

REVISTA  
DE LA  
UNION MATEMATICA ARGENTINA  
(MIEMBRO DEL PATRONATO DE LA MATHEMATICAL REVIEWS)  
Y DE LA  
ASOCIACION FISICA ARGENTINA

Director: José Babini

Redactores de la U. M. A.: Julio Rey Pastor, Luis A. Santaló, Mischa Cotlar

Redactores de la A. F. A.: Enrique Gaviola, Guido Beck, Rodolfo Busch



S U M A R I O

Unas propiedades de la representación conforme local de una superficie sobre otra, por L. A. SANTALÓ .....	45
<i>Crónica.</i> Agrupación rioplatense de lógica y filosofía científica (M. B.) .....	52
The first excited states of the $C^{12} - N^{13}$ mirror pair, por J. P. DAVIDSON y J. J. GIAMBIAGI .....	54
<i>Asociación Física Argentina.</i> XXV Reunión. Informe y comunicaciones .....	63
XXVI Reunión. Informes y comunicaciones .....	68
XXVII. Reunión. Informe y comunicaciones .....	74
XXVIII Reunión. Informe y comunicaciones .....	82
<i>Bibliografía.</i> Colloque sur l'Analyse Statistique (M. Valentinuzzi). - G. Hoheisel, Gewöhnliche Differentialgleichungen. - W. Blaschke, Kreis und Kugel. - J. Favard, Cours de Géométrie différentielle locale. - W. Haack, Darstellende Geometrie III: Axonometrie und Perspektive. (L. A. Santaló) .....	85
<i>Unión Matemática Argentina.</i> Resumen de las comunicaciones de la reunión del 21-IX-1956 .....	90



BUENOS AIRES

1957

## UNION MATEMATICA ARGENTINA

La U. M. A. reconoce cuatro categorías de miembros: honorarios, protectores titulares y adherentes. El miembro protector paga una cuota anual de 200 \$, por lo menos; el titular una cuota anual de 120 \$; y el adherente (estudiantes solamente) una cuota anual de 40 \$. Los pagos deberán efectuarse por cheque, giro u otro medio libre de gastos, a la orden del Tesorero, Dr. Germán Fernández, calle 71 n° 858. La Plata, Rep. Argentina.

Por ser la U. M. A. miembro del patronato de la Mathematical Reviews (sponsoring member), los socios de la U. M. A. tienen derecho a suscribirse a esa importante revista de bibliografía y crítica con 50 % de rebaja sobre el precio de suscripción que es de 20 dólares por año. Los socios de la U. M. A. pagarán por tanto sólo 10 dólares por año.

Los autores de trabajos reciben gratuitamente una tirada aparte de 50 ejemplares. Las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

### JUNTA DIRECTIVA

Presidente, Alberto González Domínguez; Vicepresidente 1º, Luis A. Santaló; Vicepresidente 2º, César A. Trejo; Tesorero, Germán Fernández; Protesorero, Emilio Roxin; Secretario General, Pedro Pi Calleja; Director de Publicaciones, José Babini; Secretarios Locales: (La Plata) Nelly M. Pláceres, (Buenos Aires) María J. Erramuspe, (Rosario) Juan Olguín, (Bahía Blanca) Susana Fernández Long, (Tucumán) Ilda C. Guglielmo de D'Angelo, (San Juan) Sergio Sispánov, (Santa Fe) Juan de Dios Olivieri, (San Luis) Modesto González, (Mendoza) Yanny Frenkel de Cotlar, (Salta) Roberto Ovejero, (Córdoba) Víctor Urciolo, (San Carlos de Bariloche) Manuel Balanzat.

## ASOCIACION FISICA ARGENTINA

La A. F. A., asociación privada de investigadores, profesores y estudiantes de física y de astronomía, tiene por objeto fomentar el progreso de la investigación y de la enseñanza de dichas materias por medio de reuniones científicas periódicas y de la publicación de trabajos originales.

Podrán ingresar como socios activos quienes hayan efectuado investigaciones originales; pueden ser socios adherentes los profesores que no cumplan este requisito; y socios estudiantes los que hayan aprobado el primer año de estudios de física o de astronomía.

Las solicitudes de ingreso, que deberán llevar la firma de dos socios activos o adherentes, habrán de dirigirse al secretario local que corresponda. Los socios activos abonarán una cuota mensual de \$ 18, los adherentes de \$ 15, los estudiantes de \$ 6. Si el pago se hace en una sola cuota anual, será de 180, 150 y 60 pesos, respectivamente. En estas cuotas están incluidas las suscripciones a la "Revista de la U. M. A. y de la A. F. A." y a la revista "Ciencia e Investigación".

La correspondencia relacionada con las colaboraciones debe dirigirse al Secretario de Publicaciones de la A. F. A., Mario Bunge, Facultad de Ciencias Exactas, Perú 222, Buenos Aires.

Se solicita a las instituciones a que pertenecen los autores contribuyan con una cuota de 50 \$ por página, lo que les dará derecho a recibir 100 apartados libres de cargo. Las instrucciones relativas se enviarán con las pruebas de galera.

### COMISION DIRECTIVA (1956-58)

Presidente: Fidel Alsina Fuertes. Andes 112, Martínez.

Tesorero: Carlos A. Mallmann. Eduardo Madero 1200, Martínez.

Secretario en Buenos Aires: Ernesto E. Galloni. Yerbal 1763.

» » La Plata: E. Jorge Bertomeu. Diagonal 80, 620.

» » Bariloche: Juan A. McMillan. Casilla de Correo 151.

» » Tucumán: Augusto Battig. Instituto de Física.

Secretario de Publicaciones: Mario Bunge. Deán Funes 1874, Florida.

Abonnement annuel à l'étranger: 5.00 dollars (Etats-Unis).

Prrière d'adresser toute la correspondance scientifique, administrative et les échanges à l'adresse ci-dessous:

REVISTA DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

Casilla de Correo 3588  
Buenos Aires (Argentina)

# UNAS PROPIEDADES DE LA REPRESENTACION CONFORME LOCAL DE UNA SUPERFICIE SOBRE OTRA

por L. A. SANTALÓ

SUMMARY. — Let  $P, P'$  be two corresponding points in a conformal correspondence (local) between two twice differentiable surfaces  $S, S'$  and let  $\pi, \pi'$  be the tangent planes at  $P, P'$  respectively. Let  $C$  be a variable curve on  $S$  through  $P$  and  $Q \in \pi$  be its center of geodesic curvature. If  $C'$  is the transformed curve of  $C$  and  $Q' \in \pi'$  is its center of geodesic curvature at  $P'$ , then we prove the following theorem: the correspondence  $Q \rightarrow Q'$  between  $\pi$  and  $\pi'$  is a projectivity.

As immediate consequences we obtain, among other, the following properties: a) By a conformal correspondence between two surfaces  $S, S'$ , the geodesic curves through a point  $P$  of  $S$  transform in curves whose centres of geodesic curvature at  $P'$  lie on a line; b) If more than a geodesic curve through  $P$  transform in a curve of null geodesic curvature at  $P'$ , all geodesic curves through  $P$  transform in curves with the same property; c) The centers of geodesic curvature of all loxodromes of a surface of revolution through a point  $P$ , lie on a line.

When  $S'$  is a plane these theorems may have applications to cartography.

1. *Enunciado del teorema.* Consideremos una representación conforme de una superficie  $S$  sobre otra  $S'$  y sean  $P, P'$  dos puntos homólogos. El problema que vamos a estudiar es de naturaleza «local», es decir, consideramos únicamente la representación conforme entre dos entornos de los puntos  $P$  y  $P'$ . Sean  $\pi$  y  $\pi'$  los planos tangentes a ambas superficies en  $P$  y  $P'$  respectivamente. A cada curva  $C$  de  $S$  que pasa por  $P$  corresponde una curva  $C'$  de  $S'$  por  $P'$ ; sea  $Q$  el centro de curvatura geodésica de  $C$  (que es un punto de  $\pi$ , ver por ej. Eisenhart [2, p. 246]) y  $Q'$  el centro de curvatura geodésica de  $C'$  que es un punto de  $\pi'$ . Al variar  $C$ , siempre pasando por  $P$ , tenemos así definida una correspondencia entre los planos  $\pi$  y  $\pi'$ . Puesto

que cada punto  $Q$  de  $\pi$  es centro de curvatura geodésica de curvas de  $S$  que pasan por  $P$  y la transformación conforme es biunívoca, resulta que dicha correspondencia es también biunívoca y se extiende a todos los puntos de los planos  $\pi$  y  $\pi'$ . El teorema principal que vamos a demostrar es el siguiente:

*La correspondencia  $Q \rightarrow Q'$  entre los planos  $\pi$  y  $\pi'$  es una proyectividad.*

De este teorema se deducen muchos corolarios, entre ellos algunos, como veremos, de posible interés en cartografía.

Para el caso de ser  $S$  y  $S'$  dos planos, el mismo problema fué ya considerado por nosotros en otro lugar [5].

2. *Demostración del teorema.* Sea  $X = X(u, v)$  la ecuación vectorial de la superficie  $S$ , que suponemos dos veces diferenciable, referida a un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonal, o sea

$$(2.1) \quad X_u \cdot X_v = 0.$$

Tomemos el punto  $P$  como punto  $u=0, v=0$  y en su plano tangente  $\pi$  tomemos un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales  $\xi, \eta$  tal que el eje  $\xi$  tenga la dirección de  $X_u$  y el eje  $\eta$  la de  $X_v$ .

Consideremos la curva  $C$  que pasa por  $P$  dada por las ecuaciones paramétricas  $u=u(t), v=v(t)$ . La dirección de su tangente en  $P$  es la del vector  $X_u u' + X_v v'$  (las derivadas tomadas en  $P$ ). El ángulo  $\varphi$  que forma la normal a esta tangente contenida en el plano  $\pi$  con el eje  $\xi$  cumple las condiciones

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \cos \varphi &= - \frac{(X_u u' + X_v v') \cdot X_v}{|X_u u' + X_v v'| \cdot |X_v|} = - \frac{\sqrt{G} v'}{\sqrt{E u'^2 + G v'^2}} \\ \text{sen } \varphi &= \frac{(X_u u' + X_v v') \cdot X_u}{|X_u u' + X_v v'| \cdot |X_u|} = \frac{\sqrt{E} u'}{\sqrt{E u'^2 + G v'^2}} \end{aligned}$$

habiendo puesto, como es costumbre,

$$(2.3) \quad E = X_u^2, \quad G = X_v^2.$$

Las coordenadas, en el sistema  $\xi, \eta$ , del punto  $Q$ , centro de curvatura geodésica de  $C$  en  $P$ , serán

$$(2.4) \quad \xi = \rho_g \cos \varphi, \quad \eta = \rho_g \operatorname{sen} \varphi$$

siendo  $\rho_g$  el radio de curvatura geodésica, o sea (ver Blaschke [1, p. 175]),

$$(2.5) \quad \rho_g = \frac{\sqrt{EG}(Eu'^2 + Gv'^2)^{3/2}}{\Gamma}$$

siendo

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \Gamma = & EG(u'v'' - v'u'') + \\ & + Eu'(-1/2 E_v u'^2 + G_u u'v' + 1/2 G_v v'^2) \\ & - Gv'(1/2 E_u u'^2 + E_v u'v' - 1/2 G_u v'^2). \end{aligned}$$

Por tanto las coordenadas de  $Q$  resultan

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \xi = & - \frac{G\sqrt{E}(Eu'^2 + Gv'^2)v'}{\Gamma}, \\ \eta = & \frac{E\sqrt{G}(Eu'^2 + Gv'^2)u'}{\Gamma}. \end{aligned}$$

Dada una representación conforma entre  $S$  y  $S'$ , siempre podemos hacer, por un cambio de parámetros conveniente, que los puntos homólogos correspondan a los mismos valores de  $u, v$ . Entonces, los coeficientes de las primeras formas fundamentales resultan proporcionales, o sea

$$(2.8) \quad \frac{E'}{E} = \frac{G'}{G} = \alpha^2$$

y, además, las ecuaciones  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$  que definen la curva  $C$  serán las mismas que definen sobre  $S'$  la curva transformada  $C'$ . Por consiguiente el valor de la expresión (2.6) para  $C'$ ; poniendo  $E' = \alpha^2 E$ ,  $G' = \alpha^2 G$  en lugar de  $E, G$  y haciendo operaciones, resulta

$$(2.9) \quad \Gamma' = \alpha^4 \Gamma + (Eu'^2 + Gv'^2)(Gv'\alpha_u - Eu'\alpha_v)\alpha^3.$$

Las coordenadas del centro de curvatura geodésica  $Q'$  de la curva  $C'$  en el punto  $P'$ , coordenadas sobre el plano tangente  $\pi'$ , serán las mismas (2.7) después de sustituir  $E, G$  por  $E', G'$ , o sea

$$\xi' = -\frac{\alpha^5 G \sqrt{E} (Eu'^2 + Gv'^2)v'}{\Gamma'}, \quad \eta' = \frac{\alpha^5 E \sqrt{G} (Eu'^2 + Gv'^2)u'}{\Gamma'}$$

que se pueden escribir

$$(2.10) \quad \xi' = \frac{\alpha^2 \xi}{\alpha - \frac{\alpha_u}{\sqrt{E}} \xi - \frac{\alpha_v}{\sqrt{G}} \eta}, \quad \eta' = \frac{\alpha^2 \eta}{\alpha - \frac{\alpha_u}{\sqrt{E}} \xi - \frac{\alpha_v}{\sqrt{G}} \eta}.$$

Tanto las funciones  $\alpha, E, G$  como las derivadas  $\alpha_u, \alpha_v$  deben tomarse en el punto  $P$ , es decir, son constantes al variar la curva  $C$  por  $P$ . Por tanto la correspondencia entre los puntos  $Q(\xi, \eta)$  y  $Q'(\xi', \eta')$ , expresada por las ecuaciones (2.10) es una proyectividad, conforme al enunciado del teorema.

3. *Corolarios del teorema.* a) Supongamos tres curvas tangentes en el punto  $P$  y sean  $Q_1, Q_2, Q_3$  sus centros de curvatura geodésica en  $P$ . Según el teorema principal, la razón anarmónica  $(P Q_1 Q_2 Q_3)$  es invariante por transformaciones conformes, o sea, llamando  $\rho_{g_i} = P Q_i$  y  $\rho'_{g_i} = P' Q'_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) a los radios de curvatura geodésica y a sus transformados, es

$$\frac{\rho_{g_2}(\rho_{g_3} - \rho_{g_1})}{\rho_{g_3}(\rho_{g_2} - \rho_{g_1})} = \frac{\rho'_{g_2}(\rho'_{g_3} - \rho'_{g_1})}{\rho'_{g_3}(\rho'_{g_2} - \rho'_{g_1})}$$

o bien, introduciendo las curvaturas geodésicas  $\kappa_{g_i} = 1/\rho_{g_i}$ , resulta, mas simplimente

$$\frac{\kappa_{g_1} - \kappa_{g_3}}{\kappa_{g_1} - \kappa_{g_2}} = \frac{\kappa'_{g_1} - \kappa'_{g_3}}{\kappa'_{g_1} - \kappa'_{g_2}}$$

Por consiguiente se tiene:

*Dadas tres curvas de una superficie tangentes en un punto,*

y siendo  $\kappa_{g_i}$  los valores de sus curvaturas geodésicas en el mismo, la razón

$$\frac{\kappa_{g_1} - \kappa_{g_3}}{\kappa_{g_1} - \kappa_{g_2}}$$

es invariante por transformaciones conformes.

b) Puesto que en una proyectividad las rectas se transforman en rectas, una consecuencia inmediata del teorema es:

*En una transformación conforme de  $S$  sobre  $S'$  las curvas de  $S$  que pasan por un punto  $P$  y tienen en él curvatura geodésica nula (por ejemplo las geodésicas o las secciones planas normales) se transforman en curvas cuyos centros de curvatura geodésica en  $P'$  están en línea recta.*

En consecuencia:

*De las curvas de  $S$  con  $\kappa_g = 0$  en  $P$ , o bien hay una sola que se transforma en una curva con  $\kappa_{g'} = 0$  en  $P'$  o bien todas se transforman en curvas con  $\kappa_{g'} = 0$  en  $P'$ .*

Por ejemplo, en la proyección Mercator por todo punto no perteneciente al ecuador pasa únicamente el meridiano como curva geodésica que se transforma en otra geodésica. En los puntos del ecuador, en cambio, todas las geodésicas de la esfera se transforman en curvas con  $\kappa_{g'} = 0$ , o sea, en curvas que tienen en el ecuador un punto de inflexión.

c) Consideremos curvas de  $S$  por  $P$  que tengan en este punto la misma curvatura geodésica  $\kappa_g$ . El lugar geométrico de los centros de curvatura geodésica será una circunferencia de centro  $P$  y radio  $\rho_g = 1/\kappa_g$ . Por tanto, según el teorema principal, el lugar geométrico de los centros de curvatura geodésica de las curvas transformadas será una cónica. Vamos a demostrar, además, que esta cónica tiene un foco en  $P'$ .

En efecto, la ecuación de la misma en coordenadas polares de origen  $P'$  será  $R^2 = \xi'^2 + \eta'^2$ , o bien, según (2.10) y (2.4),

$$(3.1) \quad R = \frac{\alpha^2 \rho_g}{\alpha - \left( \frac{a_u}{\sqrt{E}} \cos \varphi + \frac{a_v}{\sqrt{G}} \operatorname{sen} \varphi \right) \rho_g} .$$

Introduciendo el ángulo  $\vartheta$  tal que

$$(3.2) \quad \alpha_u = a\sqrt{E} \cos \vartheta, \quad \alpha_v = a\sqrt{G} \operatorname{sen} \vartheta, \quad a^2 = \frac{\alpha_u^2}{E} + \frac{\alpha_v^2}{G}$$

donde las funciones  $\alpha_u, \alpha_v, E, G$  están tomadas en el punto  $P$ , resulta

$$(3.3) \quad R = \frac{\alpha \rho_g}{1 - \frac{\alpha \rho_g}{\alpha} \cos(\vartheta - \varphi)}$$

que pone de manifiesto que la curva transformada es efectivamente una cónica de foco  $P'$  y excentricidad  $\alpha \rho_g / \alpha$ .

Esta cónica será una elipse, hipérbola o parábola, según que la excentricidad sea menor, mayor o igual que uno, o sea, según que en el punto  $P$  se verifique

$$\left( \frac{\alpha_u^2}{E} + \frac{\alpha_v^2}{G} \right) \rho_g^2 \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} \alpha^2.$$

Resulta así el siguiente teorema, generalización de un resultado de Ringleb[4] para la transformación conforme entre planos:

*Por una transformación conforme cualquiera entre las superficies  $S$  y  $S'$ , las curvas de  $S$  que pasan por un punto  $P$  y tienen en él la misma curvatura geodésica, se transforman en curvas cuyos centros de curvatura geodésica en el punto  $P'$  están sobre una cónica, la cual tiene a  $P'$  como foco.*

d) La cónica anterior (3.3) será una circunferencia únicamente en el caso  $\alpha \rho_g = 0$ , o sea, solamente en el caso en que, en el punto  $P$ , se verifique  $a = 0$ , o bien, según (3.2),

$$(3.4) \quad \alpha_u = 0, \quad \alpha_v = 0.$$

Por tanto, para que una transformación conforme transforme en toda una región curvas de curvatura geodésica constante en curvas de curvatura geodésica constante, debe verificarse  $\alpha = \text{constante}$ . De aquí:

*Las únicas transformaciones entre dos superficies que transforman las curvas de curvatura geodésica constante en otras de curvatura geodésica constante son las semejanzas, entendiendo por tales aquellas transformaciones para las cuales se cumple*

$$ds'^2 = \alpha^2 ds^2 \quad \text{con} \quad \alpha = \text{constante.}$$

En particular resulta el teorema conocido (Hlavaty [3, p. 227]): *Salvo las semejanzas, no existen transformaciones que sean conformes y geodésicas a la vez.*

4. *Una aplicación a las superficies de revolución.* Una superficie de revolución cuyo eje sea el eje  $z$  de un sistema cartesiano ortogonal tiene sus ecuaciones de la forma

$$(4.1) \quad x = g(z) \cos \varphi, \quad y = g(z) \operatorname{sen} \varphi, \quad z = z.$$

La representación de la misma sobre el plano  $\xi, \eta$  definida por las ecuaciones

$$\xi = \varphi, \quad \eta = \int_0^z \frac{\sqrt{1+g'^2}}{g} dz$$

es conforme y, además, transforma las loxodrómicas de la superficie en rectas del plano (ver, por ejemplo, Hlavaty [3, p. 176-177]).

La existencia de una representación conforme que transforma las loxodrómicas por un punto  $P$  en rectas del plano, o sea en geodésicas del mismo, nos prueba según el corolario b) que:

*En toda superficie de revolución, las loxodrómicas que pasan por un punto tienen los centros de curvatura geodésica correspondientes al mismo en línea recta.*

De aquí, según el teorema principal:

*Toda representación conforme de una superficie de revolución sobre otra superficie cualquiera, transforma las loxodrómicas que pasan por un punto  $P$  en curvas cuyos centros de curvatura geodésica en  $P'$  están en línea recta.*

En particular, siendo la esfera una superficie de revolución el teorema es aplicable a cualquier mapa que represente la esfera sobre el plano conservando los ángulos.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] W. BLASCHKE, *Vorl. über Differentialgeometrie I*, Springer, Berlin, 1930.
- [2] L. P. EISENHART, *An introduction to Differential Geometry*, Princeton University Press, 1940.
- [3] V. HLAVATY, *Differentialgeometrie* (traducción de M. Pinl), P. Noordhoff, 1939, Groningen - Batavia.
- [4] F. RINGLEB, *Ueber das Verhalten der Krümmung ebener Kurven bei konformer Abbildung*, Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung, vol. 45, 1935, pág. 57.
- [5] L. A. SANTALÓ, *Un teorema sobre representación conforme*, Mathematicae Notae, Año V, págs. 29-40.

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
Buenos Aires.

---

## CRONICA

### AGRUPACION RIOPLATENSE DE LOGICA Y FILOSOFIA CIENTIFICA

El 6 de octubre de 1956, un grupo de profesores universitarios se reunió en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, bajo la presidencia del Ing. José Babini, y resolvió fundar la Agrupación Rioplatense de Lógica y Filosofía Científica. Esta sociedad científica agrupará a los cultores y estudiosos de la lógica moderna y de la epistemología residentes en Argentina y Uruguay. La primera asamblea ordinaria de socios, realizada el 10 denoviembre, aprobó el estatuto de la sociedad, eligió sus autoridades, y formuló el plan de trabajo de la misma.

La finalidad de la A.R.L. y F.C. es contribuir al estudio, discusión y difusión de los siguientes temas: (I) lógica moderna y sus aplicaciones; (II) epistemología y fundamentación de las ciencias; (III) métodos científicos en filosofía. Para lograr estos fines, la Agrupación propenderá a: (I) vincular a los estudiosos de estas disciplinas; (II) estimular las investigaciones en estos campos, mediante la organización de seminarios, grupos de estudio, etc.; (III) difundir los conocimientos relacionados con estos temas median-

te: (a) publicaciones de trabajos originales y de divulgación; (b) traducciones; (c) cursos, conferencias, congresos, "symposia", etc.; (d) formación de una biblioteca y de un archivo para documentar el desarrollo mundial y regional de las investigaciones pertinentes; (IV) auspiciar la modernización de los planes de estudio relacionados con estas disciplinas, en las universidades y demás instituciones de enseñanza; (V) colaborar con las instituciones que realicen actividades afines.

Los socios de la A.R.L. y F.C. son fundadores, activos o adherentes. La cuota anual fijada para los fundadores y activos es de 100 \$ m/arg. o 16 \$ m/urug.; los socios adherentes abonarán 50 \$ m/arg. u 8 \$ m/urug. por año. La nómina de los socios fundadores es la siguiente: Carlos Alchourron, José Babini, Jorge E. Bosch, Mario Bunge, Félix Cernuschi, Oscar Dodera Lüscher, Vicente Fatone, Rolando V. García, Gino Germani, Gregorio Klimovsky, Hans Lindermann, Antonio A. Monteiro, Heberto Puente, Andrés Raggio, Manuel Sadosky, Oscar Varsavsky, Alberto G. Velarde y Orlando E. Villamayor. La Comisión Directiva electa para el período 1956-57 está constituida por M. Bunge, O. Dodera Lüscher, G. Germani, R. V. García y G. Klimovsky.

Los interesados en adherirse a la Agrupación deben dirigirse por carta a la sede de la misma, Perú 222, Buenos Aires, o personalmente a cualquiera de los miembros de la C. D.

La A.R.L. y F.C. proyecta realizar reuniones periódicas de dos tipos: dos sesiones anuales de comunicaciones originales e informes (una en otoño y la otra en primavera) y coloquios bimensuales. La primera sesión de comunicaciones se realizó los días 22 y 24 de mayo, en la Facultad de Filosofía y Letras de Buenos Aires y en la Facultad de Ciencias Físicomatemáticas de La Plata respectivamente. La disertación inaugural estuvo a cargo de José Babini, quien historió los estudios epistemológicos en el país y señaló la importancia creciente de las investigaciones fundamentales en la civilización moderna. Las comunicaciones (de una duración máxima de 30') fueron seguidas con sumo interés y debatidas en detalle. Ellas fueron: Mario Bunge, "Tres significados del término «ley científica»"; Marcelo Diamand, "Presentación de una calculadora electrónica de proposiciones"; Rolando V. García, "Las objeciones al concepto semántico de verdad"; Gregorio Klimovsky, "Complejidad proposicional y ultrafiltros en álgebras de Boole"; Eduardo Rapoport, "Sobre las funciones vitales elementales"; y Oscar Varsavsky, "Álgebras monádicas".

El primer coloquio bimensual se realizó el 1º de junio en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales; la discusión se fundó en la comunicación de Jorge Eduardo Bosch, "Sobre los fundamentos de la lógica". El segundo coloquio se realizó el 15 de junio en la Facultad de Derecho y Ciencias Sociales; se debatió el tema "Lógica y filosofía del derecho", sobre la base de una comunicación de Carlos Alchourron. Las reuniones sucesivas se realizarán el primer y tercer sábado de cada mes a las 17.30, con asistencia libre.

M. B.

# THE FIRST EXCITED STATES OF THE $C^{13} - N^{13}$ MIRROR PAIR

J. P. DAVIDSON (\*)

Joint Establishment for Nuclear Energy Research  
Kjeller, Norway

and

J. J. GIAMBIAGI (\*\*)

Centro Brasileiro de Pesquisas Fisicas  
Rio de Janeiro, Brazil

## ABSTRACT

We have calculated the first three energy  $C^{13} - N^{13}$  mirror on the assumption that these states are adequately represented by an  $L - S$  coupling model. Using both square well and harmonic oscillator wave functions with several charge distributions we produced the level differences to the correct order of magnitude; however, the first excited state level differences were found to be less than those of the second excited states just the reverse of the experimental solution.

## I. Introduction.

The levels of  $C^{13} - N^{13}$  have been treated by several authors using reaction theory (see Ehrman<sup>(1)</sup>, Peaslee<sup>(2)</sup>, Thomas<sup>(3,4)</sup>); however, it seemed worthwhile to try some simple model following the line of Bethe<sup>(5)</sup> for the ground states, to see if reasonable results could be obtained.

In our calculations we have assumed throughout that the

---

(\*) Present address: Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, USA.

(\*\*) Present address: Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Perú 222, Buenos Aires, Argentina.

$C^{13} - N^{13}$  ground and low lying excited states are adequately represented by pure  $L-S$  coupling wave functions of a single particle on a spherically symmetric core. While it may be argued that this mirror pair is better represented by an intermediate coupling model (Inglis<sup>(6)</sup>) the nearness of the  $C^{13}$  magnetic moment to the  $I=L-1/2$  Schmidt limit would seem to support the assumption of  $L-S$  coupling. Within this framework, then, we have calculated the Coulomb energy of the odd proton moving in the nuclear potential of the core. If  $V$  is the electrostatic potential of the core and  $\rho$  the charge distribution of the odd particle then the difference between the energy levels of the two mirror nuclei will be

$$\Delta E = \int \rho V dv.$$

In order to calculate  $\rho$  we have assumed two different sets of nuclear wave functions, the first being for a square well. With this we took the potential,  $V$ , to be that of a uniformly charged sphere. Since it is known that the sharp edge of the square well introduces anomalies into many calculations we chose for our second set harmonic wave functions. The oscillator parameter has been chosen to fit the correct Coulomb energy difference between the two ground states. This potential was used with three different charge distributions: a) a uniformly charged sphere, as before, b) a spherical shell, in order to reduce the charge at the center (reminiscent of an alpha particle model) and, finally, c) a Gaussian distribution.

In figure 1 the experimentally determined low lying levels of this mirror pair are shown with the spin and parity assignments (from Ajzenberg<sup>(7)</sup>).

## II. *The Square Well Wave Functions.*

The well known wave functions for this case are

$$\begin{aligned} \psi_{n,l} &= A_{n,l} j_l(ar) Y_l^m(\Theta, \Phi) & r \leq R \\ &= A_{n,l} \frac{j_l(aR)}{k_l(bR)} k_l(br) Y_l^m(\Theta, \Phi) & r > R \end{aligned}$$

with

$$a^2 = 2M(D - |E_l|)/\hbar^2$$

$$b^2 = 2M|E_l|/\hbar^2.$$

Where  $M$  is the nucleon mass,  $D$  the well depth,  $j_l(x)$  is the usual spherical Bessel function of order  $l$  regular at the origin while  $k_l(x)$  is a spherical Bessel function of purely imaginary argument or

$$k_l(x) = \sqrt{2/\pi x} K_{l+1/2}(x)$$

and  $K_n(x)$  is defined by Watson (8). The well parameters  $D$  and  $R$  are picked in order to get reasonable values of the energies of the first two excited states, the  $2S$  and  $2P$ .

Calling  $E_l^n$  the energy of the  $n$ th level with angular momentum  $l$  the difference between corresponding levels in this mirror pair is then

$$\begin{aligned} \Delta E_l^n &= \int \rho_{n,l} V dv = (Z-1) e^2 |A_{n,l}|^2 \left\{ \frac{1}{2R^3} \int_0^R (3R^2 - r^2) j_l^2(ar) r^2 dr \right. \\ &\quad \left. + [j_l^2(aR)/k_l^2(bR)] \int_R^\infty r k_l^2(br) dr \right\} \\ &= (Z-1) e^2 |A_{n,l}|^2 \left\{ \frac{3R^2}{4} [j_l^2(aR) - j_{l-1}(aR) j_{l+1}(aR)] - \right. \\ &\quad \left. - (1/2R^3 a^5) \int_0^{aR} j_l^2(z) z^4 dz + \right. \\ &\quad \left. + [j_l^2(aR)/b^2 k_l^2(bR)] \int_{bR}^\infty k_l^2(z) z dz \right\}. \end{aligned}$$

$A_{n,l}$  is the normalization constant determined by the condition that

$$\int_0^\infty |\psi|^2 dv = 1.$$

In obtaining the well parameters we first observed that for a well radius of the form given by Peaslee (9) (*i. e.*,  $R = 1.18$

$A_e^{1/3} \times 10^{-13}$  cm,  $A_e = A - 1$ , no 2S state was bound for  $D < 63.2$  Mev, at which depth  $|E_1^1| \approx 22$  Mev. The values of  $D$  and  $R$  were finally picked so that  $|E_0^2| = 5$  Mev,  $|E_1^1| = 8$  Mev requiring  $R = 10^{-12}$  cm =  $4.36 A_e^{1/3} \times 10^{-13}$  cm and  $D = 11.33$  Mev. For these values no  $l=2$  state is bound and  $|E_0^1| = 9.73$  Mev while  $|E_1^2| = 2.21$  Mev.

Using these parameters the Coulomb energy of the extra particle in several states was determined as

$$\Delta E_1^1 = 1.091 \text{ Mev}$$

$$\Delta E_0^2 = 1.048 \text{ Mev}$$

$$\Delta E_1^2 = 1.036 \text{ Mev.}$$

The energy difference between the first excited states in  $C^{13}$  an  $N^{13}$  is just

$$\Delta E_1^1 - \Delta E_0^2 = 43 \text{ Mev}$$

and the energy difference between the second excited states is

$$\Delta E_1^1 - \Delta E_1^2 = 55 \text{ Mev.}$$

The experimental differences are 720 Kev and 170 Kev respectively.

### III. *The Harmonic Oscillator Wave Functions.*

The wave functions for the three dimensional, isotropic, harmonic oscillator separated in spherical coordinates are

$$\psi(r, \Theta, \Phi) = r^{-1} R_{n,l}(kr) Y_l^m(\Theta, \Phi)$$

where

$$R_{n,l}(r) = N_{n,l} r^{l+1} v_{n,l}(r) \exp(-\alpha^2 r^2/2)$$

where  $v_{n,l}$  is a suitably normalized associated Laguerre polynomial. For the cases of interest

$$v_{0,l} = 1, \quad N_{0,l} = 2^{l+2} \alpha^{2l+3} / \sqrt{\pi} 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l+1)$$

$$v_{1,l} = 1 - 2(\alpha r)^2 / (2l+3)$$

$$N_{1,l} = 2^{l+1} (2l+3) \alpha^{2l+3} / \sqrt{\pi} 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l+1).$$

To evaluate the level differences we need integrals of the type

$$I_{n,l} = e^2 \int R_{n,l}^2 V(r) dr$$

for which there is the recurrence relation (Talmi<sup>(10)</sup>)

$$I_{1,l} = \frac{2l+3}{2} I_{0,l} - (2l+3) I_{0,l+1} + \frac{2l+5}{2} I_{0,l+2}.$$

We have

$$\Delta E_1^1 = I_{0,1} = \frac{(Z-1)e^2}{R} \left[ \left( \frac{3}{2} - \frac{3}{4\alpha^2 R^2} \right) \text{erf } \alpha R + \frac{3 e^{-\alpha^2 R^2}}{2\sqrt{\pi} \alpha R} \right]$$

$$\Delta E_0^2 = I_{1,0} = \frac{(Z-1)e^2}{R} \left[ \left( \frac{3}{2} - \frac{7}{4\alpha^2 R^2} \right) \text{erf } \alpha R + \right. \\ \left. + (\alpha R + 7/2\alpha R) \frac{e^{-\alpha^2 R^2}}{\sqrt{\pi}} \right]$$

$$\Delta E_1^2 = I_{1,1} = \frac{(Z-1)e^2}{R} \left[ \left( \frac{3}{2} - \frac{9}{4\alpha^2 R^2} \right) \text{erf } \alpha R + \right. \\ \left. + \left( \frac{2\alpha^3 R^3}{5} + 6\alpha R + 9/2\alpha R \right) \frac{e^{-\alpha^2 R^2}}{\sqrt{\pi}} \right].$$

Since the Coulomb energy difference between ground states is known to be 3.00 Mev<sup>7</sup>,  $\alpha R$  can be obtained by equating this value to  $\Delta E_1^1$ . This yields  $\alpha R = 1.35$  and using Peaslee's value for the nuclear radius we obtained

$$\Delta E_0^2 = 2.70 \text{ Mev}$$

$$\Delta E_1^2 = 2.60 \text{ Mev,}$$

thus

$$\Delta E_1^1 - \Delta E_0^2 = 300 \text{ Kev}$$

$$\Delta E_1^1 - \Delta E_1^2 = 400 \text{ Kev}$$

giving a spacing between the unperturbed levels of

$$E_0^2 - E_1^1 = 10.3 \text{ Mev.}$$

The calculation was repeated using the same wave functions but taking the charge as being uniformly distributed in a spherical shell. The solution is obtained in a straightforward manner and is

$$\Delta E_1^1 = \frac{(Z-1)e^2}{R} \left( \text{erf } \alpha R - \frac{2\alpha R}{3\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2 R^2} \right)$$

$$\Delta E_0^2 = \frac{(Z-1)e^2}{R} [\text{erf } \alpha R - e^{-\alpha^2 R^2} (2\alpha^3 R^3 + \alpha R) / 3 \sqrt{\pi}]$$

$$\Delta E_1^2 = \frac{(Z-1)e^2}{R} [\text{erf } \alpha R - 2e^{-\alpha^2 R^2} (2\alpha^5 R^5 + \alpha^3 R^3 + 6\alpha R) / 15 \sqrt{\pi}].$$

Again using the experimental value of  $\Delta E_1^1$  to fit  $\alpha R$  yields  $\alpha R = 1.65$  giving

$$\Delta E_0^2 = 2.66 \text{ Mev}$$

$$\Delta E_1^2 = 2.51 \text{ Mev}$$

so that

$$\Delta E_1^1 - \Delta E_0^2 = 340 \text{ Kev}$$

$$\Delta E_1^1 - \Delta E_1^2 = 490 \text{ Kev.}$$

Finally, we assumed that the charge distribution of the core was Gaussian giving a potential of

$$V(r) = \frac{(Z-1)e^2}{r} \text{erf } \alpha r.$$

To calculate the energies in question we needed to calculate the integral

$$\int_0^{\infty} \operatorname{erf} \alpha r e^{-\alpha^2 r^2} r^n dr \quad n = 1, 3, 5, 7,$$

which is evaluated in the appendix. We obtained the relations

$$I_{0,0} = 4 K$$

$$I_{0,1} = 10 K/3$$

$$I_{0,2} = 43 K/15$$

$$I_{0,3} = 177 K/70$$

with

$$K = (z - 1) e^2 \frac{2\alpha}{\sqrt{2\pi}}$$

giving

$$\Delta E_1^1 = 5.72 \alpha \times 10^{-13} \text{ Mev}$$

$$\Delta E_0^2 = 5.50 \alpha \times 10^{-13} \text{ Mev}$$

$$\Delta E_1^2 = 4.82 \alpha \times 10^{-13} \text{ Mev.}$$

By setting  $\Delta E_1^1$  equal to the experimental value to evaluate  $\alpha$  we obtained

$$\Delta E_0^2 = 2.88 \text{ Mev}$$

$$\Delta E_1^2 = 2.53 \text{ Mev}$$

or

$$\Delta E_1^1 - \Delta E_0^2 = 120 \text{ Kev}$$

$$\Delta E_1^1 - \Delta E_1^2 = 470 \text{ Kev.}$$

At the suggestion of Professor Rosenfeld we calculated the diagonal matrix elements of the operator

$$U_s = \frac{1}{2M^2c^2} \left( \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \right) \vec{L} \cdot \vec{S}$$

which gives rise to the electromagnetic spin-orbit coupling. Using the harmonic oscillator wave functions we found a contribution of 6.70 Kev for the  ${}^2P_{1/2}$  state and  $-2.21$  Ket for the  ${}^2P_{2/3}$  state. These contributions are not sufficiently large to alter the previous results.

#### IV. Summary and Conclusion.

The results of our calculations are given together in Table I. The harmonic oscillator wave functions yield results of the calculated level difference for the first excited states but is smaller than that calculated for the second excited states. This is just the reverse of the experimental situation and no doubt flows from the fact that the first excited state in  $N^{13}$  is unstable against proton emission, implying that it is improper to consider the charge effect as a small perturbation (of. Blatt<sup>(11)</sup>).

TABLE I. — The experimental and calculated results for the lowest energy levels of the  $C^{13} - N^{13}$  mirror pair.

Energy	Experim.	Square well	Uniform dist.	Harmonic Oscillator	
				Spherical shell dist.	Gaussian dist.
$\Delta E_1^1$	3.00 Mev	1.091 Mev	3.00 Mev	3.00 Mev	3.00 Mev
$\Delta E_0^2$	2.28 Mev	1.048 Mev	2.70 Mev	2.66 Mev	2.88 Mev
$\Delta E_1^2$	2.83 Mev	1.036 Mev	2.60 Mev	2.51 Mev	2.53 Mev
$\Delta E_1^1 - \Delta E_0^2$	720 Kev	43 Kev	300 Kev	340 Kev	120 Kev
$\Delta E_1^1 - \Delta E_1^2$	170 Kev	55 Kev	400 Kev	490 Kev	470 Kev

Para la detención de la radiación gamma de 40 Kev correspondiente al primer nivel excitado del  $ThC''$  se ha debido instalar un circuito de coincidencias con discriminación de energías, utilizando como detector un fotomultiplicador.

Se muestran los distintos espectros de coincidencia  $\alpha_i - \gamma$  que pone en evidencia la radiación gamma de 40 Kev. Estudios anteriores relativos a los elementos pesados ( $Bi_{212}$  y  $Tl_{208}$ ) han determinado para esta radiación una naturaleza  $M_1$ .

2. C. MALLMANN, A. H. W. ATEN (j), D. BES, C. M. DE McMILLAN (Comisión Nacional de la Energía Atómica). *Rayos gama del Telurio 131 y Telurio 129.*

Los rayos gamma del Teluro 131 y Teluro 129 han sido investigados mediante espectrómetros de cristal.

Jueves 26 de Mayo

*Comunicaciones*

3. J. BALSEIRO (Instituto de Física, Universidad de Buenos Aires y Comisión Nacional de la Energía Atómica). *Resultados de la formulación de la electrodinámica cuántica compatible con la condición de Lorentz.*

La formulación de la electrodinámica cuántica en forma compatible con la condición de Lorentz conduce a la cuantificación de tres estados independientes en vez de los cuatro que aparecen en la formulación habitual. Estos tres estados corresponden a dos modos de oscilación transversales y a uno longitudinal. Este último corresponde a la cuantificación de la componente temporal del cuadrivector potencial.

Se discute en esta comunicación la transformación de medida del campo cuántico y la intervención de los fotones longitudinales en los procesos en los cuales intervienen el campo de radiación puro y en aquellos en los cuales hay una carga presente. Se demuestra que en el primer caso se obtienen los mismos resultados que con la cuantificación habitual de la medida de Coulomb. En el caso de cargas presentes en el campo los resultados son, en general, debido a la intervención de los fotones longitudinales. Este es el caso de la energía propia del electrón para la cual se obtiene un valor finito.

4. M. BUNGE (Servicio Técnico Científico, Buenos Aires). *Nuevas coordenadas de posición media del electrón relativista.*

Se introducen los operadores de posición media

$$X_\mu = x_\mu + \frac{\Lambda}{2} i \gamma_\mu; \Lambda = \frac{h}{2\pi m_0 c} (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (1)$$

cuyas componentes espaciales son hermiticas y cuyas ecuaciones de movimiento son

$$m_0 \frac{dX_\mu}{dt} = \gamma_0 (p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu) \quad (2)$$

El segundo miembro de (2) es un operador diagonal, a diferencia de

$$\frac{dx}{dt} = c\alpha$$

que por ser un operador impar representa un movimiento de temblor. Se obtiene la transcripción cuántica de la ecuación de Newton-Lorentz:

$$m_0 \frac{d^2 X}{dt^2} = \gamma_0 E - \frac{4 c \pi}{h} [i \gamma (\underline{p} - \frac{e}{c} A)] (\underline{p} - \frac{e}{c} A) \quad (3)$$

La consideración de los operadores (1) permite dar un sentido físico preciso a las nuevas constantes del movimiento halladas por el autor <sup>(1)</sup>; a su vez, la consideración de estas últimas sugiere que, así como  $\underline{x}$  es la coordenada de una carga puntiforme carente de masa,  $\underline{X}$  representa en cambio la coordenada del centro de gravedad de la masa, distribuida en un volumen de dimensiones del orden de la longitud de onda de Compton  $\Lambda$  (pues los autovalores de  $\underline{X}$  son  $x \pm \frac{\Lambda}{2}$ ).

Se propone así un modelo mixto del electrón de Dirac, en el que la carga (puntiforme) se mueve con el complicado movimiento de temblor que da lugar al spin, en tanto que el centro de gravedad del conjunto se mueve a lo largo de una trayectoria vecina a la clásica. Se discuten las ventajas de esta interpretación.

5. M. ABELE, R. PLATZECK (Instituto Aerotécnico, Córdoba). *Estudio de las cavidades de un acelerador lineal de electrones.*

Se presentan los resultados conseguidos en el cálculo de la configuración de campo y en la determinación de las frecuencias de resonancia de los sectores de la guía de onda empleada en el acelerador de electrones actualmente en construcción.

6. G. MORETTI, J. I. CISNERO: (Instituto Aerotécnico, Córdoba). *Cálculo de tomas de aire para compresor axial a punto fijo.*

Se aplica un método previamente expuesto en una sesión de A. F. A. para obtener un conducto "óptimo" con pasaje paulatino de una sección infinita a una sección anular.

7. K. FRANZ, S. F. PINASCO (Comisión Nacional de la Energía Atómica). *Selector de impulsos para espectrometría con contadores de centelleo.*

Se presenta el esquema de un selector de amplitudes y algunos espectros típicos obtenidos con el mismo.

<sup>(1)</sup> M. BUNGE, *Nuevas constantes del movimiento del electrón*, 24ª Reunión de la A. F. A., setiembre de 1955.

El selector trabaja con impulsos positivos de entrada de hasta 100 volts. de amplitud y permite seleccionar intervalos de amplitudes de 1, 2, 3, y 10 volts. La resolución en tiempo es del orden de un microsegundo.

8. K. FRANZ, A. M. del PONT (Comisión Nacional de la Energía Atómica). *Amplificador selectivo para comparación de campos magnéticos.*

Se presenta el esquema y datos de comprobación de sus características. El amplificador amplifica la diferencia de sus dos tensiones de entrada hasta  $2 \times 10^6$  veces y posee un ruido y zumbido en su salida equivalentes a 1,5 microvolts eficaces en sus entradas respectivas. La amplificación es selectiva en 25 c/s con un ancho de banda de  $\pm 1$  c/s. La diferencia de las dos tensiones de entrada se obtiene sin necesidad de ajuste con la precisión de 1 : 2000.

9. A. BATTIG (Instituto de Física y Matemática. Universidad de Tucumán). *Una observación respecto a la relación entre la radiación de Cherenkov y la Bremsstrahlung.*

Se determina la intensidad de radiación por unidad de ángulo sólido para una frecuencia, mostrándose luego que no es posible hacer una distinción "aguda" entre la radiación de Cherenkov y la debida a la aceleración del electrón.

10. A. GIACCHETTI (Comisión Nacional de la Energía Atómica). *La vida de las soluciones muy diluídas.*

Dos series de cuatro soluciones de Lantano de 10-2-0,4-0,1 gamas por milímetros, han sido guardadas en recipientes de vidrio pyrex y de polietileno. La vida de estas soluciones ha sido estudiada por vía espectrográfica utilizando el método de la chispa en cobre, por medio del cual se pueden detectar hasta 5 miligamas de Lantano (1 miligama =  $10^{-9}$  gramos). La curva que representa la densidad fotográfica versus el tiempo, representa durante los primeros 110 días algunas anomalías que se deben a diversas causas tales como: variaciones de tensión en la línea de alimentación del circuito de alta tensión (15 KV), agitación de las mismas soluciones antes del uso. Sin embargo se observa claramente una disminución de concentración creciente con el tiempo y no se nota ninguna ventaja apreciable (polietileno).

Luego se han dejado descansar las soluciones por otros 140 días al cabo de los cuales se ha notado aun más la disminución en la concentración. Inmediatamente después se han agitado todos los recipientes durante una hora en un agitador de Kahn, comprobándose entonces un apreciable aumento en la concentración y la consiguiente sensible ventaja de los recipientes de polietileno sobre los de vidrio pyrex.

11. I. FRANZ, J. RODRÍGUEZ, H. CARMINATTI (Laboratorios de Radioquímica, Comisión Nacional de la Energía Atómica). *Un nuevo isótopo del estaño.*

Irradiando uranio con deuterones de 28 MeV, se ha encontrado entre

los productos de fisión un nuevo isótopo del estaño. Su período de semidesintegración de  $57 \pm 2$  minutos, ha sido determinado por separaciones a intervalo de su sustancia hija. Esta es un isótopo del antimonio, cuyo período de semidesintegración ha sido medido, obteniéndose  $10,3 \pm 0,3$  minutos y su energía máxima de  $2,9 \text{ MeV}$ .

12. G. B. BARO, P. REY, W. SEELMANN-EGGEBERT (Laboratorios de radioquímica, Comisión Nacional de la Energía Atómica). *Una nueva serie de isóbaros 108*.

Se encontró una nueva serie de isóbaros 108 (110) empleando un método que separaba radio de rutenio en 10 segundos. En Ru-108 tiene un período muy parecido al Ru-107; el Rh-108 tiene un período de  $18 \pm 2$  segundos. La energía máxima beta de este último es  $4,5 \text{ MeV}$  aproximadamente; emite también rayos gama de distintas energías, de manera que la energía de desintegración total,  $Q$ , puede tener un valor más alto que arriba mencionado. El Ru-107 se obtuvo con la reacción  $Pd-110 (n, \alpha)$  Ru-107, por lo cual el número de masa queda asegurado; emite rayos de beta de  $4 \text{ MeV}$  de energía máxima y rayos gama de diferentes energías. El Ru-105 se formó por la reacción  $Pd-108 (n, \alpha)$  Ru-105. El período del Rh-107 fué fijado en  $23 \pm 0,5$  minutos, siendo su energía máxima de  $1,25 \text{ MeV}$ . Los Laboratorios de Espectroscopía Nuclear de la Comisión Nacional de la Energía Atómica encontraron una línea principal de  $315 \text{ KeV}$  que probablemente coincide con la partida de  $1,25 \text{ MeV}$  de manera que el valor de  $Q$  total está alrededor de  $1,5 \text{ MeV}$ . Entre los productos de fisión no se encontraron isótopos de rutenio comprendidos entre 1,5 y 4 minutos de período.

13. A. LEVIALDI, N. COHAN, J. T. D'ALESSIO (Laboratorio Interfaz, Buenos Aires). *Efecto del pH y salinidad sobre las isoterms de films monomoleculares de ácido behénico*.

Se ha estudiado la influencia del  $pH$  del electrolito soporte sobre las isoterms de films monomoleculares de ácido behénico  $C_{22}$  en la zona próxima al punto de Devaux, observando:

- 1) La desaparición del punto anguloso a medida que el  $pH$  aumenta, acompañado por un aumento inicial de presión superficial.
- 2) La disminución de la presión superficial con el tiempo, sin que reaparezca el punto de Devaux.
- 3) Una inversión del fenómeno a  $pH = 11,7$ .
- 4) A  $pH$  elevado y constante, el aumento de la concentración salina produce un efecto análogo al aumento del  $pH$ .
- 5) A partir de  $pH = 11,7$  (valor de inversión), el aumento de concentración salina produce un efecto opuesto (baja la presión).
- 6) La disminución de presión con el tiempo no se debe a disolución.
- 7) Interpretación formal: aumento de la repulsión por aumento del momento dipolar; disminución sucesiva de la presión por formación de micelas superficiales ( $pH = 12$ ).

- 8) Falta la presión superficial en función de la fuerza iónica (observación del Dr. Guastalla).
- 9) Queda por interpretar la inversión  $pH$  y salinidad.
14. J. T. D'ALESSIO, A. LEVIALDI, N. COHAN (Laboratorio Interfaz, Buenos Aires): *Viscoelasticidad de soluciones de compuestos de alto peso molecular.*
- a) Se propone un método para hallar curvas  $\alpha = f(t)$  de deformación y recuperación de líquidos; b) se han determinado curvas de líquidos newtonianos (agua, glicerina) y no newtonianos (soluciones de carboximetil celulosa, estearato de sodio, etc.); c) las curvas de estos líquidos permiten clasificarlos como viscoelásticos. Puede identificarse elasticidad instantánea, elasticidad retardada y viscosidad pura; d) a tiempo cero puede demostrarse elasticidad pura (ley de Hooke); e) la variación de propiedades reológicas con el tiempo —tixotropía— puede asignarse a variación del módulo de rigidez (instantánea y retardada); f) se discuten interpretaciones formales y moleculares.
15. A. LEVIALDI, J. T. D'ALESSIO, H. FARACH (Laboratorio Interfaz, Buenos Aires): *Variación de la rigidez superficial de monocapas por reacciones de penetración (ácido esteárico  $\rightarrow$  estearato de bario).*
16. J. A. McMILLAN (Comisión Nacional de la Energía Atómica): *Escurrecimiento de un gas real a lo largo de un capilar; determinación de los coeficientes de viscosidad.*

Se ha estudiado el caso del escurrimiento de un gas real de ecuación  $pv = nRT(1 + Bp)$  cuando se compara, en igualdad de condiciones con el escurrimiento de otro gas de coeficiente de viscosidad desconocido. Se da la fórmula que relaciona ambos coeficientes y los tiempos de escurrimiento respectivos.

## VIGESINO SEXTA REUNION

Instituto de Física - Universidad Nacional de La Plata

4 y 5 de Noviembre de 1955

### PROGRAMA

Viernes 4 de Noviembre

#### Informe

- I. S. MARCHETTI (Comisión Nacional de la Energía Atómica): *El problema de la producción industrial del agua pesada.*
- Comunicaciones*
1. PEDRO BRODERSEN (Instituto de Física. La Plata): *La estructura del nivel superior de las bandas visibles del FCl.*

El nivel superior de dichas bandas tiene una estructura vibracional bastante irregular. La representación mediante una de las fórmulas conocidas, con superposición de una perturbación provocada por uno o dos niveles de simetría parecida, es imposible. Una coincidencia satisfactoria con la observación se obtiene solamente usando dos niveles estables y una perturbación con un nivel inestable. Un análisis roacional de ocho bandas y una discusión del ancho de las líneas y de la distribución de intensidad confirman esta hipótesis.

2. SANTOS MAYO y PEDRO BRODERSEN (Instituto de Física. La Plata): *Nuevas bandas del BrF en la región de Schumann.*

Se obtuvo un espectro de bandas degradadas hacia el rojo de la región 1560-1760. Las bandas pueden arreglarse en dos o tres sistemas vibracionales. Se discute la posible configuración electrónica.

3. A. J. ARVIA y PEDRO BRODERSEN (Instituto de Física. La Plata): *Titulaciones conductométricas a alta frecuencia con el circuito de doble sintonía.*

El mencionado circuito fué criticado por su inestabilidad en la zona de máxima sensibilidad. El propósito del presente trabajo es vencer esta dificultad mediante desvíos en el circuito de ánodo y grilla. El planteo teórico del problema recibe confirmación experimental cualitativa y en esas condiciones se ensayan varias titulaciones.

4. HÉCTOR INGRAO (Observatorio Astronómico. La Plata): *Algunas observaciones sobre células fotomultiplicadoras 931-A.*

Se estudió la acción del campo magnético terrestre sobre la corriente de placa de la célula fotomultiplicadora 931-A. No se observaron fluctuaciones de la misma en el orden del  $10^{-8}$  amperios. Asimismo se estudió el perfil de sensibilidad de dicha célula, observándose además su envejecimiento.

5. BEATRIZ C. DE ROEDERER, JUAN ROEDERER y PEDRO WALOSCHEK (Max Planck Institut für Physik, Goettingen y Comisión Nacional de Energía Atómica): *Estudio de reacciones con mesones "K" e hiperones.*
6. BEATRIZ C. DE ROEDERER y JUAN ROEDERER (Max Planck Institut für Physik, Goettingen y Comisión Nacional de la Energía Atómica): *Determinación de la masa de partículas elementales.*

Se presentará un estudio completo del método de "scattering a celda variable" para la determinación de masas de partículas ionizantes que se detienen en la emulsión fotográfica nuclear. Realizando mediciones de calibración en trayectorias de partículas de masa conocida, se encuen-

tran desviaciones sistemáticas que falsean el valor de la masa así obtenida. Un análisis cuidadoso permite establecer que estas desviaciones no se deben a valores incorrectos de la constante de "scattering" que se usó para el cálculo de los esquemas de celdas variables, sino a la no validez del procedimiento usual para el cálculo del ángulo de "scattering" medio, en el caso de las celdas variables. Se dan las directivas para el procedimiento correcto en la determinación de la masa, etc., con este método.

7. EMMA PÉREZ FERREIRA (Comisión Nacional de la Energía Atómica): *Medición de flujos de neutrones rápidos.*

Continuando con la aplicación de los métodos expuestos en comunicaciones anteriores para la determinación de intensidades totales de neutrones rápidos mediante placas nucleares, se ensayó el uso de plexiglas como radiador de protones. Se usó en la determinación del flujo de neutrones rápidos obtenidos de las reacciones  $H^2(d,n)He^3$  y  $Li^7(d,n)Be^8$ , producidas en el acelerador en cascadas de la CNEA. La calibración del método "placa-plexiglas", mediante el "radiador-detector", permite calcular la constante  $a$  de la relación alcance-energía para protones en plexiglas ( $R = a \cdot E^b$ ), para energías comprendidas entre 0,5 y 15 Mev.

Sábado 5 de Noviembre

*Informe*

MARIO BUNGE (Servicio Técnico Científico, Buenos Aires): *Las diferentes interpretaciones de la Mecánica Cuántica.*

*Comunicaciones*

8. E. RICCI, J. PAHISA CAMPA y N. NUSSIS (Laboratorios de Radioquímica de la Comisión Nacional de la Energía Atómica): *Nuevo isótopo: Fe<sup>61</sup>.*

Se identificó un período de 5,9 minutos en la fracción de hierro que se obtuvo por reacción  $(n, \alpha)$ ,  $(n, \alpha, p)$  y  $(d, \alpha, p)$ , sobre níquel, cobre y níquel, respectivamente. El nuevo nucleído emite rayos beta y gamma. Se trata de Fe<sup>61</sup>, ya que el período de 5,9 minutos desintegra formando como hija el Co<sup>61</sup>, de 99 minutos, conocido (que fué identificado) y separado de la madre a intervalo.

9. G. B. BARO, W. SEELMAN-EGGEBERT e I. ZABALA (Laboratorio de Radioquímica de la Comisión Nacional de la Energía Atómica): *Sobre un isómero del Rh<sup>106</sup>.*

Se encontró una nueva actividad de rodio que decae con un período de 117 minutos. Se forma por las reacciones  $(n, p)$  y  $(n, \alpha)$  y  $(d, \alpha)$ . No se forma como producto de fisión normal, ni como hija del Ru<sup>106</sup>,

o como hija del  $Ru^{105}$ , o  $Ru^{107, 108}$  (4 minutos). Es emisor de neutrones, cuya energía es de 0,7 Mev. También es emisor gamma y la energía total de desintegración  $Q$  es aproximadamente de 3,6 Mev. El número de masa es 106 y es un isómero del rodio conocido de 30 segundos. El  $Ru^{106}$  no desintegra por rayos gamma a  $Rh^{106}$ . Emite los mismos rayos gamma que el  $Rh^{106}$  y la  $Ag^{106}$  con algunas líneas adicionales.

10. VLADIMIRO ERN (Instituto de Física. La Plata): *Estudio de una nueva aproximación para la función de distribución de tercer orden y aplicación, como contribución al estudio de líquidos reales.*

El trabajo tiene por objeto ensayar una nueva aproximación para la función de distribución de tercer orden, en reemplazo de la conocida aproximación de Kirkwood. Usando la nueva aproximación se calculan los cuatro primeros viriales de la ecuación de estado y otras funciones termodinámicas. En particular se calculan los viriales en el caso de esferas rígidas, obteniéndose valores exactos para los tres primeros. Para el cuarto se obtiene un valor que difiere del exacto en 0,190  $b^3$ , mejorando en un 69 % el valor obtenido con la aproximación de Kirkwood. Finalmente se calcula una función de correlación de tercer orden y se aplica para el caso del argón líquido.

11. ALEJANDRO CORPACIU (Observatorio Astronómico. La Plata): *Sobre la determinación más precisa del momento de torsión en la deformación elástica de una lámina.*

Se determina la fórmula del momento de torsión en la segunda aproximación, y se consideran aplicaciones de la misma.

#### Informe

JUAN ROEDERER (Comisión Nacional de la Energía Atómica, Buenos Aires): *Las nuevas partículas fundamentales (mesones "K" e hiperones).*

#### Comunicaciones

12. MERCEDES CORVALÁN-JASCHEK y CARLOS JASCHEK (Observatorio Astronómico. La Plata): *Sobre la magnitud absoluta de las estrellas con líneas metálicas.*

Mediante un estudio estadístico de los movimientos propios de las estrellas con líneas metálicas se encuentra una magnitud absoluta media de  $+1^m4$  que las ubicaría entre las estrellas de tipo A temprano. La distribución de las velocidades radiales residuales asimismo las ubicaría entre las A en la población I de Baade. La proporción entre las estrellas

con líneas metálicas y las estrellas de tipo A normales que se encontraron del 25 %.

13. CARLOS JASCHEK (Observatorio Astronómico. La Plata): *La frecuencia de masas en cúmulos abiertos.*

Se estudió en cuatro cúmulos galácticos la función frecuencia de masas. Los diagramas obtenidos muestran un máximo alrededor de 0,9 masas solares, en contradicción con lo encontrado para estrellas del campo galáctico. Se discuten diversas hipótesis para explicar dichos diagramas.

14. HERBERT WILKENS (Observatorio Astronómico. La Plata): *Las posibilidades de la representación de los excesos de color observados en las estrellas por fórmulas generales.*

En el presente trabajo se comparan los colores de 1332 estrellas observados por otros autores con los colores calculados por el autor según sus propias fórmulas. Estas últimas se comprueban bien, siendo muy útiles para fines estadísticos.

15. H. BOSCH, H. CARMINATTI, I. G. DE FRAENZ, H. MUNCZEK y J. RODRÍGUEZ (Laboratorios de Espectroscopia Nuclear y Radioquímica de la Comisión Nacional de la Energía Atómica): *Espectro gamma del  $Sb^{127}$ .*

Se ha realizado un estudio de la radiación gamma emitida en la desintegración del  $Sb^{127}$  por medio de un espectrómetro de centelleo. Se ha encontrado una serie de rayos con un período común conocido como el de  $Sb^{127}$ . Se ha determinado la superficie de los picos de energía máxima, sustrayendo el fondo debido a los electrones Compton. Se determinó la energía, intensidad relativa y período de cada rayo.

16. H. BOSCH, H. CARMINATTI, H. MUNCZEK, R. RADICELLA y J. RODRÍGUEZ (Laboratorios de Espectroscopia Nuclear y Radioquímica de la Comisión Nacional de la Energía Atómica): *Espectro gamma del  $I^{128}$ .*

Se realizó un estudio de la radiación gamma emitida en la desintegración del  $I^{128}$ , encontrándose que todos los rayos poseen el mismo período de 25 minutos, ya conocido. Se ha hecho un estudio exhaustivo en la región de altas energías, encontrándose nuevos rayos. Se ha determinado la energía y la intensidad de los mismos.

17. C. A. MALLMANN, S. MAYO y S. NASSIF (Laboratorios de Espectroscopia Nuclear y Radioquímica de la Comisión Nacional de la Energía Atómica): *Espectro gamma del  $Rh^{107}$ .*

Se investigó con un espectrómetro de centelleo el espectro gamma del  $Rh^{107}$ , encontrándose los siguientes rayos: 305, 385, 570 y 680 Kev., con los cuales se ha intentado construir el esquema de desintegración.

18. J. A. BALSEIRO (Instituto de Física de San Carlos de Bariloche): *Descripción cuántica de trenes de onda.*

Se desarrolla un formalismo que permite la descripción cuántica de trenes de ondas en medios no dispersivos, mediante funcionales de las amplitudes de Fourier que definen a dichos trenes de ondas. Estos funcionales están caracterizados por el número de fotones y el impulso total del tren de ondas. Permiten, por otra parte, definir la probabilidad de localización de la energía en un elemento de volumen dado.

A título de ejemplo se aplica el caso de la dispersión de Compton.

19. CECILIA MOSSIN KOTIN (Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas y Conselho Nacional de Pesquisas. Brasil): *Localización de un campo cuantizado y sus fluctuaciones.*

Se ha demostrado que:

1. — Dado un campo de radiación clásico, se puede hacer corresponder una solución rigurosa del campo cuántico, cuyo valor medio coincide con el campo clásico. En este caso el número de fotones no está determinado.

2. — Se puede construir un campo asociado al campo de un solo fotón que, aunque de aplicación limitada, describe la propagación espacio-temporal y la polarización del campo fotónico.

3. — Las fluctuaciones de la densidad de energía del campo de un solo fotón muestran la existencia de correlaciones entre dichas fluctuaciones correspondientes a puntos diferentes del campo. Este resultado es análogo al resultado de Weisskopf referente a las fluctuaciones de la densidad de carga de un electrón en acuerdo con la teoría lacunar e indica la existencia de una "estructura" finita de las partículas elementales.

20. LIVIO GRATTÓN (Observatorio Astronómico de La Plata): *Sobre la diferencia entre la cefeidas de las dos poblaciones estelares.*

Se discuten las dos relaciones fundamentales período-espectro y período-luminosidad y la relación entre la amplitud de variación de brillo y la de velocidad radial para las cefeidas, con el objeto de investigar si mediante aquellas relaciones es posible obtener una discriminación entre las cefeidas de las poblaciones I y II de Baade. Se encuentra que todas estas relaciones están constituidas por dos curvas correspondientes cada una a una de las poblaciones estelares. Como resultado de esta duplicidad de las relaciones período-espectro y período-luminosidad se obtiene un valor diferente de la constante en la relación período-densidad para las cefeidas de las dos poblaciones.

VIGESIMO SEPTIMA REUNION

BUENOS AIRES, Instituto de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

25 y 26 de Mayo de 1956

PROGRAMA

Viernes 25

*Informe*

EL SILBERMAN (Comisión Nacional de Energía Atómica, Buenos Aires):  
*Estado actual de las técnicas y aplicaciones de la espectroscopía infrarroja.*  
(45 minutos)

*Comunicaciones*

1. S. MAC DOVELL, J. J. GIAMBIAGI (\*) (Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Río de Janeiro): *Sobre dispersión elástica de partículas alfa.*

Se muestra que el modelo de Porter <sup>(1)</sup>, con una carga uniformemente distribuida en el núcleo y con los valores usualmente admitidos para el radio, es incompatible con los resultados experimentales.

Por otra parte, se muestra que una mejor aproximación de los cálculos de Porter —en la hipótesis de carga puntual— no conduce a mejor acuerdo con la experiencia.

2. MARIO BUNGE (Instituto de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Buenos Aires): *Sobre la imagen física de las partículas de spin entero.*

Se intenta formular un modelo de los objetos de spins 0 y 1 descritos por la ecuación de Kemmer <sup>(2)</sup>

$$(\beta^\mu \partial_\mu + k) \psi = 0. \quad k = m_0 c / \hbar.$$

Esta tentativa no consiste en un cambio de representación por medio de una transformación canónica, a la manera de Case <sup>(3)</sup>, sino en una modificación de los operadores que representan la posición y la velocidad, por analogía con lo que se hizo en el caso del electrón <sup>(4)</sup>.

---

(\*) Actualmente en la Comisión de Energía Atómica y Universidad de Buenos Aires.

<sup>(1)</sup> Phys. Rev. 99-5-1955.

<sup>(2)</sup> N. KEMMER, *Proc. Roy. Soc. A*, 173, 91 (1939).

<sup>(3)</sup> K. M. CASE, *Phys. Rev.*, 95, 1323 (1954).

<sup>(4)</sup> M. BUNGE, *Nuovo Cim.*, ser. X, vol. 1, 977 (1955).

Con esta finalidad se analiza la posibilidad de considerar a  $\vec{X} = \vec{x} - (1/x) \vec{\beta}$  como operador de la posición. Se demuestra la relación

$$m_0 \frac{dX^u}{dt} = \beta_u p^u, \quad (1)$$

en apariencia análoga a la que vale en el caso de spin 1/2, pero en realidad diferente a ella, pues ahora  $\beta_u$  es un operador impar y por lo tanto el punto de coordenada  $\vec{X}$  no tiene una trayectoria "lisa". Con todo, las propiedades  $\vec{dX}/dt$  son menos paradójicas que las del operador habitual. Al menos, sus autovalores están relacionados en forma semiclásica con los del impulso, y todas sus componentes pueden determinarse simultáneamente en ausencia del campo.

Mediante las nuevas coordenadas  $X^u$  se construyen 6 nuevas constantes del movimiento de la "partícula" libre de spin entero:

$$M_v^u = X^u p_v - X^v p_u \quad (2)$$

Se demuestra que al ecuación de Heisenberg de  $\vec{M}$  en presencia de un campo exterior es formalmente análoga a la ecuación clásica del momento de una fuerza (si bien incluye un término típicamente cuántico), lo que sugiere considerar a  $\vec{M}$  como un momento angular *sui generis*.

Los resultados alcanzados se consideran insuficientes para formular un modelo definido.

3. JOSÉ F. SUÁREZ ETCHEPARE (Comisión Nacional de Energía Atómica, Buenos Aires): *Optica de los espectroscopios beta tipo Kofoed-Hansen, con trayectorias de n bucles.*

Se establecen las ventajas desde el punto de vista del poder resolutor de los instrumentos con  $|n_s| > 0$ . El poder colector queda limitado en las bajas aperturas porque las trayectorias salen del campo magnético. Se dan gráficos para calcular la eficiencia de las fuentes extensas teniendo en cuenta las pérdidas por rotación de las trayectorias (caso particular del espectroscopio de la Comisión Nacional de la Energía Atómica).

El espectro de una fuente monocromática presenta, además del pico fundamental, otros de gran base y poca altura que pueden falsear los resultados cuando se investigan fuentes con fondo continuo.

4. H. BOSCH y S. NASSIFF (Laboratorio de Espectroscopia Nuclear y Radioquímica. Comisión Nacional de Energía Atómica, Buenos Aires). *Coincidencias  $\gamma$ - $\gamma$  en el  $Sb^{127}$ .*

Ya se señaló la existencia de un período aproximado de 150 hs. has-

ta entonces desconocido en el *Sb* separado de fisión de *U* con deuterones. La experiencia se repitió utilizando un cristal de  $1,5''$ .

Se realizaron coincidencias  $\gamma$ - $\gamma$  en la misma muestra, intentándose presentar un esquema de desintegración para el *Sb*<sup>127</sup> y para la sustancia de 150 hs. De un análisis de los niveles excitados del *Te*<sup>120</sup> encontrados por captura *K* en la desintegración del *I*<sup>120</sup>, podría presumirse que el período de 150 hs. corresponde a un isómero del *Sb*<sup>120</sup>.

Para determinar con mayor precisión el fondo Compton de cada rayo se representaron curvas que relacionan abscisas y ordenadas de fotopicos con abscisas y ordenadas de máximas secundarias, en función de la energía del fotopico. Estas curvas se efectuaron con sandwiches y con colimación.

5. D. R. BES, C. A. MALLMANN y CLARA M. DE MC MILLAN (Laboratorios de Espectroscopía Nuclear y Radioquímica, Comisión Nacional de Energía Atómica, Buenos Aires). *Desintegración del *Te*<sup>131</sup> y *Te*<sup>131m</sup>.*

El *Te*<sup>131</sup> ha sido objeto recientemente de dos trabajos: uno pertenece a E. Hebb <sup>(1)</sup> (Indiana), otro a nosotros <sup>(2)</sup>. Hemos continuado nuestro trabajo haciendo coincidencias entre varios rayos. Hemos discutido esquemas de desintegración posibles.

6. SIMÓN GERSHANIK (La Plata). *Prospección sísmica de refracción a base de las fórmulas de Wiechert-Herglotz.*

Los procedimientos de cálculo que se sigue en la prospección sísmica de refracción, se basan en los casos de simple capa, en funciones diversas  $v = v(h; a, b, \text{etc.})$ . representativas de la variación de la velocidad y con la profundidad *h*, cuya forma se establece de antemano, y cuyos parámetros *a*, *b*, etc., se debe determinar. En oposición a estos procedimientos se indica uno, basado en las fórmulas de Wiechert-Herglotz de la sísmica general, en el que a  $v(h)$  se le impone sólo la exigencia de que sea creciente con *h*.

7. EMMA PÉREZ FERREIRA y JUAN ROEDERER (Comisión Nacional de Energía Atómica, Buenos Aires). *Medición del espectro de energía de los neutrones obtenidos en el bombardeo de *Be*<sup>9</sup> con deuterones de 30 Mev.*

Se describe un método que permite determinar flujos absolutos de neutrones rápidos (2-25 Mev) y su espectro de energía, con el uso de emulsiones nucleares. Los protones de retroceso producidos en un bloque de plexiglas, sobre el cual incide perpendicularmente el haz de neutrones,

<sup>(1)</sup> E. HEBB, *Phys. Rev.* 97, 987 (1955).

<sup>(2)</sup> C. A. MALLMANN, A. H. W. ATEN jr., D. R. BES y C. M. de MC MILLAN, *Phys. Rev.*, 99, 7 (1955).

son frenados con distintos espesores de absorbente y registrados en una placa nuclear colocada detrás de aquél.

El método se aplicó en la medición del flujo y estimación de la forma del espectro de energía del haz de neutrones obtenidos mediante el bombardeo de un blanco de berilo con deuterons acelerados en el sincrociclotrón de la C. N. E. A.

8. BEATRIZ y JUAN ROEDERER (Comisión Nacional de Energía Atómica, Buenos Aires). *Análisis de un par de mesones  $\pi^+ \pi^-$  de características extrañas.*

Durante el trabajo de calibración de un bloque de emulsiones nucleares expuesto en Italia a 29 Km de altura, se encontró la creación de un par de mesones  $\pi$ , de 105 y 134 Mev respectivamente, emitidos con un ángulo muy pequeño, menor que  $10^{-2}$  rad. Un análisis detallado lleva a la conclusión de que una creación con estas características contradictorias (energía baja — ángulo de emisión casi nulo) no es explicable por medio de procesos conocidos (creación múltiple, fotocreación, desintegración  $K$ , etc.). Los autores sugieren que puede tratarse de un sistema  $\pi^+ \pi^-$  ligado por un potencial atractivo, formando una "partícula" neutra que se desintegra en sus componentes con un bajo valor de  $Q$ .

9. J. R. MANZANO, O. R. SANTOCHI, J. C. ANDERSON, J. M. CARDOSO, H. GHELMETTI, A. A. CICHINI (Comisión Nacional de Energía Atómica, Buenos Aires). *Camino libre medio de interacción nuclear para partículas de alta energía en C.*

El camino libre medio de interacción nuclear en materiales livianos para procesos de alta energía de la radiación cósmica, difiere del correspondiente camino libre medio geométrico  $\lambda_g = A/N\sigma_g$ . El método de medición por variación de la frecuencia del proceso con el espesor del material absorbente, presenta un posible error por la absorción en el mismo material de reacciones de baja energía, que llevaría a una sobreestimación del valor de  $\lambda$ . La división del total de absorbente en capas más delgadas, entre las cuales se intercala un sistema detector adecuado, puede eliminar, si existe, la influencia indicada.

El análisis, mediante un sistema de Geiger-Müller en hodoscopio, de los showers locales penetrantes, permitió separar además, interacciones de distinta energía.

Se observa, según nuestros datos, un decrecimiento del camino libre medio de interacción con el aumento de la energía, no notándose en cambio diferencia con los resultados alcanzados con el método usual de absorbente no subdividido.

Este trabajo fué realizado en Mina Aguilar, Provincia de Jujuy, a 4000 m sobre el nivel del mar y  $11^\circ$  S de latitud geomagnética.

Sábado 26

10. ENRIQUE LOEDEL. *La aceleración de caída en un campo y la variación de la marcha de los relojes fijos en el mismo.*

Partiendo de la ecuación general de la energía de un campo gravitatorio estático (ecuación 36 de nuestro trabajo "Deducción directa de los tres efectos cruciales de la teoría de la gravitación de Einstein a partir del principio de la velocidad parabólica", Actas de la Academia de Ciencias de Lima, XVII, 1954; o la 21 del capítulo X, página 398, de nuestra *Física relativista*. Editorial Kapelusz, Buenos Aires, diciembre de 1955) se encuentra una relación muy simple que vincula la variación relativa de la marcha de dos relojes vecinos, situados sobre la vertical de un lugar, con la aceleración de caída en dicho lugar. La fórmula en cuestión, es la 102 del capítulo IX del libro antes citado, que allí se halla para el campo de Schwarzschild, utilizando las ecuaciones de la geodésica, y que ahora se demuestra que vale para un campo estático cualquiera. Cualquiera en un amplio sentido, desde el momento que la fórmula hallada debe ser válida aún cuando la función  $\gamma$  no satisfaga a la ecuación de Poisson.

11. S. MAYO y S. J. NASSIFF (Laboratorios de Espectroscopía nuclear y Radioquímica, Comisión Nacional de Energía Atómica, Buenos Aires). *Espectro de Rh-106 ( $130 \pm 2$  m).*

Se estudió el espectro gama del Rh-106 ( $130 \pm 2$  m) con un espectrómetro de centelleo con cristal de NaI (Tl) con una resolución de 9 % para la línea 662 Kev del Cs-137.

Se midió el período de semi-desintegración de los diferentes rayos obteniéndose el valor de  $T \frac{1}{2} = 130 \pm 2$  m.

Algunas energías observadas inducen a suponer que en la desintegración de este nucleído hay niveles comunes a los encontrados en la desintegración de Rh-106 y Ag-106 a Pd-106.

12. J. FLEGENHEIMER (Comisión Nacional de Energía Atómica, Buenos Aires). *La cadena de fisión 104.*

Se ha encontrado un Tecnecio de 18 minutos de período entre los productos de fisión del Uranio bombardeado con deuterones de 28 Mev. Por separaciones en intervalos a partir de Molibdeno se pudo establecer que su antecesor en la cadena tiene un período menor que 2,5 minutos. Para este Tecnecio se ha establecido el número de masa 104 por reacciones nucleares cruzadas. Métodos de absorción indican que sus negatrones tienen una energía máxima de 3 Mev., lo cual da un valor de 6,5 para el  $\log(ft)$ . Con un contador a cristal de centelleo provisto de discriminador simple, se encuentran rayos gama energético de hasta 1,5 Mev, aproximadamente.

El hallazgo de una transición prohibida para el Te-104 es inesperado y sugiere un cambio de estructura para núcleos con 61 o más neutrones.

13. R. H. RODRÍGUEZ PASQUES (Comisión Nacional de Energía Atómica, Buenos Aires). *Obtención de  $Mg^{28}$  por irradiación de silicio con neutrones.*

Se irradió silicio con neutrones rápidos y se investigaron algunos de los productos formados. Se identificó entre ellos al  $Mg^{28}$  y al  $Na^{24}$ . El primero puede ser producido por la reacción  $(n, 2p)$ , hasta ahora desconocida, o bien  $(n, He^3)$ , muy escasamente observado. El  $Na^{24}$  puede atribuirse a  $(n, \alpha p)$ . Se dan cálculos energéticos correspondientes.

14. I. FRAENZ, J. RODRÍGUEZ, R. RADICELLA (Comisión Nacional de Energía Atómica, Buenos Aires). *Nuevo isótopo de antimonio. Sb-126.*

Irradiando Teluro con neutrones y deuterones se encontró un nuevo isótopo del Antimonio con un período de 18,6 minutos. Debido a su rayo  $\gamma$  más intenso de 650 MeV que coincide con el primer nivel excitado del Te-126, se le asignó a este isótopo el número de masa 126.

15. J. RODRÍGUEZ, I. FRAENZ, R. RADICELLA (Comisión Nacional de Energía Atómica, Buenos Aires). *Los dos isómeros del Sb con el número de masa 128.*

El isótopo de Sb de 10,3 minutos, encontrado el año pasado en nuestros laboratorios de radioquímica, presenta dos rayos principales: uno de 750 Kev y otro de 320 Kev.

Teniendo en cuenta que el primer estado excitado del Te-128, es de 750 Kev, puede atribuírsele a este isótopo de Sb el mismo número de masa 128.

Bombardeando Teluro con neutrones o deuterones se obtuvo el isótopo de Antimonio de 9 horas, el que había sido hallado por Barnes en la fisión de Uranio. Para este isótopo se encontraron las mismas líneas que para el isótopo de Antimonio de 10,3 minutos, de aquí que puede afirmarse que se trata de dos isómeros.

16. R. RADICELLA, I. G. DE FRANZ, J. RODRÍGUEZ y H. CARMINATTI (Comisión Nacional de Energía Atómica, Buenos Aires). *El período del Sn-127.*

Repetiendo una medición del período de semidesintegración del Sn-127 obtenido en la fisión de uranio se encontró un valor de aproximadamente 2 horas, en discrepancia con el período de 1,5 horas asignado hasta el momento.

Para aclarar esta divergencia se produjo Sn-127 por reacción  $(n, \alpha)$  sobre teluro. Se midió la actividad de estaño, con un contador de centelleo y discriminador simple, en la zona de energías gama superiores a 0,2 MeV a fin de suprimir las actividades gama de los otros isótopos del estaño.

formados por la misma reacción. Esta medición nos permite asignar para el Sn-127 un período de semidesintegración de  $123 \pm 3$  minutos

17. J. PAHISSA CAMPA, E. RICCI y N. NUSSIS (Comisión Nacional de Energía Atómica, Buenos Aires): *Determinación de la energía total de desintegración del Fe-61.*

Se midió la energía de las radiaciones del Fe-61, por absorción de éstas en aluminio. El nuevo nucleído, cuyo período de semidesintegración es de 6,0 minutos, fué obtenido por las reacciones  $(n, \alpha)$ ,  $(n, \alpha p)$  y  $(d, \alpha p)$ , usándose para producirlo durante el trabajo de absorción, el proceso  $(n, \alpha)$ .

Por el método de Feather se determinó la energía máxima de las partículas  $\beta$  emitidas, la que resultó igual a 2,7 MeV. Comparando, además, las actividades  $\beta$  y  $\gamma$  obtenidas, se pudo calcular la energía total de desintegración, que se fijó en 3,9 MeV.

18. JOSÉ A. BALSEIRO (Instituto de Física de San Carlos de Bariloche): *Formulación canónica covariante de la electrodinámica clásica.*

Se construye la formulación canónica de la electrodinámica como generalización totalmente covariante de la presentada en la XXIV reunión de la Asociación Física Argentina. Ello se obtienen definiendo las magnitudes de campo en los puntos de un hiperplano (de tipo *espacial*) en el espacio-tiempo y mediante una *definición adecuada* de derivada variacional. Esto permite definir en forma covariante los paréntesis de Poisson, para construir los cuales se tiene en cuenta la dependencia entre las variables de campo que establece la condición de Lorentz.

19. JOSÉ A. BALSEIRO (Instituto de Física de San Carlos de Bariloche): *Formulación covariante de la electrodinámica cuántica.*

Mediante los paréntesis de Poisson se construyen las reglas de conmutación de las variables de campo en forma covariante y compatibles con la condición de Lorentz. El operador de Hamilton contiene los dos grados de libertad transversales y uno longitudinal al hiperplano de referencia.

Debido a que la *condición de Lorentz se cumple como ecuación entre los operadores de campo* la representación de interacción tiene aspectos distintos a la dada de J. Schwinger.

Se desarrolla el cálculo de perturbaciones refiriendo las ecuaciones y magnitudes de campo al hiperplano elegido.

Se calcula la corrección de la masa del electrón debido a la energía propia, considerando el campo del electrón no cuantificado y se obtiene un valor finito para la misma.

Las correcciones provenientes del impulso propio son igualmente finitas.

No se elimina con la teoría expuesta la divergencia de la polarización del vacío que proviene de la cuantificación del campo del electrón.

20. J. A. McMILLAN y M. E. FOGGIO (Comisión Nacional de Energía Atómica, Buenos Aires - Instituto de Física, Bariloche): *Difusión gaseosa a contracorriente; Separación en equilibrio.*

Se propone un dispositivo experimental para lograr la separación de mezclas de gases por difusión molecular a contracorriente. La teoría del proceso se desarrolla en base a:

- I. - Transporte de material liviano hacia el extremo positivo de la columna.
- II. - Transporte transversal total.
- III. - Transporte transversal de material liviano.

La producción presenta un aspecto característico: no es equivalente producir isótopo pesado o liviano a diferencia de lo que ocurre con las contracorrientes convencionales.

Se da la ecuación general de la producción y en solución aproximada en dos casos particulares.

21. M. E. FOGGIO y J. A. McMILLAN (Instituto de Física, Bariloche): *Difusión gaseosa a contracorriente. Teoría del transitorio.*

Se estudia el fenómeno considerándolo monodimensional y suponiendo difusión molecular a través de la membrana. Se llega a un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden en derivadas parciales que se resuelven aplicando la transformada de Laplace con adecuadas condiciones de contorno.

22. J. A. McMILLAN y C. E. ESPAÑOL (Comisión Nacional de Energía Atómica, Buenos Aires): *Experiencia demostrativa sobre el transitorio en la separación de gases por difusión térmica a contracorriente.*

Se describe una instalación en la que, midiendo la conductividad térmica de la mezcla gaseosa, se verifica una ley de aproximación al equilibrio de tipo:

$$qt = q_0 (1 - e^{-t/t_r})$$

donde  $t_r$  (tiempo de relajación) es característico del gas y de la instalación. Se dan datos numéricos de experiencias realizadas con una mezcla de iguales volúmenes de aire y anhídrido carbónico.

23. T. BUCH y J. A. McMILLAN (Instituto de Física, Bariloche): *Escurrecimiento de gases reales por capilares. Determinación experimental de coeficientes de viscosidad.*

Se ha estudiado el escurrecimiento a lo largo de un capilar de un gas real de ecuación virial  $PV = nRT (1 + BP)$ .

Se da la ecuación para el cálculo del coeficiente de viscosidad suponiendo que ambos extremos del capilar se hallan conectados a recipientes de volumen finito.

24. ROBERTO J. POLJAK (Comisión Nacional de Energía Atómica, Buenos Aires): *Estudio de la deshidratación y cambios estructurales operados por calentamiento en un hidro-silicato laminar (Clorita).*

Se ha estudiado una clorita del Paraje Sta. Clara, Tupungato, Mendoza con una alta relación  $Al:Si$ , y con déficit en grupos  $HO$  (parcial deshidratación natural). Con estos datos se calculan las intensidades de los espectros de rayos X para reflexiones "basales" que permiten ubicar las vacantes de grupos  $HO$  en niveles normales al eje V. Con ellos se explica además el comportamiento termo-diferencial. Síntesis de Fourier (unidimensionales) permiten controlar el proceso de deshidratación operado a las temperaturas de  $300^{\circ}$  y  $700^{\circ}C$ .

Se estudiaron las transformaciones operadas a temperaturas superiores a los  $700^{\circ}C$  y un aspecto de la orientación de las nuevas estructuras originadas (anhidras) con respecto a la estructura original de la clorita.

#### VIGESIMO OCTAVA REUNION

BUENOS AIRES, *Instituto de Física de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales*

21 de septiembre de 1956

*Informe*

H. ROEDERER (Instituto de Física de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Comisión Nacional de la Energía Atómica), *El antiprotón.*

#### *Comunicaciones*

1. O. HITTMAIR (Invitado por la Comisión Nacional de la Energía Atómica), *Teoría de la sección eficaz diferencial de las reacciones de stripping (d, p n).*

En una reacción de stripping (d,p) el neutrón correspondiente a un deuterón proyectil es captado por un núcleo del blanco, mientras que el protón restante prosigue con impulso dado por la distribución de los impulsos en el deuterón, en el instante de la ruptura. El neutrón puede ser captado en un estado virtual con energía de unión negativa, siendo entonces reemitido. La energía del protón en este caso es  $E_d - (E_b + B_d)$ , donde  $E_d$  es la energía del deuterón incidente,  $-E_b$  es la energía del nivel virtual y  $B_d$  la energía de unión del deuterón.

El cálculo de la sección eficaz diferencial de este proceso con observación direccional del neutrón, da información sobre espines y paridades de los niveles nucleares en cuestión. Determina el modo de acoplamiento (según el modelo de capas) de estos niveles. Finalmente indica claramente si hay una contribución, no debido al stripping, sino a la formación de un núcleo compuesto, por absorción total del deuterón y emisión consecutiva del protón y del neutrón.

El modo de acoplamiento debe resultar de acuerdo con la energía de los niveles. El cálculo señalado está ejemplificado en la reacción  $Li^7(d, p n)Li^7$ .

2. J. J. GIAMBLAGI y H. MUNCZEK (Instituto de Física de la Facultad de Ciencias de Buenos Aires y Comisión Nacional de Energía Atómica): *Sobre la dispersión elástica de partículas alfa*.

Se calcula la relación entre la sección eficaz de dispersión de partículas alfa de 40 Mev con la hipótesis de que la carga del núcleo sea la de una esfera uniforme (o una cáscara) y la correspondiente a una distribución puntual. Se usa el método de aproximación de Born.

3. N. NUSSIS, J. PAHISA CAMPA y E. RICCI (División Radioquímica de la Comisión Nacional de la Energía Atómica): *Nuevos isótopos de Cadmio y de Indio*.

Se estudiaron los isótopos de Cadmio y de Indio con exceso de neutrones irradiando Estaño y Antimonio con deuterones de 28 Mev o neutrones producidos con deuterones por la reacción  $Be^9(d, n)Be^9$ .

En las fracciones de Cadmio se halló un período de  $3,5 \pm 0,5$  minutos y en las fracciones de Indio, dos períodos de  $11,5 \pm 0,5$  minutos y  $32 \pm 2$  minutos.

Se comprobó que estos dos períodos estaban relacionados genéticamente formando una cadena de desintegración para la cual se sugiere el número de masa 121. La energía beta máxima correspondiente al período de 11,5 minutos es de aproximadamente 3,8 Mev y la correspondiente al período de 32 minutos es de aproximadamente 1,7 Mev.

4. M. E. HUERGO y S. NASSIFF (División Radioquímica de la Comisión Nacional de la Energía Atómica): *Cloro 40*.

Se obtuvo un nuevo isótopo del Cloro irradiando calcio metálico con neutrones producidos por la reacción  $Be(d, n)$ . Se describen los procedimientos para la separación de cloro a partir de calcio.

El período de 1,5 minutos aproximadamente, que aparece en el precipitado de cloruro de plata, fué atribuido al  $Cl^{40}$ , producido en la re-

acción  $Ca^{44}(n, \alpha p)Cl^{40}$ . También se obtuvo el mismo nucleído irradiando Argón con neutrones rápidos.

Con posterioridad a la realización de estas experiencias tuvimos conocimiento de un trabajo de H. Morinaga en el que se describe por primera vez la obtención del  $Cl^{40}$  por irradiación de Argón.

5. A. EUSSLER y E. CAVIGLIA (Laboratorio de Espectrometría de Masas de la Comisión Nacional de la Energía Atómica): *Espectro de masa y potenciales de aparición del borazol*.

Se obtuvo, utilizando un espectrómetro de masa analítico, el espectro másico del borazol ( $N, B, H_6$ ), con el fin de asignar las distintas masas y hacer posible el análisis isotópico. Manteniendo constante las condiciones de la fuente de iones, pudo observarse un espectro típico entre las masas 60 y 85 en muestras de reciente preparación. El pico más intenso corresponde a la masa 81. Si se permite el envejecimiento del borazol, al cabo de algunos días el espectro cambia totalmente. Se han determinado, utilizando el mismo instrumento, los potenciales de ionización y aparición por observación de la corriente iónica de la masa que interesa en función del potencial de excitación electrónica.

*Discusión:*

Respondiendo a una pregunta de S. MAYO, el expositor aclaró que las condiciones en la fuente de iones son fácilmente reproducibles, y que el instrumento es un comparador de espectros, no pudiendo hacerse mediciones absolutas.

6. E. SILBERMAN (Laboratorio de Separación de Isótopos de la Comisión Nacional de la Energía Atómica): *Bomba de Laboratorio para circulación de gases*.

Se describen y calculan los elementos de una bomba destinada a circular pequeños caudales de gas, basada en variaciones de volumen obtenidos por calentamiento y enfriamiento.

Su principal ventaja es la conservación de la pureza del gas. Se dan resultados preliminares obtenidos con un modelo construido para circular aire.

*Discusión:*

H. BOSCH. — En la definición de temperatura media de la masa de gas ¿interviene el concepto de temperatura exterior, fijada por el termostato?

E. SILBERMAN. — No.

M. BUNGE. — Sus fórmulas ¿tienen alguna relación con las temperaturas negativas introducidas recientemente?

E. SILBERMAN. — No, puesto que en mis fórmulas a temperaturas negativas le corresponden masas negativas, lo que le quita sentido físico a la extrapolación.

7. JUAN A. MC. MILLAN y TOMÁS BUCH (Escuela de Física de Bariloche): *Nuevo tipo de manómetro para el registro continuo de presiones desde la zona de Pirani hasta la atmosférica.*

Comunicación presentada fuera de programa.

---

## BIBLIOGRAFÍA

*Colloque sur l'Analyse Statistique* (Bruxelles, décembre, 1954). Centre Belge de Recherches Mathématiques. Georges Thone, Liège. - Masson et Cie., Paris, 1955.

Desde 1949, el *Centro Belga de Investigaciones Matemáticas* ha organizado siete coloquios: dos sobre Geometría Algebraica, uno sobre Topología de las Variedades Fibradas, uno sobre Geometría Diferencial, uno sobre las Funciones de Varias Variables Complejas y dos sobre las Ecuaciones a Derivadas Parciales. El coloquio que comentamos es el octavo y está consagrado al Análisis Estadístico. Con la colaboración de varios especialistas se ha tratado así de puntualizar los progresos de la Estadística Matemática, tan importante en las Ciencias Físicas y en las Ciencias Biológicas.

Este volumen contiene los siguientes trabajos:

G. DARMOIS: *Sobre la regresión. Nuevos resultados. Problemas no resueltos.* — La palabra *regresión*, introducida por Galton, ha adquirido un sentido general. Se la estudia actualmente mediante una función característica suficientemente comprensiva desde el punto de vista de las necesidades analíticas. La generalización del concepto de regresión se funda en la consideración de puntos aleatorios de varias dimensiones. Un ejemplo general es el de las leyes de Laplace-Gauss, vinculadas a los elipsoides homotéticos. Darmois se ocupa de problemas de regresión lineal y de la correlación dura de Bernstein.

A. BLANC-LAPIERRE: *Consideraciones sobre ciertos procesos puntuales y sobre funciones aleatorias asociadas.* — De acuerdo con la expresión de Wold, en este estudio Blanc-Lapierre llama *procesos puntuales* aquéllos correspondientes a funciones aleatorias de instantes. Estos procesos son estacionarios o renovados y pueden eventualmente comportarse como cadenas de Markoff. La

emisión de electrones por un cátodo y los impulsos en los contadores Geiger-Müller son ejemplos de procesos puntuales (funciones de primer orden, funciones de segundo orden o funciones análogas, funciones de orden infinito), circunscribiéndose a distribuciones de puntos sobre una recta, pero queda por efectuar el estudio de procesos bi y tridimensionales en los cuales se eliminan las nociones de pasado y de futuro.

BRUNO DE FINETTI: *La noción de "horizonte bayesiano"*. — El autor aborda en su contribución el análisis crítico de los criterios dispares dominantes en la estadística teórica. Existe, a su juicio, una *concepción multisubjetiva* de la estadística, pero se alcanza, por distintos caminos, el mismo punto de confluencia fundamental. El libro de L. J. Savage *The Foundations of Statistics* (Wiley, N. Y., 1954), concuerda esencialmente con esta idea. Frente a varias hipótesis posibles, se entiendo por "reglas bayesianas" las reglas que serían adoptadas por individuos que obedecen al criterio del cálculo de probabilidades clásico, juzgando cada uno según una de las opiniones iniciales o posibles; cuando la regla de elección no es bayesiana, existe otra que lo es y resulta "uniformemente preferible" respecto a las hipótesis posibles. De Finetti denomina "horizonte bayesiano", relativo a una regla de decisión y a un intervalo de opiniones, el conjunto de reglas bayesianas general o unánimemente preferibles.

D. VAN DANTZIG: *Sobre los conjuntos de confianza generales y los métodos llamados no paramétricos*. — En este trabajo se discute un método para estimar conjuntos de confianza respecto al conjunto de todas las alternativas de una prueba, en que las variables aleatorias son independientes y continuas. Se da asimismo un método para estudiar unificadamente algunas pruebas no paramétricas recientes.

J. HEMELRIJK: *Ejemplo de aplicación de los métodos no paramétricos y una nueva prueba para la igualdad de varias probabilidades*. — Los métodos no paramétricos de correlación, desarrollados por Pitman, Kendall y otros, tienen muchas aplicaciones prácticas. Estos métodos dan a veces resultados de una simplicidad sorprendente. El autor discute una nueva prueba para la igualdad de varias probabilidades. Sobre la base de un ejemplo estudiado en esta contribución, se trata de lograr algunas generalizaciones.

M. S. BARTLETT: *El análisis estadístico de procesos estocásticos*. — El problema de la inferencia estadística referida a los procesos estocásticos ha sido poco estudiada hasta ahora. Bartlett se ocupa aquí de dicha cuestión, tratando los principios en que se funda su análisis, el problema de las sucesiones, el análisis de correlación de las sucesiones estacionarias y los procesos en relación con la evolución continua del tiempo.

DANIEL DUGUÉ: *Dos nociones útiles en estadística matemática: los conjuntos aleatorios limitados "en ley" y la continuidad fuertemente uniforme en probabilidad*. — Dugué estudia la aproximación de los procesos estocásticos continuos en probabilidad, ocupándose de los procesos de una variable real acotada y, por lo tanto, de funciones que son aplicaciones de un subconjunto del eje real sobre un conjunto de variables aleatorias. Dichas aplica-

ciones resultan continuas en la topología en que el sistema de proximidad es un sistema de vecindad en probabilidad. El autor establece un teorema que generaliza el teorema de Weierstrass sobre la aproximación de una función continua por un polinomio y, a partir de la noción de continuidad fuertemente uniforme, demuestra como esta cuestión se vincula a la definición de la integral en probabilidad y a la definición de lo que se puede llamar "el proceso de seguridad ligado a un proceso dado".

ED. FRANCK: *Sobre los juegos estratégicos finitos*. — La teoría de los juegos estratégicos fué introducida por von Neumann. La importancia del tema, para la Economía y la Estadística, se aprecia en las obras de von Neumann, Morgenstern y de Blackwell Girshick. En la presente contribución se trata algunos aspectos de la teoría de los juegos finitos para dos y para más de dos personas.

P. P. GILLIS y S. HUYBERECHTS: *Teoría de los juegos sobre el cuadrado unidad*. — Los autores se ocupan aquí de algunas generalidades referentes a los juegos infinitos y dan algunos teoremas de existencia para el valor de un juego (teoremas de Ville, Wald, Karlin, Kneser, Ky Fan, Berge). Consideran luego diferentes tipos de juegos sobre el cuadrado unidad (juegos de naturaleza polinomial, de núcleos convexos, de solución por ecuaciones integrales); interesa el estudio de los teoremas relacionados con la dimensión, la unicidad y la dependencia continua de las soluciones respecto al núcleo.

H. BRENY: *A propósito del método de Daniels para el muestreo de los haces de fibras paralelas*. — El autor se ocupa detalladamente del método que ha dado Daniels para la obtención de muestras de fibras paralelamente dispuestas, con el cual se logra muestras equivalentes a las muestras fortuitas. Se aplica este recurso, por ejemplo, en la industria textil.

Máximo Valentínuzzi

GUIDO HOEISEL, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, 5ª edición, Sammlung Göschen nº 920, 129 págs., Walter de Gruyter, Berlin 1956, D. M. 2, 40.

Las cinco ediciones que ha merecido el presente librito son una prueba del acierto conseguido en cuanto a claridad de exposición y selección del contenido, cosa no fácil en un campo tan vasto como es el de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

El contenido es el siguiente. Cap. I: Las ecuaciones diferenciales de primer orden (formas explícita e implícita, factor integrante, tipos clásicos, soluciones singulares). Cap. II: Las ecuaciones diferenciales de orden superior y ecuaciones diferenciales lineales. Cap. III: Problemas de contorno (valores propios, sistemas de Sturm-Liouville, ceros de las soluciones).

El nivel es el común de los libros de la colección Göschen: relativamente elemental en sus líneas generales, pero con detalles y enfoques hacia cuestiones más superiores.

L. A. Santaló

W. BLASCHKE, *Kreis und Kugel*, 2ª edición revisada, 167 págs. 27 figuras, Walter de Gruyter, Berlin, 1956, D. M. 18, 60.

Después de 40 años de la primera edición de este famoso y clásico libro, aparece la segunda edición, con el añadido de algunas notas complementarias y referencias bibliográficas recientes, pero dejando prácticamente intacto el contenido de la primera edición.

A pesar del tiempo transcurrido, sigue siendo un libro hermoso, que ha ejercido gran influencia para el desarrollo de la teoría de los cuerpos convexos y de la geometría diferencial en grande y que seguirá siendo un modelo de exposición clara, rigurosa y llena de fecundas ideas.

L. A. Santaló

J. FAVARD, *Cours de Géométrie différentielle locale*, Cahiers Scientifiques, fas. XXIX, Gauthier-Villars, Paris 1957, 553 págs.

Comunmente se considera que la diferencia entre la geometría diferencial moderna y la clásica consiste en que ésta se dedica casi exclusivamente a los problemas locales, mientras que aquella centra su atención en los problemas globales o "en grande". Es decir, mientras que la geometría diferencial clásica se puede considerar como una prolongación de los libros de Cálculo Infinitesimal, la mayoría de los cuales, sobre todo los no demasiado recientes, traen todavía las clásicas "aplicaciones geométricas del cálculo", la geometría diferencial moderna está mas bien emparentada con la Topología, de la cual toma la nomenclatura y los problemas y aun los métodos, que también han tenido que evolucionar para adaptarse a las nuevas cuestiones.

Por tanto, al leer el título de la presente obra, la confesión explícita del Autor de que está dedicada a la geometría diferencial "local" hace presumir que se trata de un libro de corte clásico. Basta, sin embargo, una rápida hojeadada por el índice para darse cuenta de que, aunque así fuera en cuanto a los métodos, el contenido se aparta bastante de lo tradicional para dar cabida a cuestiones más recientes y todavía en pleno desarrollo (grupos de Lie y geometría diferencial, geometría diferencial afin y proyectiva, espacios de conexión afin...). Pero también los métodos aparecen renovados. Dice el Autor en el prólogo: "No habiendo desgraciadamente un estilo universal empleado en Geometría Diferencial, había que elegir uno y yo he elegido el de Elie Cartan que me parece el mejor, en mucho, y que, creo, permitiría sin gran trabajo, en un tratado más amplio, incluir los resultados más difíciles que hasta ahora han sido obtenidos con grandes cálculos, abreviándolos considerablemente en la mayoría de los casos" y dándoles —añadiríamos nosotros— un mayor significado geométrico.

Elección afortunada, que ha de permitir familiarizar al lector con este instrumento de las formas diferenciales exteriores y del "sistema móvil de referencia", que tanto fruto ha dado y está dando en todas las ramas en que la geometría diferencial está más o menos directamente vinculada (geometría algebraica, espacios fibrados).

La parte llamada Introducción consta de tres capítulos: uno de generalidades y fundamentos, en el cual se ensaya de no esquivar las exigencias axiomáticas que tanto se manifiestan en los tratados de Análisis y tan poco en los

de Geometría Analítica o Diferencial; otro de álgebra y análisis tensorial y otro sobre el cálculo diferencial exterior y grupos de Lie (exposición de E. Cartan).

La Primera parte está dedicada a la geometría infinitesimal directa (Bouligand), con las definiciones fundamentales y un estudio detallado de la teoría de contactos y envolventes. Termina con un capítulo sobre transformaciones de contacto.

La Segunda parte tiene tres secciones. La primera está dedicada a la teoría clásica de curvas y superficies del espacio ordinario. Esta sección, por sí sola, puede considerarse como un magnífico librito (157 pgs.) de geometría diferencial del espacio euclidiano, con muy bien elegido contenido y expuesto con gran claridad a pesar de su densidad.

La segunda sección estudia la geometría afin unimodular de curvas y superficies. El método de Cartan pone aquí de manifiesto sus ventajas. En un total de 50 págs. puede el autor exponer lo esencial de esta geometría, tal vez con más unidad que por los métodos, por otra parte elegantísimos, seguidos por Blaschke en el segundo tomo de su tan conocida Geometría Diferencial.

En la tercera sección se estudia la geometría proyectiva diferencial de curvas y superficies, siguiendo también los métodos de E. Cartan.

La Tercera parte, que se titula "Teoría del transporte" estudia los espacios de conexión afin, derivando después a los espacios con conexiones más generales, métricas y proyectivas. Termina la obra con un capítulo sobre geometría de Riemann.

Al fin de cada capítulo contiene una sección de ejercicios y notas complementarias, donde tienen cabida numerosos detalles no incluidos en el texto.

La exposición es elegante y clara como en todos los libros de Favard y la impresión y presentación tan cuidadas como en todos los libros de Gauthier-Villars.

L. A. Santaló

WOLFGANG HAACK, *Darstellende Geometrie III: Axonometrie und Perspective*, Sammlung-Göschel, vol. 144, Walter de Gruyter, Berlín, 1957, D. M. 2, 40, 127 págs., 100 figs.

Este tercer volumen viene a complementar, con el estudio completo de problemas globales, las distintas construcciones parciales de los primeros dos volúmenes de este tratado, pequeño en extensión, pero denso en contenido, de Geometría Descriptiva.

El Cap. I trata de axonometría: primeras construcciones, intersecciones, sombras, perspectiva caballera, teorema de Pohlke. El Cap. II trata los fundamentos de la perspectiva y el Cap. III las aplicaciones de la misma, con numerosos ejemplos. En el Cap. V se estudia la perspectiva de círculos y en el Cap. V la teoría de sombras en la perspectiva.

Se trata de una elegante exposición de esta disciplina, bastante olvidada actualmente en los planes de estudio de las Facultades de Ciencias, pero siempre hermosa, cuando bien expuesta, como obra de artistas de la talla de Piero della Francesca y Albrecht Dürer.

L. A. Santaló

UNION MATEMATICA ARGENTINA

*Resúmenes de las comunicaciones de la reunión del  
21 de setiembre de 1956*

MARÍA L. BRUSCHI y MISCHA COTLAR, *Sobre el teorema de convexidad de Riesz-Thorin - Marcinkiewicz.*

Un operador  $A = Af$  se dice de tipo  $(p, r)$  si transforma funciones del espacio  $L^p$  en funciones del espacio  $L^r$  y vale  $\|Af\|_r \leq M_{p,r} \|f\|_p$  para toda  $f \in L^p$ . El teorema de Riesz-Thorin afirma que si  $A$  es de tipo  $(p_i, r_i)$ ,  $i=1, 2$ , entonces  $A$  es de tipo  $(p, r)$  para

$$\frac{1}{p} = \frac{t}{p_1} + \frac{1-t}{p_2}, \quad \frac{1}{r} = \frac{t}{r_1} + \frac{1-t}{r_2} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

valiendo

$$M_{p,r} \leq M_{p_1, r_1}^t + M_{p_2, r_2}^{1-t}.$$

Marcinkiewicz generalizó el teorema reemplazando en la hipótesis la condición "tipo" por "semi-tipo" ( $A$  es de semi-tipo  $(p, r)$  si vale  $D_{Af}(\lambda) \leq \left\{ \frac{M_{p,r}}{\lambda} \|f\|_p \right\}^r$  donde  $D_g(\lambda)$  es la función de distribución de  $g$ ). Sin embargo la tesis de Marcinkiewicz dice que  $M_{p,r} \leq C_{p,r} M_{p_1, r_1}^t + M_{p_2, r_2}^{1-t}$  donde  $C_{p,r} \rightarrow \infty$  si  $t \rightarrow 0$  o si  $t \rightarrow 1$ . Introduciendo un concepto de  $N$ -semitipo  $(p, r)$  se da un teorema que incluye como casos particulares el de Riesz (para  $N = \infty$ ) y el de Marcinkiewicz (para  $N = 1$ ); la demostración es más elemental que la de Riesz. Se estudian diversas aplicaciones. Usando los teoremas de representación de Gelfand, Kantorovich y Dunford se estudian diversos refinamientos y nuevas formas de estos teoremas donde aparecen "regiones cónicas" en vez de "poligonales", para operadores dados por núcleos simétricos (en la representación correspondiente).

GREGORIO KLIMOVSKY, *Tres enunciados equivalentes al teorema de Zorn.*

Se demuestra que los siguientes tres enunciados son equivalentes al teorema de Zorn:

I) En todo conjunto  $B$  de un álgebra de Boole  $\mathcal{A}$  existe un subconjunto  $C$ , maximal en  $B$  respecto de la propiedad de ser no contradictorio en  $\mathcal{A}$ .

II) En todo subconjunto  $B$  de fórmulas de un cálculo proposicional bivalente general  $\mathcal{A}$ , existe un subconjunto  $C$ , maximal respecto de la propiedad de ser no contradictorio en  $\mathcal{A}$ .

III) En todo sistema sintáctico simple existe un subconjunto de enunciados del sistema, maximal respecto de la propiedad de ser no contradictorio en el sistema.

Se demuestra también que, para todo sistema sintáctico  $S$  hay un álgebra de Boole  $\mathcal{A}$  tal que existe una correspondencia biunívoca entre todos los subconjuntos de  $S$  y algunos subconjuntos de  $\mathcal{A}$ , de modo que un subconjunto de  $S$  es contradictorio en  $S$  si y sólo si el correspondiente subconjunto de  $\mathcal{A}$  es contradictorio en  $\mathcal{A}$ .

Este resultado, que viene a constituir una cierta teoría de representaciones de los sistemas sintácticos simples sobre las álgebras de Boole, se utiliza para demostrar que el enunciado II implica al III. Las implicaciones de III a Z, (Z es el teorema de Zorn), de Z a I y de I a II son sencillas. Con lo que queda establecida la equivalencia de los cuatro enunciados.

GREGORIO KLIMOVSKY, *Nota sobre el problema de los cuatro colores.*

Se demuestra que, si existe un mapa con infinitos países que no puede colorearse con 4 colores, debe existir otro con un número finito de países que tampoco puede colorearse con 4 colores.

Se utiliza para establecer la demostración el teorema de completitud (de Gödel) para el cálculo proposicional.

Utilizando el teorema de completitud para el cálculo proposicional bivalente general (teorema de Gödel-Malcev proposicional), puede extenderse el resultado a gráficos cualesquiera, y a un número  $k$  cualquiera de colores.

VERA SPINADEL y EMILIO ROXIN, *Sobre un problema de control para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.*

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de primer orden, con coeficientes variables, el agregado de términos que hagan no homogéneo el sistema, puede interpretarse como la introducción de fuerzas exteriores al mismo. Cabe preguntar entonces cuál es la fuerza más adecuada para llevar el sistema al estado de reposo en un tiempo mínimo, acotando de algún modo la intensidad admisible de esas fuerzas.

En el presente trabajo se demuestra que si la acotación es exigir que las componentes de la fuerza, o sea los términos no homogéneos del sistema, sean menores o iguales a una constante  $k$ , la estrategia óptima es tomar una fuerza función del tiempo cuyas componentes tengan valor absoluto  $k$ . Esto si el sistema es tal que el estado de reposo es un punto de equilibrio estable. Si en cambio es inestable, se puede dar una cota para dicha constante  $k$ , con la cual se puede forzar el sistema hasta el estado de reposo.

Este trabajo es una generalización de una memoria reciente de Bellman-Glicksberg y Gross (Quart. Appl. Math. XIV, 1, 1956) que se refiere al mismo problema tratado para el caso de ecuaciones a coeficientes constantes.

O. VARSAVSKY, (Fac. de Ciencias Exactas, Univ. de Buenos Aires), *Funcionales positivas extendibles.*

Sea  $A$  un álgebra con involución, sin unidad, y  $\varphi$  una funcional lineal sobre  $A$ , que cumple:

$$\varphi(a \circ a^*) \leq N$$

donde  $a \circ b = a + b - ab$  y  $N$  es un número real. Entonces:

1)  $\varphi$  es positiva sobre  $\mathcal{A}$ :  $\varphi(a a^*) \geq 0$ , y por lo tanto hermitiana:

$$\varphi(a b^*) = \overline{\varphi(b a^*)}$$

2)  $N < 0$  si  $\varphi \neq 0$

3)  $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$  y  $|\varphi(a)|^2 \leq N \varphi(a a^*)$  y por lo tanto  $\varphi$  es extendible a  $\mathcal{A} + 1$  sin dejar de ser positiva, mediante

$$\varphi(a + \lambda 1) = \varphi(a) + \lambda N$$

O. VARSAVSKY, (Fac. de Ciencias Exactas, Univ. de Buenos Aires), *Individuos en álgebras monádicas.*

Sea  $\mathcal{A}$  un álgebra monádica, esto es, un álgebra de Boole con un operador existencial  $\mathfrak{A}$  (un operador de clausura cuyo rango es subálgebra, ver P. Halmos, *Comp. Math.* 12, 217-249, 1956). En ella definimos como *individuos* a los endomorfismos  $\alpha$  que cumplan además:

a)  $\alpha \mathfrak{A} = \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \alpha = \alpha$ , y por lo tanto:

b)  $\alpha a \leq \mathfrak{A} a$  para todo  $a \in \mathcal{A}$

y resulta entonces (llamando  $m$ -ideales a los ideales cerrados con respecto a  $\mathfrak{A}$  y anteponiendo siempre “ $m$ ” para indicar conceptos algebraicos usuales referidos a  $m$ -ideales):

1) Si  $I$  es un  $m$ -ideal, en el cociente  $\mathcal{A}/I$  todo individuo tiene una imagen canónica bien definida, gracias a b), y no nula, por a).

2) Dados dos individuos diferentes en  $\mathcal{A}$ , hay un  $m$ -ideal  $m$ -maximal  $M$  tal que en  $\mathcal{A}/M$  las imágenes de aquellos son diferentes.

3) Si  $M$  es  $m$ -maximal, Halmos mostró que en  $\mathcal{A}/M$ , representada (Stone) por funciones a dos valores sobre el espacio  $M$  de sus ideales maximales, la imagen del existencial  $\mathfrak{A}$  es tomar supremos. Entonces, por a), el rango de todo individuo es el álgebra simple  $\{0,1\}$  y por lo tanto su núcleo es un punto  $M$ :

En un álgebra monádica  $m$ -simple cada individuo es un ideal maximal y cada ideal maximal permite definir un individuo.

4) Es usual pedir que haya suficientes individuos para servir de “testigos” a todas las funciones, esto es, para cada  $a \in \mathcal{A}$  debe haber un  $\alpha$  tal que  $\alpha a = \mathfrak{A} a$ . Si  $\mathcal{A}$  es  $m$ -simple, esto equivale, por b) y el teorema de Stone, a que los individuos sean densos en  $M$  (en su topología canónica).

En el caso general, los  $m$ -ideales  $m$ -maximales  $M$  son subconjuntos  $M_M$  de  $M$ , cerrados, disjuntos y que cubren  $M$ . Cada  $M_M$  es homeomorfo al espacio de Stone del  $\mathcal{A}/M$  respectivo.

Para cada individuo  $\alpha$  sea  $K_\alpha$  su núcleo, que es también un cerrado de  $M$ . Cada intersección  $K_\alpha \cap M_M$  está formada por los ideales maximales de  $\mathcal{A}$  que contienen a  $K_\alpha$  y  $M$ , de los que hay por lo menos uno (y sólo uno si el rango de  $\mathfrak{A}$  es un álgebra completa: A. Monteiro, comunicación a U.M.A., mayo 1956).

En resumen, para que haya suficientes testigos en todos los modelos, la unión de los núcleos de todos los individuos debe ser densa en  $M$ .

## UNION MATEMATICA ARGENTINA

---

### MIEMBROS HONORARIOS

Tullio Levi-Civita (†); Beppo Levi; Alejandro Terracini; George D. Birkhoff (†); Marshall H. Stone; Georges Valiron, Antoni Zygmund, Godofredo García.

### REPRESENTANTES EN EL EXTRANJERO

Ing. Rafael Laguardia (Uruguay). Ing. José Luis Massera (Uruguay). Dr. Godofredo García (Perú). Dr. Leopoldo Nachbin (Brasil). Dr. Roberto Frucht (Chile). Dr. Mario González (Cuba). Dr. Alfonso Nápoles Gandara (México). Pedro Puig (España). Alejandro Terracini (Italia).

---

## PUBLICACIONES DE LA U. M. A.

*Revista de la U. M. A.* — Vol. I (1936-1937); Vol. II (1938-1939); Vol. III (1938-1939); Vol. IV (1939); Vol. V (1940); Vol. VI (1940-1941); Vol. VII (1940-1941); Vol. VIII (1942); Vol. IX (1943); Vol. X (1944-1945).

*Revista de la U. M. A. y órgano de la A. F. A.* — Vol. XI (1945-1946); Vol. XII (1946-1947); Vol. XIII (1948); Vol. XIV (1949-1950).

*Revista de la U. M. A. y de la A. F. A.* — Vol. XV (1951-1953); Vol. XVI (1954-1955); Vol. XVII (1955).

Los volúmenes III, IV, V y VI comprenden los siguientes fascículos separados:

Nº 1. GINO LORIA. *Le Matematiche in Ispagna e in Argentina.* — Nº 2. A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre las series de funciones de Hermite.* — Nº 3. MICHEL PETROVICH. *Remarques arithmétiques sur une équation différentielle du premier ordre.* — Nº 4. A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Una nueva demostración del teorema límite del Cálculo de Probabilidades. Condiciones necesarias y suficientes para que una función sea integral de Laplace.* — Nº 5. NIKOLA OBRECHKOFF. *Sur la sommation absolue par la transformation d'Euler des séries divergentes.* — Nº 6. RICARDO SAN JUAN. *Derivación e integración de series asintóticas.* — Nº 7. Resolución adoptada por la U. M. A. en la cuestión promovida por el Sr. Carlos Biggeri. — Nº 8. F. AMODEO. *Origen y desarrollo de la Geometría Proyectiva.* — Nº 9. CLOTILDE A. BULA. *Teoría y cálculo de los momentos dobles.* — Nº 10. CLOTILDE A. BULA. *Cálculo de superficies de frecuencia.* — Nº 11. R. FRUCHT. *Zur Geometria auf einer Fläche mit indefiniter Metrik (Sobre la Geometría de una superficie con métrica indefinida).* — Nº 12. A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre una memoria del Prof. J. C. Vignaux.* — Nº 13. E. TORANZOS. *Sobre las singularidades de las curvas de Jordan.* — Nº 14. M. BALANZAT. *Fórmulas integrales de la intersección de conjuntos.* — Nº 15. G. KNIE. *El problema de varios electrones en la mecánica cuantista.* — Nº 16. A. TERRACINI. *Sobre la existencia de superficies cuyas líneas principales son dadas.* — Nº 17. L. A. SANTALÓ. *Valor medio del número de partes en que una figura convexa es dividida por  $n$  rectas arbitrarias.* — Nº 18. A. WINNER. *On the iteration of distribution functions in the calculus of probability (Sobre la iteración de funciones de distribución en el cálculo de probabilidades).* — Nº 19. E. FERRARI. *Sobre la paradoja de Bertrand.* — Nº 20. J. BABINI. *Sobre algunas propiedades de las derivadas y ciertas primitivas de los polinomios de Legendre.* — Nº 21. R. SAN JUAN. *Un algoritmo de sumación de series divergentes.* — Nº 22. A. TERRACINI. *Sobre algunos lugares geométricos.* — Nº 23. V. y A. FRAILE y C. CRESPO. *El lugar geométrico y lugares de puntos áreas en el plano.* — Nº 24. R. FRUCHT. *Coronas de grupos y sus subgrupos, con una aplicación a los determinantes.* — Nº 25. E. R. RAIMONDI. *Un problema de probabilidades geométricas sobre los conjuntos de triángulos.*

En 1942 la U. M. A. ha iniciado la publicación de una nueva serie de "Memorias y monografías" de las que han aparecido hasta ahora las siguientes:

Vol. I; Nº 1. — GUILLERMO KNIE, *Mecánica ondulatoria en el espacio curvo.* Nº 2. — GUIDO BECK, *El espacio físico.* Nº 3. — JULIO REY PASTOR, *Integrales parciales de las funciones de dos variables en intervalo infinito.* Nº 4. — JULIO REY PASTOR, *Los últimos teoremas geométricos de Poincaré y sus aplicaciones. Homenaje póstumo al Prof. G. D. BIRKHOFF.*

Vol. II; Nº 1. — YANNY FRÉNKEL, *Criterios de biconvexidad y de  $H$ -completitud de un espacio topológico accesible de Frechet-Riesz.* Nº 2. — GEORGES VALIRON, *Fonctions entières.*

Vol. III; Nº 1. — E. S. BERTOMEU y C. A. MALLMANN, *Funcionamiento de un generador en cascadas de alta tensión.*

Además han aparecido tres cuadernos de *Miscelánea Matemática.*