Volumen XVIII Número 4

REVISTA

DE LA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

(MIEMBRO DEL PATRONATO DE LA MATHEMATICAL REVIEWS)

Y DE LA

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

SUMARIO

BUENOS AIRES
1958

UNION MATEMATICA ARGENTINA

La U. M. A. reconoce cuatro categorías de miembros: honorarios, protectores, titulares y adherentes. El miembro protector paga una cuota anual de 200 $, por lo menos; el titular una cuota anual de 120 $; y el adherente (estudiantes solamente) una cuota anual de 40 $. Los pagos deberán efectuarse por cheque, giro u otro medio de gastos, a la orden de UNION MATEMATICA ARGENTINA, Casilla de Correo 3588, Buenos Aires.

Por ser la U. M. A. miembro del patronato de la Mathematical Reviews (sponsoring member), los socios de la U. M. A. tienen derecho a suscribirse a esa importante revista de bibliografía y crítica con 50 % de rebaja sobre el precio de suscripción que es de 20 dólares por año. Los socios de la U. M. A. pagarán por tanto sólo 10 dólares por año.

Los autores de trabajos reciben gratuitamente una tirada aparte de 50 ejemplares. Las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

JUNTA DIRECTIVA

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

La A. F. A., asociación privada de investigadores, profesores y estudiantes de física y de astronomía, tiene por objeto fomentar el progreso de la investigación y de la enseñanza de dichas materias por medio de reuniones científicas periódicas y de la publicación de trabajos originales.

Podrán ingresar como socios activos quienes hayan efectuado investigaciones originales; pueden ser socios adherentes los profesores que no cumplan este requisito; y socios estudiantes los que hayan aprobado el primer año de estudios de física o de astronomía.

Las solicitudes de ingreso, que deberán llevar la firma de dos socios activos o adherentes, habrán de dirigirse al secretario local que corresponda. Los socios activos abonarán una cuota mensual de $ 18, los adherentes de $ 15 , los estudiantes de $ 6. Si el pago se hace en una sola cuota anual, será de 180, 150 y 60 pesos, respectivamente. En estas cuotas están incluidas las suscripciones a la "Revista de la U. M. A. y de la A. F. A." y a la revista "Ciencia e Investigación".

La correspondencia relacionada con las colaboraciones debe dirigirse al Secretario de Publicaciones de la A. F. A., Mario Bunge, Facultad de Ciencias Exactas, Perú 222, Buenos Aires.

Se solicita a las instituciones a que pertenecen los autores contribuyan con una cuota de 50 $ por página, lo que les dará derecho a recibir 100 apartados libres de cargo. Las instrucciones relativas se enviarán con las pruebas de galera.

COMISION DIRECTIVA (1956-58)

Abonnement annuel à l'etranger: 5.00 dollars (Etats-Unis).

Prière d'adresser toute la correspondance scientifique, administrative et les échanges à l'adresse ci-dessous:

REVISTA DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA
Casilla de Correo 3588
Buenos Aires (Argentina)

SOBRE UN PROBLEMA DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

por EMILIO O. ROXIN y VERA W. DE SPINADEL
Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de Buenos Aires. Dirección Nacional de la Energía Atómica.

RESUMEN. — Consideraremos el comportamiento de las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables $dx/dt = A(t)x + f(t)$, donde $x(t)$ es un vector n-dimensional, $A(t)$ una matriz de funciones reales y contínuas de la variable real t y $f(t)$ un vector de componentes $f_i\,(t)$ reales y medibles.

Demostraremos que, dadas las condiciones iniciales, el problema de determinar el vector $f(t)$ tal que haga mínimo el valor de t para el cual $x(t) = 0$, sujeto a la restricción que las componentes $f_i\,(t)$ satisfagan la relación $|f_i\,(t)| \leqq k_i > 0$, admite solución y ésta es tal que $|f_i| = k_i$.

Si el origen es un punto de estabilidad del sistema $dx/dt = A(t)x$ (en el sentido de Liapounoff (1), las constantes k_i pueden elegirse arbitrariamente, por ejemplo, $k_i = 1$. Si, en cambio, el origen es un punto inestable, es posible, dar un criterio para elegir en cada caso las k_i adecuadas para que el problema a que se hace referencia tenga solución.

Este trabajo es una generalización de una memoria reciente de Bellman, Glicksberg y Gross (2), que se refiere al mismo caso para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

SUMARY. — We shall consider the behaviour of the solutions of the system of linear differential equations with variable coefficients $dx/dt = A(t)x + f(t)$, where $x(t)$ is an n-dimensional vector, $A(t)$ a real, continuous matrix of order n and $f(t)$ a vector whose components $f_i\,(t)$ are real and measurable.

We shall prove that, given the initial conditions, the problem of determining the vector $f(t)$ so as to minimize the value of t required to make $x(t) = 0$, subject to the constraint that the ith. component satisfy the relation $|f_i\,(t)| \leqq k_i > 0$, is solvable and the solution is to take $|f_i| = k_i$.

If the origin is a stable point of the system $dx/dt = A(t)x$ (in the sense of Liapounoff (1)), the constants k_i can be choosed arbitrarily, for example, $k_i = 1$. Furthermore, if the origin is an unstable point, it is possible to give a criterium to choose the adequate k_i to solve the problem.

The present work is a generalization of a recent paper by Bellman, Glicksberg and Gross (2).

1. *Introducción.*

Sea $x(t)$ un vector n-dimensional que satisface a la ecuación diferencial lineal con coeficientes variables

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)\,x + f(t), \qquad x(0) = x_0, \tag{1.1}$$

donde suponemos que:

a) $A(t)$ es una matriz real y continua, de orden n;
b) $f(t)$ es un vector real y medible cuyas componentes f_i cumplen la relación

$$|f_i| \leqq k_i > 0, \qquad k_i = \text{constantes}. \tag{1.2}$$

Si consideramos el sistema de ecuaciones homogéneo

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)\,x \tag{1.3}$$

como la descripción del comportamiento de un sistema físico no perturbado, la introducción del término $f(t)$ en la ecuación (1.1) puede interpretarse como la aplicación de una excitación exterior o control. Un problema de importancia a ese respecto es el siguiente: dadas ciertas condiciones iniciales $x(0) = x_0$, determinar el vector $f(t)$ que lleva el sistema físico al estado de reposo en un tiempo t mínimo, imponiendo la condición (1.2) de acotación de las componentes.

En este trabajo demostramos que este problema siempre tiene solución y que el vector $f(t)$ óptimo es tal que

$$f_i(t) = \pm k_i.$$

Se dice en ese caso, que el control es del tipo «on-off» o «bang-bang» (2).

Vamos a distinguir dos posibilidades:

c_1) el origen es un punto *estable* (en el sentido de Liapounoff) para el sistema de ecuaciones (1.3); es decir, dando un $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que toda solución $x_1(t)$ que satisface a la desigualdad

$$|x_1(0)| < \delta,$$

satisface también a

$$|x_1(t)| < \varepsilon;$$

c_2) el origen es un punto *inestable* (en el sentido de Liapounoff) para el sistema de ecuaciones (1. 3).

Veremos que en el primer caso, las constantes $k_i > 0$ pueden elegirse arbitrariamente, por ejemplo, $k_i = 1$. En cambio, en el segundo, la acotación (1. 2) no puede hacerse con constantes arbitrarias, pero en cada caso particular puede hallarse un valor adecuado para ellas, que haga posible la solución del problema arriba mencionado.

2. *Teorema 1.*

Dado el sistema (1. 1) que satisface a las condiciones a), b) y c_1), con el valor de $k_i = 1$, existe un vector $f(t)$ que reduce $x(t)$ a cero con un valor mínimo de t, y para él resulta $f_i(t) = \pm 1$.

Demostración. En virtud de un teorema clásico (3), existe una única solución $x(t)$ del sistema (1. 1) para la que

$$x(0) = x_0.$$

Sea $\phi(t)$ la matriz *resolvente* del sistema (1. 3), o sea la la matriz cuyas n columnas son n soluciones linealmente independientes del sistema (1. 3), tal que

$$\phi(0) = E,$$

donde E es la matriz unidad. $\phi(t)$ resulta real por serlo también $A(t)$. Entonces la solución $x(t)$ está dada por la expresión

$$x(t) = \varphi(t) + \phi(t) \int_0^t \phi^{-1}(s)\, f(s)\, ds, \tag{2. 1}$$

siendo $\varphi(t)$ la solución del sistema homogéneo (1. 3) que satisface a

$$\varphi(0) = x_0.$$

A su vez, la $\varphi(t)$ es expresable en la forma

$$\varphi = \Phi x_0,$$

con lo cual la ecuación (2. 1) se transforma en

$$x(t) = \Phi(t) \left[x_0 + \int_0^t \Phi^{-1}(s) f(s) \, ds \right]. \tag{2. 2}$$

El problema se reduce ahora a hallar el vector $f(t)$ que con un valor mínimo de $t = T$ cumpla la relación

$$-x_{0i} = \int_0^T \Phi^{-1}(t) f(t) \, dt; \tag{2. 3}$$

o bien, elegir las $f_i(t)$ tales que verifiquen

$$-x_{0i} = \int_0^T \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij}(t) f_j(t) \, dt; \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n, \tag{2. 4}$$

donde las α_{ij} son los elementos de Φ^{-1}.

Para ello, vamos a comenzar por demostrar que, dado un valor inicial x_0, existe un vector $f(t)$ y un valor $t = T > 0$ finito tal que vale la ecuación (2. 3). En efecto, siempre nos será posible elegir el vector $f(t)$ tal que

$$\Phi^{-1}(t) f(t) = K = \text{constante},$$

pues para esto basta tomar

$$f(t) = \Phi(t) K. \tag{2. 5}$$

Como el sistema homogéneo (1. 3) es estable, $\Phi(t)$ es una matriz continua cuya norma $|\Phi(t)|$ está acotada para $t > 0$, donde por norma de una matriz entendemos la suma de los valores absolutos de sus elementos. Tomando el vector constante K suficientemente pequeño, podemos siempre hacer que $f(t)$ se mantenga acotada por una constante arbitraria, por ejemplo $|f_i(t)| \leqq 1$ para $t > 0$, en virtud de la desigualdad

$$|f(t)| \leqq |\Phi(t)| . |K| .$$

Introduciendo (2. 5) en (2. 3) obtenemos

$$(2.6) \qquad -x_0 = \int_0^T K\,dt = KT,$$

ecuación que determina K y con él, el vector $f(t)$ y el valor $t = T$ tales que se cumplen las ecuaciones (2. 3) y (2. 4).

Veamos ahora qué condiciones debe cumplir el vector $f(t)$ para minimizar el valor de T que reduce $x(T)$ a cero. Para ello seguiremos el razonamiento expuesto en la memoria de Bellman, Glicksberg y Gross (2), que se refiere al caso de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

La integral

$$\int_0^T \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(t)\, f_j(t)\, dt$$

define una transformación lineal del espacio de los vectores $f(t)$ en el espacio vectorial n-dimensional de vectores ξ cuya i-ésima componente es

$$\xi_i = \int_0^T \sum_j \alpha_{ij}(t)\, f_j(t)\, dt.$$

Es fácil comprobar que el conjunto convexo de los vectores $f(t)$ sujetos a la condición de acotación $|f_i| \leqq 1$ se transforma en un subconjunto convexo $W(T)$ del espacio euclidiano n-dimensional. Veamos que el conjunto $W(T)$ es creciente con T. En efecto, todo elemento $\xi = \omega_T \bar{f}$ del conjunto $W(T)$ también pertenece al conjunto $W(T')$ donde $T' > T$, ya que la función $\bar{\bar{f}}(t)$ definida del siguiente modo:

$$\bar{\bar{f}}(t) = \begin{cases} \bar{f}(t) & \text{para } t \leqq T \\ 0 & \text{para } t > T \end{cases}$$

tiene por transformada $\omega_{T'}\overline{\overline{f}}=\omega_T\overline{\overline{f}}=\omega_T\overline{f}$, de donde se deduce que $W(T)\subset W(T')$.

El valor de T mínimo buscado es el menor $T<\infty$ para el que $W(T)$ contiene al vector $-x_0$. Como el conjunto $W(T)$ es creciente con T, existe un intervalo (T_0,∞) para el que $W(T)$ contiene a $-x_0$, mientras que para $T<T_0$, esto no sucede. Si introducimos la métrica euclidiana en el espacio vectorial de los ξ, se puede topologizar el espacio de Banach de los vectores $f(t)$ de manera que la transformación $\omega_{T'}$ resulte continua y el conjunto de los vectores $f(t)$ con $|f_i(t)|\leqq 1$, compacto (4). En ese caso, el conjunto $W(T)$, como imagen continua de un conjunto compacto, es compacto y por consiguiente cerrado, de donde resulta que el conjunto $W(T_0)$ contiene a $-x_0$.

Para $T<T_0$, el vector $-x_0$ no está en $W(T)$, y como el conjunto de los $f(t)$ es convexo, siempre podremos elegir para cada T un vector unitario ϑ_T tal que la proyección de cualquier vector de $W(T)$ sobre él sea menor que la proyección de $-x_0$ sobre el mismo, o sea

$$[\vartheta_T,\omega_T f]\leqq[\vartheta_T,-x_0].$$

Como el conjunto de los vectores de norma unitaria es compacto en la topología euclidiana, existe una sucesión T_n que converge a T_0, para la cual ϑ_{T_n} converge a cierto vector ϑ. Siendo continua la transformación: $\omega_{T_n}f\longrightarrow\omega_{T_0}f$, de donde resulta

$$[\vartheta,\omega_{T_0}f]=\lim_{T_n\to T_0}[\vartheta_{T_n},\omega_{T_n}f]\leqq\lim_{T_n\to T_0}[\vartheta_{T_n},-x_0]=[\vartheta,-x_0];$$

es decir, si $f^*(t)$ es un vector para el que

$$\omega_{T_0}f^*=-x_0,$$

se tendrá

$$[\vartheta,\omega_{T_0}f]\leqq[\vartheta,\omega_{T_0}f^*]$$

para todo $f(t)$. Podemos, por tanto, afirmar que existe un conjunto de n constantes ϑ_i no todas nulas para las cuales f^* hace máxima la expresión

$$\sum_i\vartheta_i\int_0^T\sum_j\alpha_{ij}(t)\,f_j(t)\,dt=\sum_j\int_0^T\sum_i\vartheta_i\,\alpha_{ij}(t)\,f_j(t)\,dt.$$

Evidentemente, el máximo de esta expresión es

$$\sum_j \int_0^T \left| \sum_i \vartheta_i \, a_{ij}(t) \right| dt,$$

que se obtiene tomando

$$f_j(t) = \operatorname{sg}\left(\sum \vartheta_i \, a_{ij}(t)\right). \tag{2.7}$$

Hemos así demostrado que si el vector $f(t)$ reduce la solución $x(t)$ a cero para un valor mínimo $t=T$, sus componentes f_i satisfacen a la relación (2.7), de donde se deduce que

$$f_i = \pm 1. \tag{2.8}$$

3. *Teorema* 2.

Dado el sistema (1.1) que satisface a las condiciones a), b) y c_2), siendo k_i constantes sujetas a la acotación

$$k_i = \max_{0 \leq t \leq T} |\phi(t)| \; \frac{|x_0|}{T},$$

donde $\phi(t)$ es la matriz resolvente del sistema (1.3), $T > 0$ arbitrario, existe un vector $f(t)$ que reduce $x(t)$ a cero para un valor mínimo de $t \leqq T$, y para él resulta $|f_i(t)| = k_i$.

Demostración. La demostración es semejante a la del teorema anterior, sólo que, como ahora el sistema (1.3) es inestable, la matriz $\phi(t)$ es tal que su norma $|\phi(t)| \to \infty$ para $T \to \infty$. Ello trae como consecuencia que el vector $f(t)$ definido por la ecuación (2.5) no permanece acotado. Sin embargo, para cada $T > 0$ podemos tomar un vector constante

$$K = \frac{-x_0}{T}, \tag{3.1}$$

que introducido en la ecuación (2.5) nos da

$$|f(t)| \leqq |\phi(t)| \, . \, |K| = |\phi(t)| \, . \frac{|x_0|}{T}, \tag{3.2}$$

y en el intervalo $0 \leqq t \leqq T$, el vector $f(t)$ cumple la condición

$$|f(t)| \leqq \max_{0 \leq t \leq T} |\Phi(t)| \cdot \frac{|x_0|}{T};$$

o sea

$$|f_i(t)| \leqq k_i.$$

Ese vector $f(t)$ es tal que la solución $x(t)$ se anula para $t = T$, pues de las ecuaciones (3. 1), (2. 5) y (2. 2) resulta

$$x(T) = \Phi(T) \left[x_0 + \int_0^T \Phi^{-1}(t) f(t) \, dt \right] = 0.$$

Hemos así demostrado la existencia de un vector $f(t)$ que hace $x(t) = 0$ para $t = T$. El resto de la demostración sigue las líneas de la del teorema anterior, llegándose a la conclusión que las condiciones que deben cumplir las componentes $f_i(t)$ para minimizar el valor de T, son

$$|f_i(t)| = k_i.$$

Nota sobre el Teorema 2. Con respecto a la acotación impuesta a las constantes k_i en el enunciado de este teorema, cabe señalar que la función $g(T)$ definida por

$$g(T) = \max_{0 \leq t \leq T} |\Phi(t)| \cdot \frac{|x_0|}{T}$$

es una función continua positiva para $T > 0$, que tiende a infinito para $T \to 0$ y cuyo comportamiento para $T \to \infty$ no se puede predecir en general. Esta función posee, por lo tanto, un extremo inferior M y en cada caso podemos elegir un valor T_0 de T tal que

$$g(T_0) < M + \varepsilon$$

siendo $\varepsilon > 0$ arbitrario. La acotación

$$|f_i(t)| \leqq k_i = M + \varepsilon$$

es, a menos del ε, la máxima restricción que, en virtud de este teorema, se puede imponer a las $f_i(t)$.

BIBLIOGRAFIA

(1) Liapounoff, A. M., Problème Général de la stabilité du mouvement, Princeton University Press, 1947.

(2) Bellman, Glicksberg and Gross, On the Bang-Bang Control Problem, Quart. Appl. Math., *XIV*, 1, Abril 1956.

(3) Coddington and Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, Mc Graw Hill, 1955.

(4) Alaoglu, L., Weak topologies of normed linear spaces, Ann. of Math., *41*, 252 - 267, 1940.

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

TRIGESIMA PRIMERA REUNION

Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, 23 y 24 mayo de 1958

Informes

"Discusión de experimentos recientes que establecen el significado de los vectores B y H del electromagnetismo clásico", por J. G. Roederer (Comisión Nacional de la Energía Atómica y Facultad de Ciencias Exactas y Naturales). "Análisis de las posibilidades de formación de planetas a consecuencia de explosiones estelares", por F. Cernuschi y S. Codina (Facultad de Humanidades y Ciencias, Montevideo).

Comunicaciones

1. J. Staricco (Facultad Ing. Bs. As.). *Aplicaciones de la integral multiplicativa.*

Se aplica el concepto de integral multiplicativa o producto integral a la resolución del problema de Cauchy de las ecuaciones diferenciales clásicas en Física y se muestra cómo ciertas formas de operar en Electrodinámica cuántica pueden interpretarse mediante la teoría de dichas integrales.

2. S. SCHIMINOVICH (F. C. E. N. Bs. As.). *Variedad generalizada para la descripción de los fenómenos físicos.*

Se propone generalizar la variedad tetradimensional adjuntándole a cada punto un espacio abstracto donde operan los grupos de transformaciones ante los cuales son invariantes las leyes de la física microscópica. Se dan como entes primeros los respectivos generadores de transformaciones infinitesimales. Se determina la estructura de la variedad por una relación de equivalencia entre transformaciones infinitesimales correspondientes a puntos vecinos, lo que corresponde a dar la conexión de la variedad. Se analizan desde este punto de vista los trabajos de Utiyama e Ikeda y Miyachi, señalándose las diferencias y proponiendo un programa de trabajo que prevé el estudio geométrico de la variedad y la determinación de la métrica que describiría el campo gravitatorio y electromagnético a partir de la conexión propuesta.

3. M. JASCHEK y C. JASCHEK (Observatorio Astronómico, La Plata). *Magnitudes absolutas, colores, masas y duplicidades de las estrellas peculiares.*

Ampliando una investigación anterior sobre la magnitud absoluta de estos objetos (30ª reunión de la AFA) se analizan los parámetros físicos enumerados en el título. En el diagrama magnitud absoluta-color, estas estrellas resultan ser objetos normales de la secuencia principal. Los demás parámetros discutidos hacen muy probable que sean además estrellas de polo.

4. C. JASCHEK y M. JASCHEK (Observatorio Astronómico, La Plata). *Observaciones fotométricas de gamma Equulei.*

Esta estrella de espectro peculiar fue observada fotoeléctricamente en azul y en amarillo. Se observaron variaciones periódicas con una amplitud de 0m02 y un período del orden de 100 minutos. No es posible decidir si se trata de una variable tipo δ Scuti o de una variable peculiar con campo magnético.

5. M. E. FOGLIO (Inst. Fís. S. C. Bariloche). *Efecto de los gradientes de temperatura en la difusión de neutrones térmicos en medios moderadores.*

Se desarrolla la teoría de la difusión de neutrones en medios moderadores (sin absorción), con gradientes de temperatura. A tal efecto se ha aplicado la ecuación de colisión de Boltzmann. Debido a las diferencias con el caso de mezcla binaria de gases, se ha modificado ligeramente la separación de la ecuación respecto al método de Enskog.

Se han calculado los dos primeros términos de la serie de Enskog y, en la suposición de esferas rígidas, para núcleos y neutrones, se ha obtenido la ley de difusión en esa aproximación. Se han determinado las condiciones de contorno, cuando se tiene en cuenta el efecto mencionado.

Cuando la absorción del medio es pequeña, la generalización es inmediata. En tal caso se han calculado algunos ejemplos monodimensionales experimentalmente factibles.

6. C. G. BOLLINI (C. N. E. A.) y H. MUNCZEK (C. N. E. A. y F. C. E. y N., Bs. As.). *Interacción de partículas de spin 3/2 con el campo electromagnético.*

En las teorías de partículas de spin superior se exige que las funciones de onda cumplan ciertas condiciones suplementarias que aseguren una teoría basada en una representación irreducible de partículas de spin único. Dichas condiciones suplementarias se pueden obtener como ecuaciones de movimiento derivándolas de la formulación langrangiana (1), o bien se imponen como ecuaciones de vínculo (2). Ambos tratamientos dan el mismo resultado para el caso de la partícula libre, pero difieren cuando se introducen interacciones.

En el presente trabajo se aplica el segundo método a la interacción de partículas de spin 3/2 con el campo electromagnético. Se usa el formalismo de Rarita-Schwinger, en el cual las funciones de onda ψ_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) son cuadrivectores cuyos componentes son spinores de Dirac. Las condiciones suplementarias son

$$\gamma_\mu \psi_\mu = 0 \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial X_\mu} \psi_\mu = 0.$$

La ecuación de la partícula libre es

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial X_\mu} + m\right) \psi_\nu = 0,$$

compatible con las condiciones suplementarias.

para la partícula en interacción la ecuación que se obtiene es

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial X_\mu} + m\right) \psi_\nu - i\, e\, \Delta_{\nu\lambda} (\gamma_\mu A_\mu \psi_\lambda) = 0$$

$$\Delta_{\nu\lambda} = \delta_{\nu\lambda} - \frac{1}{3} \gamma_\nu \gamma_\lambda - \frac{1}{3\,\Box^2} \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial X_\mu} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial X_\lambda} + \frac{\partial}{\partial X_\nu} \gamma_\lambda \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial X_\lambda} \right)$$

también compatible con las condiciones suplementarias. Se ha calculado el factor giromagnético de estas partículas con el resultado $g = 2/3$, es decir, que poseen un momento igual a un magnetón de Bohr, en acuerdo con otras teorías (3).

Se ha calculado también la dispersión por un campo coulombiano, en primer orden, aplicando el método de Feynman. Los cálculos perturbativos de orden superior al primero presentan dificultades debido a que el factor $\frac{1}{\Box^2}$ en el operador $\Delta_{\nu\lambda}$ puede hacerse divergente.

(1) P. A. MOLDAUER and K. M. CASE, *Phys. Rev.* 102, 279 (1956).
(2) C. G. BOLLINI; *Nuovo Cimento* 6, 1035 (1957).
(3) F. J. BELINFANTE, Phys. Rev. 92, 997 (1953).

7. O. BRAVO y J. ROEDERER (C. N. E. A.). *Estudio de los métodos de medición de ionización en emulsiones nucleares.*

La medición de la ionización en las trayectorias de partículas cargadas que atraviesan una emulsión fotográfica nuclear, constituye una técnica poderosa para la determinación de la masa y de la energía de las mismas. Se dispone de tres magnitudes medibles directamente, que dependen de la ionización: el número de granos de *Ag* por unidad de longitud de la trayectoria (densidad de granos); la densidad de "blobs" (conglomerado de granos), y la longitud media de "gaps" (intersticios visibles entre los "blobs"). Cada una de estas magnitudes depende además, en mayor o menor grado, de factores externos (revelado, observador, estadística).

En el presente trabajo, realizado con el microscopio especial Koristka para emulsiones nucleares, se estudia la influencia de los factores externos, y se comparan los resultados con las predicciones de las diferentes teorías de la formación de imagen fotográfica. Se llega a la conclusión de que esta comparación no puede conducir a resultados terminantes, por cuanto se verifica que las magnitudes que se obtienen experimentalmente no son las que intervienen en las fórmulas teóricas.

8. G. BARÓ, J. PEYRE y P. REYES (C. N. E. A.). *Decaimiento de la plata 106 de 24 m.*

Con el propósito de aclarar el conocimiento de los estados excitados del Pd 106 se ha investigado el decaimiento del isómero de 24 de la Ag 106, que ya fuera estudiado por Bendel *et al.* (4) Estos autores le asignan un período de 24 $\pm$ 0,2 *m*, observando la presencia de un intenso rayo γ de 512 $\pm$ 3 Kev. En la presente investigación se han identificado rayos γ de 620 $\pm$ 5 Kev, 873 $\pm$ 5 Kev, 1045 $\pm$ 10 Kev, existiendo un fuerte indicio de un rayo de 1150 $\pm$ 20 Kev. La intensidad de estos rayos es mucho menor que la de 512 Kev, mostrando claramente que el nivel 1 + de la Ag 106 alimenta a otros niveles además del fundamental y del primer nivel excitado del Pd 106.

9. H. BOSCH y R. RADICELLA (C. N. E. A.). *Dos actividades de antimonio de número de masa 126.*

Se estudió el espectro gamma de actividades de antimonio ya conocidas (5-6) de 18,8 minutos y 6 días aproximadamente de período, obtenidas por irradiación de neutrones rápidos sobre Te^{120} fuertemente enriquecido. Se confirmó que la actividad de antimonio de aproximadamente 6 días de período es la misma que la obtenida a partir de la fisión de uranio.

(4) W. L. BENDEL, F. J. SHORE, H. N. BROWN and R. A. BECKER, *Phys. Rev.*, 90, 888 (1953).
(5) H. BOSCH y H. MUNCZEK, *Phys. Rev. 106*, 983 (1957).
(6) FRAENZ, RADICELLA y RODRÍGUEZ, *Z. Naturf. 11a*, 1036 (1956).

De acuerdo con los resultados de la presente experiencia se asigna al antimonio de aproximadamente 6 días de período el número de masa 126 y se confirma que el antimonio de 18,8 minutos de período, también corresponde a este número de masa.

10. T. R. Gerholm (7) y H. E. Bosch (C. N. E. A.). *Estructura Nuclear del Tl^{203}.*

Se hace una colección sobre datos experimentales respecto de los parámetros que caracterizan los niveles exitados del Tl^{203}. A partir de estos datos se calculan las probabilidades de transición electromagnética, las que resultan en un acuerdo razonable con el modelo de capas. Sin embargo transiciones cuadrupolares eléctricas están favorecidas en un factor 10 mientras que la transición dipolar magnética *l* permitida está retardada en un factor 5. Se puede explicar una influencia o contribución a partir de movimientos colectivos, obteniéndose un acuerdo entre teoría y experiencia para un determinado valor de la tensión superficial efectiva. Las amplitudes de la función de onda correspondiente a la parte colectiva son pequeñas para afectar los elementos de matriz para las transiciones dipolares magnéticas.

Finalmente, es discutida la dependencia de la estructura nuclear en los elementos de martiz para la conversión correspondiente a la transición *d* ... 5½. La teoría ha predicho una considerable desviación de los valores de los coeficientes de conversión respecto de los existentes considerando al núcleo puntual. En este caso es observado un pequeño efecto de la finitud del núcleo.

11. H. E. Bosch y S. Abecasis (C. N. E. A. e Inst. Fis. La Plata). *Cálculo de rendimientos acumulativos en la fisión de uranio.*

Se presenta una fórmula de recurrencia que permite calcular la actividad de un nucleído que ocupa el n ésimo lugar en una cadena radioactiva proveniente de la fisión del uranio. Por otra parte se describe un método general para calcular el rendimiento acumulativo de dicho nucleído, mediante el planteo de un sistema de ecuaciones donde intervienen los datos experimentales.

12. B. Roederer y J. Roederer (C. N. E. A). *Exposición de un bloque de emulsiones fotográficas nucleares al haz neutro del Bevatron de Berkeley.*

Se describen los detalles de la exposición al haz neutro que emerge a 90° de un blanco de Be, bombardeado con protones de 6,2 Gev. En esta exposición se lograron flujos muchos mayores (en un factor 20) que en exposiciones anteriores, gracias a una adecuada solución del problema de ''shielding'' y colimación.

(7) Instituto de Física de la Universidad de Uppsala, visitante en la C. N. E. A., Argentina.

Tn este bloque se están estudiando las interacciones de mesones K neutros, de vida larga, presentándose los resultados obtenidos hasta la fecha. Debido a las dimensiones apreciables del bloque ($4{,}3 \times 6 \times 27$ cm^3), puede analizarse por primera vez la radiación gamma emitida por el blanco, estudiando la cascada electrónica que se propaga a través del bloque. Asimismo se determina el flujo y el aspecto de los neutrones de evaporización del blanco. La baja energía ($\overline{E} = 110$ Mev) de éstos permite individualizar con relativa facilidad las interaciones de los mesones K^0.

13. V. Grunfeld (Inst. Fis. de S. C. Bariloche). *Tratamiento cuántico del efecto Raman externo.*

El efecto Raman externo proviene de pequeños movimientos de moléculas en cristales, en particular moléculas orgánicas, y abarca un rango de frecuencias entre 50 cm^{-1} y 150 cm^{-1}, aproximadamente. El tratamiento semiclásico del problema hecho por Rousset, que considera las moléculas sometidas a un potencial elástico, ha sido reformulado cuánticamente, usando la ecuación de Schrödinger expresada con los parámetros de Euler, y haciendo ciertas suposiciones que justifican esta aproximación [1].

Se ha hecho el cálculo de perturbaciones para determinar las autofunciones hasta el primer orden, y los niveles de energía hasta el segundo. Se han determinado también los elementos de matriz del momento dipolar eléctrico, y en base a los números cuánticos que aparecen en el tratamienlíneas, se ha hecho una primera regla de selección que permite clasifisar las líneas.

14. L. Falicov (Inst. Fis. S. C. Bariloche). *Sobre fenómenos de emisión y dispersión de paquetes de fotones.*

Se trata de encarar un formalismo que permita el tratamiento global de paquetes cuánticos de ondas electromagnéticas. Se necesita para ello un criterio de clasificación de tales paquetes lo cual se consigue con la introducción de un campo clásico asociado. Son estudiados ciertos tipos de paquetes en general y en especial paquetes con uno y dos fotones.

Se usan estas consideraciones generales para el tratamiento en especial de la emisión de un fotón y el efecto Compton con paquetes de uno y de dos fotones.

El propósito final del trabajo es estudiar los fenómenos de interferencia y dispersión de paquetes en "status nascendi" y poder definir cuánticamente una longitud de coherencia.

Para ello se trata el fenómeno de emisión de dos átomos idénticos en igual estado de excitación y la dependencia del paquete resultante de la distancia que los separa.

15. E. Silberman y C. Carjuzaa (C. N. E. A.). *Método gráfico para determinar la distribución de concentraciones en columnas de difusión térmica.*

La introducción de una "longitud reducida" permite la construcción de un gráfico único en el que puede representarse la distribución de con-

---

[8] R. Slobodrian, XXIV reunión de A. F. A.

centraciones en cualquier columna de difusión térmica operada hasta alcanzar el equilibrio. El procedimiento es particularmente ventajoso para obtener una rápida visualización de la influencia de la longitud de la columna y de la concentración inicial sobre las concentraciones finalmente obtenibles.

16. M. A. de Benyacar; M. E. J. de Abeledo; C. L. de Pandolfi (Comisión Nacional de Energía Atómica). *Sobre un nuevo mineral de uranio de la zona de Ranquil-Có.*

Se ha estudiado el mineral de uranio fluorescente que aparece en muy pequeña proporción en fisuras, en muestras de yeso provenientes de la zona de Ranquil-Có, provincia de Mendoza.

Estudiando cristales microscópicos por medio de difracción de electrones y de rayos X se ha establecido: sistema cristalino: rómbico; celda elemental: a 7,04 *A*; *b* 17.48 *A*; *c* 18.12 *A*.

De acuerdo a los resultados del estudio óptico, difración de rayos X y de electrones y análisis espectroquímico, se trata de un nuevo silicato de uranilo complejo, perteneciente al grupo de las llamadas "micas" de uranio.

17. C. A. Mallmann (C. N. E. A. y F. C. E. N. Bs. As.). *Observaciones sobre la regla débil de Nordheim y la isomería en núcleos impar-impar.*

Se muestra que la regla débil de Nordheim mejora su acuerdo con la experiencia si se modifica escribiéndola

$$|j_\pi - j_\nu| \leq J \leq j_\pi + j_\nu \quad \text{si} \quad j_\pi + j_\nu + l_\pi + l_\nu = \text{impar.}$$

Todos los valores de J predichos parecen ser igualmente probables para spines de niveles fundamentales de núcleos: impar-impar.

Utilizando esta regla y la regla fuerte de Nordhein se explican los spines y la paridad de los isómeros impar-impar conocidos.

18. E. J. de Aisenberg y W. Scheuer (C. N. E. A.). *Sistemática de niveles excitados de núcleos par-par con $A \geqslant 226$.*

Se estudiaron sistemáticamente las características de los niveles excitados en núcleos par-par deformados, con $226 \leqslant A$. Se graficaron según N y Z las siguientes características de los núcleos: energía, momento angular y paridad del primer nivel excitado: relación entre la probabilidad reducida de transición experimental y la predicha por el modelo de la partícula independiente, para este nivel; cocientes entre las energías de los niveles de la banda rotacional fundamental y la del primer nivel excitado.

19. T. P. Suter (C. N. E. A.). *Curvas límites óptimas para espectómetros Kofoed-Hansen.*

El cálculo de las curvas límites se efectúa teniendo en cuenta el campo disperso medido experimentalmente. A los efectos de reducir al mínimo el desenfoque lateral producido por el campo disperso, se considera como óptima una curva de entrada no circular que anula dicho efecto a la entrada del instrumento y se elije la curva de salida que hace mínimo el efecto total. Se observa que la elección de la posición del detector no es crítica; lo es en cambio la de la constante $k = \cdot p/H_0 e$ del instrumento.

20. E. Roxin (C. N. E. A.). *Sobre el cálculo de parámetros nucleares del reactor RA-1.*

Se detallan los cálculos de las magnitudes críticas del reactor RA-1, y como aplicación de los valores del flujo obtenidos se calculan algunos parámetros. Se comparan los valores calculados con los obtenidos experimentalmente.

21. C. Domingo (C. N. E. A.). *Mediciones de secciones eficaces de materiales, realizadas con el reactor RA-1.*

Entre los primeros trabajos con el RA-1 figuran mediciones de secciones eficaces de diversos materiales. Se detalla el método usado y los primeros resultados obtenidos.

22. F. Alsina Fuertes (C. N. E. A.). *Sobre el origen de la inercia.*

Es sabido que la relatividad general, inspirada en el postulado de Mach sobre el origen de la inercia, no ha conseguido dar expresión a dicho postulado.

La aplicación de ecuaciones tipo Maxwell como ecuaciones del campo gravitatorio, lo que puede justificarse de diversas maneras, conduce en forma simple a la deducción de las ecuaciones fundamentales de Newton, que vinculan la masa con la aceleración.

23. H. Bosch, L. Lagatta, M. C. P. de Enquin y J. Suárez Etchepare (C. N. E. A.). *Investigaciones sobre el decaimiento de la Ag. 106* (8,3 d.).

Se realizó el estudio de las transiciones gamma provenientes de la desitnegración de la Ag. 106 de 8,3 días de período, con un espectrómetro de centelleo de un canal y un sistema de coincidencias con dos canales simples.

De los experimentos realizados con un espectrómetro de centelleo de un canal se han podido individualizar los rayos gamma provenientes de la Ag. 106 dados por otros autores. De acuerdo con el cuadro de coincidencias obtenidas, es preciso modificar el esquema de desintegración propuesto por Alburger Olbe.

ON THE ELASTIC SCATTERING OF 22 MEV ALPHA-PARTICLES BY AU

by J. J. GIAMBIAGI and H. MUNCZEK
C. N. E. A. and Facultad de Ciencias Exactas, Universidad de Buenos Aires

In the present note we calculate the elastic scattering of 22 Mev Alpha-particles (1) by Au using the W. K. B. method and a real potencial corresponding to a decreasing of the Coulomb repulsión.

The potencial used is

$$\text{(a)} \quad V(r) = \frac{Ze^2}{R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \text{ for } r < R; \qquad V(r) = \frac{2Ze^2}{r} \text{ for } r > R.$$

The Coulomb scattering for a point nucleus is given by

$$\sigma_c = |f_c(\vartheta)|^2$$

with

$$f_c(\vartheta) = \frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,P_l(\cos\vartheta)\,[e^{2i\eta_{lc}} - 1].$$

If we modify the potential inside the nucleus and calculate the phase shifts with the W. K. B. aproximation, the angular distribution function will be given by

$$f(\vartheta) = f_c(\vartheta) + \frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{l'}(2l+1)\,P_l(\cos\vartheta)\,[e^{2i\eta_l} - e^{2i\eta_{lc}}]$$

where l' is determined by

(1) N. S. WALL, J. R. REES and K. W. FORD, *Phys. Rev.* *97*, 726 (1955).

$$k^2 - \frac{2m}{\hbar^2}\frac{2Ze^2}{R} - \frac{(l'+1/2)^2}{R^2} = 0$$

and η_l is the new phase shift [2]

$$\eta_l = \eta_{lc} + \varphi_l = \eta_{lc} + \int^R \left[k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V(r) - \frac{(l+1/2)^2}{r^2} \right]^{1/2} dr - \int^R \left[k^2 - \frac{2m}{\hbar^2}\frac{2Ze^2}{r} - \frac{(l+1/2)^2}{r^2} \right]^{1/2} dr$$

m is the mass of the Alpha-particle.

With the potencial (a) φ_l is easily calculated analytically. The results of the calculations are shown in Figure 1.

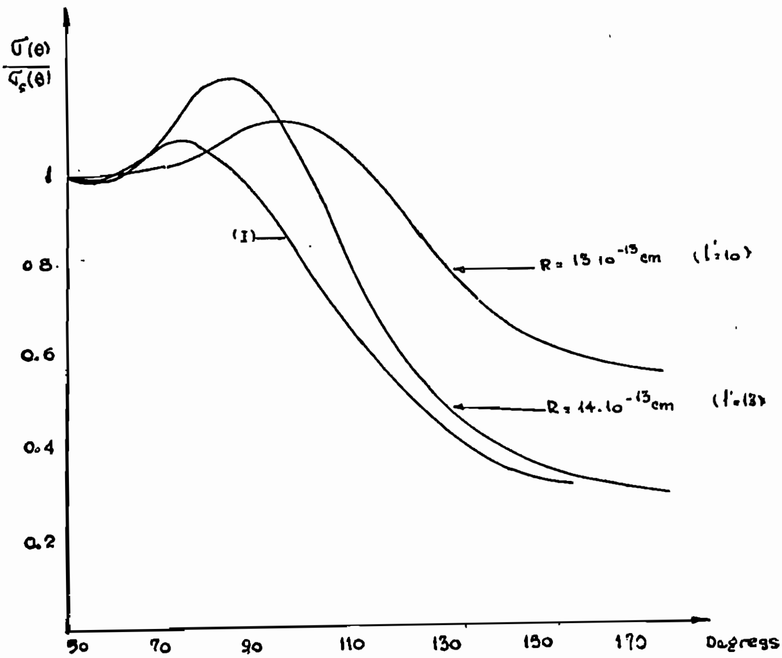

Figure 1

[1] (I) Experimental curve

[2] H. Marshall und G. Meyer, *Z. f. Phys.* *143*, 17-30 (1955).

We can see that qualitatively the behavior of the calculated cross section is satisfactory, even without the usual introduction of a complex potencial. However the value of the interaction radius R is too big compared with the commonly accepted one, specially, taking into account the results obtained from experiments on high energy electron scattering (3). In this connection, we should emphasize that the potential (a) does not represent a definite charge distribution, but is instead a phenomenological potential including the nuclear interactions.

In a previous (umpublished) calculation (4), Ford and Wheeler using a W. K. B. approximation and an attractive potential inside the nucleus found curves which decreased too rapidly with increasing angles. This fact can be attributed to the particular potential they used.

The authors are indebted to Miss Hebe Paolo for help in numerical calculation.

BIBLIOGRAFIA

P. B. FISCHER, *Arithmetik*, Sammlung Göschen vol. 47, 3ª edición, 19 figuras, 152 páginas, 1958 (2,40 marcos).

Es la tercera edición, sin cambios, de la obra original. Se trata de un libro elemental de aritmética, que aparte del mecanismo operatorio discute claramente los fundamentos y las propiedades formales de las distintas operaciones. El índice dará una idea del contenido: 1. La operación de contar y los números; 2. Los números naturales (operaciones con ellos); 3. Los números enteros (con noticia histórica sobre la introducción de los números negativos); 4. Los números racionales (fracciones ordinarias y decimales); 5. Los números reales (cortaduras de Dedekind, cálculo de raíces, logaritmos); 6. Los números complejos.

En un apéndice se trata un poco de combinatoria, binomio de Newton y matemática financiera.

L. A. Santaló

---

(3) HOFSTADTER, *R.*, *Revs. of Modern Phys*, *28*, 214 (1956).

(4) Cited by H. E. WEGNER, R. M. EISBERG and G. IGO, *Phys. Rev. 99*, 825 (1955).

K. P. Grotemeyer, *Analytische Geometrie*, Sammlung Göschen, vol. 65/65 *a*, 73 figuras, 199 páginas, 1958 (4,80 marcos).

La geometría analítica es tratada por el método vectorial, combinado con el cálculo de matrices, todo llevado a cabo con mucha habilidad y buen criterio selectivo, tanto para poner de manifiesto la ventaja del método, como para unificar resultados y dar elegancia al formulismo.

Empieza con la exposición de los elementos necesarios de álgebra vectorial, primero de manera intrínseca y luego mediante coordenadas, haciendo después aplicación de ello a la geometría analítica lineal (rectas y planos). Tras un capítulo sobre la esfera, se estudia el cálculo de matrices a través de las transformaciones lineales, con especial atención a las transformaciones afines y a los movimientos.

La teoría de cuádricas es tratada con detalle (clasificación, polinomio característico, reducción a la forma canónica, invariantes, secciones circulares, etc.).

En la última parte se da una introducción a la geometría proyectiva del espacio, con particular atención a los distintos métodos de generación proyectiva de las cuádricas. Varias notas históricas complementan distintos puntos de la obra, que resulta en conjunto muy atractiva, clara y recomendable.

L. A. Santaló

S. Valentiner, *Vektoren und Matrizen*, Sammlung Göschen, vol. 354/354 *a*, octava edición, 35 figuras, 198 páginas, 1958 (4,80 marcos).

Se trata de la octava edición del Análisis Vectorial de Valentiner, en la cual se han añadido, como importantes complementos, una parte sobre matrices y un apéndice con ejercicios de cálculo vectorial.

La parte de matrices corresponde a unas 50 páginas y en ellas está incluído, como caso particular del cálculo de matrices, la parte de cálculo de diadas de las ediciones anteriores. Contiene la parte elemental de las operaciones con matrices y varias de sus aplicaciones, principalmente a la solución de sistemas de ecuaciones lineales y problemas relacionados.

El apéndice de ejercicios, debido al Dr. König, comprende algunos ejemplos numéricos de las operaciones con vectores y sus aplicaciones a la geometría y a la física. Esta parte, que comprende 42 ejercicios con la correspondiente solución, ha de ser muy útil para ejercitar al lector en el uso y práctica del álgebra y análisis vectorial.

L. A. Santaló

W. Haack, *Darstellende Geometrie* vol. I, Sammlung Göschen, vol. 142, 2a. edición, 120 figuras, 113 páginas, (2,40 marcos).

Se trata de la segunda edición del primer volumen de un conjunto de tres que constituye un excelente tratado de Geometría Descriptiva (los volúmenes II y III corresponden a los vol. 113 y 114 de estos Sammlung Göschen).

Este volumen contiene un primer capítulo sobre los distintos métodos de representación (proyección central, paralela, ortogonal caballera y axonométrica). En los demás capítulos el contenido es el siguiente: Cap. II: Puntos, rectas y planos (determinación de estos elementos, giros, abatimientos, figuras planas); Cap. III: Intersecciones de rectas y planos (intersecciones, proyecciones, ángulos, distancias, cambios de planos de referencia); Cap. IV: Poliedros (intersecciones con planos y rectas y entre si); Cap. V: Afinidad (aplicaciones de la afinidad, principalmente a la construcción de elipses proyecciones de circunferencias dadas).

Debe mencionarse también una interesante introducción sobre la historia y evolución de la Geometría Descriptiva.

L. A. Santaló

K. Strubecker, *Differentialgeometrie* II, *Theorie der Flächenmetrik*, Sammlung Göschen vol. 1179/1179 *a*, 195 págs. Walter de Gruyter & Co, Berlin 1958, D M 4,80.

El vol. I de esta Geometria Diferencial apareció como volumen 1113/1113 *a* de la colección Göschen en 1955 y trataba de la teoría de curvas planas y del espacio. El volumen actual trata de la geometría sobre una superficie y representación de superficies. El volumen III, que se anuncia como último de la obra, tratará de la curvatura de superficies.

El volumen que reseñamos contiene cuatro capítulos. El Cap. I trata de la métrica sobre una superficie (element de arco, curvas sobre una superficie, superficies con métrica singular), con aplicación a varias superficies especiales (esfera, superficies de revolución, helicoides, conos, cilindros, superficies desarrollables y alabeadas). Especial atención se dedica a los elementos imaginarios (líneas y parámetros isotropos).

En el Cap. II se estudia el análisis vectorial sobre una superficie (diferenciadores de Beltrami, gradiente de una función definida sobre una superficie, divergencia y rotor de un campo vectorial sobre una superficie, fórmulas de Green, problema de Dirichlet). Este capítulo puede ser de gran utilidad para quienes tengan interés por las aplicaciones de la geometría diferencial a la física.

El Cap. II está dedicado a la representación de superficies: representación general de una superficie sobre otra, representaciones conformes, representaciones de la esfera sobre un plano, aplicaciones a la cartografía.

El Cap. IV trata de las líneas geodésicas, curvatura geodésica y paralelismo de Levi-Civita.

Muchas notas, ejemplos y observaciones desparramadas a lo largo del texto, aumentan el interés del mismo, cuyo contenido supera al que podía esperarse dado su reducido tamaño.

L. A. Santaló

G. Hoheisel, *Augabensammlung zu den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen*, tercera edición, Sammlung Göschen, vol. 1059, 124 págs., Walter de Gruyter & Co., Berlín 1958, DM 2, 40.

Se trata de la tercera edición, con ligeras modificaciones y algunos añadidos, del volumen del mismo título de la colección Göschen. El índice es el siguiente: Cap. I: Ecuaciones diferenciales de primer orden casos de integración inmediata, la ecuación general de primer orden, soluciones singulares, transformacines de contacto, comportamiento "en grande" de las soluciones, puntos singulares. Cap. II: Ecuaciones de orden superior (tipos integrables, ecuaciones lineales, integración por series, operadores). Cap. III: Ejercicios sobre ecuaciones en derivadas parciales: ecuaciones de Pfaff, ecuación general de primer orden con dos variables, ecuaciones integrables con n variables, sistemas de ecuaciones en derivadas parciales).

Tras algunas indicaciones generales, en cada caso se proponen numerosos y bien seleccionados ejercicios, siguiendo luego las indicaciones para su solución. Es, sin duda, un complemento muy útil para cualquier texto o curso universitario de Análisis o más especialmente, de Ecuaciones Diferenciales.

L. A. Santaló

P. H. LOZBEYER, *Vierstellige Tafeln zum praktischen Rechnen in Unterricht und Beruf*, 17ª edición, Walter de Gruyter & Co., Berlín 1958, 45 págs.

El contenido de esta obra es muy variado, pero seleccionado de manera que pueda ser útil a un público de tendencias diversas. Contiene, entre otros datos complementarios, lo siguiente: *a*) Cuadrados, cubos, raíces cuadradas y cúbicas de 0 a 10, décima a décima; *b*) tablas trigométricas naturales (de 6 en 6 minutos); *c*) tablas de mortalidad y tablas para el cálculo de tantos por ciento; *d*) valores de algunas constantes matemáticas y físicas; *e*) sistema periódico de los elementos; *f*) logaritmos de números (de 1 a 1000) y de funciones trigométricas; *g*) algunas fórmulas importantes de áreas, volúmenes, series, geometría analítica, cálculo diferencial e integral.

La disposición de las tablas hace que este contenido, con aproximación suficiente para los usos ordinarios, quepa dentro del reducido tamaño (45 págs) de las mismas.

L. A. Santaló

H. G. EGGLESTON, *Problems in Euclidean space: Application of convexity* International series of monographs in pure and applied mathematics, vol. 5; Pergamon Press Ltd. London, 1957; 165 págs.

La noción de convexidad aparece en ramas muy diversas de la matemática. En su forma más estricta, ella da origen a la geometría de las figuras o cuerpos convexos, con sus propiedades peculiares, muchas de ellas interesantes y no fáciles, como son, por ejemplo, las propiedades extremales y las de recubrimiento. En este hermoso libro se dan unos ejemplos concretos de problemas notables sobre conjuntos convexos del plano y del espacio euclidiano, problemas de características muy diferentes, que pueden servir de modelo entre la gran variedad de cuestiones que en este campo se plantean.

El Cap. I se titula "Problemas en los cuales la convexidad es usada por analogía o en cuestiones subsidiarias". Se tratan, como modelo, tres problemas. El primero se refiere a un análisis detallado sobre lo que puede decirse de los conjuntos abiertos que son intersección de una sucesión de conjuntos conexos y abiertos. El segundo se refiere al siguiente problema de Ulam: ¿es posible aproximar todo homeomorfismo del plano sobre si mismo mediante homeomofirmos de la forma $x' = f(x,y)$, $y' = y$ o bien $x' = x$, $y' = f(x,y)$? El autor analiza problemas análogos para figuras limitadas, en particular el cuadrado y conjuntos parciales del mismo. El problema número tres se refiere a las relaciones entre la medida lineal de un conjunto del plano (supuesta finita) y el mínimo de la medida de la proyección del mismo sobre rectas del plano. El resultado y la dificultad de llegar a él dependen de si el conjunto de partida se supone únicamente medible, o si se exige que sea conexo o si se supone que se trata de un arco. Los razonamientos son largos y penosos, sin que el resultado pueda considerarse completo; el autor señala varias cuestiones que quedan por resolver.

El Cap. II se titula "Problemas que pueden reducirse a problemas sobre conjuntos convexos". Trata de problemas relacionados con la conjetura, todavía no resuelta, de Borsuk: todo conjunto del espacio euclidiano de n dimensiones de diámetro D, puede cubrirse con $n+1$ conjuntos de diámetro menor que D. Se da una demostración para $n = 3$, bastante complicada, pero que el autor sospecha que sea susceptible de ser generalizada a un mayor número de dimensiones.

El Cap. III lleva por nombre "Problemas sobre conjuntos convexos" y se estudian dos problemas. El primero trata de la aproximación de conjuntos convexos del plano por polígonos convexos, generalizando resultados anteriores de Dowker y Fejes Toth. Se obtiene, como resultado más importante, que dado un conjunto convexo X y un polígono convexo Y de número de lados $\leq n$, representando por $D(X, Y)$ el área del conjunto de puntos que pertenecen a X o a Y, pero no a los dos a la vez, la función inf $D(X, Y)$ es una función convexa de n. El segundo problema se refiere a algunas propiedades geométricas, respecto a las cuales los triángulos son las figuras convexas extremales. Se tratan varios problemas relacionados con resultados de E. F. y R. C. Buck y Besicovitch.

El Cap. IV se titula "Problemas relacionados con la estructura de subclases de la clase de conjuntos convexos". La parte a) se refiere a conjuntos de anchura constante y la parte b) a problemas con triángulos circunscritos a conjuntos convexos o al cubrimiento con triángulos equiláteros. En ambas partes se tratan importantes problemas, con resultados en su mayoría originales del autor.

En resumen, el librito resulta en su conjunto singularmente atractivo, tanto por la originalidad de exposición, en forma de problemas concretos cuya demostración y contenido ilumina muchas otras cuestiones, como por los problemas mismos, los resultados obtenidos y las indicaciones oportunas a cuestiones no resueltas. Todo ello era de esperar, pues las contribuciones del Dr. H. G. Eggleston en el campo de los conjuntos convexos son bien notables y conocidas.

L. A. Santaló

EL TEOREMA DE ZORN Y LA EXISTENCIA DE FILTROS E IDEALES MAXIMALES EN LOS RETICULADOS DISTRIBUTIVOS

por GREGORIO KLIMOVSKY

El objeto de este trabajo (¹) es demostrar que los dos siguientes enunciados son lógicamente equivalentes al teorema de Zorn (y, por consiguiente, al axioma de elección):

E_1: *En todo reticulado distributivo con primer elemento, todo filtro está contenido en un ultrafiltro.*

E_2: *En todo reticulado distributivo con último elemento, todo ideal está contenido en un ideal maximal.*

Para discutir esta equivalencia, vamos a suponer conocidas las nociones de «reticulado», «reticulado distributivo», «álgebra de Boole», «filtro», «ideal», «ultrafiltro» (o «filtro máximal») e «ideal maximal», así como todas las nociones habitualmente ligadas a aquéllas (²).

Es conocido el hecho de que el teorema de completidad de Gödel-Malcev para el cálculo proposicional bivalente general (³) es equivalente a la afirmación de que, en toda álgebra de Boole, todo filtro está contenido en un ultrafiltro. Si la presunción de que el teorema de completicidad de Gödel-Malcev es más débil que el teorema de Zorn resulta cierta, entonces el paso dado trasladando la existencia de ultrafiltros desde las álgebras de

(¹) Presentado en la reunión de la UNIÓN MATEMÁTICA ARGENTINA del 22 de mayo de 1957.

(²) Por ejemplo, véase [5].

(³) o sea, el teorema que afirma que un conjunto consistente de fórmulas del cálculo proposicional "clásico" —o bivalente— es satisfactible. Ver [2]. La palabra "general" involucra que el número cardinal de las variables proposicionales puede ser cualquiera. Ver [4].

Boole hasta los reticulados distributivos con primer elemento constituye una generalización más fuerte que la afirmación original.

Vamos a ocuparnos exclusivamente del enunciado E_1, ya que el enunciado E_2 afirma lo mismo que el E_1, pero empleando términos duales.

La demostración de que en todo reticulado con primer elemento (y no sólo en los distributivos) todo filtro está contenido en un filtro maximal se efectúa fácilmente si se utiliza el teorema de Zorn como hipótesis, y no nos ocuparemos de ella por ser bien conocida. Por consiguiente, nos limitaremos a demostrar que el enunciado E_1 implica lógicamente al teorema de Zorn.

En otro trabajo (4) hemos demostrado que el teorema de Zorn es equivalente al enunciado siguiente:

G: *En toda álgebra de Boole A, todo conjunto C de elementos de A, no contradictorio* (5) *en A, que esté contenido en un subconjunto B cualquiera de A, estará contenido en otro subconjunto C' de B, que también es no contradictorio en A, pero al que no puede añadirse ningún otro elemento de B sin que deje de ser no contradictorio en A.*

Para nuestro propósito bastará probar, pues, que el enunciado E_1 implica al enunciado G.

Sea entonces A un álgebra de Boole, B uno cualquiera de sus subconjuntos, y C un subconjunto de B que es no contradictorio en A. Si B tampoco es contradictorio en A, la demostración de G se logra haciendo $C'=B$. Resta por lo tanto considerar el caso en que B es contradictorio en A.

Consideremos el subreticulado D engendrado por B en A, es decir, el conjunto D de todos los elementos de A que cumplen las siguientes condiciones:

1) Los elementos de B están en D;

2) si a y b son elementos de D, $a \frown b$ es elemento de D (6);

(4) Ver [3].

(5) Un subconjunto de un reticulado distributivo con primer elemento "cero" 0 es contradictorio si contiene un subconjunto finito cuyo ínfimo es 0.

(6) Los signos «$\frown$» y «$\smile$» denotan las operaciones de ínfimo y supremo, respectivamente.

3) si a y b son elementos de D, $a \smile b$ es elemento de D;

4) ningún otro objeto es elemento de D, salvo en virtud de 1), 2) y 3).

Es obvio que para todo elemento de D existe al menos un subconjunto finito de B tal que, aplicando un número finito de veces las operaciones $\frown$ y $\smile$ a partir de elementos de tal subconjunto, resulta el elemento dado. Naturalmente, un mismo elemento puede obtenerse así a partir de diversos subconjuntos tales y, aún para cada uno de los subconjuntos puede haber diversas maneras de construir el elemento. Pero, por ser A un reticulado distributivo (ya que es un álgebra de Boole), en cada uno de esos casos el elemento podrá expresarse bajo la forma polinómica o «canónica»:

$$\bigsmile_{m=1}^{h} \bigfrown_{n=1}^{j(m)} a_{m,n}$$

donde h y $j(m)$ son números naturales no nulos, y los $a_{m,n}$ son elementos de B. Como B es contradictorio, el elemento O del álgebra de Boole A es también elemento de D, pues puede obtenerse como ínfimo de un número finito de elementos de B. Cuando consideremos una cualquiera de las expresiones canónicas que corresponden a un elemento nulo de D, supondremos suprimidos todos los monomios iguales a O.

De la definición de D resulta que este conjunto es un reticulado distributivo (respecto de las operaciones $\frown$ y $\smile$ de A) con primer elemento O.

Sea ahora C el subconjunto de B antes aludido. Por ser $C \subset B$ y $B \subset D$ (por la condición 1) de la definición de D) será $C \subset D$. Notemos que C es no contradictorio en el reticulado D (pues de lo contrario O podría expresarse en D —y por consiguiente en A— como ínfimo de elementos de C, lo que se opone a la no contradicción de C en A). Sea F el filtro engendrado por C en D, o sea, el conjunto de todos los elementos de D que sigan a ínfimos de un número finito no nulo de elementos de C; F existe y es propio en D, en virtud de la no contradicción de C en D. Pero, como hemos adoptado E_1 como hipótesis, resulta F estar a su vez contenido en un filtro maximal U de D. Notemos que $C \subset U$, por ser $C \subset F$. Definamos ahora $C' = U \frown B$. Vamos a mostrar que C' es aquél conjunto cuya existencia se afirma en el enunciado G.

Comencemos por notar que $C' \subset B$ en virtud de su definición. Además, como $C \subset U$ y $C \subset B$ será también $C \subset U \frown B$, o sea $C \subset C'$. Más aún, C' resulta ser no contradictorio en A, por no serlo en D ya que es subconjunto del filtro maximal U.

Queda por ver que C' no puede ampliarse en B sin dejar de ser no contradictorio en A. Para ello, consideremos un elemento cualquiera k de B que no esté en C'; tal elemento debe existir pues B contiene a C', pero B es contradictorio A mientras que C' no. Pero si k no $\in C'$, debe ser k no $\in U$, pues de lo contrario, al ser $k \in B$, sería $k \in U \frown B = C'$. Pero k es un elemento de D —pues $B \subset D$—. Luego k es un elemento del reticulado D que no pertenece al ultrafiltro U. Ello significa, debido a una conocida propiedad de los filtros maximales, que debe existir algún elemento p de U tal que $p \frown k = 0$. Consideremos uno cualquiera de tales p, y consideremos una cualquiera de sus formas canónicas. Se tendrá:

$$\left(\bigsmile_{m=1}^{h} \bigfrown_{n=1}^{j(m)} a_{m,n} \right) \frown k = 0$$

Pero como D es un reticulado distributivo, será

$$\bigsmile_{m=1}^{h} \bigfrown_{n=1}^{j(m)} (a_{m,n} \frown k) = 0.$$

Pero, para que un supremo sea igual a 0, deben ser iguales a 0 todos sus términos, de donde resulta que para todos los m desde 1 hasta h se tiene:

$$\bigfrown_{n=1}^{j(m)} (a_{m,n} \frown k) = 0.$$

Pero, por otro conocido teorema (7), en un reticulado distributivo todo filtro maximal es primo. Luego U es primo en D, o sea, si a y b son D y $a \smile b \in U$, $a \in U$ o $b \in U$. Como los $a_{m,n} \in D$ (pues $a_{m,n} \in B$), resulta $\bigfrown_{n=1}^{j(m)} a_{m,n}$ ser un D. Por con-

(7) Ver [5], pág. 111.

siguiente, alguno de los términos del supremo que nos da la expresión canónica de p debe ser elemento de U. Supongamos que sea $\overset{j(i)}{\underset{n-1}{\frown}} a_{i,n}$, donde $1 \leqq i \leqq h$. Será entonces $\overset{j(i)}{\underset{n-i}{\frown}} a_{i,n} \frown k = 0$. Pero observemos que cada uno de los $a_{i,n}$, por ser elementos de D que siguen a $\overset{j(i)}{\underset{n-1}{\frown}} a_{i,n}$, que es un elemento del filtro U, deben ser también elementos de U. Pero, como son además elementos de B —por definición de «forma canónica»—, resulta ser elementos de C'. Luego C', ampliado con k, se hace contradictorio en D y, por consiguiente, en A, pues contiene un número finito de elementos cuyo ínfimo con k es O. En consecuencia, C' no puede ampliarse en B sin dejar de ser no contradictorio en A, como queríamos demostrar.

SEMINARIO DE LÓGICA MATEMÁTICA.

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES DE BUENOS AIRES.

BIBLIOGRAFIA

[1] K. GÖDEL: *Die Vollständigkeit der Axiome der logischen Funktionenkalküle.* Monatschefte für Mathematik und Physik 37 (1930), p. 349-360.

[2] L. HENKIN: *Boolean representation through propositional calculus.* Fundamenta Mathematicae XLI, Fasc. 1 (1954), p. 89-96.

[3] G. KLIMOVSKY: *Tres enunciados equivalentes al teorema de Zorn.* Contribuciones científicas de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Bs. As., serie matemática, vol. II, Nº 1 (1956).

[4] A. MALCEV: *Untersuchungen aus dem Gebitq der mathematischen Logik.* Recueil Mathematique, n.s. 1 (1936), p. 323-336.

[5] A. MONTEIRO: *Filtros e Ideais.* Librería Boffoni. Tomos 1 y 2. Río de Janeiro 1948.

UNION MATEMATICA ARGENTINA

REUNIONES DE LOS DIAS 22 Y 24 DE MAYO DE 1957

Durante los días 22 y 24 de mayo de 1957, la Unión Matemática Argentina celebró las acostumbradas reuniones científicas de la Semana de Mayo, que esta vez tuvieron lugar en la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Nacional de La Plata.

Nombramiento del Prof. Wilhelm Blaschke como miembro honorario. — En la sesión del día 24, el presidente de la Union Matemática Argentina, Dr. Alberto González Domínguez, dió la bienvenida al Prof. W. Blaschke, que asistía a la reunión y después de señalar los méritos bien conocidos del mismo, anunció que se había acordado nombrarle miembro honorario de la Unión Matemática Argentina.

El Prof. Blaschke, de la Universidad de Hamburgo, ha estado un mes en Buenos Aires, dictando un ciclo de conferencias en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Las conferencias versaron sobre tópicos diversos de la teoría de cuerpos convexos, geometría de los tejidos y cinemática. También fué invitado el Prof. Blaschke por la Facultad de Ciencias de la Educación de San Luis (Universidad de Cuyo), pronunciando en dicha ciudad sendas conferencias.

Comunicaciones científicas. — Las comunicaciones científicas fueron presididas el día 22 por el Dr. Sagastume y Berra de la Universidad de La Plata y el día 24 por el Dr. F. H. Herrera de la Universidad de Tucumán.

Al finalizar las sesiones, dado que varias comunicaciones habían versado sobre lógica matemática, el Dr. Beppo Levi aprovechó la oportunidad para hacer unas interesantes reflexiones sobre Peano y sobre la historia y futuro de la matemática en general y de la lógica matemática en particular.

Los trabajos presentados fueron los siguientes:

1. M. S. Bruschi (Universidad de La Plata): *Nota sobre un axioma de elección débil.*

   Llamado casi-cerrado a un conjunto de números ordinales menores que Ω que intersecta todo cerrado cofinal con Ω, se demuestra que el axioma "$\aleph_1$ es menor o igual que la potencia del continuo" implica la existencia de una partición del conjunto de todos los ordinales menores que Ω en dos conjuntos casi-cerrados.

2. O. Cerceau (San Luis): *Un problema de propagación del calor en dos fuentes.*

3. M. S. Cotlar (Universidad de La Plata): *Observación sobre la condición de Suslin y la representación de los conjuntos (K).*

1) Definiendo un concepto de "ramificación" de conjuntos finitos, se prueba que la condición de Suslin equivale a la existencia de una función cuyos valores son conjuntos finitos y que preserva la noción de ramificación. El teorema se extiende a condiciones–S generalizadas para alfas cualesquiera.

2) Sea $A = \{ x \}$ el conjunto de las sucesiones $x = \{ x_0, \ldots, x_\lambda \ldots \}$ $0 \leq x_\alpha < \Omega$:tales que: a) $0 \leq x_\alpha \leq 1$, b) $x_a = 0,1$ implica $x_b = 0$ para $b > a$. $> A$, ordenado lexicográficamente, es un conjunto totalmente ordenado. En A opera además un orden parcial de (secciones). Se prueba que los ideales de A, respecto del orden parcial, dan la representación de conjuntos generales, entre ellos los conjuntos (K).

A todo ideal de A se asocia una operación de conjuntos. Se prueba que si dos ideales dan origen a la misma operación entonces verifican simultáneamente la condición de Souslin.

4. ENZO R. GENTILE (Universidad de La Plata y Buenos Aires): *Un teorema sobre anillos π - regulares.*

En esta nota damos un teorema sobre anillos π - regulares que generaliza un resultado de IKEDA y NAKAYAMA sobre anillos regulares.

Un anillos A es π - regular (según N. Mac Coy) si para todo $a \varepsilon A$ existen $x \varepsilon A$ y un número natural $n = n(a)$ tal que $a^n x a^n = a^n$.

Definimos en A la siguiente condición:

$(a^{xx} \pi)_i$: Para todo $a \varepsilon A$ existe un número natural $n = n(a)$ tal que todo A - homomorfismo $\varepsilon : I \longrightarrow A/L$ del ideal a izquierda I engendrado por a^n en (o sobre) el A–modulo cociente A/L de A por el ideal de izquierda L, se reduce a una multiplicación a derecha por un elemento de A es decir existe $c \varepsilon A$ tal que para todo $y \varepsilon I$ es $\sigma(y) = y . c$ (mod. I).

Probamos el siguiente teorema:

Teorema: Un anillo con identidad es π - regular si y solo si satisface la condición $(a^{xx} \pi)_i$.

Si n es fijo e igual a uno para todo elemento de A, obtenemos el teorema de Ikeda y Nakayama.

5. ENZO R. GENTILE (Universidad de La Plata y Buenos Aires): *Resolubilidad de ecuaciones en anillos inyectivos.*

Un anillo A se dice *inyectivo* si para todo A–homomorfismo $\sigma : I \to A$ del ideal a izquierda I de A en A existe un $c \varepsilon A$ tal que para todo $y \varepsilon I$ es $\sigma (y) = y . c$. Estudiamos aquí la resolubilidad de ecuaciones en anillos inyectivos y probamos para los mismos algunos teoremas de O. VILLAMAYOR (Revista Matemática Cuyana 1, (1955), 1-40).

6. A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ y R. SCARFIELLO (Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, de la Universidad de Buenos Aires): *Sobre la multiplicación de distribuciones causales.*

Se da una definición de producto multiplicativo de distribuciones causales, o "deltas de Feynman", que aparecen en la solución por iteración de la ecuación de Schrödinger, en electrodinámica cuántica.

7. JUAN B. KERVOR: *Observaciones sobre el residuo integral de Cauchy y su aplicación a un teorema de Mittag-Leffler.*

La comunicación fué enviada, pero no expuesta por inasistencia del interesado.

8. G. S. KLIMOVSKY (Universidad de Buenos Aires y U. del Litoral): *Sobre un problema de G. Kurepa.*

En la página 100 de su tesis (1935), G. Kurepa plantea un problema sobre sucesiones ramificadas, todavía abierto: demostrar la existencia de una sucesión ramificada distinguida homogénea de rango ω_1. Esta nota tiene por objeto construir un tal ejemplo con una propiedad de homogeneidad un poco más fuerte que la solicitada por Kurepa. La construcción se apoya en un axioma de elección de tipo débil. Mediante una adecuada ordenación se obtiene un conjunto (K) completo y homogéneo esencialmente diferente de los contínuos de Hausdorff $\theta\omega^{\alpha}$ y por lo tanto diferente de todos los contínuos homogéneos completos conocidos hasta el presente.

9. G. S. KLIMOVSKY (Universidad de Buenos Aires y U. del Litoral): *Equivalencia entre el teorema de Zorn y la existencia de ultrafiltros en reticulados distributivos con primer elemento.*

Esta equivalencia se establece utilizando un resultado anterior, por el que el teorema de Zorn es equivalente a la existencia de subconjuntos maximales no contradictorios dentro de subconjuntos cualesquiera de un álgebra de Boole. En este caso basta considerar el reticulado distributivo engendrado por un subconjunto inconsistente B de un álgebra de Boole, y considerar en él los ultrafiltros engendrados por subconjuntos C de B, C no contradictorio. Si U es el ultrafiltro, $U \cap B$ es el conjunto maximal no contradictorio que contiene a C.

10. J. REY PASTOR (Universidad de Buenos Aires): *Resolución aproximada de autoproblemas de derivadas parciales de 2º orden.*

11. R. S. RICABARRA (Universidad de La Plata): *Teoría de un tipo ordinal.*

Se demuestran diversas propiedades del tipo ordinal de Kurepa-Denjoy, vinculado al problema de Suslin (ver A. Denjoy, Enumaration Transfine, tomo III). Se demuestra su minimalidad, anticompletidad e irreducibilidad (profundizando resultados de Kurepa, Acta Math. 1943) y se dan dos caracterizaciones cardinales. La segunda dice que el tipo en cuestión es el único tipo irreducible (K) con lagunas, llevando por tanto el estudio de los irreducibles (K) al terreno de los (K) completos. Se hace una teoría de insertores y se plantea la teoría de los tipos (K) anticompletos generales, así como diversas cuestiones en la teoría general de los conjuntos (K).

12. L. A. SANTALO (Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires): *Unas propiedades sobre representación conforme de superficies.*

Se demuestra el siguiente teorema de geometría diferencial local: Dada una representación conforme (local) de la superficie S sobre S', la correspondencia entre los centros de curvatura geodésica de las curvas de S en un punto P y los de las curvas correspondientes de S' en P', es una proyectividad. De este teorema se deducen varias consecuencias.

13. O. A. *Varsavsky* (Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, de la Universidad de Buenos Aires): *Cuantificadores y equivalencias.*

Se generalizan y completan los resultados de Halmos y Monteiro sobre representación funcional de álgebras de Boole con cuantificadores. El método consiste en trabajar sistemáticamente en el espacio dual del álgebra, según Stone, en el cual un cuantificador resulta ser la operación de saturar conjuntos con respecto a una equivalencia abierta y cerrada. De esta manera se simplifican las demostraciones y aparecen naturalmente generalizaciones a casos no booleanos.

14. E. H. ZARANTONELLO (Departamento de Investigaciones Científicas, Universidad Nacional de Cuyo): *Funciones conjugadas en el espacio.*

La transformación de Hilbert

$$H\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} \varphi\,(e^{is}) \operatorname{cotg} \frac{t-s}{2}\, ds,$$

que transforma la parte real de los valores de contorno de una función analítica en el círculo unitario de la parte imaginaria, puede también ser concebida como la transformación que proporciona la derivada tangencial de una function armónica a partir de su derivada normal en la frontera (y viceversa). De esta forma la transformación de Hilbert admite una inmediata extensión al espacio (de cualquier dimensión) y a cualquier dominio, simplemente concibiéndola como el par de relaciones $\Phi = R\,\varphi$, $\varphi = \mathcal{H}\,\Phi$, enter la derivada normal $\varphi = \partial\, h / \partial\, n$ de una función armónica y su gradiente superficial $\Phi = \Delta\,\sigma\, h$ en la frontera. Las operaciones R y $\mathcal{H}$ reciben el nombre de Transformaciones de M. Riesz. Se advierte con facilidad que formalmente las transformaciones R y $\mathcal{H}$ deben ser dadas por operadores integrales singulares

$$R\,\varphi = \int_{\Sigma} \varphi\,(Q)\, R\,(P,Q)\, d\sigma_Q \quad , \quad \mathcal{H}\,\psi = \int_{\Sigma} \Phi\,(Q)\, \mathcal{H}\cdot(P,Q)\, d\sigma_Q$$

con núcleos vectoriales

$$R\,(P,Q) = \nabla_{\sigma P}\, N(P,Q) \quad , \quad \mathcal{H}\,(P,Q) = div_{\sigma Q}{}^{-1} \left[\frac{\partial^2\, G\,(P,Q)}{\partial n_Q\, \partial n_P}\right],$$

donde $N(P,Q)$ y $G(P,Q)$ son las funciones de Neumann y Green respectivamente del dominio. En el caso de la esfera unitaria tridimensional resulta

$$\mathcal{R}(P,Q) = T(P,Q)\left[\frac{1}{|P-Q|^2}+\frac{1}{2|P-Q|}+\frac{1}{2(2+|P-Q|)}\right]\frac{|P+Q|}{4\pi}$$

$$\mathcal{H}(P,Q) = T(Q,P)\left[\frac{1}{|P-Q|^2}-\frac{1}{2|P-Q|}+\frac{1}{2(2+|P-Q|)}\right]\frac{|P+Q|}{4\pi}$$

donde $T(P,Q)$ representa el vector unitario tangente a la esfera en el punto P y que apunta hacia el punto Q. Expresiones similares se encuentran para dimensiones mayores. Estas fórmulas muestran claramente el carácter singular de las transformaciones. El caso de dominios generales requiere un estudio detallado, no completo aun, de las funciones de Green y Neumann en la frontera y su vecindad.

Entre otras, las siguientes propiedades de la transformación de Hilbert son susceptibles de ser extendidas a las transformaciones de Riesz para la esfera.

a. $H^* = H^{-1}$ (H^* es la transformación adjunta de H)

b. $||H\varphi||_2 = ||\varphi||_2$

c. H transforma $L^p(-\pi,\pi)$ en $L^p(-\pi,\pi)$ y $||H\varphi||_p \leq C_p ||\varphi||_p$

d. $(\varphi, H\varphi) = 0.$

e. Si $\varphi \varepsilon \, Lip\ \nu$ entonces $H\ \varphi \varepsilon \, Lip\ \nu$

En efecto, la propiedad *a.* requiere en el caso de la esfera el cambio del signo de igualdad por el de congruencia módulo operadores absolutamente continuos, como se desprende de las fórmulas para $\mathcal{R}(P,Q)$ y $\mathcal{H}(P,Q)$. La isometría afirmada por *b.* debe ser relajada a $||\varphi||_2 \leq ||\mathcal{R}\varphi||_2 \leq 2\,||\varphi||_2$. En cuanto a *c.* sigue tal cual, siempre que las normas se interpreten en los respectivos espacios. La proposición *d.*, que afirma la ortogonalidad entre la derivada radial y la derivada rotacional de una función armónica, sigue, conservando este sentido y puede ser sintetizada en una fórmula similar que tiene en cuenta todas las rotaciones de la esfera. Finalmente *e.* permanece inalterada; de ella sigue que si la derivada normal, o el gradiente superficial, de una función armónica satisface en la frontera una condición de Lipschitz entonces el gradiente espacial satisface una condición de Lipschitz de mismo grado en la esfera cerrada.

Presumiblemente las propiedades *a.* — *e.* siguen siendo válidas en alguna forma para dominios más generales. Los esfuerzos han sido especialmente dirigidos a la demostración de *c.*, la cual se ha logrado solamente para el caso $p = 2$. Se ha sin embargo verificado que la demostración de *c.* es en cierto modo independiente de la ecuación $\nabla^2 h = 0$.

JORNADAS MATEMATICAS

CELEBRADAS EN BAHIA BLANCA DURANTE LOS DIAS 24, 25 Y 26 DE OCTUBRE DE 1957, BAJO LOS AUSPICIOS DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Bajo los auspicios de la Universidad Nacional del Sur y con la asistencia de delegados de las Universidades de Buenos Aires, La Plata, Cuyo y Tucumán, la U M A celebró unas jornadas matemáticas en la ciudad de Bahía Blanca durante los días 25 al 26 de octubre de 1957. Ellas se realizaron de acuerdo con el siguiente detalle:

Jueves 24, a las 16 horas. Recepción por las autoridades de la Universidad Nacional del Sur. A continuación tuvo lugar la sesión inaugural, con un discurso del Rector Dr. Hernán Zucchi, quien se refirió a la importancia de las ideas matemáticas y a la permanencia de las mismas a través de los tiempos. Contestó el presidente de la U M A Dr. Alberto González Domínguez agradeciendo a la Universidad del Sur la gentileza de auspiciar la celebración de las jornadas. A continuación disertó el Dr. Mischa Cotlar de la Facultad de Ciencias de Buenos Aires, sobre *Operadores con núcleos singulares,* haciendo una extensa y completa puesta al día del tema.

Viernes 25, a las 9 horas. Tiene lugar la presentación y discusión de las siguientes comunicaciones:

S. Sispanov (Facultad de Ingeniería, San Juan), *Una transformación conforme para el caso de un cilindro circular en una corriente plana.*

R. Panzone y M. Cotlar (Facultad de Ciencias Exactas de Buenos Aires), *Una generalización del teorema de Riesz-Marcinkiewicz con aplicación a las integrales fraccionarias.*

J. Santos y H. Arango (Seminario de Computadores, Universidad N. del Sur, Bahía Blanca), *La operación ''puente'' del álgebra de Boole.*

R. Scarfiello (Facultad de Ciencias de Buenos Aires y Comisión N. de la Energía Atómica), *Sobre una ecuación con conmutadores.*

F. Toranzos (Facultad de Ciencias Económicas, Buenos Aires), *Dos cuestiones econométricas:* a) *Sobre el concepto de utilidad y la determinación estadística de las curvas de indiferencia;* b) *Números índices con ponderación evolutiva.*

E. Zarantonello (Universidad N. de Cuyo), *Gradiente y divergencia.*

A. González Domínguez (Facultad de C. Exactas, Buenos Aires), *Sobre algunas integrales singulares.*

J. C. Merlo (Facultad de C. Exactas de B. Aires), *Sobre integrales de Fourier de Distribuciones.*

Además fueron presentadas por su título, por haber sido enviadas pero no haber concurrido los autores, las siguientes comunicaciones:

I. Marín (Facultad de C. Exactas de Buenos Aires) *Obtención y significado del problema dual de programación lineal.*

J. Rey Pastor (Facultad de Ingeniería y Fac. C. Exactas, B. Aires), *Cálculo de reactores.*

Viernes 25, 15,30 horas. Debate sobre *''Problemas de la Enseñanza de la Matemática''*, dirigido por el Dr. L. A. Santaló, en el cual toman parte los Dres. F. Toranzos, M. Sadosky, O. Varsavsky, G. Klimosky, Ing. J. M. Arango, Ing. R. Scarfiello y Prof. Srta. Guzmán. Se propuso interesar a la U M A para que estudiara los medios que parecieran más convenientes para fomentar la actividad matemática de los profesores de enseñanza secundaria, exponiéndose varios proyectos e ideas al respecto (celebración de cursillos, publicación de una revista elemental, ciclos de conferencias en mesa redonda, etc.).

Sábado 26, a las 9 horas. Continúa la presentación y discusión de comunicaciones, de acuerdo con el siguiente programa:

M. GUTIÉRREZ BURZACO (Fac. de Ciencias Exactas de Buenos Aires), a) *Extensión de funciones que definen continuos Peanianos;* b) *Sobre retractos por deformación.*

A. MONTEIRO (Instituto de Matemáticas, Bahía Blanca), *Algebras de Brouwer con condiciones de normalidad.*

A. MONTEIRO y O. VARSAVSKY (Instituto de Matemáticas, Bahía Blanca), *Representación de álgebras de Brouwer monádicas.*

R. RICABARRA, (Instituto de Matemáticas, Bahía Blanca), *Representación de una clase de cuadros ramificados de conjuntos.*

L. A. SANTALÓ (Facultad de Ciencias Exactas, Buenos Aires), *Algunas desigualdades referentes a curvas convexas.*

W. DAUB (Universidad N. del Sur, Bahía Blanca), *Unas aplicaciones de la fórmula de Faa di Bruno.*

O. VARSAVSKY (Instituto de Matemáticas, Bahía Blanca), *Individuos despreciables.*

Por la tarde del día 26, clausuradas las sesiones científicas, tuvo lugar la Asamblea General de la U M A, que detallamos a continuación.

ASAMBLEA GENERAL Y CAMBIO DE AUTORIDADES DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

El día 26 de octubre de 1957, siendo las 16 horas y en el local del Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional del Sur, en la ciudad de Bahía Blanca, se reune la Asamblea General de socios de la Unión Matemática Argentina, convocada oportunamente y de acuerdo con sus Estatutos, bajo la presidencia del titular Dr. Alberto González Domínguez.

En ausencia del Secretario actúa como tal el Vicepresidente Dr. Luis A. Santaló. Los socios presentes son: González Domínguez, Santaló, Sadosky, Cora Ratto de Sadosky, Toranzos, Ricabarra, Varsavsky, Gutiérrez Burzaco, C. Ballester, Galmarino, Klimosky, Martínez Guzmán, Scarfiello, E. Iglesias, María L. Bruschi, Benedeck, Karanovich, Monteiro, Cotlar, Loiseau, Selzer.

De acuerdo con los Estatutos se procede a la elección de la nueva Comisión Directiva que ha de dirigir la Sociedad durante el período 1957-1959. Se procede a la votación ,juntando a los votos presentes los recibidos por correspondencia. Resulta elegida por unanimidad (26 votos) la siguiente lista:

Presidente: Ing. José Babini
Vicepresidente 1º: Dr. Antonio Monteiro
Vicepresidente 2º Dr. Mischa Cotlar
Secretario: Ing. Roque Scarfiello
Tesorero: Lic. Concepción Ballester
Protesorero: Lic. Elisa Quastler
Director de Publicaciones: Ing. José Babini

Se pasa luego a la designación de Secretarios Locales, resultando nombrados los siguientes:

Buenos Aires: Lic. Cora Ratto de Sadosky
La Plata: Dr. Alberto Sagastume y Berra
Rosario: Prof. J. Olguin
Bahía Blanca: Ing. José Ma. Arango
Tucumán: Dr. Guillermo Martínez Guzmán.
San Juan: Dr. Sergio Sispanov
San Luis: Prof. Modesto González
Salta: Ing. Roberto Ovejero
Córdoba: Dr. José Yocca
Mendoza: Dr. Eduardo Zarantonello
San Carlos de Bariloche: Dr. Manuel Balanzat.

Como redactores de la Revista de la U M A se designan a los Dres. J. Rey Pastor, A. González Domínguez y L. A. Santaló.

A continuación el Dr. Santaló hace una exposición del estado actual de las finanzas y actividades en proyecto de la U M A. Después de un cambio de impresiones se coincide en la necesidad de incrementar el número de socios para poder dar mayor volumen a la Revista. Cada secretario local se ocupará de estas cuestiones en su respectivo centro, procurando reunir a los matemáticos de la zona y celebrar reuniones locales en las cuales intervengan también profesores de enseñanza secundaria.

Se entra luego a discutir un ofrecimiento de la Universidad Nacional del Sur de financiar, en principio, una revista o boletín de carácter elemental que interesara principalmente al profesorado secundario y que sirviera de vínculo y estímulo para los autores de la matemática en todos sus grados. Se acuerda nombrar una comisión compuesta de los Dres. Manuel Sadosky, Fausto Toranzos, Ing. José María Arango y Lic. A. Galmarino para que estudie las posibilidades de llevar a cabo el proyecto, junto con cualquier otra iniciativa tendiente a estimular las inquietudes para un mejoramiento de la enseñanza de la matemática.

Finalmente, a propuesta del presidente Dr. González Domínguez, se acuerda agradecer a la Universidad Nacional del Sur la generosa hospitalidad brindada par la celebración de las Jornadas Matemáticas que precedieron a la realización de la Asamblea.

No habiendo otros asuntos que tratar, se levantó la sesión siendo las 18,30.

ACTO DE ENTREGA DEL DIPLOMA DE MIEMBRO HONORARIO DE LA U.M.A. AL PROF. LAURENT SCHWARTZ

En la reunión de C.D. del 4 de julio pp. se resolvió designar al Profesor Schwartz, de la Universidad de París, Miembro Honorario de la U.M.A.

El acto público de la entrega del diploma correspondiente, tuvo lugar el 16 de julio en la sede de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de Buenos Aires.

LAURENT SCHWARTZ

En presencia del Sr. Decano de la Facultad, del Agregado Cultural de la Embajada Francesa, del Representante del Centro de Cooperación Científica de la América Latina de U.N.E.S.C.O., del Representante de la Junta de Asistencia Técnica de las Naciones Unidas y numeroso público, abrió la sesión el Secretario General de la U.M.A. Ing. R. Scarfiello, quien hizo presente que en la imposibilidad de concurrir el Sr. Presidente de la U.M.A., Ing. José Babini y otras autoridades, se había pedido al Sr. Presidente de la Comisión anterior, Dr. A. González Domínguez la gentileza de poner en manos del Prof. Schwartz el referido diploma. Accediendo a ello el Dr. González Domínguez pronunció un elocuente discurso que consignamos al fin de esta nota. Inmediatamente después el Prof. Schwartz agradeció en breves y amables palabras, pronunciadas en castellano, la demostración que se le brindara. El acto transcurrió en el ambiente de cordialidad y entusiasmo característicos de las reuniones de la U.M.A.

DISCURSO PRONUNCIADO POR EL DR. GONZALEZ DOMINGUEZ

Señor Decano; Sr. Agregado Cultural de la Embajada francesa; señor Representante del Centro de Cooperación Científica de la América Latina de la UNESCO; señor Representante de la Junta de Asistencia Técnica de las Naciones Unidas; señores colegas:

Dentro de pocos días realizará la Unión Matemática Argentina su acostumbrada sesión científica anual, a la que prestará en esta ocasión inusitada brillantez la presencia de distinguidos colegas extranjeros: los profesores japoneses Goto e Ito, contratados por la Universidad de Tucumán; los matemáticos polacos Sikorski y Razziowa, que invitados por la Universidad Nacional del Sur a través de UNESCO trabajarán en Bahía Blanca durante unos meses; el Profesor Laurent Schwartz, y su esposa la señora María Elena Schwartz, ambos profesores en el Instituto Henry Poincaré, de la Sorbona.

La visita de los esposos Schwartz es parte del plan de actividades del Departamento de Matemáticas de la Facultad en el que figura como punto de prioridad cero la permanencia entre nosotros, durante un cuatrimestre por lo menos de cada año académico, de prominentes figuras de la matemática del mundo.

La señora de Schwartz, que llegará al país dentro de pocos días, viene invitada por la Facultad, y dictará, a partir de agosto, un curso breve sobre variedades analíticas y clases de Chern, que será muy útil complemento a los cursos dictados, en el primer cuatrimestre, por los profesores Cotlar y Santaló. Pronunciará también conferencias sobre organización de la enseñanza de la Matemática.

Dos circunstancias prestan señalado interés a tales disertaciones de índole pedagógica, en el alto sentido de la palabra. Una es que en estos momentos estamos aquí vitalmente interesados en organizar la licenciatura y el doctorado de manera tal que los jóvenes estudiantes, que acuden a nuestras aulas en número creciente cada año, se introduzcan sólidamente y lo antes posible, en la Matemática moderna. Es la otra que preocupaciones similares, —aunque naturalmente no idénticas—, de quienes dirigen la milenaria y eternamente joven Sorbona, han conducido allí, en los últimos meses, a una profunda modificación del régimen de estudios que conduce a la licenciatura en Matemática. Es muy afortunado, —aunque para ello haya sido fatigoso y hasta extenuante—, que a la señora de Schwartz le haya cabido importante papel en la comisión encargada de tales recientísimas reformas, pues, estamos seguros de que sus conferencias nos serán de utilidad extraordinaria.

El Profesor Schwartz está aquí gracias a la colaboración prestada por UNESCO a la Facultad, que gestionó su visita, que forma parte del Plan de Cooperación con los Estados Miembros de la UNESCO, y me place expresar a las autoridades de UNESCO, aquí presentes, en nombre del Decano, del Consejo Directivo, y de los matemáticos del país, nuestro agradecimiento por el excepcional servicio que han prestado a la causa de la Matemática entre nosotros, al hacer posible la visita de Schwartz.

Permanecerá Schwartz tres meses entre nosotros.

Dictará en esta casa un curso monográfico sobre ''Matemática y Física Cuántica''. El anuncio de este curso ha despertado insólita expectación en nuestros círculos matemáticos, donde no pocos, profesores y estudiantes, se interesan por las distribuciones, creación genial del Profesor Schwartz. Y no es para menos. Nos cabe en efecto el raro privilegio de tener para nosotros, durante tres meses, al autor de una de las teorías matemáticas más originales de este siglo; con el aditamento de que viene a darnos cuenta de investigaciones inéditas, no sólo no publicadas pero ni siquiera expuestas en su Seminario del Instituto Poincaré, — el famoso ''Séminaire Schwartz'' a donde acuden matemáticos del mundo entero a escuchar sus lecciones de brillantez inigualada.

Nos decía ayer el Profesor Schwart, con su naturalísima modestia, y casi disculpándose, que quizás no pudiera probar completamente todos sus teoremas; que probablemente algunos, o muchos, quedarían pendientes de demostración, como problemas abiertos a resolver después de su partida.

Justamente en esta casi disculpa está la prueba irrefutable de que será el suyo un curso axcepcional, con nuevas ideas y problemas abiertos.

Además de este curso monográfico de alto nivel, destinado a profesores y alumnos de los años superiores, dictará Schwartz un curso adicional, también de tres meses de duración, sobre ''Teoría de las distribuciones y sus aplicaciones''. El curso interesa por igual a matemáticos, físicos e ingenieros, y será dictado en la Facultad de Ingeniería.

La teoría de las distribuciones es una teoría profunda y difícil; pero las ideas fundamentales son esencialmente simples, y es posible exponerlas, y aun demostrar los teoremas más importantes para los aplicadores, utilizando recursos de análisis elemental. Un ensayo en tal sentido viene haciendo Schwartz en la Sorbona, donde dicta con éxito extraordinario, perfeccionándolo y simplificándolo de año en año, su curso ''Métodes Mathematiques de las Physigne''; el famoso ''M.M.P.'', al que asisten cientos de alumnos; más de ochocientos el último año. Con tales antecedentes, huelga decir que está asegurado el éxito del curso planeado en la Facultad de Ingeniería.

Por lo demás ambos cursos tendrán el carácter de cursos optativos oficiales del programa de estudios de esta Facultad que los estudiantes podrán tomar y por los que se les acreditará el correspondiente puntaje.

Con lo dicho basta para probar la trascendencia que tendrá la labor de Schwartz en la Argentina. La Unión Matemática Argentina, que agrupa prácticamente a todos los matemáticos del país, ha querido testimoniarle a Schwartz su admiración y su agradecimiento; y para ello, adelantándose a la reunión científica que se realizará dentro de pocos días, a la que me he referido al principio, ha convocado a esta sesión extrordinaria; y en ausencia del Presidente de la Institución, nuestro querido Ingeniero Babini, y ante la inexorable negativa del Vicepresidente, nuestro querido Profesor Cotlar, tan modesto como gran matemático, me cabe a mí el inmerecido honor de poner en manos del Profesor Schwartz el diploma que lo acredita Miembro Honorario de la Unión Matemática Argentina: máxima honra que está en nuestro poder dispensar, que queremos sea símbolo de nuestra admiración por el matemático de genio, de nuestra gratitud al maestro extraordinario, y de nuestro cariño por el hombre bueno y generoso.

1ª REUNION DEL AÑO 1958 REALIZADA EN LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES DE BUENOS AIRES LOS DIAS 25 Y 26 DE JULIO DE 1958

En ocasión de la 1ª Reunión Anual de la U.M.A. el Secretario General Ing. R. Scarfiello abrió el acto con las siguientes palabras:

"Señores: En mi calidad de Secretario General me es grato inaugurar estas sesiones que corresponden a la 1ª Reunión de este año de la U.M.A.

En nombre de la C.D. quiero agradecer la presencia en este acto: del Prof. L. Schwartz y Señora Profesora M. H. Levy de Schwartz, que se encuentran en nuestro país contratados por la Facultad de Ciencias de Buenos Aires con el auspicio de la UNESCO; de la Profesora H. Rasiowa y el Prof. R. Sikorski contratados por la Facultad de Ciencias de Bahía Blanca; y del Prof. Itoh contratado por la Fac. de Ciencias de Tucumán.

Quiero agradecer la presencia de la delegación amiga de los matemáticos del Uruguay: Ing. Laguardia, Dr. Schäffer, Dr. Jones y Dr. Villegas; a las delegaciones de Profesores de Matemáticas de los países Latinoamericanos que se encuentran siguiendo los cursos de perfeccionamiento organizado por la UNESCO, en la Universidad de La Plata; y a las delegaciones de todas las Universidades del país que han querido honrar esta reunión.

Aprovecho esta ocasión para agradecer especialmente a las autoridades de la Facultad el total apoyo para la organización de este acto, tanto en el acogimiento en su sede como en la ayuda material para impresión de Resúmenes de las Comunicaciones, publicación de las noticias en los diarios y por el subsidio de $ 2.500 para sufragar gastos.

Quiero dejar constancia de nuestro agradecimiento a la anterior Comisión Directiva en especial al Dr. González Domínguez y al Dr. Santaló que colaboraron con nosotros en todas las gestiones de la U.M.A. También agradecemos a las personas que no perteneciendo a nuestra Comisión nos han ayudado en la organización de todos los detalles.

Quiero anunciar que estamos tratando de organizar varias cuestiones de importancia en nuestra Unión, en especial la parte financiera, para lo cual hemos encargado la cobranza de las cuotas a la misma empresa que lo hace para la A.F.A. con quien compartimos la Revista. Hemos abonado en estos días la contribución a la Unión Matemática Universal. Además se han hecho alrededor de treinta nuevos socios.

Sin otra cuestión particular, doy por inaugurada esta sesión de hoy. Propongo para presidirla al Prof. Beppo Levi".

Acto seguido bajo la presidencia del Prof. Beppo Levi se dio comienzo a las exposiciones de las Comunicaciones cuyos resúmenes figuran a continuación.

Por la noche del viernes 25 fue servida una comida de camaradería en el Restaurant Corrientes 11 que fue oportunidad para estrechar los lazos de amistad entre los matemáticos del país y países amigos.

RESUMENES DE COMUNICACIONES

SCHAFFER, Juan J., *Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes en espacios de Banach.*

Consideramos la ecuación diferencial:

$$\dot{x} + Ax = f(t) \qquad (1)$$

donde x y $f(t)$ están en un espacio de Banach X; A es un operador sobre X, y el punto denota la diferenciación respecto de t para $0 \leq t \leq \infty$; x_0 denota el conjunto de los valores para $t = 0$ de las soluciones acotadas de la ecuación homogénea

$$\dot{x} + Ax = 0 \qquad (2)$$

El siguiente teorema es una generalización de un resultado bien conocido para espacios de dimensión finita:

Teorema. Sea X un espacio de Banach complejo. La condición necesaria y suficiente para que X_0 sea cerrado y posea un complemento cerrado y que (1) *tenga al menos una solución acotada para cada f*(t) *continua y acotada (o para cada f en ciertos espacios funcionales) es que el eje imaginario no encuentre el espectro de A.*

Vale un teorema análogo para el caso de un espacio real.

SPINADEL, VERA W. de, *Algunas zonas alcanzables en sistema tridimensionales, con perturbaciones acotadas.*

Se dan algunos ejemplos de sistemas de tres ecuaciones diferenciales con perturbación arbitraria acotada o no, problema formulado de acuerdo con la teoría general expuesta en las tesis de E. Roxin y V. Spinadel.

ROXIN, Emilio O., *Sobre oscilaciones arbitraria realmente acopiadas.*

Un sencillo sistema dinámico da origen a un problema relacionado con la teoría de las zonas alcanzables y finalmente a un problema de ecuaciones en derivadas parciales que pueden ser no-analíticas.

SBARRA, Herminio. *Generalización, en tres dimensiones, del método de los sectores para el estudio de los puntos críticos de sistemas homogeneos de ecuaciones diferenciales no lineales.*

Se aplica a sistemas homogéneos tridimensionales las ideas básicas del método de los sectores, usado para el estudio de los puntos críticos de sistemas de ecuaciones diferenciales no-lineales.

GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ, Alberto. *Sobre el producto de distribuciones de Schwinger.*

Utilizando la definición de productos para distribuciones causales, se da sentido a los productos de distribuciones que figuran en las memorias de Schwinger, observando que estos productos son la parte real e imaginaria de un producto de distribuciones causales.

SCARFIELLO, Roque, *Sobre la solución elemental de la ecuación de Klein-Gordon.*

Se aplica la técnica de Methée para obtener una expresión de la solución elemental de la ecuación de Klein-Gordon en el campo complejo que coincide con la obtenida por Feynmann por otras consideraciones.

STARIOCO, J. P., *Productos integrales.*

Se aplica el concepto de producto integral a la resolución del problema de Cauchy de las ecuaciones de evolución de la física y se interpreta el método de operaciones de Feynmann.

COTLAR, Mischa y PANZONE, Rafael, *Operadores casi ortogonales en espacios Lp*

En un trabajo anterior uno de los autores probó este *Teorema A*: $T_i f = f * K_i$ es una sucesión de operadores de convolución cuyos núcleos verifican la condición de "casi ortogonalidad" $\int | K_i * K_{i+j}(x) | \, dx \leq C \varepsilon^j \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1$, entonces el operador suma $Tf = \Sigma T_i f$ verifica $\| Tf \|_2 \leq C_1 \| f \|_2$ para toda $f \in L^2 = L^2(E^n)$. Aquí este teorema se generaliza para espacios $L^p = L^p(E^n)$ así como para núcleos K_i definidos en otro espacio E^m, $m \neq n$. Ahora la condición de ortogonalidad es

$$\int |K_i * K_{i+j}(x+h) - K_i * K_{i+j}(x) \, dx | \leq C \varepsilon^j |h|^2 \gamma, \; p = (n+m)/(m+\gamma)$$

y Tf actúa de $L^p(E^n)$ en $L^q(E^m)$, $q = \dfrac{P}{P-1}$.

La demostración se basa en un lema numérico de *Sz*. Nagy que este autor usó en una demostración simplificada del teorema *A*. Se indican otras generalizaciones y aplicaciones.

PANZONE, Rafael. *Sobre una generalización de los operadores potenciales de tipo Riemann-Liouville.*

La generalización en cuestión viene definida por:

$$\int_{E^n} f(y) \, K_{n\gamma K}(x-y) \, dy = H_{n\gamma K}(x) \qquad 0 < \gamma < sup\,(n, k)$$

con x variando en E^k = espacio euclídeo de dimensión k, $y \ni E^n$; E^k y E^n subespacios de E^{n+k+t} tales que tienen común el subespacio

$$E^t, \; y \; E^k = E^{k-t} \times E^t, \; E^n = E^t \times E^{n-t}, \; E^{k+n-t} = E^{k-t} \times E^t \times E^{n-t}$$

y donde $K(Z)$ es cierta función de dominio E^{n+k-t}, que engendra el núcleo

$$K_{n\gamma k}(Z) = \Sigma \, 2^{(\gamma - n)i} \, K(Z_2{}^{-i}).$$

Cuando $K(Z) = |Z|^{\gamma - n}$ si $1 < |Z| \leq 2$, resulta $K_{n\gamma k}(Z) = |Z|^{\gamma - n}$ y obtenemos el núcleo "ordinario", el cual para $n = K = 1$ da por convolución la transformación de Riemann-Liouville: $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,|x-t|^{\gamma-n}\,dt$. Se trata de ver si la extensión goza de propiedades análogas a las de tipo y semi-tipo de la última transformación y de otras propiedades conocidas en relación con la capacidad y las condiciones de Lipschitz.

SANTALÓ, Luis A., *Sobre las ecuaciones del campo unificado y la teoría de Einstein.*

Partiendo del mismo principio variacional de Einstein, pero sustituyendo en tensor de Ricci por otros más generales, se buscan las condiciones de estos últimos para que las ecuaciones resultantes sean las mismas.

ALTAMANN, Simón, L., *Funciones equivalentes: híbridos y funciones de Wannier.*

Un conjunto de funciones $\varphi\ (\nu)$ equivalentes bajo un grupo G satisface la condición que para todo $G_r \varepsilon G$, $G^r\ \varphi(m) = \varphi(n)$ es una función perteneciente al conjunto dado. Se deriva de una fórmula cerrada para obtener funciones con esta propiedad:

$\varphi\,(n) = < \Psi \mid D\,(G_n) \mid v >$, donde $< \Psi \mid$ es el vector fila de las funciones de base para la representación reducible $D\,(G)$, y $\mid v >$ es un vector columna arbitrario. Esta ecuación puede ser escrita en forma matricial como $< \varphi \mid = < \Psi \mid \wedge$ donde $\wedge$ es una matriz definida en términos de $D(G)$ y $\mid v >$. Se demuestra que cuando G es un grupo cíclico $\wedge$ es una matriz unitaria. De aquí resulta que funciones que son equivalentes bajo un grupo cíclico son también ortogonales.

Cuando G es un grupo cíclico de rotación las funciones φ son esféricos, armónicos y las funciones equivalentes son los llamados híbridos. Cuando G es un grupo de translaciones (con condiciones de contorno periódicas) las funciones φ son las funciones de Bloch y su transformadas equivalentes las funciones de Wannier.

Si tenemos un conjunto de funciones independientes pero no ortogonales θ definidas en un espacio con simetría cíclica, la técnica anterior provee un método para su ortogonalización simétrica. Basta formar a partir de ellas las autofunciones Ψ del grupo cíclico y obtener las transformadas equivalentes de estas últimas.

VILLEGAS, Cesáreo, *Sobre la estimación de una relación funcional lineal en el caso de una modelo a valores fijos*

Se considera el siguiente modelo:

$$X_{ij} = \overline{\xi_i} + U_{ij}\,,\ Y_{ij} = \alpha + \beta\,\overline{\xi_i} + V_{ij}$$

$(i = 1, \ldots\ldots k, j = 1 \ldots\ldots n_i)$ en que los $\overline{\xi}$ son valores fijos, y los U_{ij}, V_{ij} son los errores, supuestos independientes, con valor medio cero y con variancias desconocidas $\sigma_u^2\ \sigma_v^2$.

a) En el caso de errores normalmente distribuídos las ecuaciones de máxima verosimilitud dan la siguiente estimación de β:

$$b = \frac{\lambda\, S^2_{\overline{y}} + S_{\overline{x}\,\overline{y}}}{\lambda\, S_{\overline{x}\,\overline{y}} + S^2_{\overline{x}}}$$

en la que λ es la raíz de una cierta ecuación de cuarto grado, que se puede hallar por iteración. La estimación obtenida es consistente.

b) En el caso de distribuciones no normales de los errores, se estudia la consistencia, convergencia en distribución, y convergencia de momentos de la siguiente estimación de $\gamma = \mathrm{Arctg}\, \beta$:

$$c = \mathrm{Arctg} \frac{\Sigma\, n_i (l_i - \overline{l}) \overline{y_i}}{\Sigma\, n_i (l_i - \overline{l}) \overline{x_i}}$$

donde los l_i son funciones de las observaciones que convergen en probabilidad a constantes λ_i. Se demuestra que el valor óptimo de las constantes es (a menos de una transformación lineal) $\lambda_i = \xi_i$. Poniendo $l_i = l' \overline{x_i} - l'' \overline{y_i}$, donde l', l'', son funciones de las observaciones que convergen en probabilidad a constantes λ', λ'', se determinan estas constantes para que se anule la parte principal de la tendencia de c.

c) Se hallan límites de confianza exactos para γ (en el caso de errores normalmente distribuídos), que dependen de parámetros arbitrarios $\lambda_i \ldots\ldots \lambda_k$. Se demuestra que el valor óptmo (en el sentido de anular la parte principal del valor esperado del cuadrado de la longitud del intervalo de confianza para $o = \mathit{Arctg}\ b$) para λ_i es $\overline{\xi_i}$.

REY PASTOR, Julio, *El cálculo de Dirac.*

JONES, A., *Sobre la estructura de ciertos anillos.*

Se estudian los anillos que poseen la siguiente propiedad:

(I): *Todo subgrupo aditivo es un ideal bilateral del anillo.*

Se demuestra que un anillo A posee la propiedad (I) si y sólo si es a menos de un isomorfismo, uno de los siguientes:

1) un O-anillo.

2) $A = (a) + Z$, donde (a) es el ideal de los múltiplos de un entero no nulo a, y Z es un O-*anillo* (posiblemente trivial) tal que $a \cdot Z = 0$;

3) $A = \sum_{p_i \in P} [(p_i^{\mu_i}) / (p_i^{\mu_i + \nu_i})] + Z$, donde P es un conjunto (finito o infinito) de primos; $\mu_i\, \nu_i$ enteros tales que $0 \leq \mu_i < \nu_i$ para todo $p_i \in P$ y Z es un O-anillo tal que si $z \in Z$ resulta $o(z) < \infty$ donde $o(z)$ designa el orden de z), si $p_i^{\alpha_i}$ es la máxima potencia de p_i que divide $o(z)$ es $\alpha_i \leq \mu_i$ para todo $p_i \in P$.

KLIMOVSKY, Gregorio, *Nota sobre un conjunto totalmente ordenado homogéneo.*

Sea E un conjunto totalmente ordenado con las siguientes propiedades:

1) Tiene un primer elemento O

2) Tiene último elemento 1

3) Es denso.

4) Todo subconjunto numerable es ralo.

5) Todo subconjunto numerable tiene extremo superior.

6) Ningún subconjunto numerable tiene extremo inferior.

7) Todo punto (excepto O) es extremo superior de un subconjunto que en el orden inducido tiene tipo ω

8) Contiene un subconjunto, denso en E, de potencia $\aleph_1$.

Se demuestra que, en presencia del axioma de elección, la existencia de un tal conjunto E es lógicamente equivalente a la hipótesis del continuo. Para ello, utilizando el procedimiento típico para la construcción de conjuntos ($C\Omega$), se demuestra que, mediante el empleo de la hipótesis del continuo, se obtiene un conjunto tipo ($C\Omega$) con las propiedades 1) a 8). Que la existencia de E implica la hipótesis del continuo, es cosa que se demuestra de inmediato, sin emplear el axioma de elección, pues la existencia de un conjunto totalmente ordenado de potencia χ_1 denso y sin lagunas de tipo (χ_0, χ_0) permite construir un subconjunto lineal de manera que su tipo de orden sea λ.

Se demuestra que todos los conjuntos que satisfacen las condiciones 1) a 8) son isomorfos entre si. En consecuencia, un conjunto como el E es homogéneo (y, al no ser simétrico, el conjunto antiordenado E también es asimétrico pero no isomorfo al E).

VARSAVSKY, Oscar A., *Una topología para ideales maximales regulares.*

Se define una topología más débil que la de "cápsula-núcleo" y se dan aplicaciones al caso de anillos conmutativos sin unidad.

ITOH, Makoto, *The Many-valued Logics and the Lattices of Many-valued Functions.*

The ordinary two-valued propositional logic is regarded mathematically as a Boolean lattice and, since each Boolean lattice can be represented by a lattice of two-valued functions on a set R (which is equivalent to the lattice of subsets of R), we may consider such a lattice of two-valued functions as a mathematical representation of the ordinary two-valued propositional logic. Extending this view point to the case of many-valued logics, we shall here first find the characteristic properties of a lattice of all n-valued functions on a set R and then abstract a complete set of axioms for such a lattice. This set of axioms may also be considered at the same time to represent the axioms for the n-valued propositional logics.

ITOH, Makoto, *General Solution of the General n-valued Logical Equation.*

By making use of the theorems concerning the n-valued logics which have been obtained in my previous paper, we give here the general unknown elements, together with the necessary and sufficient condition under which the solution does exist.

If we take specially $n = 2$, then we get the general solution of a general Boolean equation as a corollary of the above result.

SIKORSKY, R., *On the theory of determinants in infinitely dimensional vector spaces.*

A definition of determinant systems for linear operations in abstract vector spaces is given. The main theorem is that a linear operation A has a determinant system if and only if it is a Fredholm operation.

Some formulas, expressing the connection between the determinant system and the solutions of the equation $A x = x_0$ and its adjoint, are given.

RASIOWA, H., *On N-lattices and thier aplications to constructive logic with the strong negation.*

An algebraic characterization of the constructive logic vith the strong negation of Nelson Y.S.L 14, (see Also Markov Us. Mat. N. 5 and Vovobiev Dok. Ak. N. SSSR 85) is given.

A class of adequate algebras is distinguished and the representation theorem of them is given, as vell some its applications.

INDICE DEL VOLUMEN XVIII (1)

UNION MATEMATICA ARGENTINA

(1) Este volumen comprende: Nº 1, p. 1-44 aparecido en diciembre 1957; Nº 2, p. 45-92 aparecido en marzo 1958; Nº 3, p. 93-136 (dedicado totalmente al Symposium sobre física de las partículas elementales) aparecido en febrero 1959; y Nº 4, p. 137-184 aparecido en mayo 1959.

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

BIBLIOGRAFIA

CRONICA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Este número de la Revista de la Unión Matemática Argentina y de la Asociación Física Argentina se ha publicado con la contribución del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.

PUBLICACIONES DE LA U. M. A.

Revista de la U. M. A. - Vol. I (1936-1937); Vol. II (1938-1939); Vol. III (1938-1939); Vol. IV (1939); Vol. V (1940); Vol. VI (1940-1941); Vol. VII (1940-1941); Vol. VIII (1942); Vol. IX (1943); Vol. X (1944-1945).

Revista de la U. M. A. y órgano de la A. F. A. - Vol. XI (1945-1946); Vol. XII (1946-1947); Vol. XIII (1948); Vol. XIV (1949-1950).

Revista de la U. M. A. y de la A. F. A. - Vol. XV (1951-1953); Vol. XVI (1954-1955); Vol. XVII (1955); Vol. XVIII (1959).

Los volúmenes III, IV, V y VI comprenden los siguientes fascículos separados:

Nº 1. GINO LORIA. *Le Matematiche in Ispagna e in Argentina.* — Nº 2. A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre las series de funciones de Hermite.* — Nº 3. MICHEL PETROVICH. *Remarques arithmétiques sur une équation differentielle du premier ordre.* — Nº 4. A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Una nueva demostración del teorema límite del Cálculo de Probabilidades. Condiciones necesarias y suficientes para que una función sea integral de Laplace.* — Nº 5. NIKOLA OBRECHKOFF. *Sur la sommation absolue par la transformation d'Euler des séries divergentes.* — Nº 6. RICARDO SAN JUAN. *Derivación e integración de series asintóticas.* — Nº 7. Resolución adoptada por la U. M. A. en la cuestión promovida por el Sr. Carlos Biggeri. — Nº 8. F. AMODEO. *Origen y desarrollo de la Geometría Proyectiva.* — Nº 9 CLOTILDE A. BULA. *Teoría y cálculo de los momentos dobles.* — Nº 10. CLOTILDE A. BULA. *Cálculo de superficies de frecuencia.* — Nº 11. R. FRUCHT. *Zur Geometria auf einer Fläche mit indefiniter Metrik (Sobre la Geometría de una superficie con métrica indefinida).* — Nº 12. A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre una memoria del Prof. J. C. Vignaux.* — Nº 13. E. TORANZOS. *Sobre las singularidades de las curvas de Jordan.* — Nº 14. M. BALANZAT. *Fórmulas integrales de la intersección de conjuntos.* — Nº 15. G. KNIE. *El problema de varios electrones en la mecánica cuantista.* — Nº 16. A. TERRACINI. *Sobre la existencia de superficies cuyas líneas principales son dadas.* — Nº 17. L. A. SANTALÓ. *Valor medio del número de partes en que una figura convexa es dividida por n rectas arbitrarias.* — Nº 18. A. WINTNER. *On the iteration of distribution functions in the calculus of probability (Sobre la iteración de funciones de distribución en el cálculo de probabilidades).* — Nº 19. E. FERRARI. *Sobre la paradoja de Bertrand.* — Nº 20. J. BABINI. *Sobre algunas propiedades de las derivadas y ciertas primitivas de los polinomios de Legendre.* — Nº 21. R. SAN JUAN. *Un algoritmo de sumación de series divergentes.* — Nº 22. A. TERRACINI. *Sobre algunos lugares geométricos.* — Nº 23. V. y A. FRAILE y C. CRESPO. *El lugar geométrico y lugares de puntos áreas en el plano.* — Nº 24. R. FRUCHT. *Coronas de grupos y sus subgrupos, con una aplicación a los determinantes.* — Nº 25. E. R. RAIMONDI. *Un problema de probabilidades geométricas sobre los conjuntos de triángulos.*

En 1942 la U. M. A. ha iniciado la publicación de una nueva serie de "Memorias y monografías" de las que han aparecido hasta ahora las siguientes:

Vol. I; Nº 1. — GUILLERMO KNIE, *Mecánica ondulatoria en el espacio curvo.* Nº 2. — GUIDO BECK, *El espacio físico.* Nº 3. — JULIO REY PASTOR, *Integrales parciales de las funciones de dos variables en intervalo infinito.* Nº 4. — JULIO REY PASTOR, *Los últimos teoremas geométricos de Poincaré y sus aplicaciones.* Homenaje póstumo al Prof. G. D. BIRKHOFF.

Vol. II; Nº 1. — YANNY FRENKEL, *Criterios de bicompacidad y de H-completidad de un espacio topológico accesible de Frechet-Riesz.* Nº 2. — GEORGES VALIRON, *Fonctions entières.*

Vol. III; Nº 1. — E. S. BERTOMEU y C. A. MALLMANN, *Funcionamiento de un generador en cascadas de alta tensión.*

Además han aparecido tres cuadernos de *Miscelánea Matemática.*