Volumen XIX Número 2

REVISTA

DE LA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

(MIEMBRO DEL PATRONATO DE LA MATHEMATICAL REVIEWS)

Y DE LA

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

□

SUMARIO

□

BUENOS AIRES
1960

UNION MATEMATICA ARGENTINA

La U. M. A. reconoce cuatro categorías de miembros: honorarios, protectores, titulares y adherentes. El miembro protector paga una cuota anual de $ 2000, por lo menos; el titular una cuota anual de $ 200 y el adherente (estudiantes solamente) una cuota anual de $ 100. Los pagos deberán efectuarse por cheque, giro u otro medio de gastos, a la orden de UNION MATEMATICA ARGENTINA, Casilla de Correo 3588, Buenos Aires.

Por ser la U. M. A. miembro del patronato de la Mathematical Reviews (sponsoring member), los socios de la U. M. A. tienen derecho a suscribirse a esa importante revista de bibliografía y crítica con 50 % de rebaja sobre el precio de suscripción que es de 50 dólares por año. Los socios de la U. M. A. pagarán por tanto sólo 25 dólares por año.

Los autores de trabajos reciben gratuitamente una tirada aparte de 50 ejemplares. Las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

JUNTA DIRECTIVA

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

La A. F. A., asociación privada de investigadores, profesores y estudiantes de física y de astronomía, tiene por objeto fomentar el progreso de la investigación y de la enseñanza de dichas materias por medio de reuniones científicas periódicas y de la publicación de trabajos originales.

Podrán ingresar como socios activos quienes hayan efectuado investigaciones originales; pueden ser socios adherentes los profesores que no cumplan este requisito; y socios estudiantes los que hayan aprobado el primer año de estudios de física o de astronomía.

Las solicitudes de ingreso, que deberán llevar la firma de dos socios activos o adherentes, habrán de dirigirse al secretario local que corresponda. Los socios activos abonarán una cuota anual de $ 400, los adherentes de $ 300 y los estudiantes de $ 200, pudiendo hacerlo en dos cuotas semestrales. En estas cuotas están incluídas las suscripciones a la "Revista de la U.M.A. y de la A.F.A." y a "Ciencia e Investigación".

La correspondencia relacionada con las colaboraciones (artículos originales, informes y reseñas bibliográficas) deben dirigirse al Dr. Mario Bunge, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Perú 222, Buenos Aires.

Se solicita a las instituciones a que pertenecen los autores contribuyan con una cuota de $ 200 por página impresa, la que les dará derecho a recibir 100 apartados libres de cargo.

COMISION DIRECTIVA (1958-60)

Abonnement à l'eranger (comprenant un volume complet): 5.00 dollars (Etats-Unis).

Prière d'adresser toute la correspondance scientifique, administrative et les échanges à l'adresse ci-dessous:

REVISTA DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA
Casilla de Correo 3588
Buenos Aires (Argentina)

CONVERGENCIA, SEPARABILIDAD Y AXIOMA DE ELECCION

por Gregorio Klimovsky

El objeto de este trabajo es demostrar la equivalencia lógica entre el axioma restringido de elección y ciertos teoremas elementales sobre separabilidad y convergencia en espacios topológicos. Se examinan también en él las condiciones en las que tal situación puede extenderse hasta convertirse en una equivalencia lógica con el axioma de elección.

Comenzaremos estableciendo la equivalencia lógica de los siguientes enunciados:

E_1: *Todo espacio topológico* (1) *que satisface el segundo axioma de numerabilidad es separable.*

E_2: *En todo espacio topológico* X *que satisface el primer axioma de numerabilidad, para todo punto* s *que sea de acumulación de un subconjunto* A *de* X, *existe una sucesión en* $A \sim \{s\}$ *que converge a* s.

E_3: *Para toda familia infinita numerable de conjuntos no vacíos disyuntos dos a dos, existe un conjunto infinito incluido en la unión de los conjuntos de la familia y que interseca a cada uno de éstos en un elemento a lo sumo.*

E_4: *Para toda familia numerable no vacía de conjuntos no*

(1) Salvo diferencias de detalle, las notaciones y definiciones relacionadas con teoría de conjuntos o topología son las de [4]. En particular, diremos que un conjunto es "finito" si su cardinal es un número natural, y que es "numerable" si su cardinal es menor o igual que el del conjunto de los números naturales. Si F es una familia, es decir, un conjunto de conjuntos, $\bigcup F$ es la unión de todos los miembros de F, o sea $\bigcup \{X_a, a \in F\}$ en la notación de [4]; análogamente para la intersección de F, $\bigcap F$. "Separable" se usa aquí, como en [4], para indicar la existencia de un conjunto numerable denso en el espacio. Dos conjuntos son "disyuntos" si su intersección es el conjunto vacío.

vacíos disyuntos dos a dos, existe un conjunto incluido en la unión de los conjuntos de la familia y que interseca a cada uno de éstos exactamente en un elemento.

E_4 es una forma del llamado «axioma restringido de elección» o también «axioma numerable de elección» (2); se trata de una afirmación más débil (3) que el axioma de elección pero que, al igual que éste último, es independiente (4) y consistente (5) respecto de los restantes axiomas de la teoría de conjuntos (6), siempre que éstos constituyan un sistema no contradictorio. E_3 es un enunciado aparentemente más débil que E_4 (7); de ahí el interés en probar que en realidad es equivalente a este axioma. E_1 y E_2 son teoremas elementales de topología gene-

(2) La denominación ''restringido'' parece deberse a Tarski (véase [9], y también [1], pág. 51). La denominación ''numerable'', usada en relación con este axioma, se emplea por ejemplo en [6], pág. 512, donde ya se señala la estrecha conexión que existe entre E_4 y ciertos teoremas elementales de topología. Nótese que el ''axioma de elección'' común dice lo mismo que el restringido pero sin imponer limitaciones al número cardinal de la familia no vacía de conjuntos no vacíos disyuntos dos a dos.

(3) Mostowski ha mostrado que el llamado ''principio de elecciones dependientes'' es más débil que el axioma de elección (es decir, no lo implica) [5]; pero, como observó Tarski [9], el principio de elecciones dependientes implica el axioma restringido de elección. Este último no puede, por consiguiente, implicar al axioma de elección. Ver [7], pág. 131.

(4) De acuerdo con los ya clásicos resultados de Fraenkel, Mostowski y Mendelson, el axioma más débil de elección (para familias numerables disyuntas de pares no ordenados) es independiente de la teoría de conjuntos cuando ésta es consistente, no posee ninguna clase de axiomas de elección —fuertes o débiles—, y se acepta la existencia de infinitos objetos que no son conjuntos, o la existencia de ''conjuntos extraordinarios''. De ahí sale la independencia, en un tal sistema, de las proposiciones que implican la forma más débil, entre ellas el axioma restringido. Debe tenerse en cuenta que el problema de la independencia del axioma de elección, o de sus formas débiles, es todavía un problema no resuelto cuando se trata de ''teorías puras'' de conjuntos. Véase [1], pág. 51. En estas discusiones, ''independiente'' quiere decir ''no demostrable a partir de los demás axiomas de la teoría''. La cuestión de la independencia en el sentido de ser además consistente con los restantes axiomas, está ligada a los resultados de Gödel (5).

(5) La consistencia del axioma fuerte de elección (existencia de una función que a todo conjunto asigne uno de sus elementos) y, por lo tanto, la de todas las formas débiles que de él se derivan, incluído el axioma restringido de elección, es un resultado clásico válido para los sistemas usuales de teoría de conjuntos, incluso en sus formas ''puras''. Ver Gödel [2]. Se exceptúan sistemas como el de Quine, desarrollados en Rosser [6], en los que el axioma de elección es falso —según el resultado de [8].

(6) Los sistemas usuales de teoría de conjuntos que aquí implícitamente consideramos son los de Zermelo, Zermelo-Fraenkel, von Neumann-Bernays-Gödel, sistemas simples de teoría de los tipos, etc. Ver [3].

(7) Pues, según la nomenclatura adoptada más adelante, E_4 afirma la existencia de ''selectores'' para una dada familia de conjuntos disyuntos dos a dos, aún cuando ella sea infinita, mientras que E_3 sólo afirma la existencia de ''seudo-selectores'' para este último caso.

ral [8], generalmente considerados como consecuencias muy particulares del axioma restringido de elección; al resultar lógicamente equivalentes a éste último, se tiene que también ellos son independientes y consistentes respecto de los demás axiomas de la teoría de conjuntos —siempre bajo el ya mencionado supuesto de que aquéllos constituyen un sistema no contradictorio—. La equivalencia de E_1 y de E_2 con E_4 sirve también para probar que E_1 y E_2 son más débiles que el axioma de elección [3].

Por otra parte, aún teniendo en cuenta el carácter elemental de E_1 y E_2, el que ambos enunciados se impliquen mútuamente —es decir, que desde el punto de vista lógico expresen un mismo estado de cosas— no constituye un hecho obvio que se encuentre señalado en el tratamiento de estos temas en los textos usuales de topología.

Para lograr nuestro cometido vamos a demostrar que E_2 implica E_3, que E_1 implica E_3, que E_3 implica E_4, que E_4 implica E_2 y que E_4 implica E_1.

E_2 *implica* E_3. Sea F una familia numerable de conjuntos no vacíos disyuntos dos a dos. Sea s un elemento que no pertenezca a $\cup$ F, y pongamos $X = \cup F \cup \{s\}$ [9]. Vamos a definir una topología para X, estipulando que un subconjunto Y de X es abierto en la topología si y sólo si existe una subfamilia finita G de F tal que $Y = X \sim \cup G$ (no excluyéndose el caso en que G es vacío) o si Y es vacío. Es fácil verificar que la

(8) Véase, por ejemplo, [4], págs. 49 y 72. Añadido durante la impresión. Ya en 1919, W. Sierpinski, en un artículo titulado *L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la théorie des ensembles et l'analyse* y publicado en el Bull. de l'Acad. des Sc. de Cracovie, Cl. des Ec. Math. et Nat., Serie A, 1918, 97-152, señaló la equivalencia lógica entre ciertas formas débiles del axioma de elección (por ejemplo, la que afirma la existencia de selectores para familias numerables disyuntas no vacías de puntos de la recta) y ciertos teoremas de análisis elemental. En particular, la equivalencia entre E_3 y E_4 es una generalización de uno de los resultados de Sierpinski para sucesiones convergentes de números reales, generalización extendida a una familia muy amplia de espacios topológicos y establecida sin emplear las propiedades métricas de la recta. Ver [1], pág. 65, de donde extraemos la referencia.

(9) En los sistemas de Zermelo, Bernays, etc., se demuestra la inexistencia de un conjunto universal. De ahí que, dado un conjunto cualquiera, por ejemplo $\cup$ F, la existencia de un elemento s que no está en él puede siempre garantizarse. En los demás sistemas, si F es infinita y su unión es el conjunto universal, quítesele uno cualquiera de sus miembros, obteniéndose una nueva familia F' cuya unión no será ya el conjunto universal. La existencia de "seudo-selectores" y de "selectores" para F' implica obviamente la misma cosa para F.

familia Y constituída por tales conjuntos Y satisface la definición de «topología», de donde (X, Y) es un espacio topológico. Como F es numerable, la familia integrada por sus subfamilias finitas es numerable ([10]), de donde Y resulta ser numerable. Luego (X, Y) satisface el segundo axioma de numerabilidad, de donde «a fortiori» satisface el primero.

Por otra parte, si definimos A haciéndolo igual a $X \sim \{s\}$, se tiene que todo conjunto abierto contiene a s e interseca a todo conjunto de F —salvo a un número finito de éstos últimos a lo sumo—, o sea que interseca a A; en otras palabras, s es un punto de acumulación de A. Luego, en virtud de la hipótesis E_2, existirá una sucesión S cuyo dominio de valores está contenido en $A \sim \{s\}$, es decir, en A, y que converge a s. Nótese que el dominio de valores de S no puede ser finito, pues, en caso contrario, como dicho dominio de valores está contenido en A y $A = \bigcup$ F, todos los conjuntos de F —menos un número finito a lo sumo— no contendrán puntos del mismo, de donde se concluye la existencia de un entorno de s sin puntos del aludido dominio de valores de la sucesión (v. g., quitando a X la unión de los conjuntos de F que contienen puntos del dominio), lo cual contradice el hecho de ser s punto de acumulación de A. Más aún, razonando del mismo modo, puede verse que los valores de S, aún cuando constituyan un conjunto infinito, no pueden estar contenidos en la unión de sólo un número finito de elementos de F. Esto permite definir por inducción, a partir de S, otra sucesión T, del siguiente modo: $T(0) = S(0)$; $T(n+1) = S(i)$, donde i es el menor número natural tal que, para todo j, $0 \leqq j \leqq n$, $S(i)$ no sea igual a $T(j)$ ni esté en un mismo conjunto de F con $T(j)$ —nótese que, visto lo dicho acerca del dominio de valores de S, $T(n+1)$ existe si los $T(j)$, $0 \leqq j \leqq n$, existen—. De aquí se tiene que T es biunívoca, de lo cual resulta que el dominio de valores de T es el conjunto cuya existencia se afirma en E_3, puesto que es infinito, está incluido en la unión de F y no contiene pares de elementos distintos pertenecientes a un mismo conjunto de F.

E_1 *implica* E_3. Sea, como antes, una familia F infinita

([10]) Véase [7], pág. 41. Nótese que para establecer este resultado no se emplea ninguna forma del axioma de elección, aún cuando se tome en cuenta la "numerabilidad" del conjunto y no su "numerabilidad efectiva".

numerable de conjuntos no vacíos disyuntos dos a dos, y sea (X, Y) el espacio topológico definido para $X = \cup F$, cuyos conjuntos abiertos son los conjuntos obtenidos quitando a X las uniones de subfamilias finitas de F (entre ellas la familia vacía). El conjunto vacío también se considera abierto. Como el conjunto de tales subfamilias es numerable, (X, Y) resulta satisfacer el segundo axioma de numerabilidad. Por consiguiente, dada la hipótesis E_1, debe existir un subconjunto S de X, numerable y denso en X. Los puntos de S no pueden estar contenidos en la unión de sólo un número finito de conjuntos de F, pues quitando a X esa unión se obtendría un conjunto abierto sin puntos de S, lo que contradice la densidad de S. De aquí resulta ser S un conjunto infinito, cuyos puntos están en infinitos miembros distintos de F. Consideremos una enumeración $s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots$ de los elementos de S. Podemos definir por inducción otro conjunto infinito numerable T, con una enumeración $t_0, t_2, \ldots, t_n \ldots$ para sus elementos, poniendo $t_0 = s_0$, y $t_{n+1} = s_i$, donde i es el menor número natural tal que, para todo j, $0 \leqq j \leqq n$, s_i no sea igual a t_j ni esté en un mismo conjunto de F con t_j. De aquí se tiene que T es el conjunto cuya existencia se afirma en E_3, pues es infinito, está incluido en la unión de F y no contiene pares de elementos distintos pertenecientes a un mismo conjunto de F.

E_3 *implica* E_4. Sea F una familia cualquiera no vacía de conjuntos no vacíos disyuntos dos a dos. Diremos que un subconjunto de $\cup$ F es un «seudo-selector» de F si interseca a cada conjunto de F en un elemento a lo sumo. Si, además, tal subconjunto de $\cup$ F no es disyunto con ningún elemento de F, diremos que se trata de un «selector» de F. E_4 afirma la existencia de selectores de F cuando ésta es numerable. Vamos a considerar únicamente el caso en que F es infinita pues, en caso contrario, la verdad de E_4 se desprende del hecho de que el axioma de elección es un teorema de la teoría general de conjuntos cuando se aplica a familias finitas (11).

Al ser F infinita numerable, podemos considerar una enumeración cualquiera de F, es decir, una cualquiera de las correspondencias biunívocas entre F y el conjunto de los números naturales. Para cada número natural i, sea F_i el miembro

(11) Ver [7] pág. 92, y [1] pág. 49.

de F que corresponde a i en la aludida numeración, y sea $H_i = \times \{F_j : 0 \leqq j \leqq i\}$. Notemos que ninguno de los conjuntos H_i es vacío, pues ninguno de los F_i lo es ([12]), y que para $i \neq k$, H_i es disyunto con H_k, pues los elementos de H_i son funciones con dominio igual a $\{j : 0 \leqq j \leqq i\}$, mientras que los de H_k son funciones con dominio en $\{j : 0 \leqq j \leqq k\}$ ([13]). Luego H, la familia de todos los conjuntos H_i, i número natural, es una familia infinita numerable de conjuntos no vacíos disyuntos dos a dos. Por consiguiente, en virtud de la hipótesis E_3, debe existir un seudo-selector infinito M de H. Es fácil definir una enumeración para los elementos de M, pues a cada elemento de M corresponde un único elemento de H al cual pertenece, de lo cual resulta la existencia de una correspondencia biunívoca entre M y una subfamilia de H que deberá ser infinita y, por lo tanto, numerable. Podemos entonces definir m_0 como aquel elemento m de M para el que existe el menor número natural i tal que $m \in H_i$; y podemos definir m_{n+1} como aquel elemento m de M distinto de todos los m_j, $0 \leqq j \leqq n$, para el que existe el menor número natural i tal que $m \in H_i$. De este modo la enumeración de M queda establecida por inducción.

Para cualquier par i, j de números naturales, $0 \leqq i \leqq j$, definamos $\varphi^{i,j}$ como la función con dominio en H_j y dominio de valores en F_i tal que, a cada elemento h de H_j hace corresponder el elemento $h(i)$ de F_i —en otras palabras, dada la definición de H_j como producto cartesiano de los F_i, $0 \leqq i \leqq j$, se tiene que $\varphi^{i,j}$ es la «proyección» de H_j sobre F_i—. Sea ψ la función cuyo dominio está constituido por los números naturales, que a cada número natural n hace corresponder otro número natural $\psi(n)$ tal que $m_n \in H_{\psi(n)}$; la unicidad de ψ sale del hecho de ser M un seudo-selector de H, y la existencia de $\psi(n)$ para cada número natural n sale de la infinitud numerable de M. Obsérvese que, debido a la manera en que enumeramos M, $\psi(n) \geqq m$ para todo m. Podemos ahora definir una

---

([12]) Nótese que, como antes, se emplea aquí el axioma de elección para el caso finito, es decir, un teorema de la teoría de conjuntos sin axiomas de elección fuertes ni débiles ([11]).

([13]) En particular, H_0 es el conjunto de todas las funciones con dominio en $\{0\}$ y valores en F_0; de este modo H_0 y F_0 están en una correspondencia biunívoca obvia que, a cada elemento h de H_0, hace corresponder el elemento $h(0)$ de F_0. Sin embargo, si para formar la familia H reemplazamos H_0 por F_0, la familia podría no ser de conjuntos disyuntos dos a dos.

función f con dominio igual al conjunto de los números naturales y valores en $\bigcup$ F, que a cada número natural n hace corresponder el elemento $\varphi^{n,\psi(n)}(m_n)$. De acuerdo a lo dicho respecto de las funciones φ y ψ, la función f hace corresponder a cada número natural i un elemento de F_i. De ahí se tiene que si $i \neq j$ deberá ser $f(i) \neq f(j)$ —pues F_i es disyunto con F_j—, de modo que es biunívoca; el dominio de valores S de f resulta ser entonces un selector de F, ya que $S \subset \bigcup$ F, S interseca a cada conjunto de F en un elemento a lo sumo, pero no es disyunto con ninguno de tales conjuntos, pues para todo i, F_i contiene a $f(i)$.

E_4 *implica* E_2 y E_4 *implica* E_1. La demostración de E_2 y de E_1 utilizando el axioma de elección es bien conocida, restando sólo hacer notar que el empleo de tal axioma es innecesario, bastando usar el axioma restringido de elección. En el caso de E_2 esto se debe a que, para construir la sucesión en $A \sim \{s\}$ que converge a s, es suficiente considerar una sucesión $E_0, E_1, \ldots, E_n, \ldots$ de entornos de s que constituyen una base local en s (14), y definir a continuación otra base local $G_0, G_1, \ldots G_n, \ldots$, donde $G_n = \bigcap \{E_i : i = 0, 1, \ldots n\}$, y $G_{n+1} \subset G_n$ para todo número natural n; para cada n se elige entonces un punto de $G_n \cap (A \sim \{s\})$. Pero esto último exige admitir la existencia de una función que, para cada número natural n, hace corresponder un punto de $G_n \cap (A \sim \{s\})$. En el caso de E_1, es necesario considerar una base numerable de conjuntos abiertos $O_0, O_1, \ldots, O_n, \ldots$ y —para construir el conjunto denso numerable pedido— elegir un punto de O_n para cada número natural n; pero esto requiere admitir la existencia de una función que, para cada número natural n, hace corresponder un punto de O_n. La existencia de funciones tales es mera consecuencia del principio según el cual, dada una sucesión cualquiera de conjuntos no vacíos $D_0, D_1, \ldots, D_n, \ldots$ —no forzosamente disyuntos dos a dos—, existe una función f con dominio en el conjunto de los números naturales tal que, para todo n, $f(n) \in D_n$. Fácil es ver que tal principio es lógicamente equivalente a E_4. En efecto, que el principio implica E_4 sale de que, si F es una familia numerable no vacía de conjuntos no vacíos disyuntos dos

(14) Sucesión que existe pues el espacio satisface el primer axioma de numerabilidad.

a dos, y si $F_0, F_1, \ldots, F_n, \ldots$ es una enumeración de los miembros de F, entonces el selector de F cuya existencia se afirma en E_4 se obtiene identificándolo al dominio de valores de una cualquiera de las funciones con dominio en el conjunto de los números naturales y tales que $f(n) \in F_n$ para todo n, funciones cuya existencia está garantizada por el aludido principio. Recíprocamente, si E_4 es verdadero, y si $D_0, D_1, \ldots, D_n, \ldots$ es una sucesión de conjuntos no vacíos, entonces, definiendo para cada número natural n $F_n = D_n \times \{n\}$, se obtiene una familia F numerable no vacía de conjuntos no vacíos disyuntos dos a dos: la constituida por los F_n. Si S es el selector cuya existencia se afirma en E_4, la función f mencionada en el principio en cuesttión se obtiene definiendo $f(n) = \varphi(S \cap F_n)$, donde φ es la función que, a cada conjunto unitario $\{(d, m)\}$ constituido por un par ordenado (d, m), hace corresponder el primer término del par, es decir, d. Por consiguiente, como $S \cap F_n = \{(d, n)\}$ —por ser S selector de F—, $\varphi\{(d, n)\} = d$, de donde $d \in D_n$ y $f(n) = d \in D_n$.

Establecida así la equivalencia entre nuestros cuatro enunciados, surge el problema de si es posible particularizar los enunciados E_1 y E_2 de modo que continúen siendo equivalentes al axioma restringido de elección. Examinando el espacio topológico (X, Y) utilizado en la demostración de que E_2 implica E_3, puede verse sin dificultad que se trata de un espacio topológico conexo, ya que, para que un subconjunto no vacío de X sea cerrado, es necesario y suficiente que sea la unión de una subfamilia finita de F (o que sea igual a la unión de F); pero como F es infinita tenemos que no es posible que X sea la unión de dos conjuntos cerrados no vacíos disyuntos. Por otra parte, como Y es numerable, el espacio topológico (X, Y) satisface el segundo axioma de numerabilidad —según ya indicamos antes—. Además, el espacio (X, Y) es compacto ([15]); para ello basta notar que, si un abierto de la topología contiene un punto de algún $Z \in$ F, contiene todos los puntos de Z. De ahí se tiene que, dado un cubrimiento de abiertos para X, considerando un abierto J cualquiera del mismo y los miembros de F no incluídos en él, si se elige para cada uno de éstos últimos ([12]) un

([15]) En el sentido de [4], pág. 135; el espacio no es forzosamente de Hausdorff.

miembro del cubrimiento que lo incluya, se obtiene un subcubrimiento finito. Por otra parte, la existencia de un punto como el s, que está en todos los abiertos no vacíos de la topología Y, muestra que el conjunto $\{s\}$ es denso en X, de modo que el espacio X es separable. Nótese que, si se desea estudiar el enunciado E_2, o algunas de sus particularizaciones, sin presuponer sus equivalencias con enunciados como E_1 —que fue lo que hicimos en un comienzo, cuando demostramos que E_2 implica E_3 sin conocer la relación lógica entre E_1 y E_2—, no podemos dar por sentado que el espacio (X, Y) sea separable partiendo del hecho previamente establecido de que cumple el segundo axioma de numerabilidad, pues eso es admitir E_1 como verdadero. Todo esto permite establecer la equivalencia de E_4 con el siguiente enunciado E_2', utilizando, como antes, el espacio topológico (X, Y) para establecer que E_2' implica E_3 [16]:

E_2': *En todo espacio topológico X que satisface el segundo axioma de numerabilidad, que además sea conexo, compacto y separable, para todo punto s que sea de acumulación de un subconjunto A de X, existe una sucesión en $A \sim \{s\}$ que converge a s.*

El espacio (X, Y) no satisface ninguno de los axiomas usuales de separación; dos puntos de X que estén en un mismo conjunto de F deben pertenecer a los mismos entornos. Queda abierto el problema de si es posible mantener la equivalencia con E_4 imponiendo al espacio topológico mencionado en E_2 (o en E_2') alguna condición fuerte de separación, por ejemplo, la de ser un espacio de Hausdorff o la de ser regular. Nótese que, si se modifica ligeramente la definición de la topología Y, estipulándose como abierto a cualquier subconjunto de X que incluya a todos los miembros de F salvo un número finito a lo sumo —con los que no es forzoso que sea disyunto—, además del conjunto vacío, entonces el espacio resulta ser T_0, además de conservar sus propiedades de separabilidad, conexión, compacidad y de satisfacer el segundo axioma de numerabilidad (pues los que antes eran abiertos ahora también lo son, aún cuando no sean *todos* los abiertos, y es fácil verificar que constituyen una base en la nueva topología).

---

[16] La implicación de E_3 con E'_2 resulta de que E_2 implica E'_2; la de E_3 con E'_1 resulta de que E_1 implica E'_1.

Consideraciones paralelas a las recién efectuadas, pero aplicadas al espacio topológico (X, Υ) utilizado en la demostración de que E_1 implica E_3, llevaría a mostrarnos que éste es conexo y compacto. Efectuando, como recién, un cambio en la definición de la topología Υ, permitiendo considerar como abiertos a todos los conjuntos que incluyan a casi todos los conjuntos de F —es decir, todos salvo un número finito a lo sumo—, entonces el espacio resultaría ser un T_1 (no existe ahora un punto como el s del ejemplo utilizado en la demostración de que E_2 implica E_3, que estaba en todos los conjuntos abiertos). Ello permite demostrar la equivalencia de E_4 con el siguiente enunciado E_1', utilizando, como antes, el nuevo espacio topológico (X, Υ) para establecer que E_1' implica E_3' (16):

E_1': *En todo espacio T_1, conexo y compacto, que satisface el segundo axioma de numerabilidad, existe un conjunto denso numerable.*

Como en el caso de E_2 y E_2', queda abierto el problema de si puede mantenerse la equivalencia de E_1 (o de E_1') con E_4 imponiéndose condiciones severas de separación, por ejemplo, la de que el espacio sea de Hausdorff o regular.

Surge ahora el problema de generalizar los enunciados E_1 y E_2 de manera que lleguen a ser equivalentes al axioma de elección. Con este fin, vamos a mostrar que éste último es lógicamentte a cada uno de los dos siguientes enunciados:

F_1: *En todo espacio topológico conexo* (17) *existe un subconjunto bien ordenable denso en el espacio.*

F_2: *En todo espacio topológico, si s es un punto de acumulación de un subconjunto A del espacio, existe una red en $A \sim \{s\}$, definida sobre un conjunto dirigido bien ordenable, que converge a s.*

(17) La exigencia de que el espacio sea conexo es esencial para no trivializar el problema. Pues, si consideramos el espacio discreto construído sobre un conjunto cualquiera, el único subconjunto denso en el total es precisamente el propio espacio, el que deberá ser bien ordenable si se admite que algún subconjunto denso (en este caso, el único posible) debe ser bien ordenable.

Un conjunto dirigido $(D, \geqq)$ se dirá bien ordenable si D es un conjunto bien ordenable. Que el axioma de elección implica a F_1 tanto como a F_2, es un hecho bien conocido de topología elemental [18]. Las implicaciones inversas, que constituyen una generalización de los resultados establecidos más arriba, muestran que F_1 y F_2 son lógicamente equivalentes entre sí, lo que no se advierte en el tratamiento habitual de estos teoremas, y que son independientes y consistentes respecto de los restantes axiomas de la teoría de conjuntos [4], [5].

F_1 *implica el axioma de elección.* Supongamos que X sea un conjunto no bien ordenable. Sea Υ la familia integrada por el conjunto vacío y por todos los conjuntos de la forma $X \sim Y$, donde Y es un subconjunto bien ordenable de X. Como la intersección de una familia cualquiera de conjuntos bien ordenables es bien ordenable y la unión de dos tales conjuntos también lo es, la familia Υ resulta ser una topología para X [19]. En virtud de la hipótesis F_1, aplicada al espacio topológico (X, Υ), deberá existir un subconjunto D de X, denso en el espacio, y bien ordenable. D no puede coincidir con X, debido a nuestra hipótesis acerca de la inexistencia de buenas ordenaciones para X. Luego $X \sim D$ no es vacío, de donde, debido a nuestra definición de la topología Υ, resulta $X \sim D \in \Upsilon$. Pero entonces tenemos que D es disyunto con un conjunto abierto —con $X \sim D$—, lo cual contradice la densidad de D. Ello muestra que nuestra suposición acerca de X es falsa, de lo cual resulta que X es bien ordinable. Como X es cualquiera resulta que todo conjunto es bien ordenable, lo cual es equivalente al axioma de elección.

F_2 *implica el axioma de elección.* Sea A un conjunto no bien ordenable, y s un elemento que no pertenezca a A. Pongamos $X = A \cup \{s\}$, y definamos Υ como la familia integrada por el conjunto vacío y por todos los conjuntos de la forma

---

(18) Para demostrar F_2, hasta elegir un punto de A para cada conjunto abierto que contenga a s. Pues tales conjuntos, están dirigidos por $\subset$, y constituyen una familia bien ordenable si el axioma de elección es válido. F_1 es obvio, pues todo el espacio será un conjunto denso bien ordenable, si el mencionado axioma es cierto.

(19) El espacio topológico que así se obtiene es conexo, ya que lo contrario implicaría la posibilidad de dividir al conjunto X, que no es bien ordenable, en dos subconjuntos no vacíos disyuntos, cada uno de ellos bien ordenable.

$X \sim Y$, donde Y es un subconjunto bien ordenable de A. Como antes, fácil es ver que Y es una topología para X. Como A no es bien ordenable, todo conjunto abierto interseca a A, y como todos ellos contienen al punto s, resulta ser s punto de acumulación de A, o sea, de $A \sim \{s\}$. En virtud de F_2, debe existir una red $(S, \geqq)$ en $A \sim \{s\}$, que converge a s, tal que el dominio de S sea bien ordenable. Observemos que, si el dominio de una función es bien ordenable, el dominio de valores también; para ello, basta hacer notar que, si a cada elemento x del rango hacemos corresponder el menor elemento $\varphi(x)$ del dominio —en una dada buena ordenación de éste último— tal que $S(\varphi(x)) = x$, y si, para dos valores a y b ponemos $a \leqq b$ si y sólo si $\varphi a \leqq \varphi b$ en el dominio, entonces la ordenación obtenida para el dominio de valores de S es una buena ordenación. Pero, si llamamos T a dicho dominio de valores, como $T \subset A, X \sim T$ no es vacío y es un entorno de s. Pero este entorno no contendrá valores de S, lo cual contradice que la red converge a s. Luego, no puede existir tal conjunto A no bien ordenable, y el axioma de elección es válido.

Si se intenta particularizar los enunciados F_1 y F_2, manteniendo su equivalencia con el axioma de elección, puede notarse que el espacio topológico utilizado en la demostración de que F_1 implica el axioma de elección es T_1; ello resulta de que los conjuntos unitarios son bien ordenables, es decir, cerrados en la topología. En cuanto al espacio utilizado en la demostración de que F_2 implica el axioma, se tiene que es conexo pero no T_1, pues s está en todos los abiertos [20]. Ello permite establecer la equivalencia del axioma de elección con los dos siguientes enunciados:

F_1': *En todo espacio topológico que sea T_1 y conexo, existe un subconjunto bien ordenable denso en el espacio.*

F_2': *En todo espacio topológico T_0, conexo y separable, si s es un punto de acumulación de un subconjunto A del es-*

[20] Pero el espacio es T_0, pues, dados dos puntos diferentes, como uno de ellos no es s su complementario en el total es un abierto que contiene al otro. Además, el espacio es separable pues el conjunto unitario $\{s\}$ está incluído en todos los abiertos.

pacio, existe una red en $A \sim \{s\}$, definida sobre un conjunto dirigido bien ordenable, que converge a s.

Queda abierto el problema de si la equivalencia con el axioma de elección se mantiene imponiendo condiciones de separación más severas, como ser la de que el espacio sea de Hausdorff ([21]) o normal. De igual modo, cabe preguntarse si F_2' se hace más débil que el axioma de elección si se impone al espacio la condición de ser compacto.

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA.
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES.
UNIVERSIDAD NACIONAL DE BUENOS AIRES.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. A. FRAENKEL, Y. BAR-HILLEL, *Foundations of Set Theory*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics .North-Holland Pub. Co., Amsterdam, 1958.

[2] KURT GÖDEL, *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory*. Princeton, 1940.

[3] HAO WANG, R. MC. NAUGHTON, *Les systemes axiomatiques de la théorie des ensembles*. París-Lovaina, 1953.

[4] JOHN L. KELLEY, *General Topology*. Van Nostrand, New York, 1955.

[5] A. MOSTOWSKI, *On the principle of dependent choices*. Fund. Math. 35 (1948), págs. 127-130.

[6] J. BARKLEY ROSSER, *Logic for Mathematicians*. McGraw-Hill, New York, 1953.

[7] W. SIERPIŃSKI, *Cardinal and Ordinal Numbers*, Warzawa 1958.

[8] E. P. SPECKER, *The axiom of choice in Quine's New foundations for mathematical logic*. Proc. of the Nat. Ac. of Sciences of the U.S.A., vol. 39 (1953), págs. 972-975.

[9] A. TARSKI, *Axiomatic and algebraic aspects on two theorems on sums of cardinals*. Fund. Math. 35 (1948), págs. 79-104.

([21]) Modificando la definición del espacio topológico utilizado en la demostración de F_2 puede lograrse que se cumpla la condición T_1; pero entonces la separabilidad del espacio ya no es válida. Para ello basta considerar como abierto a *cualquier* complementario de un conjunto bien ordenable, contenga a s o no.

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

TRIGESIMO TERCERA REUNION

Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,
22 y 23 de mayo de 1959

Informes

J. J. GIAMBIAGI, (Facultad de Ciencias Exactas y Naturales), *Las relaciones de dispersión.* H. GHIELMETTI (Comisión Nacional de la Energía Atómica), *Variaciones temporales de la intensidad de la radiación cósmica.* J. G. ROEDERER (Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, y Comisión Nacional de la Energía Atómica), *Los mesones K neutros.*

Comunicaciones

1. I. BERGSTRÖM, E. C. O. BONACALZA y P. THIEBERGER (Inst. Fís. S. C. Bariloche). *El estado* i-$^{13}/_2$ *en el Pb205.*

Se ha medido una vida media de 4,1 $\pm$ 0,5 ms correspondiente a un estado isomérico del Pb 205 utilizando un método de osciloscopio. Se discute la posibilidad de que esta vida media corresponde a una transición M2 de 90 Kev del estado i-13/2 a un estado 9/2- que se encuentra 988 Kev por encima del estado fundamental f-5/2.

2. P. A. LENK y R. J. SLOBODRIAN (C.N.E.A.). *La función de excitación de la reacción* Al^{27} $(d, \alpha\ p)$ Na^{24} *entre 0 y 29,6 Mev.*

Se ha medido la sección eficaz relativa de la reacción Al^{27} $(d,\alpha p)$ Na^{24} en función de la energía del deuterón desde 0 hasta 29,6 Mev utilizando el método de la pila de hojuelas, las que fueron irradiadas empleando el haz externo del Sincrociclotrón de Buenos Aires. La sección eficaz absoluta de esta reacción fue medida cuidadosamente por Batzel et alii (1) entre 0 y 20 Mev utilizando el haz externo del ciclotrón de 60'' de Berkeley. También cubrieron la región entre 20 y 190 Mev con el haz del sincrociclotrón de 184''. El empalme entre ambas mediciones estuvo intrínsecamente

(1) BATZEL, CRANE y O'KELLY, *Phys. Rev.*, 91, 939, 1953.

mal definido según los autores del trabajo mencionado, y la curva conjunta que publicaron presenta un pico pronunciado alrededor de los 25 Mev. Los resultados del presente trabajo permiten establecer que el máximo de la función d eexcitación se encuentra en los 25 Mev, pero que se trata de un máximo suave. Se ha obtenido así un conocimiento más preciso de la función de excitación de la reacción en el intervalo 20 — 29,6 Mev.

3. R. J. SLOBORIAN (C.N.E.A.). *Defasajes correspondientes a la dispersión elástica de partículas alfa de 44,7 y 46,1 Mev por Helio.*

Se ha realizado el análisis de los resultados de la distribución angular por dispersión elástica de partículos alfa de 44,7 (1) y de 46,1 Mev (2) por helio, mediante el método de las ondas parciales. Se ha seguido el procedimiento esbozado en una comunicación anterior (3) motivada por el análisis de los resultados correspondientes a 41,9 Mev. Resulta nuevamente evidente la necesidad de tener en cuenta los procesos inelásticos a fin de mejorar el acuerdo entre la distribución angular teórica y la experimental. Nilson et al. (4) efectuaron una investigación de los estados excitados del Be^8 utilizando las distribuciones angulares de dispersión de partículas alfa por helio; analizaron resultados obtenidos por Graves (5) a 30 Mev aunque señalan no haber obtenido un buen acuerdo entre la curva teórica y la experimental. Según este análisis los defasajes serían todos positivos, en particular el defasaje δ_0 sería fuertemente positivo, cuando ya en 25 Mev era negativo y todo parecía indicar una repulsión entre las partículas alfa. Los resultados del presente análisis confirman las características cualitativas de la interacción contenidas en el trabajo de Russell et alii (6) con respecto a δ_0 que resulta negativo. También resulta negativo δ_2 y por ello se ha establecido la repulsión en radios del orden de 1.4×10^{-13} cm.

---

(1) CONZETT, IGO, SHAW & SLOBODRIAN, *Bull. Am. Phys. Soc.* Ser. II, 2, 305, 1957.
(2) CONZETT, IGO, SHAW & SLOBODRIAN, XXX Reunión de la AFA.
(3) R. J. SLOBODRIAN, XXXII Reunión de la AFA.
(4) NILSON, JENTSCHKE, BRIGGS, KERMAN & SNYDER, *Phys. Rev.* 109, 850, 1958.
(5) E. GRAVES, *Phys. Rev.* 84, 1250 (1951).
(6) RUSSELL, PHILLIPS & REICH, *Phys Rev.*, 104, 135 (1956).

4. S. J. NASSIFF, J. J. PEYRE y T. URSTEIN (C.N.E.A.). *Niveles excitados del Ba^{136}.*

Confirmándose las predicciones de la sistemática de los núcleos par-par (1) se ha determinado, mediante espectroscopia simple y en coincidencias, la energía del primer estado excitado del Ba^{136} (822Kev) (2). Se

---

(1) C. A. MALLMANN, "Excited states in even-even nuclei with $40 \leq A \leq 150$ y $180 \leq A \leq 226$". Segunda Conferencia Internacional sobre los usos pacíficos de la energía atómica (1958) a publicarse.

discute la posibilidad que el segundo estado excitado esté a 1860 Kev. Con un espectómetro de centelleo, se han determinado las siguientes intensidades de los rayos gammas ([2]).

(65 + 67 + 88)	13
(153 + 162)	21
265	7,2
335	37
822	100
1041	74
1245	13
1410	2,4

Coincidencias gamma-gamma dan los siguientes resultados.

(1410)	(1245)	no	(1245)	(65 + 67? + 88)	si
(1410)	(1041)	no	(1041)	(822)	si
(1410)	(822)	si	(1041)	(335)	si
(1410)	(335)	no	(1041)	(265)	si
(1410)	(265)	no	(1041)	(65 + 67? + 88?)	si
(1245)	(1041)	no	(822)	(335)	si
(1245)	(822)	si	(822)	(265)	si
(1245)	(335)	no?	(822)	(153 + 162?)	si
(1245)	(265)	no?	(822)	(65 + 67? + 88)	si
(1245	(153 + 162?)				

([2]) Consignamos los valores de energías medidas por: J. E. Olsen and G. D. O'Kelly: Phys. Rev. 95, 1539 (1954).

5. J. J. Giambiagi (F.C.E.N. Bs. As.). *Analogía entre las transformaciones de Foldy Wouthuysen y Lorentz.*

Se muestra la relación estrecha que existe entre la transformación spinorial de Lorentz y de Foldy, que es aquella que elimina los operadores impares del Hamiltoniano de Dirac. Se discute el caso de la partícula libre y de la partícula en presencia de un campo magnético.

$$L = \exp\left(-\tfrac{1}{2} \,\text{arc.tgh}\; \alpha\, v\right)$$

Si en vez de considerar a v como un parámetro lo consideramos como un operador, usando para él

$$v = \frac{\beta p}{m}, \text{ (1)}$$

se obtiene

$$\exp\left(-\tfrac{1}{2}\,\text{arc.tgh}\,\frac{\alpha\beta p}{m}\right) = \exp\left(\tfrac{1}{2}\,\beta\,\frac{\alpha p}{p}\,\text{arc.tg}\,\frac{p}{m}\,\Pi\right)$$

y esta última es la transformación de Foldy.

([1]) R. Feynman: Notas mimeografiadas, 1953.
M. Bunge, *N. Cimento, X*, 1, 1955.

En presencia de un campo magnético, la transformación de Foldy se expresa en forma compacta reemplazando

$$v = \frac{\beta(p-eA)}{m},\ ^{(1)}$$

Vale para las partículos de Spin 1 una relación análoga.

Esta analogía no se extiende al caso en que hay un campo eléctrico presente.

6. José Litvak (C.N.E.A.). *Propagación e interferencia de mesones K^0 y anti-K^0 en un bloque de emulsiones fotográficas nucleares.*

Un haz de mesones K neutros de vida media larga consta de una superposición cuántica de partículas K^0 (strangeness $+1$) y anti-K^0 ($s = -1$), en determinada relación de fase. Cuando un haz de estos mesones incide sobre un bloque de emulsiones nucleares, las interacciones fuertes con los núcleos del medio absorben parte de la componente anti-K^0, desfasando la mezcla. Se regenera así una componente de vida corta, pudiendo presentar la intensidad del haz de mesones en el interior del bloque diferente absorción, según la relación de las masas entre los mesones de vida larga y de vida corta. y según la velocidad de los mismos.

Se integró la ecuación de Schroedinger para el caso arriba descripto, calculando curvas de absorción para diferentes parámetros de masa y velocidad. Se obtiene resultados numéricos para las condiciones óptimas para detectar una diferencia de masa entre las dos componentes. Desafortunadamente, se llega a la conclusión de que para un bloque de tamaño convencional sería necesaria una estadística tan numerosa, que requeriría exposiciones tan largas que inutilizarían las emulsiones con la inevitable radiación de fondo.

7. José Litvak y Juan Roederer (C.N.E.A.). *Producción de mesones π por neutrones emitidos a 90º de un blanco de berilo del bevatron de Berkeley.*

Se ha determinado el espectro de energía y la distribución angular de los mesones $\pi -$ y $\pi +$ emitidos por los núcleos de un bloque de emulsiones fotográficas nucleares, expuestas al haz neutro emergente a 90º de un blanco de Be, bombardeado con un flujo total de 10^{11} protones de 6,2 Gev. El espectro de los neutrones responsables de la producción de piones, se ha determinado utilizando técnicas descriptas en una comunicación anterior [1]. Se determinó una relación asintótica $\pi - / \pi +$, independiente de la diferencia entre las barreras coulombianas para $\pi -$ y $\pi +$, y que da una idea del tipo de proceso de producción de piones en núcleos livianos e intermedios. Debido a las considerables dimensiones del bloque usado, la corrección por pérdida de trazas es bastante menor que en trabajos

(1) B. Roederer y J. Roederer: 31ª Reunión de la A.F.A. (1958).

anteriores (2), extendiéndose en nuestro caso el rango de energías medibles hasta 70 — 80 Mev para los piones.

(2) ALPERS, BAKOV et al.: *Zh. eksper. teor. Fiz.* 30, 1025-33, 1956.

8. LUCIA GRIMALDI y JUAN ROEDERER (C.N.E.A.). *Cálculo teórico de funciones de acoplamiento y del efecto de latitud de la radicación cósmica emitida durante erupciones solares.*

Utilizando una formulación simple de la teoría de la cascada nucleónica (1), se obtienen valores numéricos para la función de acoplamiento de un monitor de neutrones. Esta función W (E, h) representa la probabilidad de que un registro de un detector situado a una profundidad atmosférica h, provenga de una cascada originada en un primario de energía E. Conociendo esta función, se puede relacionar fácilmente una variación del espectro primario, con una variación de intensidad registrada en el detector.

El mismo método de cascadas permite analizar la absorción y el efecto de latitud de espectros primarios de diversas formas, tales como se observan para partículas emitidas durante grandes erupciones solares.

(1) J. G. ROEDERER: *Zeitschr. f. Naturforsch.* 9a, 740, 1954.

9. JUANA CARDOSO (C.N.E.A.). *Determinación de las condenadas asintóticas de la fuente aparente de las variaciones diurnas de la radiación cósmica.*

Se han determinado las coordenadas χ (desviación hacia el este del sol) y ψ (longitud geomagnética) de la dirección asintótica aparente, desde la cual inciden las partículas responsables de la variación diurna de la radiación cósmica. Para tal fin se utilizaron los datos de los telescopios direccionales y verticales que registran la componente de mesones μ en las estaciones de Ushuaia y Buenos Aires. Los primeros están a 45° respecto de la vertical, y han sido orientados alternativamente en los planos E-O y N-S. De un análisis armónico de los datos registrados, y utilizando expresiones teóricas (1), se obtuvieron valores para las coordenadas, concordantes con los obtenidos para el hemisferio norte.

Asimismo se ha determinado la variación de estas coordenadas con la actividad geomagnética, representada por el índice K_p diario.

Estos resultados confirmarían la idea de la influencia de los haces de plasma emitidos desde la zona ecuatorial del sol, los cuales por intermedio de los campos magnéticos "congelados" que transportan consigo, introducirían una modulación de la radiación cósmica en el espacio interplanetario.

(1) Descriptas y resumidas en L. I. DORMAN: *Cosmic Fay Variations*, traducción de Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, EE. UU.

10. L. Levi, R. G. de Pena y R. Norscini (Serv. Met. Nac. - Fac. C. 5. N. Bs. As.). *Influencia de los electrolitos sobre la conductividad del hielo en campos continuos.*

Continuando experiencias anteriores (comunicación a la A.F.A., set. 1958) se han efectuado mediciones de conductividad, distribución de potencial y concentración de las diversas impurezas iónicas en cada muestra de hielo.

Se encontró que la conductividad del hielo impurificado con ClH es proporcional a la raíz cuadrada de la concentración de impurezas, de acuerdo con la teoría a la raíz Steinemann y Gränicher; y que en la conducción iónica (iones F—, Cl—, HO—; Li +, Na+, NH_4 , H+) hay una fuerte interdependencia entre los iones presentes a pesar de su baja concentración (orden (10^{-5} — 10^{-4}N).

11. S. M. Radicella y A. H. Cosio (Est. Ionosf., Inst. Electr. y Radiocom., Univ. Nac. Tucumán). *Problemas en la región E de la ionósfera.*

Se han continuado las observaciones sobre las capas esporádicas Es (h y c) en Tucumán y otras estaciones ionosféricas del hemisferio sud, estableciéndose ciertas hipótesis sobre el comportamiento de las mismas, como así sobre su relación con la capa normal E.

Se estudiaron muchos casos de estratificación de la capa E normal en Tucumán, observándose gran regularidad en su comportamiento; se establece una probable correlación entre las mismas y las esporádicas Es (h y c).

12. Jorge Anderson (C.N.E.A. - A.G.I.). *Dependencia entre la variación diaria de la radiación cósmica y los valores de perturbación geomagnética.*

Es sabido que la intensidad de la radiación cósmica está fuertemente correlacionada con la actividad geomagnética. Por un lado, se ha determinado que para días magnéticamente muy perturbados, la intensidad de la radiación cósmica decrece, no existiendo sin embargo una relación simple entre ambos fenómenos. Por otro lado, se ha establecido que la variación diaria de la intensidad, promediada sobre largos períodos, también depende de la actividad geomagnética que caracterizó este período. Se observa que para valores crecientes de la actividad geomagnética, la hora en que se produce el máximo de intensidad se corre hacia horas más tempranas. Este efecto ha podido observarse tanto para los datos de la estación de Mina Aguilar (Jujuy) a 4.000 m. sobre el nivel del mar, como para los de Buenos Aires. Además, analizando la hora de máxima intensidad diaria para datos de distintos meses, se observa que ésta sigue un ciclo, muy análogo para las dos estaciones mencionadas. Clasificando los días de cada mes según actividad magnética, el ciclo persiste, lo que indica que es independiente de las perturbaciones magnéticas. Se analiza si el ciclo se cumple en forma continua o a saltos bruscos.

El análisis se ha hecho para índices de actividad geomagnética K_p y A_p, buscando una mejor correlación estadística.

13. JOSÉ MANZANO (C.N.E.A. - A.G.I.). *Corrección por temperatura de la intensidad neutrónica de la radiación cósmica, medida en Buenos Aires.*

Se ha calculado la corrección por efecto de temperatura de las distintas capas atmosféricas, en la intensidad de los neutrones al nivel del mar. Para ello se han utilizado los registros del monitor de neutrones de la estación de Buenos Aires, así como los datos de radiosondeos del Servicio Meteorológico Nacional.

Este efecto de temperatura, si bien muy pequeño (del orden del 0,03 %), debe conocerse cuando se quiere analizar variaciones de intensidad primaria, cuyos efectos en la componente secundaria sean del mismo orden. Son responsables del efecto de temperatura, aquellos (pocos) piones y muones que logran participar en la cascada nucleónica antes de desintegrarse.

Se efectúa un análisis comparativo entre el método semiteórico descripto por Dorman [1], en el que intervienen individualmente las variaciones de temperatura en todas las capas atmosféricas, con un método de correlación estadística entre la intensidad de la radiación cósmica y la variación media de la temperatura entre dos capas distantes (p.ej. 850 — 200 milibares).

---

(1) L. I. DORMAN: *Cosmic Ray Variations*, traducción de de Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, EE. UU.

14. J. ROSENBLATT y R. J. SLOBODRIAN (C.N.E.A.). *Deflección magnética del haz en el sincrociclotrón de Buenos Aires.*

La inestabilidad en el funcionamiento del deflector electrostático [1] demostró la conveniencia de adoptar un sistema deflector magnético. Se comprobó la existencia de haz regenerado estable hasta 84.5 cm de radio a 90° del nodo de oscilación radial. En ese punto la distancia entre órbitas es de 1.7 cm. valor que resulta de suponer la órbita sincrónica de extracción a 77 cm. y de la relación medida entre ganancias radiales sucesivas, 1.3. En consecuencia, se decidió intentar la extracción a 90° del nodo en lugar de 35°. Para ello se impuso al haz una trayectoria de salida dada en coordenadas polares (ρ, α) por

$$\rho = 83.5 + 10\,\alpha^{11/4}\ (\text{cm})$$

y se calcularon sectores magnéticos capaces de producir la disminución necesaria del campo magnético. En ellos, así como en hierros de preenfoque colocados a la salida de la máquina, se aplicó el principio de enfoque fuerte por gradiente alternado, pudiéndose obtener un haz bien enfocado (desenfoque vertical prácticamente nulo, desenfoque radial 1/200) hasta la entrada de las lentes cuadrupolares sin necesidad de ranuras de colimación. La corriente de deuterones obtenida en los primeros ensayos a 6.75 m. de la máquina es de 0.05 μA.

---

(1) S. MAYO y J. ROSENBLATT: XXX Reunión de la A.F.A., San Luis, setiembre de 1957.

15. E. Silberman (C.N.E.A.). *Proyecto, construcción y ensayo de un espectrofotómetro infrarrojo.*

Se describen en el proyecto, algunos detalles constructivos y los métodos utilizados para el ensayo de un espectrofotómetro para la zona del fluoruro de calcio (2 a 9 micrones). Se comparan los resultados obtenidos con los límites teóricos, discutiendo los progresos necesarios para disminuir sus diferencias.

16. I. Bergström, A. Jech M. Pérez, P. Thieberger (F.C.E.N.Bs.As.). *Un método osciloscópico para medición de vidas medias.*

Se han medido vidas medias de estados isoméricos de varios isótopos radioactivos con lo cual se ilustran las posibilidades y limitaciones del método. El dispositivo utilizado es, gracias a la introducción de una cámara fotográfica como elemento registrador, equivalente a un analizador de tiempo de diez canales.

17. Gunther Schoeck (Inst. Fis. S. C. Bariloche). *On the yield stress in iron.*

18. J. A. Balseiro (Ins. de Fís. de S. C. Bariloche). *Sobre el origen del acoplamiento espin-orbital del modelo nuclear de capas.*

Partiendo de la ecuación de Bethe-Salpeter para dos nucleones con acoplamiento pseudoescalar puede obtenerse una ecuación aproximada análoga a la ecuación de Breit para dos electrones. Esta ecuación conduce a un acoplamiento espin-orbital dependiente del campo pseudoescalar. Promediando para un sistema de fuentes de este campo dispuestas en capas saturadas se obtiene el signo y cualitativamente el valor asignado a este acoplamiento en el modelo nuclear de capas.

TRIGÉSIMO CUARTA REUNIÓN

Tucumán, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, Instituto de Física,

18 y 19 de setiembre de 1959

Comunicaciones

1. S. Mayo y A. Hamburger, *Reacciones dt sobre C^{13}.* (Comisión Nacional E. Atómica y Radiation Laboratory, University of Pittsburgh). Se midió la sección eficaz diferencial absoluta en las reacciones C^{13} *dt* C^{13} estado fundamental, 4,43 Mev y 7,65 Mev con energía de bombardeo 14,8 Mev para ángulos de laboratorio entre 3 y 80 grados. El blanco empleado tenía la composición: 66% de C^{13} y 34% de C^{12}. Los grupos de tritones correspondientes a los niveles estudiados fueron analizados magnéticamente y detectados con emulsiones nucleares o con centelleadores. Las distribucio-

nes angulares fueron interpretadas con la teoría de S. BUTLER para reacciones de "pick-up" resultando en todos los casos $ln = 1$ como momento angular de la partícula transferida en la reacción. Los valores de la sección eficaz diferencial en los máximos de las distribuciones angulares son: 24,3 ; 9,6 ; 0,36 mb/sterad para los niveles respectivamente mencionados. El error de medición fue 25%. La relación de anchos reducidos relativos en los procesos C^{13} *dt*. C^{12} E. F.; 4,43 Mev ; 7.65 Mev en ese orden es 1 : 0,76 : 0,039.

2. J. ROSENBLATT, *Efectos de la carga espacial en haces iónicos de forma arbtiraria*, (Comisión Nacional de la E. Atómica y Facultad de Ciencias Exastas y Naturales, Buenos Aires). Se expone la teoría general de haces estacionarios de forma predeterminada, habida cuenta de la interacción electrostática entre las partículas que los componen. El formalismo usado es el de la ecuación de HAMILTON-JACOBI expresada en un sistema particular de coordenadas, y permite en principio el cálculo de la distribución de potencial dentro del haz. Se obtienen condiciones de compatibilidad de las ecuaciones y un criterio general para determinar si es posible o no una familia de trayectorias elegidas arbitrariamente. Asimismo resulta una expresión teórica para el coeficiente de proporcionalidad k en la ley de Child ($J = k.V^{2/3}$) que liga a la densidad de corriente J con la diferencia de potencial entre electrodos V. Aplicada la teoría a un caso particular (haz plano con límites hiperbólicos) se realizó una experiencia que confirmó las predicciones teóricas.

3. SLOBODRIAN, R. J., *Dispersión de deuterones de 28,1 Mev por el núcleo de C^{12}*. (Comisión Nacional de la E. Atómica). Se ha utilizado el haz externo del sincrociclotrón de Buenos Aires para estudiar las distribuciones angulas de productos de reacción por bombardeo del núcleo C^{12}. Se empleó un blanco de polietileno y por ello también se obtuvieron los grupos de deuterones y protones correspondientes a la interacción con los protones del blanco. En el experimento se empleó una cámara de dispersión de 50 cm. de diámetro con ventanas fijas cada 5 grados y como detector un centellador de INa (Tl) de 4 mm. de espesór acoplado a un analizador de impulsos unical. El blanco estaba colocado a 45 grados con respecto al haz incidente y se midieron los espectros de partículas desde 15 grados hasta 100 grados por transmisión y los ángulos 150° hasta 165° inclusive por reflexión. Se individualizaron en forma no ambigua los protones de la reacción C^{12} (d, p) C^{13}, C^{12} (d,p) C^{13*} -- 0,6 *Mev*; los deuterones elásticamente dispersados por el C^{12} y los deuterones de la reacción C^{12} (d,d') C^{12*} — 4,43 *Mev*.. Se presentan las secciones eficaces diferenciales correspondientes a las tres reacciones mencionadas en último término. La sección eficaz de la reacción C^{12} (d,p) C^{13} está por lo menos un orden de magnitud por debajo de las restantes. Esto implica que predominan reacciones múltiples de la forma C^{12} $(d, x_i x_j)$ Z las que compiten con la reacción C^{12} (d,p) C^{13}. La sección eficaz diferencial de la dispersión clásica presenta la estructura de difracción típica

observada en el Be ([1]) con deuterones de 24 Mev y en Mg, Ni, Zn y Cu ([2]) con deuterones de 21,6 Mev. Las otras dos secciones eficaces diferenciales no son simétricas con respecto a 90° en el sistema centro de masa e indican que las reacciones no proceden por formación de núcleo compuesto.

([1]) R. G. SUMMERS-GILL, *Phys. Rev. 109*, 1591 (1958).
([2]) J. L. INTEMA, *Phys. Rev. 113*, 261 (1959).

4. O. B. de MANDIROLA, *Método espectroscópico cuantitativo para determinación de plomo en minerales*, (Comisión Nacional de la E. Atómica). Se intenta en este trabajo un método cuantitativo espectroscópico para determinar plomo en minerales. Trabajando con un espectrógrafo Hilger tamaño grande con óptica de cuarzo y placas Kodak III o usando nitrato de bario como diluyente del mineral y estabilizados del arco y empleando elemento que no se halla habitualmente en minerales, como patrón interno se alcanza una sensibilidad de 0,1 ppm. El método no requiere separaciones químicas previas del elemento a analizar, resultando especialmente conveniente en determinaciones de edad geológica de rocas por medio del análisis del plomo en zircones.

5. C. C. MALLMANN y colaboradores, *Construcción de un espectómetro beta tipo Kofoed-Hansen*, (Comisión Nacional de la E. Atómica). Según los principios expuestos por C. A. MALLMANN ([1]) ([2]) y con las modificaciones indicadas por J. SUÁREZ y colaboradores ([3]), se construyó un espectrómetro beta tipo Kofoed-Hansen ([4]). El mismo presenta las siguientes características medias: T 3%, R 1,8% con una fuente de 4 mm. de diámetro. Debido a la presencia de campos dispersos, la transmisión y la resolución depende del campo aplicado. Se discute la diferencia entre valores de T y R calculados y obtenidos. La inclusión de un espectrómetro gama de centelleo permite la realización de coincidencias.

([1]) C. A. MALLMANN, *Pub. CNEA.* Serie Fis. 1, Nº 1 (1953).
([2]) C. A. MALLMANN, *Pub. CNEA.* Serie Fís. 1, Nº 5 (1954).
([3]) J. SUÁREZ y colab. *Actas de la segunda Conf. Int. sobre usos pacíficos de la energía* at. Conf. 15/P/1973.
([4]) O. KOFOED-HANSEN-J. LINDHARD y O. B. NIELSEN. *Kgl. Danske Vid. Sel. Mat. Fys. Medd. 25* Nº 16 (1950).

6. R. J. SLOBODRIAN, *Desfasajes correspondientes a la dispersión elástica de partículas alfa de 40,77 y 47,v Mev por helio.* (Comisión Nacional de la Energía Atómica). Se ha realizado el análisis de los resultados de la distribución angular por dispersión elástica de partículas alfa de 40,77 y 47,1 Mev por helio ([1]) mediante el método de las ondas parciales. Se ha se-

([1]) CONZET, OGO, SHAW & SLOBODRIAN, *Alpha-alpha scattering in the range* 36,8 to 47,3 Mev (en publicación).

guido el procedimiento utilizado para el análisis de los resultados correspondientes a 41,9 Mev (2), 44,7 y 46,1 Mev (3). Se presentan los resultados conjuntos del análisis efectuado para diversas energías entre 40,77 y 47,1 Mev. En ese intervalo de energías la estructura de las distribuciones angulares corresponde predominantemente a la onda parcial *G*, mientras que en intervalo de 32 a 39 Mev corresponde la onda *D* (1), (4). Para extraer conclusiones firmes sería necesario poseer los desfasajes de los resultados experimentales entre 30 y 40 Mev. Suponiendo la validez de la teoría de la dispersión de WIGNER y EISENBUD (5) parece observarse un estado del Be^8 (2 +) alrededor de 23 Mev, y otro estado de 4 + alrededor de los 20 Mev. En cambio no se observa un estado 2 + alrededor de los 20 Mev.

7. J. M. FLORES, *Función de excitación de la función* Al^{27} (d,p) Al^{28} *entre 0 y 46,8 Mev.* (Comisión Nacional de la E. Atómica). Se ha medido la función de excitación de la reacción Al^{27} (d,p) Al^{28} entre 0 y 16,8 Mev utilizando el método de la pila de hojas. Para obtener la función de excición absoluta se utilizaron los resultados obtenidos por SLOBODRIAN y LEK, ''La función de excitación de la reacción Al^{27} $(d,\, a\, p)$ Na^{24} entre 0 y 28,1 Mev'' 33ª Reunión de AFA. Los resultados permiten establecer el máximo de la función en los 8,7 Mev.

8. O. BRAVO, *Sobre el mecanismo de la formación de las trazas de retroceso (fragmentos) en emulsiones nucleares por la evaporación de núcleos pesados y livianos provocada por la interacción de mesones pi negativos de 4,5 Gev.* (Instituto de Física, Universidad Nacional de Tucumán). Se ha medido 220 estrellas de desintegración producidas en emulsiones nucleares, Ilford *G*-5 por mesones pi negativos de 4,5 Gev, que presentan trazas de retroceso ($0 < R \leq 12\,\mu$) y multiplicidades de trazas negras $n = 1, 2, 3$. Haciendo la separación de fragmentos que van hacia adelante y hacia atrás del sistema del laboratorio, se ha analizado el espectro de longitudes de aquellos y la distribución angular de las trazas negras respecto al pion incidente y al fragmento y de fragmentos respecto al pion incidente. De este estudio se puede concluir que las trazas de retroceso, (fragmentos), pertenecen al núcleo residuo el cual es empujado hacia adelante por el proceso primario (cascada, producción múltiple de mesones). Este núcleo altamente excitado evapora partículas adquiriendo un impulso que se compone con el conferido por el proceso primario.

(2) R. J. SLOBODRIAN, *XXXII Reunión de AFA.*
(3) R. J. SLOBODRIAN, *XXXIII Reunión de AFA.*
(4) BURCHAN, GIBSON, PROWSE & ROTBAT, *Nuclear Physics* 3, 217, (1957).
(5) WIGNER & EISENBUD. *Phys. Rev.*, 72, 29, (1947).

9. S. M. Radicella y A. H. Oosio, *Observaciones sobre una estratificación baja en la región F de la ionósfera en Tucumán durante el AGI*, (Inst. de Electrotecnia, Universidad de Tucumán). Se analizaron los datos recogidos durante los 18 meses del año geofísico internacional correspondiente a una estratificación de características regulares de la ionósfera, que hemos llamado $F\frac{1}{2}$ en acuerdo con el Laboratorio ionosférico de la Armada, por estar comprendida entre la capa regular E y la capa regular F 1, es decir, en los límites inferiores de la región F. Se discute la razón de la denominación $F\frac{1}{2}$ dada a esta estratificación. La frecuencia crítica máxima de la misma es, en promedio, de $5MHz$ y la altura virtual promedio correspondiente de 225 km. Se estudiaron las variaciones estacionales de esta estratificación y la influencia de su aparición sobre la altura virtual de la región F.

10. O. Santocchi, J. Anderson, J. Cardozo, H. Ghielmetti, R. Manzano y J. Roederer, *Influencia de las erupciones solares de julio 1959 sobre la intensidad de la radiación cósmica*. (Comisión Nacional de Energía Atómica). Se analiza la variación de intensidad de la radiación cósmica registrada en las estaciones de Mina Aguilar, Buenos Aires y Ellsworth (Antártida) durante las dos grandes erupciones solares ocurridas en julio ppdo. Se encuentra que el registro del monitor de neutrones indica un incremento de intensidad del orden del 10%, coincidente con la iniciación de la erupción solar del 10 de julio. Los telescopios mesónicos también parecen indicar un leve incremento. En las estaciones de Buenos Aires y Mina Aguilar, en cambio, no se observan incrementos apreciables. Durante la erupción del 14 de julio, de intensidad semejante a la de la erupción anterior, no se ha registrado incremento alguno en las estaciones antes mencionadas. Se discute las diversas interpretaciones posibles de los resultados encontrados.

11. M. E. Huergo y R. Rey, *Rendimientos relativos de fisión de I-131 y I-133 en U natural irradiado con deuterones de 27,5 Mev*. (Comisión Nacional de Energía Atómica). Se determinó radioquímicamente los rendimientos relativos de fisión de la cadena de números de masas 131 y 133, irradiando U natural con deuterones de 27,5 Mev en el sincrociclotrón de la C.N.E.A. Los resultados obtenidos fueron $0{,}66 \pm 0{,}01$ y $0{,}75 \pm 0{,}03$, respectivamente. Las cotas de error señalan solamente la desviación aparente, debido al reducido número de irradiaciones hecho en cada caso. El error total de los resultados es un 15 %, que se considera muy aceptable en este tipo de experiencias. Se confirmó la existencia de fisión asimétrica por medio del cociente v/p (relación de rendimientos entre valles y picos), para una energía de excitación del núcleo igual a 36 Mev. No es definitiva la confirmación de la existencia de la estructura fina para la energía de deuterones utilizadas.

SUR UNE CLASSE D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES NON-LINEAIRES DU DEUXIEME ORDRE

par I. BANDIĆ, BEOGRAD

Il est notoire que l'équation différentielle non-linéaire du deuxième ordre ne peut être réduite à l'équation du premier ordre que dans un nombre fort restreint de cas.

Un tel cas consiste dans la transformation de l'équation

$$f(x, y, y', y'') = 0,$$

dans laquelle f est une fonction homogène par rapport à y, y', y'', en une équation du premier ordre par la substitution

$$\frac{y'}{y} = z.$$

La transformation susmentionnée est généralisée ici dans ce sens qu'elle est appliquée à la classe d'*équations différentielles quassi-homogènes non-linéaires* affectant la forme

$$(1) \qquad u(x, y, y', y'') = v(x, y, y', y''),$$

où u et v sont des fonctions homogènes par rapport à y, y' et y'', à savoir u du m-tième degré et v du n-tième degré.

La transformation même est effectuée au moyen des dérivées relatives de M. Petrović (1).

---

(1) M. PETROVIĆ, *Jedan diferencijalni algoritam i njegove primene /Un algotithme différentiel et ses applications, en serbe/* Posebna ozdanja SAN /Monographies de l'Académie Serbe des Sciences/, vol. CXI, Beograd, 1936.

La notion de dérivée relative du n-tième ordre de la fonction $u \equiv u(x)$ est introduite par la définition

$$\triangle_n(u) = \frac{u^{(n)}}{u}, \quad \left(u^{(n)} = \frac{d^n u}{dx^n}\right),$$

d'où l'on arrive aux nombreux rapports entre les dérivées relatives pour diverses combinaisons de fonctions. On applique ici les rapports

$$\triangle_1(u\,v) = \triangle_1(u) + \triangle_1(v); \quad \triangle_1\left(\frac{u}{v}\right) == \triangle_1(u) - \triangle_1(v);$$

$$\triangle_1(u^n) = n\,\triangle_1(u); \quad \triangle_2(u) = \triangle_1'(u) + \triangle_1{}^2(u),$$

où $$u \equiv u(x), \quad v \equiv v(x).$$

Il s'ensuit directement de la définition

$$\triangle_1(\exp \int u\,d\,x) = \exp \int \triangle_1(u)\,d\,x = u.$$

La notion de dérivée relative peut être étendue aussi sur la fonction à deux variables indépendantes, $u \equiv u(x_1, x_2)$, en introduisant la notion de la dérivée relative partielle

$$\triangle_1(u)_{x_v} = \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_v}, \quad (v = 1, 2).$$

Si x_2 est la fonction de x_1, on arrive à la dérivée relative totale

$$\triangle_1(u)_{x_1} = \frac{1}{u}\,\frac{du}{dx_1} = \frac{1}{u}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot x_2'\right), \quad \left(x_2' = \frac{dx_2}{dx_1}\right)$$

ou bien, selon la définition précédente

$$\nabla_1(u)_{x_1} = \triangle_1(u)_{x_1} + \triangle_1(u)_{x_2} \cdot x_2'.$$

1°. Si l'on utilise les rapports susmentionnés, l'équation (1) sera d'abord transformée en une équation différentielle du deudegré supérieur. Cependant, par l'application de la méthode exposée en (1. 1), la dérivée de la fonction inconnue dans l'équation transformée n'apparaît qu'au premier degré, ce qui facilitera considérablement les recherches ultérieures.

A l'équation (5) correspond, en vertu de (3)

$$\nabla_1(F)_x = \frac{n-m}{z}\,; \quad F = \frac{u\left(x, \frac{1}{z}, \frac{1-z'}{z^2}\right)}{v\left(x, \frac{1}{z}, \frac{1-z'}{z^2}\right)}.$$

Puisque F est une fonction homogène par rapport à $\frac{1}{z}$ et $\frac{1-z'}{z^2}$, on obtient

$$F = z^{n-m} \frac{u\left(x, 1, \frac{1-z'}{z}\right)}{v\left(x, 1, \frac{1-z'}{z}\right)},$$

et (3) apparaît sous la forme

$$\nabla_1(F_1)_x = (n-m)\frac{1-z'}{z}\,; \quad F_1 = \frac{u\left(x, 1, \frac{1-z'}{z}\right)}{v\left(x, 1, \frac{1-z'}{z}\right)}. \tag{6}$$

En conséquence de l'introduction de la nouvelle fonction inconnue ϑ par la substititon

$$1 - z' = z\,\vartheta, \tag{7}$$

la dernière équation devient

$$\nabla_1(F_1)_x = (n-m)\,\vartheta,$$

ou bien dans la forme développée

$$\Delta_1(F_1)_\vartheta\,\vartheta' = (n-m)\,\vartheta - \Delta_1(F_1)_x; \quad F_1 = \frac{u(x, 1, \vartheta)}{v(x, 1, \vartheta)}. \tag{8}$$

Soit $\vartheta = \vartheta(x, c_1)$ l'intégrale de l'équation (8). On trouve alors de (7) l'intégrale générale de l'équation (6)

$$z = \lambda\left(\int \frac{dx}{\lambda} + c_2\right); \quad \lambda = \exp\left(-\int \vartheta\, dx\right),$$

et l'intégrale générale de l'equation (5), en vertu de (4).

(9) $$y = z\sqrt[n-m]{F}; \qquad F_1 = \frac{u(x,1,\vartheta)}{v(x,1,\vartheta)},$$

où ϑ dans l'expression F_1 représente l'intégrale générale de l'équation (8).

Théorème. A l'équation différentielle

$$u(x, y' y'') = v(x, y', y''),$$

où u et v sont des fonctions homogènes par rapport à y', et y'', du m-tième resp. n-tième degré, correspond l'équation du premier ordre et du premier degré par rapport à la dérivée de la fonction inconnue

$$\triangle_1(F_1)_\vartheta \, \vartheta' = (n-m)\,\vartheta - \triangle_1(F_1)_x; \quad F_1 = \frac{u(x,1,\vartheta)}{v(x,1,\vartheta)}.$$

L'intégrale générale de l'équation donnée est

$$y = z \, . \sqrt[n-m]{F_1},$$

où

$$z = \lambda\left(\int\frac{dx}{\lambda} + c_1\right), \quad \lambda = \exp\left(-\int\vartheta\, dx\right)$$

et $\vartheta = \vartheta(x, c_2)$ représente l'intégrale générale de l'équation transformée du premier ordre.

Exemple. A l'équation

$$a_0\, y'^m + a_1\, y''^m = a_2\, y', \qquad (a_v = a_v(x))$$

correspond, en vertu de (8), l'équation du premier ordre

$$m\, a_1\, \vartheta^{m-1}\,\vartheta' = a_1(1-m)\;\vartheta^{m+1} + a_1\triangle_1\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\vartheta^m +$$
$$+ a_0(1-m)\,\vartheta + a_0\triangle_1\left(\frac{a_2}{a_0}\right).$$

L'intégrale générale de l'équatión donne est, d'après (9)

$$y = z \cdot \sqrt[1-m]{\frac{a_0 + a_1 \vartheta^m}{a_2}}.$$

où

$$z = \lambda \left(\int \frac{dx}{\lambda} + c_1 \right), \quad \lambda = \exp \left(- \int \vartheta \, dx \right),$$

et $\vartheta = \vartheta(x, c_2)$ représente l'intégrale générale de l'équation transformée.

(2. 3) Dans l'équation (1) ne figure pas explicitement x.

$$u(y, y', y'') = v(y, y', y'') \tag{10}$$

u et v sont ici des fonctions homogènes des arguments y, y' et y'' du m-tième, resp. n-tième degré.

En vertu de (3) on trouve

$$\nabla_1(F)_x = \frac{n-m}{z}, \quad F = \frac{u\left(1, \frac{1}{z}, \frac{1-z'}{z^2}\right)}{v\left(1, \frac{1}{z}, \frac{1-z'}{z^2}\right)}. \tag{11}$$

Après avoir introduit la nouvelle fonction inconnue ϑ par la substitution $z' = \vartheta$ et en tenant compte que

$$\nabla_1(F)_x = z' \, \nabla_1(F)_z = \vartheta \, [\triangle_1(F)_z + \triangle_1(F)_\vartheta \, \vartheta'], \qquad \left(\vartheta' = \frac{d\vartheta}{dz} \right)$$

la dernière équation devient

$$\vartheta \, \vartheta' \, \triangle_1(F)_\vartheta = \frac{n-m}{z} - \vartheta \, \triangle_1(F)_z; \quad F = \frac{u\left(1, \frac{1}{z}, \frac{1-\vartheta}{z^2}\right)}{v\left(1, \frac{1}{z}, \frac{1-\vartheta}{z^2}\right)}. \tag{12}$$

Soit $\vartheta = \vartheta(z, c_1)$ l'intégrale générale de l'équation (12). On trouve alors de l'équation

$$z' = \vartheta(z, c_1)$$

l'intégrale générale de l'équation (11), $z = z(x, c_1, c_2)$ et de (4) l'intégrale générale de l'équation (10).

Théorème. A l'équation différentielle non-linéaire

$$u(y, y', y'') = v(y, y', y''),$$

dans laquelle u et v sont des fonctions homogènes des arguments y, y' et y'', du m-tième resp. n-tième degré, correspond l'équation du premier ordre et du premier degré

$$\vartheta\,\vartheta'\,\triangle_1(F)_\vartheta = \frac{n-m}{z} - \vartheta\,\triangle_1(F)_z;$$

$$F = \frac{u\left(1, \frac{1}{z}, \frac{1-\vartheta}{z^2}\right)}{v\left(1, \frac{1}{z}, \frac{1-\vartheta}{z^2}\right)}, \quad \left(\vartheta' = \frac{d\vartheta}{dz}\right).$$

L'intégrale générale de l'équation donnée est

$$y = \sqrt[n-m]{F},$$

où $\vartheta = \vartheta(z, c_1)$ dans l'expression F représente l'intégrale générale de l'équation transformée, et z la solution de l'équation

$$z' = \vartheta(z, c_1).$$

Exemple. A l'équation (²)

$$(a^2 y^2 - b^2)\, y''^2 - 2\, a^2 y\, y'^2 y'' +$$
$$+ (a^2 y'^2 - 1)\, y'^2 = 0, \quad (a = \text{const}, \quad b = \text{const})$$

correspond, en vertu de (12)

$$[z^2 + b^2(1 - \vartheta)]\,[z\,\vartheta' + (1 - \vartheta)] = 0,$$

d'où l'on obtient, d'après (4), les solutions

$$y = \pm \frac{b}{a} \sin \frac{x+c}{b}; \quad y = c_1 e^{c_2 x} \pm \frac{1}{a} \sqrt{b^2 + \frac{1}{c_2{}^2}}.$$

(²) E. Kampe, *Differentialgleichungen I*, S. 598, 6-243, Leipzig 1943.

3°. L'équation quasi-homogène non-linéaire

$$(13) \qquad u(y, y', y'') = e^{kx}\, v(y, y'\, y''), \qquad (k = \text{const})$$

où u et v sont des fonctions homogènes par rapport à y, y' et y'', du m-tième resp. n-tième degré, est réduite toujours à l'équation du premier ordre.

C'est à dire, à l'équaation (13) correspond, en vertu de (3)

$$(14) \qquad \nabla_1(F)_x = k + \frac{n-m}{z}\,; \quad F = \frac{u\left(1, \frac{1}{z}, \frac{1-z'}{z^2}\right)}{v\left(1, \frac{1}{z}, \frac{1-z'}{z^2}\right)}$$

ou bien, en vertu de (12)

$$(15) \qquad \vartheta\,\vartheta' \triangle_1(F)_\vartheta = k + \frac{n-m}{z} - \vartheta \triangle_1(F)_z\,;$$

$$F = \frac{u\left(1, \frac{1}{z}, \frac{1-\vartheta}{z^2}\right)}{v\left(1, \frac{1}{z}, \frac{1-\vartheta}{z^2}\right)}, \quad \left(\vartheta' = \frac{d\vartheta}{dz}\right)$$

où ϑ représente la nouvelle fonction inconnue, introduite par la substitution $z' = \vartheta$.

Soit $\vartheta = \vartheta(z, c_1)$ l'intégrale générale de l'équation (15). On trouve aloors, de l'équation $z' = \vartheta(z, c_1)$, l'intégrale générale de l'équation (14), tandis que l'intégrale générale de l'équation (13) est obtenue de (4)

$$y = \sqrt[n-m]{F\, e^{-kx}}$$

où il faut, dans l'expression F, poser $\vartheta = \vartheta(z, c_1)$ et remplacer z par la solution de l'équation $z' = \vartheta(z, c_1)$.

Exemple. En cherchant de résoudre l'équation [3]

$$(16) \qquad y\, y''^2 = a\, e^{2x}, \qquad (a = \text{const})$$

(³) E. Kampe, *Differentialgleichungen* I, S. 598, Leipzig 1943.

Braunbek utilise la substitution $y = x^{3/4} u$ et donne la solution sous la forme d'une série selon la variable x. Cependant, de la façon exposée ci-dessus (16), se réduit à l'équation d'Abel, qui a été étudiée dans tous ses aspects.

L'équation (15) s'énonce maintenent comme suit

$$\nabla_t \left(\frac{1-\vartheta}{z^2}\right)_z = \frac{1}{2\vartheta}\left(2 - \frac{3}{z}\right),$$

ou, dans la forme développée

$$2\,\vartheta\, z\, \vartheta' = 4\,\vartheta^2 + (2z-7)\,\vartheta + (3-2z),$$

et c'est justement l'équation d'Abel.

(3.1). On a l'équation différentielle

$$u(y, x\,y', x^2\,y'') = x^k\, v(y, x\,y', x^2\,y''), \tag{17}$$

dans laquelle u et v sont des fonctions homogènes par rapport à $y, x\,y'$ et $x^2\,y''$, du m-tième, resp. n-tième degré.

Lorsqu'on introduit la nouvelle variable indépendante par la substitution

$$x = e^t, \quad \text{c'est-à dire} \quad \frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}, \tag{18}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),$$

on obtient l'équation de forme (13)

$$u(y, y', y'' - y') = e^{kt}\, v(y, y', y'' - y'), \qquad \left(y^{(v)} = \frac{d^v y}{dt^v}\right)$$

laquelle est transformée en une équation du premier ordre par la méthode exposée dans le paragraphe précédent.

Exemple. L'équation différentielle

$$\alpha_0\, y^2 + \alpha_1\, x^3\, y'\, y'' = \alpha_2\, x^p\, y'^2\, y'', \qquad (\alpha_v = \text{const})$$

par la substitution (18) est transformée en équation

$$\alpha_0 y^2 + \alpha_1 y'(y'' - y') = \alpha_2 e^{(p-4)t} y'^2 (y'' - y'),$$

à laquelle correspond, en vertu de (15), l'équation du premier ordre

$$\vartheta \vartheta' \Delta_1(\phi)_\vartheta = (p-4) + \frac{1-\vartheta}{z} - \vartheta \Delta_1(\phi)_z;$$

$$\phi = \frac{\alpha_0 z^3 + \alpha_1 (1 - z\vartheta)}{1 - z - \vartheta}, \qquad \left(\vartheta' = \frac{d\vartheta}{dz}\right).$$

4°. Par la méthode exposée ci-dessus certaines équations différentielles quasi-homogènes non-linéaires du deuxième ordre bien connues qui, du reste, jouent un röle important dans les divers domaines de la technique et de la physique théorique, sont réduites en équation du premier ordre.

(4. 1) On a l'équation différentielle quasi-homogène non-linéaire du deuxième ordre

$$(21) \qquad (y'^2 - y y'') f(x y', y) + y'^2 \varphi(x y', y) = x^v y^p y'^q,$$

où f et φ sont des fonctions homogènes per rapport à $x y'$ et y, du degré λ.

À l'équation (21) correspond, en vertu de (2)

$$(22) \qquad \nabla_1(F)_x = \frac{p+q-\lambda-2}{z}; \quad F = \frac{z' f(x,z) + \varphi(x,z)}{x^v z^{2+\lambda-q}}.$$

Si l'on suppose qu'une intégrale particulière de l'équation (22) apparaît sous la forme

$$z_1 = k x, \qquad (k = \text{const})$$

on trouve alors, de (22)

$$\nabla_1 \left(\frac{k f(1,k) + \varphi(1,k)}{k^{2+\lambda-q}} x^{q-v-2} \right)_x = \frac{p+q-\lambda-2}{kx},$$

et de là

$$\frac{q-v-2}{x}=\frac{p+q-\lambda-2}{kx},$$

ou plutôt

$$k=\frac{p+q-\lambda-2}{q-v-2} \tag{23}$$

Par conséquent, une intégrale particulière de l'équation (22) est

$$z_1=\frac{p+q-\lambda-2}{q-v-2}\,x. \tag{24}$$

Lorsqu'on introduit ,dans (22), une nouvelle variable indépendante t et une nouvelle fonction inconnue $\eta=\eta(t)$ par la substitution

$$\left.\begin{aligned} x&=e^t \\ z&=z_1\,\eta \end{aligned}\right\}, \tag{25}$$

on obtient, en tenant compte que $\nabla_1(F)_x=e^{-t}\nabla_1(F)_t$

$$\nabla_1(\Phi)_t=(q-v-2)\left(\frac{1}{\eta}-1\right);\quad \Phi=\frac{(\eta+\eta')f(1,k\eta)+\varphi(1,k\eta)}{\eta^{2+\lambda-q}}.$$

En conséquence de l'introduction de la nouvelle folction inconnue $\vartheta=\vartheta(t)$ par la substitution

$$\eta'=\vartheta, \tag{26}$$

on obtient de la dernière équation

$$\vartheta\left[\triangle_1(\Phi)_\eta+\triangle_1(\Phi)_\vartheta\,\vartheta'\right]=(q-v-2)\left(\frac{1}{\eta}-1\right) \tag{27}$$

où

$$\Phi=\frac{(\eta+\vartheta)f(1,k\eta)+\varphi(1,k\eta)}{\eta^{2+\lambda-q}};\quad \vartheta'=\frac{d\vartheta}{d\eta}$$

et c' est justement l'équation d'Abel de forme

$$a_0 \vartheta \vartheta' = b_0 \vartheta^2 + b_1 \vartheta + b_2, \tag{28}$$

dans laquelle

$$\left.\begin{aligned} & a_0 = f\eta; \quad b_0 = f[(2+\lambda-q) - \eta \Delta_1(f)]; \\ & b_1 = f[(q-v-2) + (3+\lambda-2q+v)\eta - \\ & \qquad - \eta^2 \Delta_1(f)] + \varphi[(2+\lambda-q) - \eta \Delta_1(\varphi)] \\ & b_2 = (q-v-2)(1-\eta)(f\eta+\varphi) \end{aligned}\right| \begin{aligned} f &= f(1, k\eta) \\ \varphi &= \varphi(1, k\eta) \end{aligned} \tag{29}$$

(4.1.1.) Soit $\vartheta = \vartheta(\eta, c_1)$ l'intégrale générale de l'équation (27). On trouve alors de (26) et de la première relation (25)

$$x = c_2 \exp \int \frac{d\eta}{\vartheta(\eta, c_1)}, \tag{30}$$

et, en vertu de (4), (22), et de l'autre relation (25)

$$y = \sqrt[p+q-\lambda-2]{F}; \quad F = \frac{z' f(x,z) + \varphi(x,z)}{x^v z^{2+\lambda-q}}; \quad z = k\, c_2\, \eta \exp \int \frac{d\eta}{\vartheta(\eta, c_1)} \tag{31}$$

où x est donné par l'égalité (30), et k par (23).

Par conséquent, l'intégrale de l'équation (21) est donnée paramètriquement, par la système (30) et (31), où η joue la rôle de paramètre.

(4.1.2) Les équations non-linéaires du deuxième ordre susmentionnées du domaine de la technique et de la physique théorique se réduisent à l'équation de forme (21).

(4.2). Si $\lambda = q = 0$, $v = -\dfrac{n+1}{n}$, $p = \dfrac{3n+2}{n+1}$, $f(xy', y) \equiv -1$,

$\varphi(xy', y) \equiv 1$, (21) se réduit alors à l'équation [4]

$$x^{\frac{n}{n+1}} y'' = y^{\frac{2n+1}{n+1}}, \tag{32}$$

[4] E. Kampe, *Differentialgleichungen I*, S. 569, Leipzig, 1943.

laquelle se réduit, pour $n=1$, à l'équation de Thomas-Fermy

(33) $$y''\sqrt{x}=y^{3/2}.$$

A l'équation (32) correspond, en vertu de (27), l'équation d'Abel

$$(n+1)\,\eta\,\vartheta\,\vartheta'=2(n+1)\,\vartheta^2+$$
$$+[(2n+3)\,\eta-(3n+4)]\,\vartheta+(n+2)\,(1-\eta)^2.$$

et à l'équation (33)

$$2\eta\,\vartheta\,\vartheta'=4\,\vartheta^2+(5\eta-7)\,\vartheta+3(1-\eta)^2.$$

(4.3). Si l'on suppose que $\lambda=q=1$, $p=n+1$, $f(xy',y)\equiv xy'$, $\varphi(xy',y)\equiv-(xy'+2y)$, on arrive, de (21), à l'équation d'Emden ([5])

$$x\,y''+2\,y'+x^v\,y^n=0,$$

à laquelle correspond, en vertu de (27), l'équation d'Abel

$$\eta\,\vartheta\,\vartheta'=2\,\vartheta^2+\Big[(2+v)\,\eta-(3+v)+2(n-1)\,\eta$$

$$\left(\frac{1+v}{2}+\frac{1+v+2(1-n)\eta}{1+v}\right)\Big]\,\vartheta+(\eta-1)\,[(v+2\eta-1)\,\eta-(v+1)].$$

(4.4). Lorsqu'on introduit dans (21) les conditions

$$v=q=\lambda=1,\quad p=3,\quad f(x,y',y)\equiv\frac{xy'}{b},\quad \varphi(x\,y',y)\equiv-\frac{ay}{b},$$

on arrive à l'équation

(34) $$x(y'^2-y\,y'')-a\,y\,y'=b\,x\,y^3,$$

laquelle, par la substitution

$$y=e^u$$

se transforme en l'équation des boules de gaz isothermes d'Emden ([6])

$$x\,y''+a\,u'+b\,x\,e^u=0.$$

([5]) E. Kampe, *Differentialgleichungen I*, S. 560-561, Leipzig 1943.
([6]) E. Kampe, *ibid.*, S. 562-563.

A l'équation (34) correspond, en vertu de (27), l'équation d'Abel

$$\eta\,\vartheta\,\vartheta' = 2\,\vartheta^2 + [(a+3)\,\eta - (b+2)]\,\vartheta + (a+2\,b)(\eta-1).$$

(4. 5). Pour

$$\lambda = p = q = 0, \quad v = m, \quad f(x\,y', y) \equiv -\frac{1}{a}, \quad \varphi(x\,y', y) \equiv \frac{1}{a}$$

on obtient, de (21) l'équation ([7]).

$$y\,y'' = a\,x^m$$

à laquelle correspond, en vertu de (27), l'équation d'Abel

$$\eta\,\vartheta\,\vartheta' = 2\,\vartheta^2 + [(m+3)\,\eta - (m+4)]\,\vartheta + (m+2)\,(\eta-1)^2.$$

([7]) E. KAMPE, *ibid.* ,S. 570.

CRONICA

ACTIVIDADES DEL CENTRO REGIONAL DE MATEMATICA PARA AMERICA LATINA

El Centro Regional de Matemática para América Latina ha iniciado oficialmente sus actividades con un acto que se celebró el 28 de marzo en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, en el que hicieron uso de la palabra, el Decano de esa Facultad, Dr. Rolando García, el Director del Centro Regional de Matemática, Dr. Alberto González Domínguez, el Jefe de la División de Actividades Regionales Científicas de la UNESCO, Dr. Angel Establier y el Rector de la Universidad de Buenos Aires, Dr. Risieri Frondizi. Al acto asistieron el presidente del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Dr. Bernardo Houssay, el presidente de la Academia Nacional de Ciencia Exactas Físicas y Naturales, Dr. Abel Sánchez Díaz, representantes diplomáticos de países americanos y numeroso público.

El estatuto por el cual se regirán las actividades del Centro, fue estudiado y aprobado en una reunión presidida por el Dr. Angel Establier y en la que participaron los siguientes profesorees: Elon Lima (Brasil); Raúl Bravo Flores (Chile); José Tola Pasquel (Perú); Fernán Rodríguez Gil (Venezuela); Rafael Laguardia (Uruguay) y José Babini, Misha Cotlar, Alberto González Domínguez, Gregorio Klimovsky, Cora Ratto de Sadosky, Manuel Sadosky, Luis A. Santaló, Roque Scarfiello de la Argentina.

A continuación transcribimos dicho Estatuto:

Artículo 1º. El Centro Regional de Matemátida para América Latina es un instituto docente y un centro de investigación, constituído bajo el patrocinio de la UNESCO y de la Universidad de Buenos Aires con el objeto de fomentar el estudio y la investigación de la Matemática en América Latina en todas sus especialidades y niveles.

Artílulo 2º. El Centro tendrá su sede en la ciudad de Buenos Aires, pero podrá extender sus actividades a otros sitios siempre que el cumplimiento de sus fines así lo requiera. Asimismo, procurará la adhesión y cooperación de los diversos países latinoamericanos, las que se harán efectivas a través de una Universidad, Instituto de Matemática o Consejo Nacional de Investigaciones por cada país.

Artículo 3º. El Centro realizará todas las actividades que considere adecuadas para el cumplimiento de sus objetivos, especialmente:

a) Ofrecer cursos y seminarios de distintos niveles a los matemáticos y estudiantes latinoamericanos y facilitar sus viajes y estadías mediante ayuda económica directa o indirecta. Se procurará que participen en las actividades docentes del Centro matemáticos de los diversos países latinoamericanos.

b) Preparar programas coordinados de contratación de expertos en matemática para dictar cursos y seminarios y trabajar con investigadores y estudiantes adelantados en su sede y en los distintos países latinoamericanos.

c) Constituir, con la colaboración de lo spaíses adherentes, un fondo de becas, denominadas Becas del Centro Regional de Matemática, destinadas al perfeccionamiento, preferentemente en los países latinoamericanos, de jóvenes matemáticos de preparación suficiente.

d) Organizar reuniones, simposios y congresos sobre temas de interés especial.

e) Procurar la obtención de los fondos necesarios para los traslados de expertos y becarios.

f) Servir de vínculo entre los diferentes centros matemáticos latinoamericanos, procurando que su acción se coordine y complemente y ayudando de la manera más eficaz a su desarrollo.

g) Estudiar a requerimiento de los países latinoamericanos interesados, el mejoramiento de la enseñanza de la matemática en el nivel nuiversitario.

Artículo 4º. Las autoridades del Centro serán:

a) El Director
b) El Consejo Administrativo
c) El Consejo Técnico

Artículo 5º. El Director será designado por el Consejo Técnico con la aprobación de la UNESCO y de la Universidad de Buenos Aires. Durará cuatro años en su cargo y será reelegible. Sus funciones son:

a) Dirigir las actividades generales del Centro, asegurando la eficaz ejecución de los planes de trabajo aprobados por el Consejo Técnico y el Consejo Administrativo.

b) Presidir el Consejo Técnico y el Consejo Administrativo.

c) Designar el personal administrativo y proponer sus retribuciones al Consejo Administrativo.

d) Preparar el informe anual sobre la marcha de la institución que deberá elevarse a la UNESCO, a la Universidad de Buenos Aires y a las otras instituciones participantes, previo conocimiento del Consejo Técnico y aprobación del Consejo Administrativo.

Artículo 6º. El Consejo Administrativo estará compuesto por cinco miembros, a saber: el Director, un representante de la UNESCO, un representante de la Universidad de Buenos Aires y dos matemáticos residentes en Latinoamérica designados por el Consejo Técnico.

Durarán cuatro años en sus cargos y serán reelegibles. El Consejo Ad ministrativo se reunirá una vez por año en Buenos Aires, con el objeto de aprobar:

a) El plan de trabajo y el presupuesto anual preparado por el Consejo Técnico.

b) El balance de gastos y recursos del año transcurrido.

c) Las retribuciones del personal docente, científico y administrativo.

Artículo 7º. Además del Director, el Consejo Técnico estará compuesto por seis miembros, a lo sumo uno por país, los cuales deberán ser matemáticos, investigadores en actividad, y tendrán un mandato de cuatro años. El primer Consejo Técnico será nombrado por la UNESCO. Los nuevos miembros serán elegidos por el Consejo Técnico anterior al término de su mandato.

El Consejo Técnico dictará su reglamento interno. Sus funciones son: preparar y proponer al Consejo Administrativo el plan de trabajo anual, con indicación de los expertos que serán contratados y de sus programas de trabajo en las diferentes instituciones participantes; elegir los becarios y sus lugares de trabajo, y preparar el anteproyecto de presupuesto.

Artículo 8º. Los miembros de los Consejos Administrativo y Técnico percibirán la compensación correspondiente a sus gastos de viaje y estadía cada vez que deban trasladarse a Buenos Aires en cumplimiento de su misión.

Artículo 9º. Los recursos del Centro provendrán de las siguiente fuentes:

a) Fondos provenientes de la UNESCO.

b) La Universidad de Buenos Aires, que costeará los sueldos del Director y del personal administrativo y de otras categorías; proporcionará local, mobiliario y demás comodidades necesarias para su funcionamiento; se hará cargo de los gastos de alojamiento y atención sanitaria de los expertos que trabajen en su sede y de no menos de diez becrios latinoamericanos; costeará la impresión de folletos, resúmenes, informes y otras publicaciones de pequeño volumen y tirada; considerará como dedicadas a la Universidad las horas de trabajo que su personal docente destine al Centro Regional.

c) Otros países adheridos, que podrán costear los sueldos y becas de los expertos y becarios que trabajen en sus instituciones dentro del programa del Centro, y podrán contribuir, además, a otros gastos del mismo.

d) Donaciones de toda índole que puedan ser aceptadas por el Director.

Artículo 10. Las cuestiones no previstas por el presente estatuto serán resueltas por el Consejo Técnico.

Disposiciones transitorias

Artículo 11º. El Comité de redacción propone a la Universidad de Buenos Aires y a la UNESCO al profesor Alberto González Domíngez como primer Director del Centro Regional de Matemática por un período de cuatro años.

Artículo 12º. El primer Consejo Administrativo estará constituído por el Director, un representante de la UNESCO, un representante de la Universidad de Buenos Aires y por dos matemáticos elegidos por el Comité de Redacción. Dichos nombramientos han recaído en los Profesores Elon Lima (Brasil) y Fernán Rodríguez Gil (Venezuela).

LAS "SESIONES MATEMATICAS" DE 1960

La Comisión Nacional Ejecutiva del 150º Aniversario de la Revolución de Mayo ha resuelto encargar a la Unión Matemática Argentina, la organización de "Sesiones Matemáticas" con motivo de esa celebración.

En principio, esas sesiones se celebrarán en septiembre próximo en Buenos Aires y La Plata.

BIBLIOGRAFIA

KARL STRUBECKER, *Differentialgeometrie III, Theorie der Flächenkrümmung*, Sammlung Göschen, volumen doble n. 1180-1180 *a*, Walter de Gruyter & Co. Berlín, 1958.

Con este volumen termina el conjunto de tres volúmenes (los dos primeros correspondientes a los números 1113-1113 *a* y 1179-1179 *a*) dedicados a la geometría diferencial. Trata de la curvatura de superficies. Empieza por el tratamiento clásico de la curvatura de las curvas sobre una superficie (teoremas de Meusnier y de Euler) y las consecuencias que derivan del mismo (líneas de curvatura, superficies centrales, sistemas triples ortogonales, superficies especiales importantes en atención a las propiedades de sus líneas de curvatura, etc.). Estudia luego la curvatura de superficies según Gauss y la geometría intrínseca sobre la superficie, el teorema de Gauss-Bonnet y las superficies de curvatura constante. Las de curvatura constante negativa dan pie para el estudio de la geometría no euclidiana hiperbólica, lo que se hace de manera muy completa y elegante. Se tratan luego las condiciones de integrabilidad y sus aplicaciones a problemas de representación y deformación de superficies; se incluye la demostración de Herglotz del teorema de la rigidez de las superficies convexas. La última parte está dedicada al estudio de las superficies de área mínima, con los teoremas y ejemplos fundamentales.

En todos los puntos se encuentran interesantes ejemplos y notas históricas. En conjunto, los tres volúmenes constituyen una obra de Geometría Diferencial muy completa, con contenido superior al que podría esperarse dado el tamaño. Ello se debe a la buena selección de los temas tratados y a la habilidad expositiva del autor, que le permite en todo momento ser breve sin perder claridad.

L. A. Santaló

LUDWIG BAUMGARTNER, *Gruppentheorie*, Sammlung Göschen n. 837, Walter de Gryter & Co. Berlín 1958.

En cualquier rama de la matemática y de la física aparecen como fundamentales la idea de grupo y sus consecuencias más inmediatas. Sin entrar en los detalles propios de los especialistas en las diversas clases de grupos (finitos, infinitos, de Lie, ...) hay un denominador común que interesa a todos y cuya nomenclatura y relaciones esenciales debe ser conocida aún por los menos interesados en la teoría de grupos propiamente dicha. Es probable que el presente volumen sea muy útil a este respecto. El índice es el siguiente: Idea de grupo.

Ideas y métodos fundamentales. Grupos finitos. Permutabilidad y subgrupos. Grupo factor. Homomorfia. Automorfia. Endomorfia. Grupos libres y ligados. Sucesiones de grupos. Puntualizaciones sobre la definición de grupo.

Contiene muchos ejemplos y 94 ejercicios con la solución al final. Esto y la claridad con que son expuestos los conceptos fundamentales hacen el librito muy recomendable.

L. A. Santaló

M. FRECHET y KY FAN, *Introducción a la Topologia Combinatoria*, Editorial Universtiaria de Buenos Aires, Colección Cuadernos nº 7; 62 págs., 79 figuras. Traducido del original francés por D. A. H. Nogués. Buenos Aires, 1959.

Ha sido un acierto de la Editorial Universitaria de Buenos Aires traducir este libro de Frecht y Ky Fan para su colección de "Cuadernos". Se trata de una exposición intermedia, entre la vulgarización, en general engañosa, y la abstracta rigidez de las dedicadas a especialistas. Se dan ideas intuitivas y muchos conceptos se aclaran con abundantes figuras, pero las definiciones son precisas y se llega a resultados concretos importantes, como ser la clasificación topológica de las superficies cerradas.

El índice contiene entre otros los siguientes temas: Generalidades sobre la topología (problemas clásicos, homeomorfismos, topología conjuntista y combinatoria); nociones topológicas sobre las superficies (teorema de Euler-Descartes, característica de una superficie, orientabilidad y no orientabilidad, construcción de superficies a partir de polígonos por identificación de sus lados); clasificación topológica de las superficies cerradas (reducción a las formas normales, género y número de conexión de las superficies cerradas orientables). Al final se incluye la bibliografía fundamental sobre los temas tratados.

Los autores, en el prólogo de la primera edición froncesa fechado en 1943, anuncian un próximo volumen que lamentablemente no ha sido publicado. Tal vez se deba a que el proyecto inicial de "hacer la topología combinatoria comprensible sin extensos conocimientos matemáticos e incluso para alumnos de la escuela secundaria" fuera demasiado ambicioso y hayan los autores agotado todo lo posible de exponer de manera amena y sencilla en este primer volumen. Sin embargo, el contenido es suficientemente ilustrativo para dar una visión del objeto de la topología combinatoria y prepara muy bien al lector que desee profundizar tales conocimientos para la lectura de textos más completos.

L. A. Santaló

KONRAD KNOPP, *Elemente der Funktionentheorie*. Sammlung Göschen, Walter de Gruyter & Co., Berlín, 1959.

En forma elemental y con la claridad didáctica característica del autor se trata en este libro una selección de temas de la teoría de funciones de variable compleja, con prescindencia de todo lo referente al cálculo integral. Los números complejos, las transformaciones lineales (estudiadas en forma bastante detallada), los elementos de la teoría de conjuntos, sucesiones y series, la representación conforme y las funciones elementales están tratados de manera muy adecuada para cursos introductorios universitarios. Pero además cabe destacar que, de las 140 páginas que tiene el libro, el material de las 100 primeras está presentado de tal manera que podría ser directamente utilizado en nuestros colegios secundarios sin exigir una modificación importante de su estructura actual. Por tal motivo puede ser un instrumento útil para quienes se interesen por la enseñanza secundaria de las matemáticas.

Evelio T. Oklander

RICHARD COURANT, *Introdução à Teoria das Funções*, Curitiba, 1957.

Se trata de una traducción al portugués de las notas de un curso de introducción a la teoría de las funciones de variable compleja, dictado por el Prof. Courant en la Universidad de Nueva York.

El autor comienza analizando cuidadosamente las nociones elementales de la teoría y desarrolla luego, desde diversos puntos de vista, la noción de función analítica. A continuación expone la integración en el campo complejo, la teoría de las series de potencias y el método de prolongación analítica. Algunas notas, como por ejemplo las que se refieren a la geometría de Poincaré y a las aplicaciones físicas de la teoría de las funciones analíticas, y la introucdción al capítulo en que trata la integración, constituyen, sin duda a destacar el interés de la obra.

Como en otras obras didácticas de este autor, la exposición es sumamente clara.

El volumen, de 156 páginas, cuidadosamente impreso mediante el sistema offset, ha sido editado por la Sociedad Paranaense de Matemáticas. La traducción ha sido realizada por el Prof. Leo Barsotti.

Eduardo L. Ortiz

PAUL LORENZEN, *Formale Logik*, Sammlung Göschen, vols. 1176-1176a, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1958, 165 págs.

En este pequeño librito, el profesor de la Universidad de Kiel intenta ofrecer un panorama escueto de los resultados elementales de la lógica formal (matemática) contemporánea. Se asemeja así a textos como el de Robert Blanché (*Introduction à la logique contemporaine*, Libr. Armand Colin, 1957) o el de Goodstein (*Mathematical Logic*, Leicester Univ. Press, 1957), en los que se ofrece, condensados en volúmenes de pequeño formato, un croquis de los conceptos y resultados básicos de la lógica actual. Pero el libro de Blanché se dedica más a fundamentar conceptualmente este croquis que a desarrollarlo, por lo cual resulta más útil a un estudiante de filosofía que a uno de matemática. El de Goodstein, que pretende ofrecer gran cantidad de resultados, termina por no demostrar realmente ninguno, de donde resulta prácticamente inútil para el que desee iniciarse en el tema. El profesor Lorenzen, consigue, por el contrario, mantenerse en una conveniente posición intermedia; su obra desarrolla la lógica formal sin dedicar más de lo necesario a las referencias históricas o conceptuales; demuestra casi todos los resultados que menciona (con excepción de aquéllos, como el de Church sobre la imposibilidad de un método de decisión en la lógica de orden uno, que exige un largo desarrollo especial). No pretende, como Goodstein, dar una visión total del tema, pero dice lo suficiente como para que el lector que desee iniciarse encuentre claramente definidos los métodos y resultados básicos de los primeros niveles de la lógica formal contemporánea.

Luego de una pequeña introducción histórica, el autor comienza con una explicación sobre la relación existente entre la lógica tradicional aristotélica y una generalización natural donde se admiten predicados poliádicos —aplicables a varios sujetos—. Efectúa luego un análisis formal de los modos clásicos del silogismo, teoría que simplica de modo bastante ingenioso al hacer entrar en juego relaciones conversas a las que ligan sujeto y predicado en los modos clásicos A y O.

El autor pasa luego a ocuparse de las conexiones proposicionales fundamentales (*Junktoren*), empezando por la conjunción, la negación, la disyunción inclusiva (*Adjunktion*), y terminando por efectuar un estudio detallado de las relaciones entre todos los conectivos: interdefinibilidad, tablas de verdad, formas normales, etc. Luego se define lo que es un cálculo (en el sentido de ''sistema sintáctico''), para indicar luego como construir, mediante reglas de Gentzen, un cálculo proposicional (*Kalküle der Junktorenlokig*). Se demuestran luego la consistencia y completicidad del cálculo. Se efectúa un interesante análisis de ''lógica afirmativa'', construída sintácticamente y examinada en varias de sus formas. Se examina luego lo que ocurre si a esos cálculos se agrega la negación, en forma más o menos atenuada (por ej., la lógica intuiocionista). El texto concluye con una exposición clara, más o menos canónica, de la lógica de la cuantificación y de la lógica de la identidad. La impresión es nítida y agradable, sin errores.

Gregorio Klimovsky

ORBIT THEORY, *Proceedings in Symposia in Applied Mathematics*, vol. IX. American Mathematical Society. 1959. (195 pgs.).

Se trata del resumen del noveno symposium de matemática aplicada, realizado en la Universidad de Nueva York en fecha 4-6/4/1957.

Garrett Birkhoff y Rudolph E. Langer, los editores, advierten en la introducción que la teoría de órbitas, aplicada a la mecánica celeste, siendo una de las ramas más antiguas de la mecánica, no ha perdido actualidad, sino por el contrario, sus progresos han sido significativos en los últimos años. Precisamente para llamar la atención de los matemáticos sobre tales temas, se había planeado este symposium.

Damos a continuación una breve idea de los artículos expuestos.

E. D. COURANT, *Orbit stability in particle accelerators.*

En los aceleradores de partículas del tipo del ciclotrón (sincrociclotrón, bevatrón etc.) las partículas recorren trayectorias circulares, cuyo cálculo primario no ofrece dificultades. Es cuando se analiza la estabilidad de tales trayectorias, vale decir el efecto de perturbaciones de la velocidad y dirección de la partícula así como de la distribución del campo magnético, cuando resultan ecuaciones diferenciales no-lineales, ecuaciones a coeficientes periódicos etc. De tales ecuaciones se ocupa este trabajo. Se citán métodos modernos de tratar estos problemas y se discute su importancia en las aplicaciones.

STANISLAW OLBERT, *Motion of cosmic-ray particles in galactic magnetic fields.*

Según una teoría de Fermi, el origen de la radiación cósmica primaria serían partículas cargadas eléctricamente que, en su travesía por el espacio sideral, son aceleradas paulatinamente por campos magnéticos en movimiento que parecen existir en el espacio interstelar. En esta exposición se estudia el movimiento de partículas en ciertos campos magnéticos típicos, deduciendo conclusiones acerca de la teoría antes mencionada. Para la discusión del aspecto físico se remite a otra bibliografía.

WILLARD H. BENNETT, *Störmer orbits.*

Es sabido que una partícula eléctricamente cargada, proveniente por ejemplo del sol, recorre, al llegar a las inmediaciones de la tierra, una trayectoria complicada debida al campo magnético terrestre. Existen incluso trayectorias ''cautivas'', en las cuales la partícula no puede alcanzar la tierra ni alejarse indefinidamente de ella, espiralando en cambio alrededor de una línea de fuerza norte-sud, al mismo tiempo que ésta rota alrededor del eje (magnético) terrestre. Se exponen aquí una serie de resultados experimentales relativos a tales órbitas de Sörmer. Las fotografías de las trayectorias incidentes, reflejadas, cautivas etc. son muy ilustrativas.

PAUL HERGET, *General Theory of Oblateness Perturbations.*

En la integración de la trayectoria de un cohete o satélite, uno de los efectos más importantes es el achatamiento del globo terrestre, que hace inexacto el cálculo de primera aproximación que supone la tierra esférica. Se desarrollan aquí las ecuaciones que tienen en cuenta tal perturbación y se dan algunas indicaciones relativas al cálculo práctico.

FRED I. WHIPPLE, *Fundamental Problems in Predicting Positions of Artificial Satellites.*

Este trabajo contiene datos muy interesantes sobre el cálculo de trayectorias de satélites artificiales, en base a observaciones ópticas y radiométricas de sus posiciones. Se compara la precisión de los cálculos con la de las observaciones, y en cuanto a los primeros, la influencia de las diversas causas de error.

KRAFFT A. EHRICKE, *Cislunar Orbits.*

Defínense como órbitas cislunares aquellas que quedan determinadas fundamentalmente por la fuerza de atracción de la tierra, la luna y del sol. Despreciando la influencia del sol resulta el problema de los tres cuerpos, para el cual puede tratarse luego la atracción solar como perturbación. Los cálculos demuestran la existencia y posición de los puntos de libración, o sea puntos de equilibrio de las diversas fuerzas de atracción y centrífuga. Se dan también valores numéricos correspondientes.

Joseph W. Siry, *Satelite Launching Vehicle Trajectories.*

El cálculo de la trayectoria del vehículo portador de un satélite artificial es sumamente complejo por la diversidad de factores de perturbación que entran en juego. Desde el punto de vista del proyectista, la trayectoria para la cual se deberá preparar un tal cohete, tiene que tener en cuenta la incertidumbre de muchos datos como la velocidad exacta del cohete y su orientación angular correcta. Se deberá prever una trayectoria tal que aún con peuqeñas desviaciones de los valores de cálculo, el satélite quede en una órbita aceptable, o sea de suficiente tiempo de vida (la que depende de la altura del perigeo). Una vez expuestas con bastantes detalles las ecuaciones del problema y las causas de error, se discute precisamente cuál es la trayectoria óptima en el sentido antes indicado.

W. J. Eckert, *Numerical Determination of Precise Orbits.*

El cálculo de las órbitas de los planetas con la mayor exactitud posible, tanto para tiempos futuros como para tiempos pasados, tiene importancia en varios aspectos y ha sido desde hace mucho una preocupación de los astrónomos. Mientras que para los cálculos a mano los métodos más indicados eran los desarrollos en serie, ahora, con el auxilio de las grandes computadoras electrónicas, la integración directa ofrece ventajas. Así han sido calculadas las órbitas de los cinco planetas exteriores (Júpiter, Saturno, Urano, Neptumo y Plutón) teniendo en cuenta las atracciones mutuas y, naturalmente, la del sol. Se han tomado como datos unas 25.000 observaciones que datan desde el año 1780. El problema matemático consistió en la integración de un sistema de ecuaciones diferenciales no-lineales, de orden 30, con 15 a 16 cifras exactas de las coordenadas, utilizando intervalos sucesivos de tiempo de 40 días, en un intervalo total de 400 años.

Dirk Brouwer, *Comments on General Theories of Planetary Orbits.*

Es ésta una discusión de los métodos de cálculo de órbitas planetarias por desarrollo en serie, de las diversas perturbaciones.

Carlos Graff-Fernández, *Orbits in Birkhoff's Central Field.*

G. D. Birkhoff ha establecido las ecuaciones de gravitación que determinan las órbitas de los planetas, en base a la teoría de la relatividad restringida de Einstein. Se obtienen así ecuaciones para las trayectorias de partículas materiales, y como caso límite de ellas también las trayectorias de partículas sin masa en reposo (fotones). Es interesante la clasificación de las posibles órbitas, pues además de los tipos clásicos (elipse, parábola, hipérbola) existen otros que el autor llama de "captura relativista".

La obra, en general, está muy bien presentada. Su interés es fundamentalmente informativo, respecto de los diversos temas matemáticos vinculados a esta disciplina, lo que se complementa muy bien con la bibliografía que trae cada trabajo.

E. Roxin

RODOLFO A. RICABARRA, *Conjunaos ordenados y ramificados (Contribución al estudio del Problema de Suslin)*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1958, 357 págs.

La teoría de conjuntos constituye, dentro del campo de la matemática contemporánea, una disciplina singular; los matemáticos se acuerdan de ella con cierto frío respeto que a veces encubre una mal disimulada ojeriza. Sin duda que, por constituir el fundamento básico a partir del cual es posible edificar el resto de la matemática actual, resulta imposible dejar de concederle la importancia que merece; todo texto que de algún modo intente dar cuenta de alguna parte significativa de esta ciencia, no olvidará indicar los procedimientos que permiten obtenerla a partir de la teoría de conjuntos (vaya como ejemplo el de la enciclopedia Bourbaki, o el de la Topología de Kelley, etc.). Pero, por otra parte, los matemáticos no olvidan que la llamada "crisis de la matemática", es decir, la aparición de antinomias que conmovieron los fundamentos lógicos de esta ciencia exacta, tuvo su origen específicamente dentro de la teoría de conjuntos. Únase a ello cierta sensación de exagerada distancia entre el nivel de abstracción de la disciplina conjuntística y las necesidades inmediatas de la investigación dentro de cada especialidad matemática, para explicar por qué el centro de gravedad de las investigaciones sobre teoría de conjuntos está más bien dentro del campo de los lógicos o de los fundamentadores de la matemática que en el terreno de la matemática propiamente dicha (una excepción la constituye, como es notorio, la escuela matemática polaca). Todo esto daría la razón del hecho por el cual, en comparación con otras especialidades, la aparición de libros sobre teoría de conjuntos es relativamente escasa. Además, se trata en general de textos que intentan ofrecer un panorama de los distintos aspectos de la teoría (teoría general, teoría cardinal, orden total, buen orden, etc.), más que de estudios donde se investiguen sistemática y profundamente problemas especiales. Dejando de lado contribuciones como las de Gödel sobre la hipótesis del contínuo y el axioma de elección (que corresponden quizá al campo de la fundamentación de la matemática), o las que encontramos en trabajos sobre reticulados (que han desembocado en una disciplina que por su "mayoría de edad" no puede considerarse ya como teoría de conjuntos propiamente dicha), y descartando la obra sobre enumeración transfinita de Denjoy donde sólo se encuentra una considerable pero algo deshilvanada colección de observaciones parciales, sólo raramente se cuenta con estudios como el de Sierpiński sobre la hipótesis del contínuo o la tesis de G. Kurepa sobre el problema de Suslin. La aparición del presente trabajo de Ricabarra agrega una unidad más al número muy pequeño de obras de este último tipo, y constituye por consiguiente un acontecimiento singular en el desarrollo de la teoría de conjuntos.

Los tres problemas más difíciles de la teoría de conjuntos son, desde las dos primeras décadas de nuestro siglo, el del axioma de elección, el de la hipótesis del continuo y el de la hipótesis de Suslin. El primero está casi resuelto, pues Gödel ha mostrado la consistencia del axioma de elección respecto de los restantes axiomas de *su* teoría de conjuntos (un perfeccionamiento de las teorías de von Neumann y Bernays), cosa que también vale para el sistema de Zermelo o el de la teoría simple de los tipos; por otra parte, Fraenkel, Mostowski y Mendelson han mostrado que el axioma no puede demostrarse a partir de los restantes axiomas, si se admite la existencia de ''individuos'' o de ''conjuntos extraordinarios'' (en cambio, no se sabe que ocurre si la teoría es ''pura''). Por otra parte, Specker ha mostrado que el axioma es simplemente *falso* en sistemas como los de Quine. En cuanto a la hipótesis del contínuo, Gödel mostró —en el ya aludido trabajo— que la hipótesis generalizada del continuo es consistente respecto de los restantes axiomas de la teoría, resultado que implica —de acuerdo con un notable teorema de Sierpiński— la consistencia del axioma de elección y, como es obvio, la consistencia de la hipótesis simple del continuo.

En cuanto a la situación lógica del problema de Suslin, nada se sabía hasta aparecer en 1954 el resultado de Esenin-Volpin, según el cual una teoría de conjuntos consistente del tipo Bernays-Mostowski en el que no figure el axioma de elección ni su negación (ni formas débiles que de éstos deriven) permanece consistente si se agregan como axiomas las negaciones del axioma de elección y de la hipótesis de Suslin (de pasada, se obtiene otra demostración del resultado de Fraenkel sobre la independencia del axioma de elección). Pero nada sabemos acerca de lo que ocurre si el axioma de elección es válido (tampoco sabemos lo que ocurre, aún si fuera falso el axioma de elección, en el caso de tratarse de una teoría ''pura'' de conjuntos. Nada sabemos aún acerca de la imposibilidad de tal situación).

El trabajo de Ricabarra sirve para mostrarnos que los resultados más interesantes sobre el problema de Suslin (en particular, equivalencias lógicas con la hipótesis, o teorías de estructura de tipos de conjuntos totalmente ordenados entre los cuales debe hallarse el contraejemplo a la hipótesis de Suslin, si tal contraejemplo existe) descansan en el empleo sistemático del axioma de elección o, al menos, de ciertas formas débiles del axioma. Ello parece sugerir que la dirección de Esenin-Volpin no es la verdaderamente interesante, y que lo que verdaderamente importa es saber qué ocurre con la hipótesis de Suslin si el axioma de elección se cumple. He ahí un atractivo problema de axiomática de la teoría de conjuntos, para el cual la teoría de Ricabarra resulta imprescindible.

El autor se propone, según manifiesta en el Prefacio, desarrollar sistemáticamente las ideas de Kurepa. En este desarrollo, el análisis llega en profundidad y en extensión bastante más allá de los resultados ya clásicos del matemático yugoeslavo, ofreciendo una atractiva colección de teoremas y construcciones ingeniosas, redactados con un estilo conciso, penetrante e incisivo. Constantemente se ofrecen sugestiones para investigaciones ulteriores. Creemos que este trabajo tiene ganado ya incontrovertiblemente un lugar especial en la historia de las propiedades de los conjuntos totalmente ordenados y ramificados.

En el Capítulo I se resumen los conceptos básicos que se utilizarán en los capítulos posteriores. Conjuntos totalmente ordenados, tipos de orden, operaciones ordinales, números ordinales, alef, formas normales, topología de ordinales, cerrados confinales, funciones retractantes y progresantes, propiedades de conj. ordenados en general, propiedades de conjuntos ordinales lineales, topología de orden, cuadros y sucesiones ramificadas (conceptos ya introducidos por Kurepa y que sirven para analizar importantes entidades duales de los K-conjuntos) y, finalmente, las proposiciones ''zermelianas'', formas débiles del axioma, cuyas relaciones mutuas desde el punto de vista lógico se indican en un ''Esquema Zermeliano''. Toda esta parte constituye de por sí una sugestiva introducción a las cuestiones generales de la teoría, aderezada por algunas formas de presentación originales, por ejemplo, la de los teoremas sobre funciones retractantes y progresantes.

En el capítulo II se introducen los conjuntos totalmente ordenados de tipo (K). Son conjuntos con primero y último elementos, densos, todos sus subconjuntos son ralos en la topología del orden, verifican el primer axioma de numerabilidad, todo subconjunto numerable posee ínfimo y supremo, toda clase disyunta de secciones no puntuales que tiene tipo de orden lineal es a lo sumo numerable, y contienen un conjunto topológicamente denso en el total, de cardinal menor o igual a alef uno. Son los conjuntos entre los que debe estar el contraejemplo a la hipótesis de Suslin si es que existe. Ricabarra edifica una teoría de estructura para tales conjuntos, con el fin de lograr subfamilias cada vez menos extensas de tales conjuntos (K) y poder ''acorralar'' a tal contraejemplo, si existe, o mostrar que no existe, en caso contrario. En este capítulo se demuestran las propiedades elementales de dichos conjuntos y se estudia uno de los ejemplos clásicos de conjunto (K), el ejemplo de Kurepa-Denjoy, que da lugar al tipo $\varkappa_1$, del cual se estudian su estructura y propiedades, en especial su homogeneidad y simetría.

En el capítulo III se estudian los desarrollos triádicos de (K)— conjuntos. Esto es de importancia para la teoría de estructura, pues para mostrar que dos conjuntos totalmente ordenados no son isomorfos sirve a veces saber que uno de ellos admite descomposiciones que el otro no admite. El desarrollo triádico es una forma canónica de descomposición en una familia creciente (de tipo ω_1) de triádicos de Cantor. Ello permite generalizar para todo (K) el concepto de racional a izquierda (a derecha), intervalo triádico, etc., e introducir el cuadro ramificado de los intervalos triádicos. Se introduce la teoría de dualidad entre conjuntos y sucesiones de tipo (K).

En el capítulo IV se estudian los conjuntos de tipo (k) —corresponden a los racionales a izquierda de un desarrollo triádico—. Se estudian las propiedades de subconjuntos de los conjuntos (K), y se estudia el problema de la existencia de subtipos completos, así como la relación entre los (K) y la familia de los $\theta\omega^{\alpha}$ de Hausdorff. En el capítulo V se comienza a desarrollar la difícil teoría de la homogeneidad, que encuentra su aplicación en el capítulo VI, en el estudio sistemático de los (K)— conjuntos acotados, sus teoremas de dualidad y propiedades de homogeneidad. En el capítulo VII se estudia una clasificación de los (K) conjuntos y sus mutuas relaciones. En el capítulo VIII se vuelve al tipo $\varkappa_1$, estudiando su vinculación con otros tipos originales, vinculación que a veces permite dar condiciones necesarias y suficientes para caracterizar esos tipos.

En el capítulo IX se estudia el problema de Suslin, estableciéndose equivalencias con otros enunciados, o implicaciones. Entre ellas, es interesante, por su sabor abstracto, la que indica que si la hipótesis es falsa debe existir una (K_0S)— sucesión bien ordenada en tipo ω_1 de modo que todos los subconjuntos de la sucesión que corresponden a un cerrado cofinal en ω_1 de índices, son cofinales en la sucesión. La equivalencia de la hipótesis de Suslin con la de no existencia de conjuntos de Lusin de tipo no lineal, es otro de los resultados llamativos de Ricabarra.

El capítulo X está destinado a dar indicaciones bibliográficas y comentarios a los capítulos anteriores (una de las particularidades del estilo del autor es la casi completa ausencia de referencias bibliográficas durante el desarrollo de la teoría). Estas son muy interesantes, jugosas, y aclaran muchas veces notablemente el propósito y alcance de ciertos pasajes del texto (por ejemplo, la vinculación con los ''problemas milagrosos'' de Kurepa).

En resumen, una obra profunda y original, de la que nuestro medio puede estar orgulloso.

Gregorio Klimovsky

GHEORGHE TITEICA, *Geometrie diferentiala proiectiva a retelelor*, Editura Academiei Republicii Populare Romine, 1956.

En 1923 apareció en lengua francesa el libro *Géométrie différentielle projective des réseaux* de G. Tzitzeica, libro que resultó fundamental para el desarrollo de la geometría difencial proyectiva. En 1956, la sección de geometría del Instituto de Matemáticas de la Academia de la República Popular Rumana, creyó que el mejor homenaje que podía rendirse a la memoria de Tzitzeica era traducir a su idioma de origen dicho libro, devenido clásico. Se trata, pues, de la traducción al rumano, sin añadidos ni comentarios, de la obra mencionada, sobradamente conocida para que creamos necesario señalar el contenido. La traducción fue hecha por Andrei Dobrescu. Si bien gran parte del contenido se encuentra de manera más completa y con métodos más modernos en obras posteriores, la obra de Tzitzeica será siempre leída con provecho por su estilo claro, fresco y elegante.

L. A. Santaló

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Este número de la Revista de la Unión Matemática Argentina y de la Asociación Física Argentina se ha publicado con la contribución del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. Tal contribución no significa que el Consejo asuma responsabilidad alguna por el contenido del mismo.

PUBLICACIONES DE LA U. M. A.

Revista de la U. M. A. – Vol. I (1936-1937); Vol. II (1938-1939); Vol. III (1938-1939); Vol. IV (1939); Vol. V (1940); Vol. VI (1940-1941); Vol. VII (1940-1941); Vol. VIII (1942); Vol. IX (1943); Vol. X (1944-1945).

Revista de la U. M. A. y órgano de la A. F. A. – Vol. XI (1945-1946); Vol. XII (1946-1947); Vol. XIII (1948); Vol. XIV (1949-1950).

Revista de la U. M. A. y de la A. F. A. – Vol. XV (1951-1953); Vol. XVI (1954-1955); Vol. XVII (1955); Vol. XVIII (1959).

Los volúmenes III, IV, V y VI comprenden los siguientes fascículos separados:

Nº 1. Gino Loria. *Le Matematiche in Ispagna e in Argentina.* — Nº 2. A. González Domínguez. *Sobre las series de funciones de Hermite.* — Nº 3. Michel Petrovich. *Remarques arithmétiques sur une équation differentielle du premier ordre.* — Nº 4. A. González Domínguez. *Una nueva demostración del teorema límite del Cálculo de Probabilidades. Condiciones necesarias y suficientes para que una función sea integral de Laplace.* — Nº 5. Nikola Obrechkoff. *Sur la sommation absolue par la transformation d'Euler des séries divergentes.* — Nº 6. Ricardo San Juan. *Derivación e integración de series asintóticas.* — Nº 7. Resolución adoptada por la U. M. A. en la cuestión promovida por el Sr. Carlos Biggeri. — Nº 8. F. Amodeo. *Origen y desarrollo de la Geometría Proyectiva.* — Nº 9. Clotilde A. Bula. *Teoría y cálculo de los momentos dobles.* — Nº 10. Clotilde A. Bula. *Cálculo de superficies de frecuencia.* — Nº 11. R. Frucht. *Zur Geometria auf einer Fläche mit indefiniter Metrik (Sobre la Geometría de una superficie con métrica indefinida).* — Nº 12. A. González Domínguez. *Sobre una memoria del Prof. J. C. Vignaux.* — Nº 13. E. Toranzos. *Sobre las singularidades de las curvas de Jordan.* — Nº 14. M. Balanzát. *Fórmulas integrales de la intersección de conjuntos.* — Nº 15. G. Knie. *El problema de varios electrones en la mecánica cuantista.* — Nº 16. A. Terracini. *Sobre la existencia de superficies cuyas líneas principales son dadas.* — Nº 17. L. A. Santaló. *Valor medio del número de partes en que una figura convexa es dividida por n rectas arbitrarias.* — Nº 18. A. Wintner. *On the iteration of distribution functions in the calculus of probability (Sobre la iteración de funciones de distribución en el cálculo de probabilidades).* — Nº 19. E. Ferrari. *Sobre la paradoja de Bertrand.* — Nº 20. J. Babini. *Sobre algunas propiedades de las derivadas y ciertas primitivas de los polinomios de Legendre.* — Nº 21. R. San Juan. *Un algoritmo de sumación de series divergentes.* — Nº 22. A. Terracini. *Sobre algunos lugares geométricos.* — Nº 23. V. y A. Fraile y C. Crespo. *El lugar geométrico y lugares de puntos áreas en el plano.* — Nº 24. R. Frucht. *Coronas de grupos y sus subgrupos, con una aplicación a los determinantes.* — Nº 25. E. R. Raimondi. *Un problema de probabilidades geométricas sobre los conjuntos de triángulos.*

En 1942 la U. M. A. ha iniciado la publicación de una nueva serie de "Memorias y monografías" de las que han aparecido hasta ahora las siguientes:

Vol. I; Nº 1. — Guillermo Knie, *Mecánica ondulatoria en el espacio curvo.* Nº 2. — Guido Beck, *El espacio físico.* Nº 3. — Julio Rey Pastor, *Integrales parciales de las funciones de dos variables en intervalo infinito.* Nº 4. — Julio Rey Pastor, *Los últimos teoremas geométricos de Poincaré y sus aplicaciones.* Homenaje póstumo al Prof. G. D. Birkhoff.

Vol. II; Nº 1. — Yanny Frenkel, *Criterios de bicompacidad y de H-completidad de un espacio topológico accesible de Frechet-Riesz.* Nº 2. — Georges Valiron, *Fonctions entières.*

Vol. III; Nº 1. — E. S. Bertomeu y C. A. Mallmann, *Funcionamiento de un generador en cascadas de alta tensión.*

Además han aparecido tres cuadernos de *Miscelánea Matemática.*