                  | $P_{ch}$        | 0,34                  | 0,18                  |
| Temperatura de choque                       |                  | $T_{ch}$        | 367°K                 | 106°K                 |

efectuados, la diferencia en los valores anotados sería reducida o anulada.

El volúmen barrido en el primer escalón de la bomba diseñada en figura 8, es, pues, del orden de 100 litros por segundo.

Si se usan sombrillas, como las de figuras 2, 3 y 4 para el primer escalón, en las cuales el vapor emerge por pequeños agujeros, se expande y choca en parte contra la cara interior de la sombrilla y, en parte, contra la cara exterior del tubo central antes de tomar su dirección hacia abajo, la velocidad del chorro estará condicionada por las temperaturas de sombrilla y tubo central, a más de por la presión en los agujeros de salida. La temperatura de la sombrilla no es fácil de indicar; ha de variar con la diferencia de nivel hasta el plano de los agujeros y estará condicionada por la conducción y radiación del material de que está hecha, por el factor de expansión del vapor que su diseño permita y por la temperatura, naturaleza y calor de condensación del vapor que se use.

Supongamos, admitiendo un amplio margen para variación,

que las temperaturas «efectivas» para aceite y para mercurio sean alrededor de 130 y 40° C, respectivamente. Si la superficie se comporta como absolutamente áspera, en el sentido de Maxwell, la velocidad de una parte del chorro tendrá relación con la velocidad molecular más probable  $v = 12895 (T/M)^{1/2}$  cm/seg. Si la superficie refleja una buena parte de las moléculas con pérdida parcial de impulso, la velocidad del chorro estará entre la anterior y la que correspondería a una boquilla como la de figura 8. Al primer caso se acerca seguramente el aceite, al segundo el mercurio.

Las velocidades más probables son para 130° C y aceite ( $M = 278,2$ )  $V_{A_e} = 1,55 \cdot 10^4$  cm/seg y para 40° C y mercurio ( $M = 200,6$ )  $V_{Hg} = 1,56 \cdot 10^4$ , es decir, casi iguales. Podemos tomar estos valores como límites inferiores para la velocidad del chorro.

Los volúmenes barridos resultan, con una sección del chorro de 6,78 cm<sup>2</sup>, para aceite y para mercurio del orden de 100 litros por segundo. A este respecto no hay diferencia importante con el caso de la boquilla. Esta es, sin embargo, mejor para mantener un chorro bien dirigido y reducir así la corriente de Gaede.

Los valores del volumen barrido resultan, pues, sorpresivamente grandes para flujos tendiendo a cero.

La resistencia introducida por el volumen barrido es la inversa de éste, o sea B.

Ahora bien, la garganta de chupada de figura 8 tiene un área libre de 3,95 cm<sup>2</sup>. La velocidad de efusión a presiones bajas es de 11,7 litros/cm<sup>2</sup>, según la teoría cinética. La velocidad de entrada de gas al volumen barrido por el chorro no puede ser mayor de 46 litros por segundo. Sabemos, además, que una bomba como la de figura 8 si alcanza 25 litros por segundo a 10<sup>-4</sup> mm es porque está impecablemente construída. ¿Qué reduce la velocidad máxima a menos de la cuarta parte del volumen barrido y a cerca de la mitad de la que permite la garganta de chupada, en bombas bien diseñadas y construídas? La corriente de Gaede.

### *La Corriente Gaedeana.*

Alexander se ha esforzado (l. c. 1946) por demostrar que la corriente Gaedeana o no existe o es despreciable y concluye

que la teoría de Gaede no es aplicable a bombas modernas. Molthan <sup>(6)</sup> se esfuerza en demostrar que la corriente Gaedeana es tan pequeña que el camino libre del vapor en la garganta de chupada es del orden de magnitud del ancho de ésta y concluye que la teoría de Gaede es correcta. Ninguno de ellos explica porqué las velocidades obtenidas son una fracción de la conductibilidad de la garganta de chupada y otra fracción menor aún del volumen barrido; porque se obtiene con mercurio, a presiones bajas, menor velocidad que con aceite; porqué aparece un máximo «secundario» al aumentar el flujo; etc.

Hay tres pruebas directas suficientemente concluyentes de la existencia de la corriente de Gaede:

1. - Es necesario usar trampas frías, para flujos de gas pequeños, para evitar que vapor de la bomba llegue a la cámara de alto vacío. Ello es cierto para mercurio y también para aceite. El mercurio y el aceite condensados en las trampas frías provienen totalmente de la corriente de Gaede. Midiendo la cantidad de vapor condensada en un cierto tiempo se puede hacer un estudio cuantitativo de la corriente. Como veremos en el párrafo siguiente, ésta varía con el flujo.

2. - Si se observa, en una bomba de vidrio o de vidrio-metal, la zona próxima a la garganta de chupada hacia el lado del alto vacío del primer escalón, puede verse, con mercurio, que se forman gotitas líquidas, durante el funcionamiento de la bomba, sobre la pared del refrigerante y también más lejos, sobre la pared del tubo de chupada. El vapor que forma estas gotas proviene de la garganta de chupada; forma parte, pues, de la corriente de Gaede.

Si la bomba trabaja con aceite, puede observarse un borde de aceite, sobre la pared del refrigerante, un par de milímetros por encima del extremo de la boquilla o tobera de cada escalón (indicado esquemáticamente en figura 8). Este «borde alto» es distinto del «borde bajo», descrito anteriormente (I). Es menos abultado y más difícil de fotografiar, pero es fácilmente visible. La sola presencia de este borde alto demuestra que el vapor condensa sobre la pared del refrigerante más arriba del extremo de boquilla o tobera.

Para que la gravedad no haga caer al borde es necesario que

---

(6) W. MOLTHAN, *Z. f. techn. Physik* 7, p. 452 (1926).

sea sostenido por el impulso de las moléculas que condensan y por el frotamiento de la corriente de vapor que se dirige a la trampa fría (si la hay) o al recipiente de alto vacío.

Con mercurio no pueden formarse bordes análogos a los de aceite debido a que no moja la pared: en lugar de un film continuo se forman gotitas separadas.

3. - Al alto vacío llega parte del aceite descompuesto en la caldera. Si el aceite o el mercurio o la glicerina contienen gases disueltos, están hidratados o sucios, parte de los gases, vapor de agua y suciedad volátil llega a la zona de alto vacío. Todos ellos llegan como parte de la corriente de Gaede. Si ésta no existiera no importaría, para flujos pequeños, que el aceite, el mercurio y la glicerina estuvieran sucios o hidratados o que el aceite sobrecalentado se descompusiera; pero es fácil constatar que sí importa: la presión final obtenida delata inmediatamente la presencia de impurezas volátiles.

Hay dos pruebas indirectas, concluyentes también:

1. - Puesto que el volumen barrido por el chorro de vapor es, como vimos, para flujos pequeños, muy superior al volumen que puede pasar por la garganta de chupada, la velocidad de la bomba debería ser igual a la conductibilidad de ésta, a menos que resistencias adicionales impidan la llegada del gas a la garganta. Las velocidades medidas pasan apenas, en el mejor de los casos, de la mitad de la «velocidad teórica». Si la resistencia del tubo que conduce a la garganta no es suficiente para reducir tanto la velocidad —generalmente no lo es— no queda otra resistencia adicional que pueda ser traída a cuentas que la que produce la corriente de Gaede al movimiento del gas hacia la garganta de chupada.

2. - La velocidad volumétrica de un difusor a presiones bajas es cerca de la mitad con mercurio que con aceite. Como la conductibilidad de la garganta es la misma en ambos casos, únicamente la corriente Gaedeana puede ser hecha responsable de esta diferencia: es mayor, pues, con mercurio que con aceite.

¿Cómo se origina la corriente de Gaede? Varios factores contribuyen a ella:

1. - Ya Bernoulli demostró en el siglo XVIII que un chorro fluído posee una presión lateral que depende de su velocidad (5). Esta presión lateral hace que el chorro se abra en abanico y que una fracción del mismo tenga velocidades con componentes diri-

gidas hacia arriba; una fracción mayor choca contra la pared del refrigerante. El valor numérico de estas fracciones debe suplirlo la teoría aerodinámica.

2. - La velocidad del chorro dentro de boquillas, sombrillas o toberas decrece al acercarse a la pared. Si la velocidad es inferior a la crítica, el proceso es laminar y la lámina de vapor en contacto con la pared emerge con una velocidad reducida y con una presión aumentada (Bernoulli). Si la velocidad es superior a la crítica, el chorro rodará sobre torbellinos que se formarán sobre la pared sólida (si el tiempo alcanza). Estos torbellinos emergerán también con poca velocidad y mucha presión lateral. En ambos casos, cerca de la mitad de este vapor de baja velocidad se dirigirá hacia el alto vacío — reforzando la corriente de Gaede — por gradiente de presión. El resto será chupado por el chorro. Molthan (l. c.) para evitar que cerca de la mitad del vapor rezagado se sume a la corriente de Gaede, lo trata como «un anillo rígido», evitando así su expansión, hasta que sea chupado totalmente por el chorro principal: «Para simplificar el cálculo vamos a tratar a la capa límite después de dejar la boquilla como si fuera un anillo rígido» . . . (l. c., pág. 453). Pretender que un anillo de vapor se comporte como un anillo rígido es pretender demasiado.

3. - La fracción del chorro que condensa sobre la pared enfriada por encima y por debajo de la garganta de chupada forma una película líquida (aceite) o gotitas (mercurio). La superficie líquida se encuentra a una temperatura algo superior a la del líquido refrigerante debido a las conductibilidades térmicas finitas del aceite o mercurio mismo, de la pared de vidrio o metal y de la lámina de líquido refrigerante de velocidad reducida «pegada» a la pared. El film de aceite y las gotitas de mercurio poseen una presión de vapor de acuerdo a su composición y temperatura. Una continua evaporación tendrá lugar en un ángulo sólido  $2\pi$ , partiendo las moléculas y átomos con las velocidades correspondientes a la distribución de Maxwell(\*). La parte que se dirija hacia el alto

---

(\*) *Nota agregada a la prueba de galera.* K. Hickman ha anotado, mientras este Ms. estaba en prensa, en "The Rev. Scient. Instr. 22, p. 141, March 1951", que la relación entre las presiones de vapor de impurezas volátiles y fluido usado es muchas veces mayor a la baja temperatura de la pared del refrigerante. Esta observación complementa lo dicho en el punto 3 de las pruebas directas (más arriba) y el punto 4 más abajo.

vacío llegará a su meta sin dificultades, mientras el flujo de gas sea pequeño, engrosando la corriente de Gaede. La otra parte perturbará las trayectorias de las moléculas del chorro principal haciendo que una fracción adicional de éstas llegue a pasar la garganta de chupada hacia arriba.

Sobre el tubo caliente central, si existe, se produce también condensación y reemisión en un ángulo sólido  $2\pi$ , esta vez a velocidades correspondientes a una temperatura mayor. Si al terminar la boquilla la pared del tubo central se retrae suficientemente para permitir una expansión simétrica del chorro (caso del primer escalón de fig. 8, 2º. de D-3 y 1º. de A-2) el efecto perturbador de esta reemisión no será sensible. Si el tubo central es cilíndrico (1er. escalón de D-3 y de E-2) el vapor reemitido por la pared caliente empujará al chorro contra la pared exterior, aumentando la corriente de Gaede.

4.- A la corriente de Gaede se suman una parte de las sustancias volátiles provenientes de la descomposición del aceite y una parte de los gases y vapores procedentes del «desgasamiento» de las paredes de la bomba misma y del aceite o mercurio que contienen. El resto pasa directamente a la zona preliminar. La corriente de Gaede contiene, pues, también, una mezcla de gases y vapores diversos.

#### *Mercurio versus Aceite.*

Ya hemos visto que a presiones finas bajas una misma bomba trabajando a igual presión de caldera tiene menor velocidad con mercurio que con aceite. Ello significa que la corriente de Gaede es mayor, en esas condiciones, con mercurio que con aceite. Es decir, que la resistencia que presenta la corriente Gaedeana a la llegada de gas a la garganta de chupada es mayor en el caso del mercurio. Tres factores contribuyen a ello:

1.- La mayor presión de vapor del mercurio líquido condensado sobre la pared del refrigerante, por encima de la garganta de chupada, aumenta la densidad de la corriente.

2.- Debido a que el mercurio no moja al vidrio (o a la pared de hierro o acero) al chocar átomos de vapor contra una superficie limpia no pueden condensar, aunque esté fría. Se presenta el viejo problema de los cambios de estado a falta de choques múltiples, gérmenes o catalizadores. Para que un átomo al chocar condense tiene que hacerlo sobre un germen o sobre una

gotita ya formada. La pared no es para mercurio «absolutamente áspera», en el sentido de Maxwell. Una parte, pues, de los átomos «calientes» provenientes del chorro principal sufrirán reflexión más o menos elástica. La velocidad media de los átomos reflejados estará entre la del chorro principal y la que corresponde a la temperatura de la pared fría. Será, en todo caso, mayor que esta última. Esto no sucede en el caso del aceite porque el aceite moja la pared. La velocidad media de la corriente Gaedeana en el caso del mercurio corresponde, pues, a una temperatura mayor que en el caso análogo con aceite.

3. - Para un mismo diseño la densidad relativa entre el primero y el último escalón es mayor para mercurio que para aceite, como veremos más adelante (fórmula 22). Ello se debe a la mayor constante adiabática del primero. La corriente Gaedeana de mercurio tiene, pues, mayor densidad y mayor velocidad. Ello explica su mayor resistencia (aproximadamente doble) a la llegada de gas a la garganta, a presiones finas bajas.

### *El Efecto del Flujo de Gas.*

Hassta ahora hemos estudiado al difusor en condiciones estáticas, es decir, con flujo nulo o muy pequeño. Estudiemos ahora el efecto de un flujo creciente.

Conviene principiar eliminando un malentendido. Algunos autores creen que se puede despreciar la resistencia opuesta al flujo gaseoso por la corriente de Gaede si el camino libre molecular que corresponde a la densidad de esta última es mayor que el ancho de la garganta de chupada o, mejor aún, mayor que el diámetro del tubo de chupada. Esta creencia es parcialmente incorrecta. La corriente de Gaede llena todo el largo del tubo de chupada desde la garganta hasta la campana de vacío (o hasta la trampa fría, si la hay). Es con este largo con el que hay que comparar el camino libre de una molécula de gas, si el largo es mayor que el ancho del tubo. En muchas instalaciones el largo suele ser 10 o más veces el ancho.

La longitud de la trayectoria de una molécula de gas puede ser, por otra parte, muy aumentada por choques con las paredes.

La densidad de la corriente de Gaede decrece con la distancia desde la garganta de chupada, debido a condensación en las paredes. Este efecto no será, en general, importante a menos que se

lo estimule enfriando suficientemente las paredes, como en la bomba D-3 de figura 4, lo que es equivalente a poner una trampa fría convencional. Se puede reducir, también, la densidad aumentando la sección del tubo de chupada a partir de la terminación del refrigerante, como en figuras 4 y 8. Si se prolonga el tubo exterior del refrigerante como tubo de chupada no se introducen dificultades adicionales para el constructor ni para la obtención de tubos: el diámetro máximo de tubo utilizado es el mismo que antes.

La observación de las curvas de figura 1 muestra que la velocidad volumétrica cae en todas ellas entre las presiones más bajas medidas y 2 a 5 micrones con el aumento progresivo del flujo, hasta alcanzar un mínimo. La caída es menos marcada con mercurio que con aceite. Los valores obtenidos con mercurio a presiones inferiores a la del mínimo son, a veces, erráticos: caso de E-2 con mercurio. La caída de velocidad en esta zona no puede ser atribuida a una reducción del volumen barrido por la adición al chorro de vapor del flujo gaseoso. Los flujos de que se trata (hasta 8 litros micrón por segundo en A-2 con aceite y hasta 20 en D-3) son demasiado pequeños para ello. Su efecto debe limitarse a las capas externas del chorro principal. Para explicar el hecho tenemos que postular un aumento de la corriente de Gaede con el flujo, para flujos pequeños. Ello es causado por:

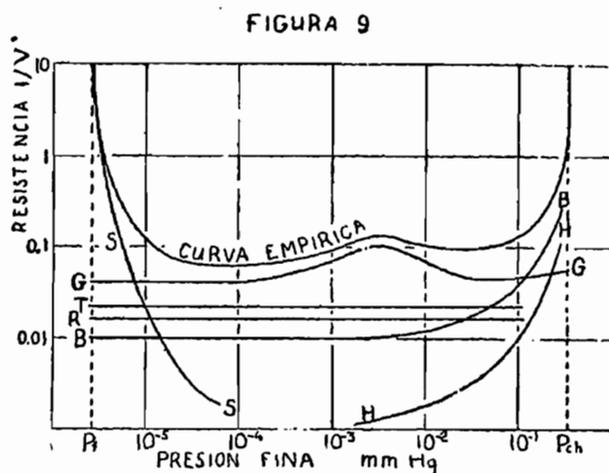
- 1.- Cambios en la dirección de las trayectorias de las moléculas «exteriores» del chorro de vapor al chocar con las moléculas del gas. Como la corriente de Gaede es una pequeña fracción, del orden de magnitud del centésimo, del chorro principal, una perturbación aún reducida de éste produce un cambio grande en aquélla.

- 2.- Aumento de la densidad de la corriente de Gaede al perder velocidad por el choque con la corriente de flujo, con lo que se reduce el camino libre para las moléculas de gas.

- 3.- Reducción de la fracción de vapor que condensa en la pared fría al reducirse el camino libre por la razón anterior y por la adición del flujo.

El aumento de la resistencia a la llegada del gas a la garganta de chupada producida por la corriente de Gaede alcanza un máximo a una presión fina cuyo valor, en los casos de figura 1, va de 2 a 5 micrones. Este valor depende del diseño y de la

presión de caldera. La resistencia misma está representada en figura 9 por la curva G.



Las curvas de resistencia en función de la presión fina (trazado cualitativo)

En toda esta zona, desde las presiones finas más bajas hasta el máximo de la resistencia (mínimo de la velocidad) inclusive, a un aumento de la presión de caldera corresponde empíricamente un aumento de la resistencia (disminución de la velocidad). Véase, por ejemplo, Nos. 3 y 4, tabla I, con flujo 8 y  $P_c = 15$  mm de aceite. En esta zona la corriente de Gaede aumenta, pues, con la presión de caldera. Para obtener velocidades lo mayores posible conviene reducir la presión de caldera al mínimo compatible con el sostén de la presión preliminar. Para flujos mayores las cosas cambian, como veremos.

Al aumentar el flujo más allá del mínimo, la velocidad aumenta de nuevo hasta llegar a un máximo secundario. Este máximo es notable en el caso de E-2 con mercurio, ya que el valor de la velocidad llega al doble del mínimo y es bastante mayor que la obtenida a presiones bajas. La explicación de este fenómeno es sencilla: El flujo en aumento frena, primero, a la corriente de Gaede y la obliga a retroceder, después, hasta anularla. La resistencia a la llegada del flujo de gas a la garganta se reduce a un mínimo. Este mínimo no es nulo, pues a la corriente anulada la reemplaza como resistencia la presión de choque de

la corriente de Gaede. Esta puede ser calculada aplicando de nuevo la ecuación de Bernoulli. Podemos estimar su valor sin necesidad de ello: La corriente de Gaede tiene una densidad del orden de algunos centésimos de la corriente principal, pero su velocidad es inferior a la de ésta; la presión de choque de la corriente principal es, en el caso de la tabla VII de 340 micrones para aceite y 180 para mercurio; la presión de choque de la corriente de Gaede debe ser, pues, del orden de unos pocos micrones en el máximo secundario. La presión fina es unas diez veces mayor allí.

Al aumentar el flujo por encima del que corresponde al máximo secundario, la perturbación del chorro principal debe aumentar en sus capas exteriores y debe afectar, también, en forma creciente a sus capas interiores. Lo primero aumenta la presión de choque de la corriente (virtual) de Gaede; lo segundo reduce el volumen barrido. El aumento de la presión de Gaede es, sin duda, inferior al aumento de la presión fina, de modo que no afectará mayormente a la resistencia total. La más o menos rápida caída de velocidad después de pasar el máximo secundario debe ser explicada, pues, por la reducción del volumen barrido y por la segunda difusión a partir del borde bajo de aceite. En efecto, al alcanzar el máximo secundario hemos llegado a flujos de 333 litros micrón por segundo para E-2 con mercurio, más de 73 para D-3 con aceite y 50 para A-2 con aceite (figura 5). A estos flujos corresponden presiones preliminares de 1, 1 y 0,7 mm de mercurio respectivamente (figura 6) y los bordes de aceite (y los menos visibles torbellinos en el caso del mercurio) se acercan a los extremos de toberas y sombrillas. Para alejarlos habría que aumentar la presión de caldera (\*).

#### *Reducción del Volumen Barrido a causa del Flujo.*

Para valores de la presión fina del orden de la presión lateral del chorro ( $P_i=0,05$  para aceite en tabla VII) el volumen barrido debe ser ya afectado en forma detectable. Si la presión fina creciera hasta acercarse al valor de la presión de choque

---

(\*) Al acercarse el borde bajo del segundo escalón, la segunda difusión sopla al borde alto hacia arriba, convirtiéndolo en el borde bajo del primer escalón.

( $P_{ch}=0,34$  mm para aceite) el chorro principal sería parado y el volumen barrido sería cero. Entre estos valores debe decrecer, pues, rápidamente. Esto afecta, naturalmente, la velocidad del difusor. La resistencia introducida será, para la última parte de la curva, proporcional a  $(P_{ch} - (P_2 + P_i))^{-1}$  que crece más allá de todo límite para  $P_2 + P_i = P_{ch}$ . La forma de la función debe suministrarla la teoría aerodinámica. Provisoriamente podemos escribir para el difusor de figura 8

$$B = \frac{1}{100} + \frac{P_2(P_{ch} - 2P_i)}{50P_i(P_{ch} - (P_2 + P_i))} ; P_2 + P_i \leq P_{ch}, \quad (15)$$

donde el primer término de la resistencia  $B$  está dado por el valor del volumen barrido calculado más arriba y el coeficiente del segundo por la condición de que para  $P_2 = P_i$  la resistencia aumente hasta un valor comparable al de la garganta de chupada, o sea  $1/50$ .

La teoría aerodinámica deberá calcular el trabajo  $\int_{P_2}^{P_0} d(PV)$  efectuado al comprimir el flujo y compararlo con la potencia del chorro. Tendremos así el rendimiento termodinámico.

La baja temperatura del chorro de mercurio,  $232^\circ$  bajo cero (Tabla VII) se refiere, naturalmente, al vapor en rápido movimiento; pareciera que la refrigeración es superflua para un vapor tan frío; pero la temperatura sube al ser frenado el chorro por el choque contra la pared o contra un gas «estático», de acuerdo a la ecuación de Bernoulli y, sobre todo, al condensar por el calor de condensación del mercurio de  $65$  cal/gramo (a  $357^\circ$  C) unido al bajo calor específico del mercurio líquido:  $0,033$ .

Al gastar trabajo el chorro en comprimir al gas, su temperatura puede bajar aún.

### *La Segunda Difusión.*

La segunda difusión fué ya considerada cualitativamente en (I). Ella se produce desde el torbellino que delata el borde bajo de aceite, donde reina la presión preliminar del primer escalón  $P_0$ , a lo largo de la pared refrigerada, hasta la zona de presión fina  $P_2$ . El gradiente de presión es  $(P_0 - P_2/l)$ , si  $l$  es la dis-

tancia del borde de aceite a la garganta de chupada. El volumen de gas preliminar a la presión  $P_0$  se multiplica por el factor de compresión  $P_0/P_2$  al pasar a la presión fina. La distancia  $l$  se reduce al acercarse la presión preliminar  $P_0$  al valor de la presión de choque  $P_{ch}$ . La forma de la curva deberá proveerla la teoría aerodinámica. Podemos aproximarla, provisoriamente, escribiendo  $l = (P_{ch} - P_0)/h$ , donde  $h$  es un coeficiente numérico cuyo valor podemos fijar por la condición de que para  $P_0 = P_{ch}/3$  y  $P_2 = P_0/100$  (caso estático con presión preliminar baja) la resistencia introducida por este efecto sea igual a 0,01. Resulta así para la resistencia de la 2ª. difusión

$$H = 2 \cdot 10^{-4} \frac{P_0(P_0 - P_2)}{P_2(P_{ch} - P_0)} ; P_2 < P_0 \leq P_{ch}. \quad (16)$$

### *El Término de Sears.*

Sears<sup>(7)</sup> ha llamado la atención sobre el hecho que la presión final obtenible con un difusor hermético depende del desgasamiento de la bomba y de la zona de alto vacío, y de la descomposición del fluido usado en el difusor. Todos los sistemas son, pues, dinámicos a bajas presiones. Sears no tiene en cuenta el hecho que de la masa  $\pi$  de aceite descompuesto y de gas soltado por las paredes del difusor solamente la pequeña fracción que arrastra la corriente de Gaede llega a la zona de alto vacío; el resto pasa directamente a los escalones superiores o a la bomba preliminar. Si no hubiera corriente de Gaede, como algunos pretenden, ni la descomposición del aceite, ni las suciedades del mercurio, ni el desgasamiento del difusor influirían sobre la presión final  $P_f$ . Pero la experiencia muestra que influyen. Esto es una demostración más de la importancia de la corriente de Gaede. La masa  $\pi'$  de desgasamiento de la zona de alto vacío misma, en cambio, se encuentra ya toda ella en la zona a evacuar.

Llamando  $g$  a la fracción entre el flujo de la corriente de Gaede y el chorro principal, la masa de gas que llega al alto vacío, por segundo, es  $\pi' + g\pi$ . Esta masa ocupa el volumen  $\frac{\pi' + g\pi}{M}$

(7) G. W. SEARS, *Rev. Sci. Inst.* 20, 458 (1949).

$\frac{RT}{P_2}$ , si  $M$  es el peso molecular promedio pesado. Este volumen alcanza al valor  $V = \frac{\pi' + g\pi}{M} \frac{RT}{P_f}$  para la presión final. Este valor es, en esas condiciones, por definición, la velocidad volumétrica de la bomba. A la presión final la velocidad *efectiva* es cero; a presiones mayores es  $V^* = V - V \frac{P_f}{P_2} = V \frac{P_2 - P_f}{P_2}$ .

La resistencia de Sears puede ser escrita, pues,

$$S = \frac{1}{V} \frac{P_2}{P_2 - P_f}; \quad P_2 \geq P_f. \quad (17)$$

Esta resistencia es la que anula la velocidad para flujo cero. Para flujos mayores su influencia decrece rápidamente, mientras gana importancia la resistencia de Gaede.

Al coeficiente  $\frac{1}{V}$  podemos darle un valor numérico aproximado para el caso de figura 8 si establecemos que  $S$  debe ser igual a  $T$ , la resistencia de la garganta de chupada, para  $P_2 = 10^{-5}$ , por ejemplo. Resulta así

$$S = \frac{0,014 P_2}{P_2 - P_f} \quad (18)$$

para la resistencia de Sears.

#### *El «Clean-up» y el efecto «Getter».*

Estos efectos son la inversa, en cierto modo, del desgaseamiento de la zona de alto vacío: una masa  $m$  de gas desaparece por segundo absorbida y adsorbida por las paredes y por cuerpos sólidos contenido en el alto vacío. El volumen que esta masa ocupa es

$$C = \frac{m RT}{M P_2}. \quad (19)$$

Este término constituye una especie de bomba adicional colocada en paralelo con el difusor. La velocidad total es, pues, la suma de la de éste más  $C$ .

*La Fórmula General.*

La inversa de la velocidad efectiva del difusor es la suma de las resistencias

$$\frac{1}{V_e} = S + G + T + B + H + R, \quad (20)$$

donde  $S$  es la resistencia de Sears (17),  $G$  la de Gaede,  $B$  la del volumen barrido (15),  $T$  la de la garganta de chupada,  $H$  la de la segunda difusión (16) y  $R$  la de los tubos conductores hasta la garganta. Escribiendo explícitamente los términos para los que hemos desarrollado una expresión, aunque sea aproximada, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_e} = & \frac{P_2}{V(P_2 - P_f)} + G + T + \frac{1}{\alpha} + \\ & + \frac{P_2(P_{ch} - 2P_i)}{\beta P_i(P_{ch} - P_2 - P_i)} + \frac{P_0(P_0 - P_2)}{\gamma P_2(P_{ch} - P_0)} + R \end{aligned} \quad (21)$$

donde  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son coeficientes numéricos y  $P_{ch}$ ,  $P_i$ ,  $P_f$  y  $P_0$  presiones características de un difusor determinado, del fluido con que trabaja y de las condiciones impuestas por la presión de caldera, la aislación, la refrigeración, los escalones que respaldan al que consideramos y la bomba preliminar.

En figura 9 hemos representado la inversa de una curva empírica de velocidad del tipo de la de A-2 con aceite, por ejemplo, (supuesta con una trampa fría que permita obtener una presión final de  $2 \cdot 10^{-6}$ ) y las distintas resistencias cuyas sumas deben reproducirla. Los valores numéricos adoptados se refieren a lo que puede esperarse para el primer escalón de un difusor como el de figuras 8 y 10. La curva termina a la izquierda, para presiones bajas, por la resistencia de Sears. A la derecha, para presiones relativamente altas, por la reducción del volumen barrido y por el aumento de la segunda difusión. La importancia relativa de las resistencias que estos términos introducen depende de las condiciones en que la bomba trabaja: en condiciones estáticas (flujo pequeño) la segunda difusión domina el campo y el volumen barrido se mantiene alto (resistencia baja) hasta

presiones cercanas a la de choque. Para flujos grandes (caso dinámico) la reducción del volumen barrido juega el papel principal. Este último caso es el representado en la figura 9. En toda la zona intermedia de presiones la resistencia de Gaede es la que limita, en primer término, el valor de la velocidad.

### *El Diseño de Difusores.*

La teoría fenomenológica que hemos desarrollado aclara los principios que gobiernan el diseño de un difusor. Los datos del problema son el flujo que se espera evacuar y la presión fina máxima tolerable. Estos datos permiten fijar la velocidad mínima necesaria, la sección y el largo del tubo de chupada y la sección de la garganta del primer escalón. La suma de las resistencias de tubo y garganta no debe pasar de la mitad de la inversa de la velocidad, pues hay que dejar margen para la resistencia de Gaede, sobre todo si se usa mercurio. Elegidas la presión de caldera, el líquido que se desea usar en la bomba, el diseño de la boquilla, sombrilla o toberas del primer escalón y la refrigeración hay que estimar el factor de compresión que puede esperarse. Mientras no se disponga de una teoría aerodinámica del efecto compresor hay que valerse de los datos empíricos y de la teoría esbozada en este trabajo para estimarlo.

Se puede aumentar el factor de compresión haciendo crecer la presión de caldera, con lo que aumenta la densidad y presión de choque del chorro de vapor, pero con ello crecen, también, la presión de Bernoulli y la corriente de Gaede, por una parte, y se hace necesario aumentar la refrigeración, por la otra. El aumento de la resistencia de Gaede puede no ser objetable para el flujo dado, pero afectará a la velocidad obtenible con flujos más reducidos. El aumento de la presión de caldera significa, en el caso de aceites, un aumento de la temperatura y de la descomposición de éstos, lo que afecta a la presión final obtenible para flujo cero.

Una vez estimado el factor de compresión del primer escalón tenemos los datos de flujo, presión y velocidad para el escalón siguiente o para el sistema preliminar, si la bomba tiene un escalón único. El cálculo se repite, en la misma forma, para los escalones siguientes, si los hay.

Si la bomba preliminar está dada y conocemos su curva de

velocidad «molecular» en función de la presión preliminar o, lo que es lo mismo, su curva de velocidad volumétrica en función del flujo y de la presión preliminar, podemos decidir inmediatamente sobre la necesidad de poner escalones adicionales: la presión preliminar debe ser, naturalmente, inferior o igual a la que el o los escalones que preceden soportan.

Las bombas mecánicas de aceite tienen la característica de que su velocidad decrece mucho por debajo de una presión del orden del milímetro. El aprovechamiento eficiente de las mismas aconseja, pues, hacerlas trabajar a una presión de ese orden de magnitud. El primer escalón de un difusor no soporta, en general, una presión preliminar tan alta; se hace necesario agregarle uno o más escalones o un difusor amplificador («booster»).

Nuestra teoría del efecto válvula y los conocimientos empíricos sobre curvas de velocidad y de factor de compresión para toberas o boquillas típicas permiten diseñar sin dificultad el último escalón. Para que la presión de choque de éste sea alta hay que mantener elevada la presión de Bernoulli y con ello la densidad del chorro. Ello implica una corriente de Gaede relativamente fuerte, la que puede llegar a anular la velocidad para presión anterior pequeña (caso de D — 1b en I). Esto puede ser remediado agregando un escalón anterior al último, cuya función es entregarle a éste el flujo precomprimido a una presión capaz de vencer la corriente de Gaede. Esta es la función principal del primer escalón de A - 2 y del escalón intermedio de D - 3.

Para concretar, consideremos el caso de E - 2 con mercurio en el máximo secundario. Para un flujo de 333 litros micrón por segundo tenemos una presión preliminar de 1,05 mm, una presión fina de 0,032 mm, una velocidad de 10,1 l/s y un factor de compresión (para los 2 escalones) de 32, con una presión de caldera de 14 mm de mercurio. En esa bomba la sección total de los agujeros de salida de vapor al primer escalón (8 de 2 mm de diámetro) es  $r = 3,55$  veces mayor que la sección del cuello de la tobera del segundo escalón (3 mm de diámetro). La relación entre las secciones de los chorros es  $q = 9,50 \text{ cm}^2 / 0,39 \text{ cm}^2 = 24,4$ . Para la velocidad del chorro en el primer escalón a sombrilla, tomo el valor estimado anteriormente  $1,56 \cdot 10^4 \text{ cm/seg}$ ; para la del chorro de la tobera tomo el valor  $Na$  de tabla VI, con  $N = 2,18$ , es decir  $Na = 1,95 \cdot 10^4 \text{ cm/seg}$ . La relación entre las densidades de los chorros en ambos escalones es,

pues,

$$\frac{\rho_i}{\rho} = \frac{r}{q} \frac{v}{v_i} = \frac{1}{5,5}. \quad (22)$$

El difusor trabajará en condiciones óptimas si esta misma es la relación entre las densidades del gas (flujo) después del 1º. y después del segundo escalón. El factor de compresión del escalón a tobera debe ser, pues,  $F=5,5$  para máximo rendimiento. Conocemos el factor de compresión de ambos escalones: 32. Podemos suponer, como primera aproximación, que el de cada uno de ellos sea igual a  $\sqrt{32}=5,67$ . Este valor es casi igual al que surge del diseño. La bomba E-2 con mercurio presenta un máximo «secundario» de velocidad volumétrica y molecular para los valores indicados más arriba, porque fué diseñada para trabajar en condiciones óptimas para esos valores. El máximo es angosto en figuras 1 y 6 porque la presión de caldera era insuficiente para hacer frente a flujos mayores. Un aumento de presión de caldera ensancharía el máximo hacia presiones mayores.

En el caso de E-2 con aceite la relación (22) y los valores estimados anteriormente conducen a  $\frac{\rho_i}{\rho} = \frac{3,55}{24,4} \frac{2,12}{1,55} = \frac{1}{5,0}$ , valor casi igual que el anterior. Deberíamos esperar un máximo «secundario» para igual factor de compresión en el segundo escalón. Este no se ha presentado porque no era posible elevar suficientemente la presión de caldera con aceite en el modelo de ensayo construido: el nivel del aceite en el tubo de retorno a caldera se acercaba peligrosamente al nivel del tubo conducente a la bomba preliminar.

Si el flujo es menor que el que corresponde al máximo secundario y se mantiene la presión de caldera, hay exceso de vapor en el espacio intermedio, lo que aumenta innecesariamente la resistencia de Gaede. Esto puede ser evitado, en parte, reduciendo la presión de caldera. Sólo en parte, puesto que el factor de compresión del segundo escalón aumenta con la reducción del flujo (figura 7) mientras que la relación entre las secciones de salida de vapor está fijada por construcción en el caso de E-2. Para obtener máxima eficiencia para cualquier flujo es necesario poder variar, pues, independientemente, la presión de caldera y la

relación entre la salida de vapor de los distintos escalones. Esta posibilidad existe ya en algunos modelos de bombas metálicas, con boquillas regulables o intercambiables. A falta de esta posibilidad, conviene determinar empíricamente para cada valor del flujo la presión de caldera que produce un factor de compresión máximo.

En el caso de la figura 8 podemos suponer, en primera aproximación, que el número de Mach es el mismo en ambos escalones; la relación de densidades resulta entonces

$$\frac{\rho_i}{\rho} = \frac{ra}{qa_i} = \left(\frac{r}{q}\right)^{\frac{2}{\gamma+1}} \quad \text{y} \quad \frac{r}{q} = \left(\frac{\rho_i}{\rho}\right)^{\frac{\gamma+1}{2}}. \quad (23)$$

Si deseamos que  $\rho_i/\rho = 1/10$ , para obtener alta velocidad a bajas presiones, como en el diseño  $q = 8,66$ , resulta  $r = 0,79$  para aceite y  $0,40$  para mercurio. Puesto que la sección del cuello de la tobera es igual a  $7,1 \text{ mm}^2$ , la sección total del cuello de la boquilla debiera ser  $5,6 \text{ mm}^2$  para aceite y  $2,8 \text{ mm}^2$  para mercurio. El desarrollo del cuello de la boquilla es de  $50 \text{ mm}$ ; su ancho resultaría  $0,11 \text{ mm}$  para aceite y  $0,056$  para mercurio. Si fijamos  $r/q = 1/6$  resultarían  $\rho_i/\rho = 1/5,6$  para aceite y  $1/3,8$  para mercurio (caso de tabla VII). El difusor sería ahora un amplificador si se lo usa con mercurio y uno intermedio con aceite. Resultan ahora  $r = 8,66/6 = 1,44$ , la sección total del cuello de la boquilla  $10 \text{ mm}^2$  y su ancho  $0,2 \text{ mm}$ .

Tales valores presentan dificultades al constructor, especialmente en el caso de bombas de vidrio. Aún en bombas metálicas no es fácil realizar cuellos tan angostos manteniendo el espesor razonablemente uniforme. Si fueran construídos, el pasaje de aceite o mercurio líquidos, condensados sobre la pared, presentaría serias dificultades, pues modificaría la sección libre de modo considerable. La tensión superficial de los líquidos podría cerrar del todo el cuello de la boquilla para presiones de caldera moderadas. Tres remedios pueden ser aplicados para evitar estos inconvenientes:

1. - Usar sombrillas con un número reducido de pequeños agujeros de salida de vapor. Esto es relativamente fácil de construir, pero el chorro resulta peor definido, en cuanto a velocidad y dirección, y menos compacto, con lo que aumenta la resistencia gaedeana y se pierde velocidad.

2. - Substituir la boquilla del primer escalón por una corona de toberas (figura 10). Esta solución es excelente.

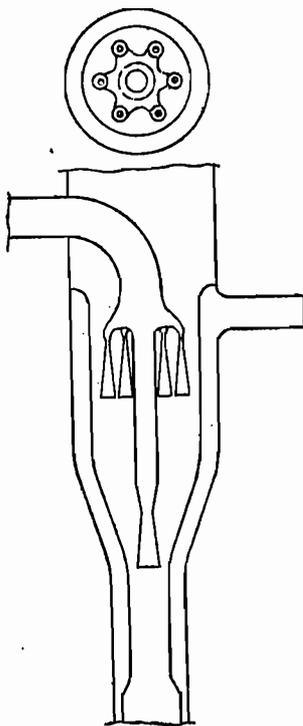


Fig. 10

Esquema de un difusor a corona de toberas como primer escalón y a tobera simple como segundo escalón. Arriba: planta de la coronas de toberas.

3. - Hacer llegar el vapor a cada escalón por separado, aunque provenga de una misma caldera, de modo de poder colocar robinetes en los tubos que conducen a cada uno de los escalones menos el último, para reducir independientemente la presión de cada uno al valor correcto de acuerdo al flujo y a la sección de salida de vapor. Esta puede ser aumentada en el primer escalón hasta un valor que permita una fácil construcción y aleje el peligro de obturación por tensión superficial.

Los casos de E-2 y de figura 8 se distinguen porque en el primero el comportamiento observado con mercurio y el previsi-

ble con aceite para flujos que correspondan a la zona del máximo secundario son aproximadamente iguales; ello se debe a la velocidad térmica impresa al chorro por la sombrilla del primer escalón; en el segundo caso, la densidad relativa entre escalones es 1,5 veces mayor con mercurio que con aceite. Es decir que el mero cambio de líquido hace que la bomba esté diseñada para altos flujos y presiones preliminares con mercurio y para valores menores de ambos con aceite. Este hecho contribuye, sin duda, a la buena fama del mercurio para operar con flujos elevados. El mismo resultado puede obtenerse, naturalmente, con aceite aumentando la sección relativa de salida de vapor en el primer escalón e incrementando la presión de caldera... si el diseño y la estabilidad del aceite lo permiten.

#### *Un Escalón versus varios Escalones.*

Una interesante confirmación de nuestra teoría está contenida en un trabajo reciente<sup>(8)</sup> sobre una bomba de un solo escalón a boquilla cilíndrica, trabajando con glicerina. Pollard et Al. encuentran que la presión preliminar crítica (máxima) crece linealmente con la presión de caldera en el intervalo medido, que va desde  $P_c=2$  hasta  $P_c=31$  mm de mercurio, lo que confirma nuestra fórmula 12.

Los citados autores afirman que «the range of pressure over which it performs satisfactorily and its backing pressure requirements compare favorably with two- and three-stage pumps». Mencionan haber obtenido una velocidad máxima de 80 litros por segundo y una presión preliminar máxima de 0,91 mm de mercurio. Pero estos dos valores no son simultáneos, como podría creerse. De los valores y curvas publicados resulta que la velocidad de 80 litros por segundo se obtiene con una presión preliminar de 0,015 mm de mercurio, una presión de caldera de 3,1 mm (3,4 cm de glicerina) y un flujo de 4 litros micrón por segundo. Estas condiciones de trabajo corresponden muy aproximadamente a las del primer escalón de D-3 con flujo 1  $\mu$ /s y  $P_c=3,7$  mm (tabla V). Las secciones del tubo de chupada y de la garganta de D-3 son 4,10 y 4,54 veces menores que las de la

---

(8) J. POLLARD, R. W. SUTTON and P. ALEXANDER, *J. Scient. Instr.* 25, p. 401, (1948).

bomba en cuestión, que llamaré P - 1; las densidades de flujo por unidad de sección de tubo y de garganta son, pues, casi iguales. Las presiones finas obtenidas son  $5 \cdot 10^{-5}$  para P - 1 y  $5,6 \cdot 10^{-5}$  para D - 3; las eficiencias (velocidad por unidad de superficie de garganta de chupada sobre velocidad máxima de efusión) resultan, también, casi iguales: 0,222 para P - 1 y 0,226 para D - 3. Pero con D - 3 en las condiciones anotadas puede aumentarse la presión preliminar hasta 0,40 mm de mercurio con la misma presión de caldera y hasta más de 1 mm con la presión de caldera aumentada en un factor 1,3 sin que se reduzca la velocidad, mientras que con P - 1 en las condiciones anotadas la presión preliminar no puede pasar de 0,05 mm de mercurio sin derrumbar la velocidad. Para alcanzar una presión preliminar cercana al milímetro hay que aumentar la presión de caldera en un factor 10; pero entonces la velocidad cae de 80 a 28 litros por segundo para la misma presión fina de  $5 \cdot 10^{-5}$ . El factor de compresión es de 300 para P - 1 y de 2300 para D - 3.

Para flujos grandes comparemos P - 1 con E - 2 con mercurio. Esta tiene la misma sección de tubo de chupada que D - 3 y garganta algo menor. El máximo secundario de P - 1 es obtenido con 700 l $\mu$ /s,  $P_2=0,020$ ,  $P_1=0,91$  y velocidad 35 litros por segundo; el de E - 2 con flujo 333,  $P_2=0,02$ ,  $P_1=1,05$  y velocidad 10,1 l/s. Las eficiencias resultan 0,10 para P - 1 y 0,17 para E - 2. La presión de caldera de la primera es 2,2 veces la de la segunda.

La bomba de Pollard et Al. no es, pues, comparable a una de 2 o de 3 escalones; es comparable *al primer escalón* de una de éstas. El diseño es excelente para obtener un buen rendimiento con una presión preliminar del orden del centésimo de milímetro de mercurio. Pero no es eficiente para soportar presiones preliminares mayores. El desmesurado aumento de calefacción y presión de caldera hace crecer la resistencia de Gaede en forma tal que obliga a usar una refrigeración activísima («full mains pressure») para ponerle límite. La densidad de vapor es varias veces mayor que la necesaria para la compresión del gas, pero apenas suficiente para la contención de la presión preliminar.

Los autores mencionan, al final, que con mercurio P - 1 trabaja, a presiones altas, en forma comparable, pero que la velocidad cae a presiones bajas. Ello muestra que la corriente de Gaede

es mayor con mercurio que con glicerina, de acuerdo a lo que nuestra teoría hace esperar.

En resumen, el uso de varios escalones permite la especialización de cada uno de ellos, uno para el efecto válvula, otro para ayudar a éste con gas precomprimido, otro para el efecto compresor, etc. y la mantención en cada uno de la densidad de vapor necesaria, y no más de la necesaria, a fin de evitar el crecimiento superfluo de la resistencia de Gaede.

### *Distancia entre Escalones y Refrigeración.*

Economía de espacio y de material aconsejan poner los escalones tan próximos como sea posible sin sacrificar eficiencia. Dos criterios fijan una distancia mínima:

1. - El chorro de vapor debe tener espacio suficiente para comunicar su impulso al gas. El valor justo lo dará la teoría; podemos suponer que será proporcional al camino libre y al ancho de la garganta de chupada. Unas seis veces el ancho parece ser suficiente para este fin.

2. - Conviene que el vapor de un escalón condense antes de llegar al siguiente a fin de no perturbar la acción de éste. El valor de la superficie de condensación necesaria en cada escalón dependerá del flujo de vapor, de su temperatura, de su naturaleza (¡calor de condensación!) y de las características del sistema de refrigeración empleado. Un exceso es preferible a un defecto de refrigeración. Si puede usarse, en lugar de agua de la canilla, agua enfriada o una mezcla frigorífica, mejorará la eficiencia.

Es para mi un placer expresar, también aquí, mi especial reconocimiento al doctor Luis Gino Moretti por su ayuda en el uso de la ecuación de Bernoulli. Cualquier error que hubiera cometido es, desde luego, enteramente mío. A los concurrentes al Seminario del Observatorio de Córdoba, donde este trabajo ha sido expuesto y discutido en diversas etapas de su crecimiento, debo mi agradecimiento por la oportunidad a mí brindada y por las valiosas observaciones que he recibido.

# TEORIA DE LOS SERVOMEKANISMOS LINEALES DE ALTA PRECISION (\*)

por KURT FRÄNZ

Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires - Instituto Radiotécnico

(Recibido el 11 Oct. 1950)

Un servomecanismo es un dispositivo automático que sirve por ejemplo, para mantener el rumbo de una nave en una dirección determinada por un giróscopo o para mantener una antena directiva de recepción, en la dirección de incidencia de una onda emitida por un avión, o en forma más abstracta, es un dispositivo que sirve para mantener la coincidencia aproximada de una magnitud o coordenada controlada, con otra coordenada de comparación. Durante los últimos años el progreso técnico en este campo ha dado lugar al desarrollo de una teoría de carácter muy general, la cual se puede aplicar a un sinnúmero de problemas prácticos. La publicación fundamental norteamericana parece ser el libro de *Norbert Wiener* «The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications» [1]. Existen varios ensayos más breves destinados a facilitar la comprensión del tema por los ingenieros [2,3].

Nos planteamos el problema de desarrollar una teoría más especializada y aplicable a los servomecanismos lineales de alta precisión que sirven para el control de magnitudes continuas, por ej., las coordenadas de un avión. Es natural que con tal especialización obtendremos resultados más detallados con cálculos breves.

Esta teoría fué desarrollada por el autor en los años 1943/44 [4] y una teoría que sigue las mismas ideas ha sido publicada por *R. E. Graham* en el año 1946 [5].

---

(\*) Comunicación a las terceras jornadas matemáticas argentinas.

Los equipos automáticos de Radar presentaron problemas que indujeron a *Wiener* y a *Graham* a desarrollar sus teorías, sirviéndoles al mismo tiempo de ejemplo en la presentación de estas. Como ejemplo que facilitará la exposición de nuestra teoría nos conviene tomar el mismo equipo.

Los equipos automáticos radar producen una imagen del camino del avión que corresponde a la realidad con gran precisión. Se determina p. ej. una distancia de 10 kilómetros con una precisión de 10 metros. La pequeña diferencia del orden de  $10^{-3}$  se compone de dos partes: hay perturbaciones de carácter estadístico como el ruido de fondo del receptor del radar y hay errores sistemáticos que corresponden a una «inercia» del servomecanismo. Si aumenta la inercia, aumenta el error sistemático, pero en cambio se reduce la influencia de las fluctuaciones que entran en el dispositivo. Por lo tanto se debe minimalizar el error total del servomecanismo, dando valores adecuados a los parámetros del sistema, p. ej., a la mencionada inercia.

### *Teoría elemental.*

Será útil analizar brevemente un sencillo modelo geométrico que posee algunas de las propiedades esenciales de los servomecanismos.

Nos planteamos el problema de evaluar las derivadas de las coordenadas del avión en base a los valores aproximados de dichas coordenadas dados por el equipo radar. Introducimos la inercia del modelo reemplazando los cocientes diferenciales por los correspondientes cocientes de diferencias, p. ej., reemplazando la tangente de la trayectoria del avión por la secante por dos puntos en la distancia temporal  $t_m$ ; se forma así un valor medio de la tangente durante el intervalo  $t_m$ , lo que permite eliminar cierta parte de las perturbaciones estadísticas que entran en el dispositivo junto con la señal. Es suficiente analizar este esquema para una sola coordenada  $x(t)$ ; siendo  $x(t)$  el valor preciso de dicha coordenada y  $X(t)$  el valor indicado por el dispositivo, el error  $\Delta_x$  se define por la ecuación

$$\Delta_x = X(t) - x(t).$$

En el caso de la derivada usamos símbolos análogos, llamando a la velocidad real  $v = \frac{dx}{dt}$ , a la velocidad indicada por nuestro modelo  $V(t)$  y al correspondiente error  $\Delta_v = V(t) - v(t)$

El error total se compone del error sistemático  $\Delta_v^s$  y del error estadístico  $\Delta_v^r$

$$\Delta_v = \Delta_v^r + \Delta_v^s.$$

Siendo  $v$  la velocidad del avión,  $b$  su aceleración, obtenemos con suficiente aproximación las siguientes relaciones

$$x(t) = x(0) + vt + \frac{b}{2} t^2$$

( $v \leq 200$  m/seg;  $b \leq 2g \sim 20$  m/seg<sup>2</sup>;  $t \leq 10$  seg)

$$V(t) = v - \frac{b}{2} t_m.$$

Resulta como error sistemático en la determinación de la velocidad

$$\Delta_v^s = - \frac{b}{2} t_m.$$

Supongamos que el valor medio del error estadístico de la coordenada sea  $\bar{\Delta}_x$  ( $\sim 10$  m), que la distribución de los valores aproximados de la coordenada dados por el radar, sea una distribución de *Gauss* y que los valores de  $\Delta_x$  en la distancia temporal  $t_m$  ya sean independientes. Si los errores estadísticos no satisficieran esta última condición, la evaluación de un valor medio durante el intervalo  $t_m$  sería poco eficiente para reducir la contribución de las perturbaciones al error total. Resulta así el siguiente error estadístico de la velocidad

$$\bar{\Delta}_v^r = \sqrt{2} \frac{\bar{\Delta}_x}{t_m}.$$

(Usamos el símbolo  $\Delta_x$  por razones de brevedad en vez de  $\sqrt{\overline{\Delta_x^2}}$ ).

Si la distribución de los valores de la aceleración  $b$  también es una distribución de *Gauss* (en el caso del error sistemático esta suposición es menos natural que en el de las perturbaciones), se calcula el valor mínimo del error total en función de  $t_m$  según las siguientes ecuaciones

$$\overline{\Delta_v^2} = (\overline{\Delta_v^r})^2 + (\overline{\Delta_v^s})^2 \rightarrow \text{mín.}$$

$$\frac{\partial \overline{\Delta_v^2}}{\partial t_m} = 0$$

$$\overline{\Delta_v^s} = \overline{\Delta_v^r}$$

o sea

$$t_m^2 = 2\sqrt{2} \frac{\overline{\Delta_x}}{b}$$

En el caso de nuestro modelo resulta entonces un error sistemático proporcional a  $t_m$ . Es verdaderamente una inercia, un retraso del dispositivo como indica el signo negativo en la fórmula de  $\Delta_v^s$ . En cambio el error estadístico es inversamente proporcional a  $t_m$ ; por lo tanto existe un valor óptimo de ese parámetro y en el caso del modelo resulta el mínimo del error total, cuando los errores estadísticos y sistemáticos son iguales.

Quizás sería posible analizar las propiedades de muchos sistemas prácticos según métodos sencillos y directos adaptados a los casos particulares. Pero queda el problema del dispositivo óptimo.

Debemos preguntarnos, si otros sistemas para eliminar las perturbaciones, distintos de los que hemos estudiado, darían errores totales esencialmente menores. En el siguiente párrafo aplicaremos a los servomecanismos lineales métodos bien conocidos en la teoría de los circuitos lineales eléctricos, y los resultados demostrarán que pueden obtenerse ventajas considerables sobre los sistemas que poseen un retraso de un tipo tan simple como el de nuestro modelo.

*Teoría de los servomecanismos lineales en base a sus transferencias.*

En general un servomecanismo lineal es un dispositivo electromecánico que satisface un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Por lo tanto todas sus propiedades pueden expresarse por medio de su transferencia, en otras palabras por la respuesta del servomecanismo a la excitación del tipo particular  $x(t) = e^{pt}$  con  $p = \nu + j\omega$ , siendo  $x(t)$  la magnitud controlada por el servomecanismo.

La respuesta que resulta es del mismo tipo

$$X(t) = T(p) e^{pt};$$

como antes la diferencia  $\Delta$  es el error del servomecanismo

$$\Delta = X(t) - x(t).$$

Al cociente  $T(p) = \frac{X(t)}{e^{pt}}$ , lo llamamos la transferencia del sistema la cual es una función de la frecuencia compleja  $p$ . Es fácil calcular o medir esa transferencia en casos de la práctica. Si conocemos  $T(p)$  para todos los valores  $0 \leq \omega \leq \infty$ ,  $\nu = 0$ , podemos calcular la respuesta  $X(t)$  a la excitación  $x(t)$  de forma arbitraria. Supongamos p. ej. que  $x(t)$  admite una representación por una integral de *Fourier*

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Entonces obtenemos para la respuesta

$$X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T(j\omega) f(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Todo esto es bien conocido en la teoría de los circuitos eléctricos. Mientras en general tales integrales no admiten una

evaluación sencilla como lo demuestra la teoría de los transitorios en los circuitos eléctricos, es posible establecer una relación manejable en la teoría de los servomecanismos lineales de alta precisión que sirven para el control de una magnitud de variación lenta como p. ej., la coordenada de un avión o de una nave que no puede ser discontinua, como tampoco pueden serlo las derivadas de dicha coordenada.

Es sabido que la transferencia  $T(p)$  de un servomecanismo estable es una función analítica regular en el semiplano  $v \geq 0$ . Existe entonces una serie

$$T(p) = \sum_0^{\infty} a_n p^n$$

convergente para  $|p| \leq P > 0$ . Por ser la variación de  $x$  lenta, es natural representar también  $x(t)$  por una función analítica regular para valores reales de  $t$ . Existe entonces una serie

$$x(t) = \sum_0^{\infty} x_{(0)}^{(n)} \frac{t^n}{n!}$$

convergente para  $|t| \leq t_0 > 0$ . La requerida relación manejable entre la excitación  $x$  y la respuesta  $X$  del servomecanismo es la siguiente

$$(1) \quad \Delta = X(t) - x(t) \sim \sum_0^{\infty} a_n \frac{d^n x}{dt^n}.$$

Es evidente que el error  $\Delta$  está compuesto por términos proporcionales a la velocidad, a la aceleración, etc., los cuales admiten una interpretación física directa. Además en general los primeros dos o tres términos bastan para cálculos numéricos. Esta serie es convergente, si  $x(t)$  es una función entera, en general es semiconvergente; pero siempre que la precisión del servomecanismo sea buena, su convergencia numérica es excelente.

Es sabido que también la influencia de las perturbaciones estadísticas sobre la respuesta  $X(t)$  se calcula fácilmente en base a la transferencia. Para muchas aplicaciones es suficiente

suponer que el error estadístico es proporcional al llamado ancho de banda  $\Omega$  del sistema.

$$\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} |T|^2 d\omega.$$

Caracterizamos entonces la eliminación de las perturbaciones por el parámetro  $\Omega$  y nos proponemos evaluar el mínimo del error sistemático compatible con un valor dado del ancho de banda  $\Omega$ .

*Estudio del error sistemático en función de la transferencia.*

Primero debemos demostrar las mencionadas propiedades de la serie

$$\Delta(t) \sim \sum_1^{\infty} a_n \frac{d^n x}{dt^n}.$$

La representación de la respuesta en la forma

$$(2) \quad X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T(j\omega) f(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

indica que un sistema fiel posee la transferencia  $T \equiv 1$  y con eso el ancho de banda  $\Omega = \infty$ , entonces reproduce no solo la señal sino también las perturbaciones con fidelidad. Si la reproducción de una magnitud de variación sumamente lenta es fiel, la transferencia satisface la ecuación  $T(0) = 1$ . Si la precisión del servomecanismo es elevada, la desviación de la transferencia del valor  $T = 1$  debe ser pequeña para todas las frecuencias  $\omega$  para las cuales el espectro  $f(j\omega)$  de la excitación  $x(t)$  no es prácticamente cero. Esto sugiere desarrollar la transferencia en una serie de *Taylor*

$$T(p) = \sum_0^{\infty} a_n p^n.$$

Las frecuencias de contribución esencial a la integral (2) se encontrarán en el intervalo de buena convergencia numérica de esta serie.

La integral de *Fourier* no admite la representación de todas las funciones analíticas que interesan en la práctica. Sin embargo, usándola sin escrúpulos, resulta la serie requerida. Substituimos así la serie de  $T(p)$  en la integral

$$X(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \sum_0^{\infty} a_n p^n f(p) e^{pt} dp = \sum_0^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} p^n f(p) e^{pt} dp.$$

Las integrales bajo la sumatoria se obtienen por diferenciación formal

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \frac{d^n}{dt^n} \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} f(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} p^n f(p) e^{pt} dp$$

o sea

$$X(t) = \sum_0^{\infty} a_n \cdot \frac{d^n x}{dt^n}.$$

Esta demostración es breve, pero desprecia toda consideración de convergencia y no permite un análisis del orden de la aproximación. La reemplazamos por otra más satisfactoria.

Para todas las funciones analíticas que pueden figurar como excitaciones  $x(t)$  (son funciones con segunda derivada acotada por ser acotadas las fuerzas mecánicas) existe una representación de la respuesta  $X(t)$  del siguiente tipo

$$X(t) = \int_0^{\infty} x(t-\tau) K(\tau) d\tau$$

con

$$K(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} T(p) e^{pt} dp$$

y su inversión

$$T(p) = \int_0^{\infty} K(t) e^{-pt} dt.$$

La integral  $K(t)$  existe para todos los servomecanismos estables con ancho de banda finito por disminuir  $T(p)$  por lo menos como  $p^{-1}$  para  $p \rightarrow \infty$ .  $K(t)$  es una función de la forma

$$K(t) = \sum_0^M P_m(t) e^{+p_m t} \quad \text{con} \quad p_m = \nu_m + j\omega_m, \nu_m \leq 0$$

$P_m$  es un polinomio  $K(t)$  es una suma de todas las oscilaciones libres del servomecanismo, amortiguadas en el caso de dispositivos estables. Es suficiente analizar la integral para  $t=0$

$$X(0) = \int_0^{\infty} x(-\tau) K(\tau) d\tau.$$

La serie de  $X$  es asintótica con respecto a un parámetro que es la unidad de frecuencia. Para ponerlo de manifiesto reemplazamos  $T(p)$  por  $T(p/s)$ . Se transforma también  $K(t)$

$$K(t) \rightarrow s K(st) = s \sum_0^M P_m(st) e^{p_m st}.$$

Lo sustituimos en la integral

$$X(0) = s \int_0^{\infty} x(-\tau) \sum_0^M P_m(s\tau) e^{p_m s\tau} d\tau.$$

El comportamiento asintótico de tales integrales es bien conocido [6]. Si

$$\frac{x(t) - \sum_0^N b_n t^n}{t^{n+1}} \rightarrow c_1 \quad \text{para} \quad t \rightarrow 0$$

resulta

$$s^{n+1} \{X(0) - s \int_0^{\infty} [\sum_0^N b_n (-\tau)^n] K(\tau) d\tau\} \rightarrow c_2 \text{ para } s \rightarrow \infty.$$

La evaluación de la suma finita es sencilla

$$s \int_0^{\infty} \sum_0^N b_n (-\tau)^n K(\tau s) d\tau = s \sum_0^N b_n \int_0^{\infty} (-\tau)^n K(\tau s) d\tau.$$

La comparación con las relaciones

$$\int_0^{\infty} s K(\tau s) e^{-p\tau} d\tau = T(p/s)$$

$$\frac{d^n}{dp^n} \int_0^{\infty} s K(\tau s) e^{-p\tau} d\tau = \int_0^{\infty} s K(\tau s) (-\tau)^n e^{-p\tau} d\tau$$

$$\int_0^{\infty} s (-\tau)^n K(\tau s) d\tau = \left[ \frac{d^n T(p/s)}{dp^n} \right]_{p=0} = n! a_n$$

nos da la serie asintótica

$$X(0) \sim \sum_0^{\infty} b_n \left[ \frac{d^n T(\frac{p}{s})}{dp^n} \right]_{p=0} = \sum_0^{\infty} a_n \frac{d^n x}{dt^n}.$$

Es casi trivial que cualquier dispositivo con  $T(0)=1$ , permite reducir el error sistemático a valores arbitrariamente pequeños por medio del aumento del ancho de banda  $\Omega$  proporcional a  $s$ . Pero la serie asintótica nos da una información mucho más precisa. Puede decirse que un servomecanismo para el control de una magnitud continua, es un dispositivo de alta precisión si la convergencia numérica de la serie es buena. Queda por de-

mostrar que en general los dos o tres primeros términos son suficientes para el cálculo numérico del error.

Aplicamos la serie a unos ejemplos sencillos. Supongamos que la trayectoria del avión sea una línea recta en la distancia mínima  $d$  desde el equipo, que la velocidad  $v=100$  m/seg. sea constante y que la coordenada  $x(t)$  que determina el servomecanismo, sea el ángulo azimutal; resulta entonces

$$x(t) = \operatorname{arctg} \frac{vt}{d}.$$

$$\begin{aligned} \frac{d^n x}{dt^n} &= \left(\frac{v}{d}\right)^n \left[ \frac{d^{n-1}}{d\tau^{n-1}} \frac{1}{1+\tau^2} \right]_{\tau=\frac{vt}{d}} = \\ &= \left(\frac{v}{d}\right)^n \frac{(-)^{n-1}(n-1)!}{2j} \left[ \frac{1}{\left(\frac{vt}{d}-j\right)^n} - \frac{1}{\left(\frac{vt}{d}+j\right)^n} \right]. \end{aligned}$$

Las transferencias son funciones racionales de  $p$ . La más sencilla función racional con un ancho finito de banda es

$$T(p) = \frac{1}{1+\vartheta p} = \sum_0^{\infty} (-\vartheta p)^n.$$

La constante  $\vartheta$  es la llamada constante de tiempo de esta transferencia la cual se puede realizar por medio de un circuito eléctrico compuesto de un sólo condensador y de una sola resistencia. Obtenemos así

$$\Delta x(t) = X(t) - x(t) \sim - \sum_0^{\infty} \left(\frac{v\vartheta}{d}\right)^n \frac{(n-1)!}{2j} \left[ \frac{1}{\left(\frac{vt}{d}-j\right)^n} - \frac{1}{\left(\frac{vt}{d}+j\right)^n} \right]$$

y en particular para  $t=0$

$$\Delta(0) \sim \sum_0^{\infty} (-)^{n+1} \left(\frac{v\vartheta}{d}\right)^{2n+1} (2n)!.$$

La serie es semiconvergente. Si atribuimos a la constante  $\vartheta$  el valor numérico  $\vartheta=1$  seg. y si atribuimos a la distancia mínima el valor  $d=1000$  m, obtenemos

$$\Delta(0) = -0,1 + 0,002 - 0,00006 \dots$$

o en grados

$$\Delta(0) = -5,7^\circ.$$

Para reducir el error sistemático hay que reducir la constante de tiempo y la convergencia numérica será aún más rápida.

El ejemplo del ángulo azimutal demuestra que una coordenada que no es cartesiana puede ser una función discontinua a pesar de que el movimiento físico sea continuo. En un punto de discontinuidad ( $d=0$ ,  $t=0$ ) la serie no sirve y el servomecanismo tampoco.

En vez de la trayectoria rectilínea suponemos ahora que el piloto del avión se propone hacer movimientos irregulares, que modifica el rumbo cada 10 seg. Esto se expresa en forma matemática por la imposibilidad de usar la serie de *Taylor* para la extrapolación de la trayectoria a intervalos mayores de 10 seg., es decir para  $t_w=10$  seg. muchos términos de la serie

$$x(t) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n x}{dt^n} t^n$$

son aproximadamente iguales al término de  $n=1$  o sea

$$\frac{d^n x}{dt^n} \sim n! \frac{\vartheta}{t_w^{n-1}}$$

Resulta otra vez una serie semiconvergente para el error sistemático

$$\begin{aligned} \Delta(0) = X(0) - x(0) &\sim \sum_1^{\infty} (-)^n n! v \vartheta \left( \frac{\vartheta}{t_w} \right)^{n-1} = \\ &= [-100 + 20 - 6 \dots] m. \end{aligned}$$

Como último ejemplo tratamos una trayectoria circular con diámetro pequeño a gran distancia del equipo. En este caso la distancia varía según

$$x(t) = \frac{v^2}{b} \operatorname{sen} \frac{bt}{v} = \operatorname{Im} \left\{ \frac{v^2}{b} e^{j \frac{bt}{v}} \right\}$$

y resulta el error

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= \operatorname{Im} \left\{ \sum_1^{\infty} (-\vartheta)^n \frac{v^2}{b} \left( j \frac{b}{v} \right)^n e^{j \frac{bt}{v}} \right\} \\ &= \operatorname{Im} \left\{ \left( \frac{1}{1 + j \frac{\vartheta b}{v}} - 1 \right) \frac{v^2}{b} e^{j \frac{bt}{v}} \right\}. \end{aligned}$$

La serie es convergente para  $\frac{\vartheta b}{v} < 1$  y el resultado es correcto según lo demuestra su comparación con la transferencia

$$T(p) = \frac{1}{1 + \vartheta p} \quad \text{para} \quad p = j \frac{b}{v}.$$

Una serie del tipo (1) ha sido aplicada a un problema radiotécnico por *Carson* y *Fry* quienes estudian la respuesta de un circuito lineal a ondas moduladas en frecuencia [7]. El desarrollo de la transferencia en la Serie de *Taylor* ha sido aplicado a los servomecanismos por *R. E. Graham* y por el autor [5] y [4].

*La reducción del error sistemático.*

Se ve que en el caso de la transferencia  $T = \frac{1}{1 + p\vartheta}$  como en el del modelo geométrico domina aquella parte del error sistemático que es proporcional a la primera derivada de la magnitud controlada. Pueden esperarse entonces reducciones considerables del error sistemático si se usan transferencias cuya primera derivada o cuyas primeras  $n$  derivadas se anulan. Son las transferencias de la forma

$$(3) \quad T(p) = \frac{1 + \alpha_n p + \alpha_{n-1} p^2 + \dots + \alpha_1 p^n}{1 + \alpha_n p + \alpha_{n-1} p^2 + \dots + \alpha_1 p^n + \alpha_0 p^{n+1} + \dots + \alpha_{-m} p^{n+m+1}}.$$

El grado del denominador es mayor que el del numerador, por ser el ancho de banda  $\Omega$  finito, y las raíces del denominador poseen parte real negativa por ser el dispositivo estable. Los coeficientes  $\alpha_v$  son reales y positivos como siempre en aquellas funciones racionales que representan transferencias. El número de elementos que se precisa en un circuito práctico para realizar la transferencia, aumenta con los grados del numerador y del denominador. Será natural clasificar las transferencias según los dos grados y determinar los valores de los parámetros que producen el valor mínimo del ancho de banda. Estudiamos en particular las transferencias del tipo

$$(3a) \quad T(p) = \frac{1 + \alpha_n p + \alpha_{n-1} p^2 + \dots + \alpha_1 p^n}{1 + \alpha_n p + \alpha_{n-1} p^2 + \dots + \alpha_1 p^n + \alpha_0 p^{n+1}} ;$$

con esas transferencias resulta el número máximo de derivadas nulas compatible con el grado dado del denominador. La primera derivada que no se anula posee el valor

$$\left[ \frac{d^{n+1}T}{dp^{n+1}} \right]_{p=0} = -(n+1)! \alpha_0.$$

Resulta entonces un problema bien definido si buscamos el valor mínimo del ancho de banda

$$\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} |T|^2 d\omega \rightarrow \text{mín},$$

dando el valor de la primera derivada que no se anula, al cual normalizamos según

$$\left[ \frac{d^{n+1}T}{dp^{n+1}} \right]_0 = -(n+1)! \quad \text{o sea} \quad \alpha_0 = 1.$$

Antes de empezar el correspondiente cálculo algebraico, ya será posible obtener unas ideas descriptivas de dichas transferencias.

Nos proponemos demostrar que la parte real de la transferencia (en función de  $\omega$ ) posee un mínimo para  $p=0$ , si se

anula  $\left(\frac{dT}{dp}\right)_{p=0} = 0$  y que los máximos que por lo tanto existen a los lados ( $|\omega| > 0$ ) de la frecuencia  $p=0$ , resultan más y más acentuados si aumentamos el número de las derivadas de la transferencia que se anulan. Este hecho tiene dos consecuencias de trascendencia técnica. Los picos de la transferencia indican la existencia de frecuencias de resonancia. A pesar de que en el sentido riguroso un sistema sea estable siempre que sus oscilaciones libres sean amortiguadas, son poco estables en la práctica si los picos de la transferencia son muy agudos. Además es sabido que los transitorios no son monótonos, sino oscilatorios, siempre que existen frecuencias  $p = j\omega$  con  $|T(j\omega)| > T(0)$ . Esto tampoco es requerido; sin embargo la monotonía de los transitorios no es una propiedad imprescindible de los servomecanismos de alta precisión [8].

La transferencia  $T(p)$  es una función analítica en el semiplano  $v \geq 0$ . Por lo tanto sus partes real e imaginaria son funciones regulares de potencial en dicho semiplano. Poniendo  $T = R + jX$  aplicamos las ecuaciones de *Cauchy-Riemann* a  $R$  y  $X$

$$\frac{\partial R}{\partial v} = \frac{\partial X}{\partial \omega}$$

Si se anula

$$\left(\frac{dT}{dp}\right)_{p=0} = 0.$$

o sea

$$T(j\omega) = T(0) + j\omega \cdot 0 - \frac{\omega^2}{2!} \left(\frac{d^2T}{dp^2}\right)_{p=0} + \dots$$

se anula también

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)_0 = \left(\frac{\partial R}{\partial v}\right)_0 = 0$$

Interpretamos el gradiente del potencial  $R$  como un sistema

de líneas de corriente. Por ser  $R$  regular para  $v \geq 0$ , es decir por no existir fuentes positivas o negativas en el semiplano positivo, las líneas de corriente entran a través del borde  $v=0$  en regiones de alto potencial y dejan al semiplano en regiones del borde  $v=0$  de potencial pequeño o negativo. El potencial  $R$  asume valores grandes en el interior del ancho de banda  $|\omega| \leq \Omega$  y valores pequeños afuera del mismo  $|\omega| > \Omega$ . Si fuese  $T(0) > |T(j\omega)|$  resultaría también  $T(0) > |T(v + j\omega)|$  para  $v \geq 0$ , porque el módulo de una función analítica toma su valor máximo en el borde de un recinto de regularidad; por la tanto la derivada

$$\left(\frac{\partial R}{\partial v}\right)_0 = \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)_0 < 0$$

es negativa y no se anula.

Un máximo de  $T(j\omega)$  para  $\omega=0$  que es condición necesaria [8] para la monotonía de los transitorios, no es compatible con la otra propiedad requerida de la transferencia

$$\left(\frac{dT}{dp}\right)_0 = 0,$$

la cual importa más que la monotonía. Si se anulan más y más derivadas

$$\left[\left(\frac{d^n T}{dp^n}\right)_0 = 0 \text{ para } n \leq N\right],$$

la montaña del potencial posee un altiplano en la vecindad de  $p=0$ ; deben pues existir picos más y más agudos de  $R$  en la vecindad de las frecuencias de corte  $\omega = \pm \Omega$  que compensan a la tendencia de que disminuya el potencial hacia el interior del semiplano positivo. Esto indica que entre todas las transferencias del tipo (3) solo las de valores pequeños de  $n$  sirven en la práctica. Es evidente que las limitaciones que acabamos de exponer, son típicas no solo de las transferencias racionales, sino también de las transferencias arbitrarias, incluidas las soluciones del problema extremal formulado y analizado por *Wiener* [1].

Volvamos al problema de determinar el mínimo del ancho de banda en función de los parámetros  $\alpha_1 \dots \alpha_n$ .

$$\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} |T|^2 d\omega = -j \int_{-\infty}^{\infty} T(p) T(-p) dp.$$

Poniendo

$$T(p) = \frac{g(p)}{H(p)} = \frac{H(p) - p^{n+1}}{H(p)}$$

con

$$H(p) = \prod_1^{n+1} (p - p_\nu)$$

y aplicando el cálculo de residuos, obtenemos

$$\Omega = 2\pi \sum_1^{n+1} \frac{g(p_\nu) g(-p_\nu)}{H'(p_\nu) H(-p_\nu)}$$

con

$$H'(p_\nu) = \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{n+1} (p_\nu - p_\mu).$$

Substituyendo:

$$g(p_\nu) = H(p_\nu) - p_\nu^{n+1} = -p_\nu^{n+1} \quad \text{y} \quad g(-p_\nu) = H(-p_\nu) - (-p_\nu)^{n+1}$$

resulta

$$\begin{aligned} \Omega &= 2\pi \sum \frac{-p_\nu^{n+1}}{H'(p_\nu)} + 2\pi \sum \frac{(-)^{n+1} p_\nu^{2n+2}}{H'(p_\nu) H(-p_\nu)} \\ &= -2\pi \sum_{\substack{\nu \\ \mu=1 \\ \mu \neq \nu}} \frac{p_\nu^{n+1}}{\prod (p_\nu - p_\mu)} + \pi \sum_{\substack{\nu \\ \mu=1 \\ \mu \neq \nu}} \frac{p_\nu^{2n+1}}{\prod (p_\nu^2 - p_\mu^2)} = \Omega_1 + \Omega_2 \end{aligned}$$

Buscamos el denominador común de  $\Omega_1$

$$\Omega_1 = \frac{2\pi \sum_{\nu=1}^{n+1} (-)^{n-\nu} p_\nu^{n+1} \prod_{\nu=1, \mu > k, \mu \neq \nu} (p_\mu - p_k)}{\prod_{\nu > \mu} (p_\nu - p_\mu)}$$

y el de  $\Omega_2$

$$\Omega_2 = \frac{\pi \sum_{\nu=1}^{n+1} (-)^{n+1-\nu} p_\nu^{2n+1} \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu < \nu}} (p_\mu^2 - p_\nu^2)}{\prod_{\nu=\mu} (p_\nu^2 - p_\mu^2)}$$

$\Omega_1$  y  $\Omega_2$  no son infinitos si coinciden dos raíces  $p_\nu$ . Por lo tanto los numeradores de  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  contienen el factor  $\prod_{\nu>\mu} (p_\nu - p_\mu)$ , y  $\Omega_1$  es un polinomio simétrico de las raíces  $p_\nu$ . Demuestra la inspección de los grados del numerador y del denominador de  $\Omega_1$ , que ese polinomio es lineal en las raíces

$$\Omega_1 = 2\pi \alpha_1.$$

La comparación del numerador o denominador de  $\Omega_2$  con una fórmula bien conocida para el producto

$$\prod_{\nu>\mu} (p_\nu - p_\mu) = |1, p_\nu, p_\nu^2, \dots, p_\nu^n| \quad [9]$$

demuestra que  $\Omega_2$  puede expresarse como cociente de dos determinantes

$$\Omega_2 = \frac{\pi |1, p_\nu^2, p_\nu^4, \dots, p_\nu^{2n-2}, p_\nu^{2n+1}|}{|1, p_\nu^2, p_\nu^4, \dots, p_\nu^{2n-2}, p_\nu^{2n}|}$$

Los dos determinantes son del tipo llamado bialternantes los cuales pueden calcularse en función de los  $\alpha_n$  según un teorema de *Jacobi* [10]

$$\Omega_2 = -\pi \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & \dots \\ \alpha_6 & \alpha_5 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_{n+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & 0 & \dots \\ \alpha_5 & \alpha_4 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_{n+1} \end{vmatrix}}$$

con  $\alpha_{n+1} = 1$ .

Sumando obtenemos

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 = -\pi \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1, -1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_2, & \alpha_1 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \alpha_4, & \alpha_3, & \alpha_2, & \alpha_1 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_{n+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & 0 & \dots \\ \alpha_5 & \alpha_4 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_{n+1} \end{vmatrix}}.$$

Siempre que una raíz  $p_v$  y con ella los coeficientes  $\alpha_v$  del polinomio  $H(p)$  aumenten sin límite, lo hace también el ancho de banda  $\Omega$ .

Por lo tanto es posible determinar el mínimo del ancho de banda en función de los coeficientes  $\alpha_v$  por medio de las ecuaciones

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_v} = 0 \quad \text{para } v = 1, 2 \dots n.$$

Además  $\Omega$  aumenta sin límite, si una raíz se aproxima al eje imaginario. Por lo tanto para una de las soluciones del último sistema de ecuaciones las raíces  $p_v$  poseen parte real negativa, de manera que la transferencia corresponde a un servomecanismo estable. Los requeridos parámetros óptimos y las transferencias óptimas son

| $n$ | $\bar{\alpha}_{n+1}$ | $\alpha_n$ | $\alpha_{n-1}$ | $\alpha_{n-2}$ | $\Omega$ |
|-----|----------------------|------------|----------------|----------------|----------|
| 0   | 1                    | 1          | 0              | 0              | $\pi$    |
| 1   | 1                    | 1          | 1              | 0              | $2\pi$   |
| 2   | 1                    | 1          | 2              | 1              | $3\pi$   |
| 3   | 1                    | 1          | 3              | 2              | $4\pi$   |

$$T_0(p) = \frac{1}{1+p} \quad T_2 = \frac{1+p+2p^2}{1+p+2p^2+p^3}$$

$$T_1(p) = \frac{1+p}{1+p+p^2} \quad T_3 = \frac{1+p+3p^2+2p^3}{1+p+3p^2+2p^3+p^4}.$$

Mencionamos la posibilidad de realizar estas cuatro transferencias como impedancias de circuitos eléctricos.

El siguiente cálculo numérico nos da algunas informaciones cuantitativas de las ventajas prácticas, que pueden realizarse por medio de las reducciones considerables del error sistemático, al pasar de la transferencia  $T_0$  a  $T_1$ . Tratamos otra vez el ejemplo del rumbo irregular de un avión con

$$\frac{d^n x}{dt^n} \sim n! \frac{v}{t_w^{n-1}}; \quad v=100 \text{ m/seg}; \quad t_w=10 \text{ seg.}$$

En vez de normalizar las transferencias por la condición  $\alpha_0=1$ , igualamos para la siguiente comparación, el ancho de banda  $\Omega$ :

$$\begin{array}{l|l|l} T_0(p_0) & \Omega^{(0)} = \pi p_0 = \frac{\pi}{\vartheta} & T_0 \sim 1 - \vartheta p \\ T_1(p_0) & \Omega^{(1)} = 2\pi p_0 = \frac{\pi}{\vartheta} & T_1 \sim 1 - (2\vartheta p)^2 \\ T_2(p_0) & \Omega^{(2)} = 3\pi p_0 = \frac{\pi}{\vartheta} & T_2 \sim 1 - (3\vartheta p)^3 \\ T_3(p_0) & \Omega^{(3)} = 4\pi p_0 = \frac{\pi}{\vartheta} & T_3 \sim 1 - (4\vartheta p)^4 \end{array}$$

Eligimos  $\vartheta=0,1$  seg. correspondiente a un error de 10 m para  $n=0$ .

Usando el término dominante en la serie asintótica (1) para el error sistemático, obtenemos

| $n$ | $\Delta_s$ |
|-----|------------|
| 0   | 10 m       |
| 1   | 0,8 m      |
| 2   | 0,162 m    |
| 3   | 0,0615 m.  |

Estos valores demuestran que por suerte una ventaja considerable ya aparece con la transferencia  $T_1$  y que ame-

nudo no vale la pena ensayar el uso de las transferencias con  $n > 1$ , a las cuales corresponden circuitos más complicados, menos estables y con transitorios fuertemente oscilatorios

## BIBLIOGRAFIA

1. N. WIENER, Extrapolation, Interpolation and smoothing of stationary time series with engineering applications. New York. Wiley and Sons. (1949).
2. N. LEVINSON The WIENER root Mean square error criterion in filter design and prediction. Journ. of Math. and Phy. 25 (1947), 261.  
A heuristic exposition of WIENER's mathematical theory of prediction and filtering. Journ. of Math. and Phys. 26 (1947) 110.
3. H. W. BODE and C. E. SHANNON. A simplified derivation of linear least square smoothing and prediction theory. Proc. Inst. Rad. Eng. 38 (1950) 417.
4. K. FRÄNZ, Informes de la Telefunken Berlin E. C. 99 y 104 (1943 y 1944).
5. R. E. GRAHAM, Linear servo theory. Bell. Syst. Tech. Journ. 25 (1946), 616.
6. G. DOETSCH, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Berlín. J. SPRINGER (1937) S. 230/234.
7. J. R. CARSON and T. C. FRY, Variable frequency electric circuit theory with applications to the theory of frequency modulation. Bell. Syst. Tech. Journ. 16 (1937), 513.
8. K. FRÄNZ, Relaciones entre señal y espectro. Revista de la UMA 14 (1950), 140.
9. H. WEBER, Lehrbuch der Algebra. Braunschweig. Fr. Vieweg (1928), S. 8.
10. A. C. AITKEN, Determinantes y matrices. Madrid/Buenos Aires. Editorial Dossat. 4ª Edición. S. 117/1224.

# ASOCIACION FISICA ARGENTINA

## DECIMOSEXTA REUNION

TUCUMÁN, Instituto de Física, 22/23 de setiembre de 1950.

Preside: Dr. F. E. HERRERA

### *Informes:*

- I. A. BATTIG (Instituto de Física, Tucumán): *Métodos usados para el estudio teórico del efecto de Cherenkov.*
- II. L. KOWARSKI (Commissariat à l'Energie Atomique, París): *Informe sobre el congreso internacional de física nuclear realizado en Oxford, setiembre de 1950.*

### *Comunicaciones:*

- 1º R. GANS (Instituto de Física, La Plata): *Sobre la estabilidad e inestabilidad de circuitos eléctricos.* Se leyó el título.
- 2º G. BECK (Observatorio Astronómico, Córdoba): *Una observación relativa a la teoría cuántica del proceso de emisión.*

Al continuar el estudio que hemos referido en la última reunión se ha hallado que la correspondencia, entre el campo de un dipolo clásico a distancias inferiores a una longitud de onda y el campo emitido según la electrodinámica cuántica, existe solamente en el caso de un campo macroscópico, constituido por muchos fotones. En el caso de un proceso elemental, haciendo intervenir un solo fotón, no encontramos correspondencia completa a pequeñas distancias,  $r \sim \lambda$ . Este hecho no afecta a la interacción entre dos sistemas (p. ej. en la conversión interna), pero puede significar que una fuente luminosa elemental sea rodeada por corrientes de polarización.

- 3º M. ABLE (Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Córdoba): *Guías de ondas electromagnéticas multidieléctricas.*

Se estudian las guías de onda cilíndricas en el caso que sean constituidas sea de distintos dieléctricos concéntricos, sea de un medio cuya constante dieléctrica varíe con continuidad en sentido transversal al eje de la guía. Se determinan las propiedades de la constante de propagación en función de la frecuencia del campo electromagnético.

- 4º E. MARCATILI (Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Córdoba): *Estudio de la difusión de una onda electromagnética plana por una esfera metálica.*

El trabajo se refiere al problema de la determinación de la sección eficaz de una esfera metálica embestida por una onda electromagnética plana. Se

discute la aparente contradicción existente entre el valor de la sección eficaz calculado estudiando el campo electromagnético difundido y el valor obtenido experimentalmente, cuando el largo de onda es muy pequeño con respecto al diámetro de la esfera. La contradicción nace de la imposibilidad de definir rigurosamente la sombra de la esfera, excepto en el caso límite de largo de onda nulo.

Se puntualiza la necesidad de especificar el dispositivo experimental empleado en la medición del campo difundido.

E. E. GALLONI: ¿Tienen estos fenómenos vinculación con los trabajos de Mie sobre difusión de la luz por partículas metálicas?

M. ABELE: Sí. Se trata de la determinación de la energía difundida. Esta energía depende de la manera cómo se mide. Evidentemente tenemos que excluir el ángulo de difusión  $\theta = 0$  al cual corresponde, para  $\lambda = 0$ , la sombra geométrica y la difusión cero. La contradicción aparente proviene del hecho, que en el caso  $\lambda \neq 0$  aparece, en lugar de la sombra geométrica una distribución de difracción en un cono tanto más cerrado, tanto más pequeña es la longitud de onda. Según la parte de este cono que nuestro dispositivo de medida todavía puede separar de la luz incidente, es decir, según el poder resolvente del dispositivo, obtenemos distintos valores para lo que llamamos la energía difundida.

P. E. ZADUNAISKY: ¿Cómo puede Ud. conseguir que la onda electromagnética sea plana, si Ud. coloca el sistema para la medición en una guía?

E. MARCATILI: Para valores pequeños de  $r$  el régimen utilizado en una guía de sección cilíndrica se aproxima mucho a una onda plana. Sin embargo, a los efectos de la medición no interesa mucho si la onda incidente es perfectamente plana o no; lo que se quiere es la relación entre la energía reflejada y la densidad media de la energía incidente sobre el disco.

59 E. E. GALLONI: (Instituto de Física, Buenos Aires): *Sobre el desorden de empaquetamiento en estructuras tipo cadena.*

En un trabajo anterior (15ª Reunión de A. F. A.) se demostró que el desorden de empaquetamiento en estructuras tipo cadena debe producir un debilitamiento en las reflexiones de rayos X por planos inclinados con respecto a los ejes de las cadenas. Si se toman los ejes de las cadenas como dirección  $a_3$ , los planos de índice  $h_1 h_2 h_3$  presentarán un factor de estructura afectado por un coeficiente

$$\Psi(h_3) = \int_{-0.5}^{+0.5} W(x) \cdot \cos ux \cdot dx$$

con  $u = 2\pi h_3$ . Extendiendo los límites de integración de menos a más infinito, la transformación de Fourier:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(h_3) \cos ux \cdot du$$

da la distribución del desorden  $W(x)$ .

Se ha calculado la magnitud del efecto que debe observarse si el desorden sigue una ley gaussiana de distribución de la forma:  $\exp. (-k^2x^2)$ , para diversos valores  $k$  y se ha estudiado el efecto de una distribución tipo Cauchy.

G. BECK: ¿Se refiere eso al óxido de Pt?

E. E. GALLONI: Sí. Lo hemos aplicado al óxido de Pt preparado por R. Busch y sus colaboradores.

6º R. PLATZECK (Observatorio Astronómico, Córdoba): *Medición del sistema óptico de un telescopio en funcionamiento.*

A raíz de algunas dificultades ocasionadas por la forma del haz luminoso proveniente de una estrella, en el telescopio de Bosque Alegre, al ensayar los divisores del haz destinados a aumentar el rendimiento de nuestro espectrógrafo estelar, fué necesario estudiar la forma del espejo parabólico en condiciones de trabajo, para diferentes posiciones del instrumento. El procedimiento destinado a resolver el problema debía permitir la obtención del material para la medición en pocos minutos, y asegurar además el conocimiento de la forma del espejo a lo largo de cuatro diámetros por lo menos. Por otra parte las condiciones atmosféricas corrientes debían permitir mediciones precisas.

Un método que responde a las exigencias mencionadas consistente en intercalar en el cono luminoso un sistema de prismas, cada uno de los cuales da, en el plano focal del instrumento, la imagen correspondiente a una zona del espejo. Los ángulos de dichos prismas son tales que las imágenes dadas por el sistema resultan equidistantes cuando no hay aberración. Se han construido dos de estos sistemas: el primero divide el espejo en 20 zonas distribuidas según dos diámetros perpendiculares, el segundo lo divide en 40 zonas distribuidas en igual forma. En dos minutos se obtienen placas que registran las imágenes correspondientes a cuatro diámetros.

7º M. BUNGE (Instituto de Física, Buenos Aires): *El átomo de hidrógeno en un sistema de referencia en movimiento.*

Para describir el comportamiento de un sistema compuesto en movimiento es preciso tener en cuenta no sólo la ecuación de onda, sino también las tensiones del campo de fuerzas actuantes. Se da la demostración para el caso del átomo de hidrógeno relativista.

8º L. LEVI (Instituto de Física, La Plata): *Una teoría estadística de la transición ferroeléctrica en el  $\text{KH}_2\text{PO}_4$  y sales isomorfas.* Se leyó el título.

9º W. SEELMANN-EGGEBERT (Instituto de Química, Tucumán): *Sobre los isótopos de Ag de período corto que se forman en la fisión del uranio.*

Es muy probable que se formen núcleos de todos los números de masa comprendidos entre 72 y 146, en la fisión de  $U_{235}$  o de  $U_{238}$  por neutrones rápidos. Es por eso que desarrollaron procedimientos de separación de los elementos respectivos tan rápidamente como fuera posible, para poder investigar los isótopos con período corto de este elemento.

Se descubrieron nuevos isótopos de Ag de período 3' y 20'. Además se pudo demostrar que el isótopo de 20' de la Ag se forma probablemente también por irradiación de Cd con neutrones rápidos (proceso  $n, p$ ).

La energía máxima de los rayos beta es aproximadamente igual a 2 Me V en el isótopo de *Ag* de período 20'. La determinación de la energía máxima se realizó por el método de absorción. No se pudieron encontrar sustancias derivadas de los isótopos mencionados; por eso se puede pensar que se desintegran en un isótopo estable de *Cd*, ya que se desconocen isótopos de período largo.

A pesar de la separación relativamente rápida, de cerca de 6' desde el fin de la irradiación hasta el principio de la medición, naturalmente es posible que se formen en la fisión de *U*, isótopos de *Ag* de período menor a 1,5'. Hay indicios de la existencia de isótopos de período menor a 1,5.

Es necesario tener en cuenta que el rendimiento de los isótopos de *Ag* en la fisión, es muy pequeño.

10. O. CAVATORTA y A. WINKEL. (Instituto de Física. Buenos Aires): *Espec-trografía química: una aplicación al análisis de suelos*. Se leyó el título.
11. D. G. DE KOWALEWSKI y J. V. IREBARNE (Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Buenos Aires): *Calculo de frecuencias normales de vibración de moléculas del tipo (XYZ)<sub>2</sub>*. Se leyó el título.
12. S. FREIBERG (Instituto de Electrotécnica, Tucumán): *Medición de potencias en un circuito de corriente alterna con el oscilógrafo de rayos catódicos*.

Al hacerse desviar el haz de electrones en un oscilógrafo de rayos catódicos, según ejes ortogonales, proporcionalmente a la intensidad y a la tensión de un circuito con corriente alterna, se forman en la pantalla del tubo figuras de Lissajous cuyas superficies dependen de los valores de la intensidad, de la tensión y de la fase entre ellas. De estos valores, depende también la potencia activa y reactiva del circuito y por lo tanto se puede medir con aquellas figuras las potencias consideradas. Para la medición de la potencia activa es necesario introducir un circuito integrante o diferenciante y se analizan los errores producidos por la introducción de estos circuitos.

*Nota:* Fuera de programa se escuchó la comunicación:

- A. D. CANALS FRAU (Observatorio Astronómico, Córdoba): *Teoría del filtro de interferencia*.

#### CRONICA DE LA 16ª REUNIÓN DE LA A. F. A.

La décimosexta reunión de la A.F.A., realizada en Tucumán, los días 22 y 23 de setiembre de 1950, ha sido dedicada al homenaje póstumo al que fuera su Secretario Local, Profesor Dr. José Würschmidt. La reunión se inició con las palabras del ingeniero E. E. Galloni, recordando la obra realizada por el doctor Würschmidt, en cuya tumba la comisión directiva depositó una corona de flores.

Había varias circunstancias adversas que dificultaban la reunión tucumana. Un viento frío cambió el clima en el Jardín de la República. Seis de los

socios cuyas contribuciones nunca faltaban en las últimas reuniones no han podido concurrir, sea por encontrarse en el extranjero, sea por otras circunstancias imprevistas. La inflación impidió, también, a varios socios hacer el largo viaje al interior del país.

No obstante, la reunión ha sido un éxito. La acogida calurosa en el joven ambiente tucumano compensó ampliamente el frío. La reunión contó con doce contribuciones, entre ellas un informe del doctor L. Kowarski sobre los resultados comunicados pocos días antes en el Congreso Internacional de Física Nuclear en Oxford. Así nos enteramos del estado de las nuevas máquinas en construcción en Birmingham, Brookhaven y Berkeley, destinadas a acelerar protones hasta energías de uno, tres y cinco billones de electrón volts, de la nueva determinación de la energía de unión del deuterón, de la verificación experimental de la desintegración espontánea del neutrón y del descubrimiento del primer mesón neutro (meson V).

Se realizaron las elecciones bianuales de las autoridades para el período 1950/52. Fué elegido Presidente el doctor Ricardo Gans. En la secretaría local de Tucumán, el profesor A. Battig sucedió al doctor J. Würschmidt. La próxima 17ª reunión de la A.F.A. corresponderá a Buenos Aires.

*Guido Beck*

## BIBLIOGRAFIA

COLLOQUE DE TOPOLOGIE (Espaces fibrés). Centre Belge de Recherches Mathématiques, G. Thone, Liege, y Masson, Paris, 1951.

El Centro Belga de Investigaciones Matemáticas que tan acertadamente dirige L. Godeaux, después del éxito del *Coloquio de Geometría Algebraica* celebrado en Lieja en 1949, organizó para 1950 un *Coloquio de Topología* dedicado especialmente a los espacios fibrados. El Coloquio tuvo lugar del 5 al 8 de junio en Bruselas y las conferencias generales y comunicaciones presentadas forman el contenido del volumen que reseñamos.

Empieza el volumen con dos excelentes conferencias generales, una de H. Hopt (*Introducción a la teoría de los espacios fibrados*) y otra de H. Cartan (*Nociones de álgebra diferencial; aplicación a los grupos de Lie y a las variedades en que opera un grupo de Lie*). Las comunicaciones sobre puntos especiales que siguen a continuación son:

C. EHRESMANN, *Las conexiones infinitesimales en un espacio fibrado diferenciable.*

H. CARTAN, *La transgresión en un grupo de Lie y en un espacio fibrado principal.*

J. L. KOSZUL, *Sobre un tipo de álgebras diferenciales en relación con la transgresión.*

B. ECKMANN, *Espacios fibrados y homotopia.*

J. LERAY, *Sobre la homología de los grupos de Lie, de los espacios homogéneos y de los espacios fibrados principales.*

H. HOPF, *Sobre una fórmula de la teoría de los espacios fibrados.*

G. HIRSCH, *Algunas relaciones entre la homología en los espacios fibrados y las clases características relativas a un grupo de estructura.*

La Topología de los espacios fibrados, por su interés tanto desde el punto de vista de la Topología pura, como por sus aplicaciones a la geometría diferencial en grande y a los grupos de Lie, constituye uno de los capítulos de mayor actualidad dentro de la matemática actual. Por esto este volumen que contiene contribuciones de los principales especialistas europeos, presenta un interés excepcional.

Es interesante mencionar que al final del Coloquio, los asistentes al mismo enviaron, como acto de homenaje, el siguiente mensaje al Prof. Elie Cartan: "Al clausurar el Coloquio de Topología celebrado en Bruselas del 5 al 8 de junio de 1950, los participantes expresan su profunda admiración al Prof. Elie Cartan, cuyos trabajos han abierto el camino a la mayor parte de las investigaciones expuestas en el transcurso de las reuniones". Merecido reconocimiento a la obra inmortal del gran geómetra francés, cuyo reciente fallecimiento deplora toda la Ciencia Matemática y cuya obra —al decir de André Weil— es fructífera simiente cuyo desarrollo precisará la labor incesante de varias generaciones de matemáticos.

L. A. Santaló

H. HASSE, *Höhere Algebra*, Vol. I (*Lineare Gleichungen*) y Vol. II (*Gleichungen höheren Grades*). Sammlung Göschen vols. 931-932, 1951.

Se trata de la tercera edición de los bien conocidos libritos de Hasse sobre Algebra Superior de la colección Göschen. El contenido del vol. I es el siguiente: a) Anillos, cuerpos, dominios de integridad; b) Grupos; c) Algebra lineal sin determinantes; d) Algebra lineal con determinantes. Las partes a) y b) comprenden las definiciones y propiedades complementarias que caracterizan el álgebra moderna y que son luego utilizadas constantemente en toda la obra. La parte c) trata de los sistemas lineales, dando criterios para la existencia y número de soluciones, pero dejando el cálculo práctico de las mismas para la parte d), con ayuda de los determinantes como es usual. En la parte d) se estudian los determinantes de manera completa, desde su definición hasta su utilización en la regla de Cramer.

El vol. II está dedicado a la teoría de ecuaciones propiamente dicha. El índice de los capítulos dará idea del contenido: a) El primer miembro de las ecuaciones algebraicas; b) Las raíces de las ecuaciones algebraicas; c) El cuerpo de las raíces; d) La estructura del cuerpo de las raíces; e) Solución de las ecuaciones algebraicas por radicales.

Es interesante como en el breve espacio de los dos tomitos el autor ha conseguido incluir tanto los conceptos fundamentales del álgebra moderna como, desde este punto de vista, una exposición completa de la clásica teoría de Galois.

L. A. Santaló

W. GORDON WELCHMAN, *Introduction to Algebraic Geometry*, Cambridge University Press, 1950, 350 págs.

Evidentemente que todos los conceptos previos al estudio de una determinada disciplina pueden considerarse como una "introducción" a la misma. Sin embargo es costumbre reservar la palabra "introducción" a una teoría X, ya sea a un conjunto de propiedades en cierto modo elementales cuyo desarrollo y generalización es precisamente el objeto de la teoría X (por ejemplo la Introducción a la Geometría Algebraica de Van der Waerden), ya sea a un conjunto de conocimientos superiores que la teoría X necesita de manera esencial para su desarrollo (por ejemplo los excelentes libros de Hodge-Pedoe y B. Segre sobre los métodos de la Geometría Algebraica y la Geometría Superior respectivamente). En cambio el libro de Welchman que reseñamos es más propiamente un libro de geometría analítica-proyectiva, o, si se quiere, de "complementos" de geometría analítica. Ninguno de los capítulos que se suelen considerar como integrantes de la Geometría Algebraica (puntos singulares de las curvas, fórmulas de Plücker, transformaciones birracionales, geometría sobre una curva...), son tratados en la obra, ni el contenido de la misma puede considerarse como necesario para su ulterior estudio.

Según dice el Autor, "este libro contiene un estudio de la teoría de las cónicas mediante técnicas que tienen un extenso campo de aplicación. El objeto del libro es introducir al alumno lo más rápidamente posible al estudio de las configuraciones, lugares geométricos y transformaciones en los espacios de 3, 4 y 5 dimensiones". Efectivamente estos objetivos, que no eran de prever dado el título de la obra, son los únicos tratados y aun sin en general salirse de casos elementales y de los métodos clásicos de exposición.

Los tres primeros capítulos contienen las definiciones elementales de razón doble, coordenadas proyectivas y aplicaciones a la geometría proyectiva sobre la recta. El Cap. IV es un estudio de la geometría proyectiva de las cónicas hecho analíticamente. En el Cap. V se tratan las configuraciones usuales: cuadrilátero completo, teorema de Desargues, triángulos homológicos, polo y polar. El Cap. VI estudia ciertas propiedades métricas de las cónicas, en general interesantes y bien seleccionadas, deducidas como caso particular de propiedades proyectivas. El Cap. VII trata de manera en parte proyectiva y en parte analítica las homografías sobre una cónica y sus principales aplicaciones. El Cap. VIII considera las distintas posiciones relativas de dos cónicas de un plano, analizando con mucho detalle algunos casos particulares interesantes (cónicas autoconjugadas, pares de cónicas recíprocas respecto de una tercera, etc.) y en el Cap. IX sigue con el estudio de las cónicas relacionadas con un par de cónicas dadas, triángulos de posición especial respecto de las mismas e invariantes de dos cónicas, con algunas aplicaciones métricas y breves nociones de polaridad en general. El Cap. X trata de las correspondencias (2.1) y (2.2) sobre curvas racionales, principalmente entre los puntos de una cónica, detallando minuciosamente la clásica aplicación al problema de Poncelet sobre la construcción de un polígono inscrito en una cónica y circunscrito a otra. El Cap. XI se ocupa de obtener nuevamente algunos resultados sobre cónicas utilizando la representación de las mismas como producto de matrices. Finalmente, el Cap. XII trata de los invariantes y covariantes pro-

yectivos de las formas de  $n$  variables, con especial atención, como siempre, al caso de las formas cuadráticas de 2 ó 3 variables.

La exposición es en general clara y la repetida consideración de casos particulares contribuye a un mejor entendimiento del instrumental analítico utilizado.

En resumen, prescindiendo del título y considerando la obra como un estudio analítico-proyectivo de las cónicas, con ligeras referencias a puntos de vista más amplios, puede ser útil y recomendable.

*L. A. Santaló*

---

## AGRADECIMIENTO

*La Unión Matemática Argentina agradece al Centro de Cooperación Científica para la América Latina de UNESCO su muy valiosa cooperación, moral y material, que permitirá, entre otras cosas, abreviar el plazo de publicación de los trabajos con destino a nuestra Revista.*

# UNION MATEMATICA ARGENTINA

---

## MIEMBROS HONORARIOS

Tulio Levi-Civita (†); Beppo Levi; Alejandro Terracini; George D. Birkhoff (†); Marshall H. Stone; Georges Valiron, Antoni Zygmund, Godofredo García.

## REPRESENTANTES EN EL EXTRANJERO

Ing. Rafael Laguardia (Uruguay). Ing. José Luis Massera (Uruguay). Dr. Godofredo García (Perú). Dr. Leopoldo Nachbin (Brasil). Dr. Roberto Frucht (Chile). Dr. Peter Thullen (Ecuador). Dr. Mario González (Cuba). Dr. Alfonso Nápoles Gandara (México). Pedro Puig (España). Georges Valiron (Francia). Alejandro Terracini (Italia).

Contribuyen especialmente al sostenimiento de las publicaciones de la UNION MATEMATICA ARGENTINA los siguientes

## MIEMBROS PROTECTORES

COMPANÍA INDUSTRIAL DEL NORTE DE SANTA FE. INGENIO AZUCARERO "ARNO" (Villa Ocampo. F. C. S. F.). — JULIO REY PASTOR (Buenos Aires). — EMILIA J. DE DOMÍNGUEZ (Buenos Aires). — TRICERRI HNOS. (Rosario). — CLOTH-DE A. BULA (Rosario). — ELBA R. RAIMONDI (Buenos Aires). — FERNAN-DO L. GASPAR (Rosario).

---

## PUBLICACIONES DE LA U. M. A.

*Revista de la U. M. A.* — Vol. I (1936-1937); Vol. II (1938-1939); Vol. III (1938-1939); Vol. IV (1939); Vol. V (1940); Vol. VI (1940-1941); Vol. VII (1940-1941); Vol. VIII (1942); Vol. IX (1943); Vol. X (1944-1945).

*Revista de la U. M. A. y órgano de la A. F. A.* — Vol. XI (1945-1946); Vol. XII (1946-1947); Vol. XIII (1948); Vol. XIV (1949-1950).

Los volúmenes III, IV, V y VI comprenden los siguientes fascículos separados:

Nº 1. GINO LORIA. *Le Matematiche in Ispagna e in Argentina.* — Nº 2. A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre las series de funciones de Hermite.* — Nº 3. MICHEL PETROVICH. *Remarques arithmétiques sur une équation différentielle du premier ordre.* — Nº 4. A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Una nueva demostración del teorema límite del Cálculo de Probabilidades. Condiciones necesarias y suficientes para que una función sea integral de Laplace.* — Nº 5. NIKOLA OBRECHKOFF. *Sur la sommation absolue par la transformation d'Euler des séries divergentes.* — Nº 6. RICARDO SAN JUAN. *Derivación e integración de series asintóticas.* — Nº 7. Resolución adoptada por la U. M. A. en la cuestión promovida por el Sr. Carlos Biggeri. — Nº 8. F. AMODEO. *Origen y desarrollo de la Geometría Proyectiva.* — 9. CLOTILDE A. BULA. *Teoría y cálculo de los momentos dobles.* — Nº 10. CLOTILDE A. BULA. *Cálculo de superficies de frecuencia.* — Nº 11. R. FRUCHT. *Zur Geometria auf einer Fläche mit indefiniter Metrik (Sobre la Geometría de una superficie con métrica indefinida).* — Nº 12. A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre una memoria del Prof. J. C. Vignaux.* — Nº 13. E. TORANZOS. *Sobre las singularidades de las curvas de Jordan.* — Nº 14. M. BALANZAT. *Fórmulas integrales de la intersección de conjuntos.* — Nº 15. G. KNIE. *El problema de varios electrones en la mecánica cuantista.* — Nº 16. A. TERRACINI. *Sobre la existencia de superficies cuyas líneas principales son dadas.* — Nº 17. L. A. SANTALÓ. *Valor medio del número de partes en que una figura convexa es dividida por  $n$  rectas arbitrarias.* — Nº 18. A. WINTER. *On the iteration of distribution functions in the calculus of probability (Sobre la iteración de funciones de distribución en el cálculo de probabilidades).* — Nº 19. E. FERRARI. *Sobre la paradoja de Bertrand.* — Nº 20. J. BABINI. *Sobre algunas propiedades de las derivadas de ciertas primitivas de los polinomios de Legendre.* — Nº 21. R. SAN JUAN. *Un algoritmo de sumación de series divergentes.* — Nº 22. A. TERRACINI. *Sobre algunos lugares geométricos.* — Nº 23. V. y A. FRAILE y C. CRESPO. *El lugar geométrico y lugares de puntos áreas en el plano.* — Nº 24. R. FRUCHT. *Coronas de grupos y sus subgrupos, con una aplicación a los determinantes.* — Nº 25. E. R. RAIMONDI. *Un problema de probabilidades geométricas sobre los conjuntos de triángulos.*

En 1942 la U. M. A. ha iniciado la publicación de una nueva serie de "Memorias y monografías" de las que han aparecido hasta ahora las siguientes:

Vol. I; Nº 1. — GUILLERMO KNIE, *Mecánica ondulatoria en el espacio curvo.* Nº 2. — GUIDO BECK, *El espacio físico.* Nº 3. — JULIO REY PASTOR, *Integrales parciales de las funciones de dos variables en intervalo infinito.* Nº 4. — JULIO REY PASTOR, *Los últimos teoremas geométricos de Poincaré y sus aplicaciones.* Homenaje póstumo al Prof. G. D. BIRKHOFF.

Vol. II; Nº 1. — YANNY FRENKEL, *Criterios de bicompatibilidad y de H-completitud de un espacio topológico accesible de Frechet-Riesz.* Nº 2. — GEORGES VALIRON, *Fonctions entières.*

Además han aparecido tres cuadernos de *Miscelánea matemática.*