Volumen XIX Número 3

REVISTA

DE LA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

(Miembro del patronato de la Mathematical Reviews)

Y DE LA

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

□

SUMARIO

NUMERO ESPECIAL DEDICADO AL SIMPOSIO DE MATEMATICA DE 1959

□

BUENOS AIRES
1960

UNION MATEMATICA ARGENTINA

La U. M. A. reconoce cuatro categorías de miembros: honorarios, protectores, titulares y adherentes. El miembro protector paga una cuota anual de 2000, por lo menos; el titular una cuota anual de $ 200 y el adherente (estudiantes solamente) una cuota anual de $ 100. Los pagos deberán efectuarse por cheque, giro u otro medio de gastos, a la orden de UNION MATEMATICA ARGENTINA, Casilla de Correo 3588, Buenos Aires.

Por ser la U. M. A. miembro del patronato de la Mathematical Reviews (sponsoring member), los socios de la U. M. A. tienen derecho a suscribirse a esa importante revista de bibliografía y crítica con 50 % de rebaja sobre el precio de suscripción que es de 50 dólares por año. Los socios de la U. M. A. pagarán por tanto sólo 25 dólares por año.

Los autores de trabajos reciben gratuitamente una tirada aparte de 50 ejemplares. Las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

JUNTA DIRECTIVA

Presidente, Ing. José Babini; Vicepresidente 1º, Dr. Antonio Monteiro; Vice presidente 2º, Dr. Mischa Cotlar; Secretario, Ing. Roque Scarfiello; Tesorero, Lic. Concepción Ballester; Protesorero, Lic. Elisa Quastler; Director de Publicaciones, Ing. José Babini; Secretarios Locales: Buenos Aires, Lic. Cora Ratto de Sadosky; La Plata, Dr. Alberto Sagastume Berra; Rosario, Prof. Eduardo Gaspar Bahía Blanca, Prof. Antonio Diego; Tucumán, Prof. Ilda G. de D'Angelo; San Juan, Prof. Carlos Loisseau; San Luis, Prof. Modesto González; Salta, Ing. Roberto Ovejero; Córdoba, Prof. Emilio A. Machado; Mendoza, Dr. Eduardo Zarantonello; San Carlos de Bariloche, Dr. Manuel Balanzat; Nordeste, Ing. Juan Enrique Borgna.

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

La A. F. A., asociación privada de investigadores, profesores y estudiantes de física y de astronomía, tiene por objeto fomentar el progreso de la investigación y de la enseñanza de dichas materias por medio de reuniones científicas periódicas y de la publicación de trabajos originales.

Podrán ingresar como socios activos quienes hayan efectuado investigaciones originales; pueden ser socios adherentes los profesores que no cumplan este requisito; y socios estudiantes los que hayan aprobado el primer año de estudios de física o de astronomía.

Las solicitudes de ingreso, que deberán llevar la firma de dos socios activos o adherentes, habrán de dirigirse al secretario local que corresponda. Los socios activos abonarán una cuota anual de $ 400, los adherentes de $ 300 y los estudiantes de $ 200, pudiendo hacerlo en dos cuotas semestrales. En estas cuotas están incluídas las suscripciones a la "Revista de la U.M.A. y de la A.F.A." y a "Ciencia e Investigación".

La correspondencia relacionada con las colaboraciones (artículos originales, informes y reseñas bibliográficas) deben dirigirse al Dr. Mario Bunge, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Perú 222, Buenos Aires.

Se solicita a las instituciones a que pertenecen los autores contribuyan con una cuota de $ 200 por página impresa, la que les dará derecho a recibir 100 apartados libres de cargo.

COMISION DIRECTIVA (1958-60)

Presidente: Prof. Dr. José A. Balseiro. Instituto de Física, San Carlos de Bariloche.

Tesorero: Prof. Dr. Moisés J. Sametband. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Buenos Aires.

Secretario en Buenos Aires: Prof. Ing. Ernesto E. Galloni. Facultad de Ingeniería, Buenos Aires, Secretario en La Plata: Dra. Magdalena T. de Brevo, Departamento de Física, Universidad de La Plata. La Plata; Secretario en Tucumán: Prof. Dr. Augusto Battig, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, Tucumán. Secretario de Publicaciones: Prof. Dr. Mario Bunge, Facultad de Filosofía y Letras, Buenos Aires.

Abonnement à l'etranger (comprenant un volume complet): 5.00 dollars (Etats-Unis).

Prière d'adresser toute la correspondance scientifique, administrative et les échanges à l'adresse ci-dessous:

REVISTA DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA
Casilla de Correo 3588
Buenos Aires (Argentina)

EL SIMPOSIO DE MATEMATICA DE 1959

En la semana del 20 al 25 de julio de 1959 se celebró en la Facultad de ciencias exactas y naturales de Buenos Aires, por iniciativa del Centro de Cooperación Científica de la UNESCO para América latina y de esa Facultad, el tercer simposio sobre el tema «Sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latinoamérica», al que asistió un selecto grupo de matemáticos extranjeros y nacionales.

La Unión Matemática Argentina se complace en dedicar un número especial de su Revista a la publicación de la mayoría de los trabajos presentados al Simposio, esfuerzo que ha sido posible gracias a la ayuda económica del Centro de cooperación científica, de la Facultad de ciencias de B. Aires, y del Consejo Nacional de investigaciones científicas y técnicas, ayuda que la Unión Matemátcia Argentina vivamente agradece.

A continuación se transcriben los discursos pronunciados en la Sesión inaugural del Simposio.

Discurso del Dr. JUAN IBAÑEZ GOMEZ, Director del Centro de Cooperación Científica de la UNESCO para América Latina.

Al inaugurar este Symposium de Matemáticas, el Centro de Cooperación Científica de la UNESCO para América Latina, expresa por mi intermedio sus mejores augurios y está seguro del éxito de sus conclusiones lo mismo que del útil contacto que establecen los hombres de ciencia latino-americanos a través de una disciplina en común.

Sería obvio en esta reunión de distinguidos especialistas explicar el impacto y la importancia crecientes de la Matemática en la Ciencia, la Técnica y, en general, en toda la vida moderna, importancia que, al correr del tiempo hace cada vez más acertada la afirmación de Whitehead, al decir que «la ciencia de las Matemáticas puras en su desarrollo moderno puede pretender ser la creación más original del espíritu humano».

El Centro de Cooperación Científica de UNESCO para América Latina ha prestado, por eso, desde su fundación en 1949, una atención preferente al desarrollo de las ciencias básicas en nuestra región dando a las Matemáticas la prioridad que le corresponde.

La primera actividad del Centro en el campo de la Matemática latinoamericana fue la de recurrir a los especialistas de la región para discutir juntos los problemas que estaban investigando, lo que originó una serie de Symposia que llevaron el título de «Algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino América» para indicar claramente la intención de los mismos que perdura en la actual reunión.

El primero tuvo lugar en Punta del Este, Uruguay, en Diciembre de 1951, y a él concurrieron especialistas de Argentina, Brasil, Chile, Cuba, México, Paraguay, Perú y Uruguay. El segundo tuvo lugar en Villavicencio y Mendoza, Argentina, en Julio de 1954 con asistencia de matemáticos de Argentina, Bolivia, Brasil, Colombia, Cuba, México, Perú y Uruguay y las ponencias y discusiones dieron origen a dos volúmenes publicados por nuestro Centro, que tuvieron difusión en todo el mundo.

Una vez en marcha estas actividades el Centro de Montevideo amplió sus preocupaciones en el desarrollo de las Matemáticas en la Región, pasando al terreno de las Universidades y con tal fin organizó una serie de Cursos de Perfeccionamiento para profesores universitarios de Matemáticas.

El primero de ellos tuvo lugar en Mendoza, en febrero y marzo de 1955; el segundo en México en enero y febrero de 1956; el tercero en La Plata, Argentina, en 1958 y el cuarto en Bogotá, Colombia, también el año pasado.

Para el mejor logro de los fines propuestos con este tipo de actividades nuestro Centro encargó al Dr. Antonio Monteiro para visitar algunos países latino americanos y recoger datos sobre sus respectivos ambientes matemáticos, sus problemas y sus necesidades. Su viaje dejó valiosa información concretada en un minucioso informe que constituye valioso instrumento de trabajo.

En el afán de que estas actividades tuviesen una acción continuada en el tiempo, se proyectó una prolongación del Curso de Perfeccionamiento de Mendoza en forma de Grupos internacionales de estudio formados en cada país por los asistentes al curso y dirigidos cada uno por los profesores del mismo. Se organizaron tres grupos: uno de Topología, otro de Algebra moderna y un tercero de Lógica matemática.

Lamentablemente, por razones ajenas a nuestra voluntad, esta iniciativa no tuvo los frutos esperados, pero sin embargo, esperamos que ahora se produzca el ambiente necesario para que esta iniciativa prospere.

Esto nos demuestra que la difícil técnica de la cooperación científica es algo digno de someter también al método experimental considerando los muchos factores que la integran desde lo individual a lo colectivo.

En esta breve revista de nuestros esfuerzos por la ciencia matemática, pueden Uds. ver el fervoroso deseo de servir una disciplina que es una de las piedras fundamentales de cualquier ciencia.

Así aunando voluntades, captando ideas y generosos impulsos se abrió campo en un terreno abonado a la idea de un Centro Regional de Matemáticas para América Latina que hoy constituye una promisoria realidad.

Ya en las sesiones finales del Symposium de Mendoza, dedicadas a discutir problemas de carácter general sobre el desarrollo y perfeccionamiento de las Matemáticas en la América Latina, nuestro Centro propuso la idea de fundar un Centro Regional de Matemáticas para Latino América con la cooperación de UNESCO. Su núcleo básico habría sido el Instituto de Matemáticas de la Universidad de Mendoza que, en aquel entonces —según dijera el Profesor Rey Pastor en la conferencia inaugural del Symposium— «reunía un grupo de especialistas que permitía vaticinar que, esta ladera de los Andes, a la que se ha trasladado el baricentro matemático del país, irradiará honor y prestigio universal para la República Argentina».

Desde entonces han pasado algunos años, pero aquellas ideas surgen hoy vivificadas para demostrarnos que todos los esfuerzos anteriores no fueron en vano, cuando la Universidad de Buenos Aires en uno de los momentos de mayor afán realizador de su historia ha logrado concretar la madura idea en una entusiasta realidad que contó con el amplio apoyo de la UNESCO.

Mucho esperamos de este nuevo Centro Regional para el progreso de las Matemáticas Latinoamericanas y a él debemos prestarle desde todos los ángulos nuestro más franco y decidido apoyo.

Este Symposium que hoy inauguramos bajo los mejores auspicios y con la asistencia de distinguidos especialistas hará en las sesiones correspondientes un análisis de los problemas de organización y funcionamiento del flamante Centro que hoy vemos nacer. El Centro de Montevideo espera atento las conclusiones para considerarlo en lo que hace relación al mejor desenvolvimiento a las actividades matemáticas en la Región.

En nombre de la UNESCO quiero agradecer a las ilustres autoridades universitarias argentinas y a los distinguidos especialistas nacionales y extranjeros el honor de su asistencia sin cuya colaboración no sería posible el éxito de este Symposium.

Discurso del Dr. ALBERTO GONZALEZ DOMINGUEZ, Director del Centro Regional de Matemática para América Latina.

Señor Rector, señor Director del Centro de Cooperación Científica para América Latina de la UNESCO, señor Presidente de la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, señor Presidente de la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Lima, señor Representante del Consejo de Investigaciones de las Fuerzas Armadas, señora Representante de la Sección Cultural de la Embajada de Francia, señores colegas

Señoras y señores:

Es esta la tercera vez que apadrina el Centro de Cooperación Científica para América Latina de la UNESCO estas reuniones que congregan a los matemáticos de nuestro continente. Fue la primera en Punta del Este, de recuerdo inolvidable; reunión magníficamente organizada por el entonces Director del Centro de Cooperación Científica, nuestro querido amigo el doctor Angel Establier, verdadera alma del Simposio, con la muy eficaz cooperación de nuestros colegas del Instituto de Matemática y Estadística de Montevideo, y muy en particular del profesor Laguardia, hoy afortunadamente entre nosotros; el segundo «Simposio sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latinoamérica» se realizó en Villavicencio, y en esa ocasión fuimos huéspedes de la Universidad de Cuyo y de nuestros colegas del Departamento de Investigación Científica, que ahora son nuestros colegas, a secas, pues se han incorporado a nuestra Facultad de Ciencias casi en bloque; y de la labor realizada en ambas ocasiones ha quedado constancia en sendos volúmenes que reúnen las ponencias presentadas.

No se crea sin embargo que esos dos nutridos tomos, donde abundan las aportaciones originales a nuestra ciencia, reflejan cabalmente el significado y la trascendnecia de estos Simposios para el desarrollo de la matemática en América Latina. Por supuesto que el fin último que persigue UNESCO con el auspicio de estos congresos no es otro que el progreso de la matemática, y que de este progreso son fidelísimo y en realidad único exponente la calidad de los trabajos que se publiquen en nuestros países. Pero el objetivo inmediato, por supuesto no incompatible con el primero sino que lo presupone, es otro; a saber, desterrar el aislamiento en que trabajan los matemáticos de nuestros países; dar pie a que se cambien ideas y se establezcan contactos que en definitiva plasmen en intercambio de personal científico entre nuestras Universidades e Institutos.

A la consecución de tales objetivos han contribuído mucho los dos Simposios anteriores; por eso decía hace un momento que su trascendencia no ha quedado fielmente reflejada en los dos hermosos volúmenes publicados por UNESCO.

Y ya que me he referido a este particular significado de los dos Simposios anteriores en el importantísimo campo de la cooperación científica latinoamericana, deseo decir que tengo grandes esperanzas de que le toque a este tercero el privilegio de cimentar, sobre sólida base de amistad y colaboración latinoamericana, proyecto que de tener éxito puede muy bien significar la realización efectiva, a corto plazo, de los desiderata antes enumerados. Me refiero al Centro Regional Latinoamericano de Matemática, que ustedes ya conocen; al cual le asignamos tanta trascendencia que dos de las sesiones de este Simposio estarán dedicadas a debatir, con el concurso de los más distinguidos matemáticos de Latinoamérica, aquí presentes con pocas excepciones, los problemas que su organización plantea.

La idea de un Centro Regional de Matemática para América Latina no es nueva entre nosotros. Fue lanzada por Cotlar y Monteiro en la época en que ambos trabajaban en el Departamento de Investigación Científica de la Universidad de Cuyo, junto con otros distinguidos matemáticos. Fruto de sus esfuerzos fueron, entre otros, los cursos de matemáticas para profesores de América Latina, que se dictaron en Mendoza con notable éxito bajo el auspicio del Centro de Montevideo (y que luego se repitieron el año pasado en La Plata), con la cooperación entusiasta de su Director, doctor Ibáñez. Pero los tiempos eran difíciles y la idea no plasmó. Sin embargo, la semilla estaba echada. El año pasado retomamos la idea aquí en Buenos Aires, animados por el suceso notable del curso del profesor Laurent Schwartz, auspiciado por UNESCO; curso que tuvo carácter internacional, y que fue algo así como el prolegómeno del Centro Regional, pues a él asistieron varios científicos de los países hermanos, invitados por la Universidad de Buenos Aires, cuyo Rector es propulsor entusiasta de la cooperación latinoamericana en todos los campos, y muy en particular en el campo de la ciencia. La Facultad de Ciencias redactó un proyecto, que fue aprobado por la Universidad de Buenos Aires, y considerado en el seno de la X Conferencia General de UNESCO, realizada en París en noviembre del año pasado. No logramos todo lo que pedíamos, pero logramos mucho; y puede decirse que las bases del Centro Regional están echadas. Disponemos de diez becas, por el término de dos años, que serán concedidas por UNESCO de acuerdo con el dictamen del Centro de Cooperación Científica de Montevideo y el Director del Centro Regional. Además, tenemos aseguradas la venida de cuatro matemáticos de primera línea que trabajarán en el Centro Regional durante este año y el año venidero. Son ellos los profesores Kahane y Ehresmann, que vendrán este año, y los profesores Zygmund y Salem, que nos visitarán el año que viene. Además, la Universidad de Buenos Aires ha invitado a nuestro compatriota, el profesor Alberto Calderón, que estará entre nosotros en septiembre próximo.

Deseo destacar el extraordinario apoyo que ha prestado a la idea la Universidad de Buenos Aires; la cual, entre otras cosas, se hará cargo de los gastos de estadía de profesores y becarios, corriendo por cuenta de UNESCO los gastos de pasajes. Pero no basta con el apoyo, material y moral, de UNESCO y de la Universidad de Buenos Aires. El Centro Regional *es* esencialmente latinoamericano, y necesita de manera esencialísima de la cooperación de todos los matemáticos del continente, que serán sus mejores propulsores y propagandistas en sus respectivos países; y aspiramos a que esta cooperación sea particularmente estrecha con nuestros hermanos uruguayos, con los cuales será especialmente fácil establecer intercambios que redundarán en beneficio de todos; y consideramos en definitiva que la institución que está dando ahora sus primeros pasos permitirá a Brasil, Méjico, Uruguay y Argentina, que son de nuestros países aquellos que van a la cabeza en cuanto a matemática se refiere, prestar valiosísima ayuda a sus hermanos menos adelantados.

Para terminar, deseo agradecer efusivamente la cooperación prestada a este proyecto por el Director General de Cultura, Ingeniero José Babini, por el señor Rector de la Universidad, doctor Risieri Frondizi, y por nuestro querido Decano, a quien un accidente de automóvil, felizmente sin consecuencias, ha impedido participar en esta reunión. Finalmente, nada más justo que expresar nuestro agradecimiento al Director del Centro de Montevideo, que ha colaborado entusiastamente en la realización de este tercer Simposio.

OPERACIONES POTENCIALES GENERALIZADOS Y SUMAS ORTOGONALES

por MISCHA COTLAR

(Instituto Matemática, Buenos Aires)

Esta ponencia es un resumen, sin demostraciones, de resultados y problemas referentes a una generalización de los operadores potenciales (*). Algunos de los enunciados son poco precisos y explícitos por tratarse de resultados no definitivos, cuyas demostraciones están aún en elaboración.

Sea $L^p(E^n)$ el conjunto de las funciones medibles $f(x)$ definidas en el espacio euclídeo $E^n = \{x\}$ tales que

$$\|f\|_p^{(n)} = \|f\|_p = \left\{ \int_{E^n} |f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p} < \infty, \tag{1}$$

donde $x = \{\xi_1 \dots \xi_n\}$, y $dx = d\xi_1 \dots d\xi_n$ es la medida de Lebesgue. Se dice que $h = Tf$ es un operador de *tipo* (p, s), o más precisamente de tipo $(L^p(E^n), L^s(E^m))$, si T hace corresponder a toda función f de $L^p(E^n)$ una función h de $L^s(E^m)$ de modo que

$$\|h\|_s^{(m)} \leqq M \, \|f\|_p^{(n)}, \tag{2}$$

siendo M una constante fija independiente de f; el mínimo M para el cual vale (2) es la *norma* de T. Para toda función h definida en E^m y todo $a > 0$ sea $D(h; a)$ la medida (m-dimensional) del conjunto E_a de los puntos donde $|h(x)| > a$. Si $s < \infty$, se tiene evidentemente $(\|h\|_s)^s \geqq a^s \, |E_a| = a^s D(h; a)$. Luego si se verifica (2) entonces con más razón se verifica

$$D(h, a) \leqq (M \|f\|_p / a)^s, \tag{2a}$$

pero no recíprocamente. Por eso, si $s < \infty$, diremos con Zygmund [1] que T es de *tipo débil* (p, s) si se verifica (2) para

(*) Las cuestiones aquí resumidas han sido tratadas detalladamente en seminarios en el Instituto Matemático de Buenos Aires y en la Wáshington University de Saint Louis en 1958 y 1959. (Ver [8]).

todo $a>0$ y toda f de L^p. Si $s=\infty$, entonces por definición tipo débil (p,s) es lo mismo que tipo (p,s). Si T es de tipo (o tipo débil) (p,s) se dice también que T es de tipo P donde P es el punto del plano de coordenadas $(1/p, 1/s)$; si $p,s\leqq 1$, entonces P es un punto del llamado *cuadrado de los tipos*. Los puntos de la diagonal principal d_0 de este cuadrado se caracterizan por la condición $p=s$, y los de la otra diagonal d' por la condición $1/s+1/p=1$, es decir $s=p'=p/(p-1)$. Análogamente se define el tipo $(L^p(D_n), L^s(D_m))$, donde $D_n \subset E^n$, $D_m \subset E^m$ son conjuntos acotados.

Dado un operador T uno de los problemas fundamentales que se presentan es determinar los puntos P tales que T es de tipo P. Aquí consideraremos este problema para el caso cuando T es un *operador potencial de M. Riesz*, o integral fraccionaria, de orden γ(*):

$$Tf=\tilde{f}_{\gamma n}(x)=c_{\gamma n}\int_{E^n} f(t)\,|x-t|^{\gamma-n}\,dt=f*|t|^{\gamma-n}, \tag{3}$$

$$0<\gamma\leqq n, \quad c_{\gamma n}=\Gamma((n-\gamma)/2)/\pi^{n/2}\,2^\gamma\,\Gamma(\gamma/2). \tag{3a}$$

Más aún consideraremos operadores potenciales *generalizados* cuya definición pasamos a dar. Para explicar el origen de esta definición recordaremos antes como se definen las transformadas de Hilbert n dimensionales, cuya teoría está íntimamente vinculada a la de los operadores (3). La transformada de Hilbert ordinario o 1-dimensional, corresponde al caso $n=1$, $\gamma=0$, en (3), y se define como

$$\tilde{f}_{01}=\int_{E^1}\frac{f(t)}{x-t}\,dt=f*(1/t)=f*N_{01}, \tag{4}$$

siendo esta integral singular definida como valor principal (cfr. [2], [3]). Observemos que el núcleo $N(t)=N_{01}(t)=1/t$ está caracterizado (salvo constante) por las dos propiedades siguientes: $N(at)=a^{-1}N(t)$ para *todo* $a>0$, y la integral de N extendida al conjunto $1<|t|<2$ es nula. Por eso para $n>1$ la transformada n-dimensional de Hilbert se define ([4], [5]) como

(*) Usaremos notaciones vectoriales: $x+y=(\xi_1+\eta_1,\ldots,\xi_n+\eta_n)$, $(x,y)=$ producto escalar de x,y; $|x|^2=(x,x)$; $*$ indicará el producto de convolución.

$\tilde{f}_{0n} = f * N_{0n}$ donde $N = N_{0n}$ es un núcleo tal que $N(ax) = a^{-n}$ $N(x)$ para *todo* $a > 0$, y todo x de E^n, y la integral de N extendida al anillo $1 < |x| < 2$ es nula. Si $\Sigma = \{x'\}$ es la esra unitaria de E^n, si para todo x es $x' = x/|x|$ y si $w(x')$ es la función definida en Σ por $w(x') = N_{0n}(x')$, entonces

$$\tilde{f}_{0n} = f * N_{0n}, \quad N_{0n}(x) = w(x')\, |x|^{-n}, \tag{4a}$$

y la integral de w sobre Σ es nula. $w(x')$ se llama *característica del operador* (4a). Hay pues tantas transformadas de Hilbert en E^n como funciones $w(x')$ con integral nula, mientras que en E^1 hay esencialmente una sola transformada de Hilbert.

Llamaremos operadores de *Hilbert generalizados* [6] a los operadores $H_{0n} f = f * K_{0n}$ cuyo núcleo verifica la propiedad homogénea *solo para un valor* de a, pongamos $a = 2$: $K_{0n}(2x) = 2^{-n} K_{0n}(x)$, siendo además nula la integral de K_{0n} extendida al anillo $1 < |x| < 2$. K_{0n} queda determinado por sus valores en $1 < |x| < 1$: si $k(x) = K_{0n}$ en $1 < |x| < 2$ y cero en los demás x, entonces $K_{0n}(x) = \Sigma^{\infty}_{-\infty} 2^{-ni} k(2^{-i} x)$, siendo nula la integral de k.

Volviendo a los operadores (3), observemos que su núcleo $N = N_{0\gamma} = |x|^{\gamma - n}$ verifica $N(ax) = a^{\gamma - n} N(x)$ para todo $a > 0$. Llamaremos pues operadores *potenciales generalizados* [7] a los operadores de la forma

$$H_{\gamma n} f = f * K_{\gamma n}, \quad 0 < \gamma \leqq n, \tag{5}$$

cuyo núcleo verifica la propiedad homogénea solo para $a = 2$:

$$K_{\gamma n}(2x) = 2^{\gamma - n} K_{\gamma n}(x). \tag{5a}$$

Poniendo $k(x) = \mathrm{K}_{\gamma n}$ en $1 < |x| < 2$ y nula en el resto, tendremos

$$K_{\gamma n}(x) = \Sigma^{\infty}_{i=-\infty} 2^{((\gamma - n)i} k(2^{-i} x). \tag{6}$$

Si $\gamma > 0$ la integral de $k(x)$ no necesita ser nula, más bien es $k \geqq 0$. Poniendo $k_i = k_{i\gamma}(x) = 2^{(\gamma - n)i} k(2^{-i} x)$ podemos escribir

$$K_{\gamma n}(x) = \Sigma^{\infty}_{-\infty} k_i(x), \quad H_{\gamma n} f = \Sigma^{\infty}_{-\infty} f * k_i, \tag{6a}$$

$k(x)$ se llamará núcleo *generador* y los k_i núcleos *generados* por k. En el caso de los operadores de Hilbert ordinarias el núcleo generador verifica las condiciones siguientes: a) $k(x)$ es nulo fuera de $|x|<2$; b) k es integrable con integral nula; c) $k(x) \in \mathrm{Lip}(1,1)$, es decir $\|k\|_{(1,1)}<\infty$, donde $\|k\|_{(p,\gamma)}$ (*) es la mínima constante c tal que $\|k(x+h)-k(x)\|_p \leqq c|h|^\gamma$. Por eso también en el caso de los operadores H_{0n} generalizados imponemos al núcleo generador las condiciones a) - c). Entonces los núcleos generados verifican la condición b) y las: a_i) k_i es nulo fuera de $|x|<2^i$; c_i) $\|k_i\|_{(1,1)} \leqq 2^{-i}c$. Análogamente al núcleo de $H_{\gamma n}$ le imponemos las siguientes condiciones, que se verifican en caso de los operadores (3) ordinarios: a') k es nulo fuera de $1<|x|<2$; b') k es >0 e integrable; c') $k \in \mathrm{Lip}(1,1)$. Entonces los núcleos generados verifican: a_i') k_i es nulo fuera de $2^i<|x|<2^{i+1}$; b_i') $\|k_i\|_1 \leqq 2^{i\gamma}c$; c_i') $\|k_i\|_{(1,1)} \leqq 2^{(\gamma-1)i}c$.

Llamaremos operadores *potenciales generalizados* * a los operadores de la forma $H_{\gamma n} f = \Sigma^{\infty}_{-\infty} f * k_i$, donde $\{k_i\}$ es una sucesión cualquiera de núcleos que verifican a_i') - c_i'). En particular, para $\gamma=0$, tendremos los *operadores de Hilbert generalizados* *. Más aún, las condiciones a_i) - c_i) implican (ver [6]) que los k_i son *casi ortogonales* en el sentido de que

$$\|k_{i+j} * k_i\|_1 \leqq 2^{-i} c, \quad \text{si} \quad j>0. \tag{7}$$

Análogamente a_i') - c_i') implican (ver [8], cap. 2) que los k_i son casi ortogonales en norma $(1, 2\gamma)$, es decir

$$\|k_i * k_{i+j}\|_{(1,2\gamma)} \leqq 2^{-i\gamma} c; \quad (j>0). \tag{7a}$$

Diremos que un operador H_γ es una *suma* γ*-ortogonal* si $H_\gamma = \Sigma^{\infty}_{-\infty} f * k_i$ y los k_i verifican (7a). En particular los 0-ortogonales son los que verifican (7). Así pues los operadores potenciales generalizados con caso particular de los generalizados *, y estos casos particular de las sumas γ-ortogonales. Para destacar el sentido de estas generalizaciones observemos que mientras en las transformadas de Hilbert los valores del núcleo N_{0n} pueden eligirse arbitrariamente tan sólo sobre la superficie esférica Σ, en las transformadas de Hilbert generalizadas los valores del núcleo K_{0n} pueden elegirse ar-

(*) Esto si $\gamma \leqq 1$. Si $\gamma > 1$, $\gamma = \gamma' + \gamma''$, γ' = entero, $\gamma'' \leq 1$, decimos que $k \in \mathrm{Lip}\,(p, \gamma)$ si k tiene derivadas absolutamente contínuas hasta el orden γ' y la derifada de orden γ' pertenece a $\mathrm{Lip}\,(p, \gamma'')$.

bitrariamente en la esfera sólida $|x| < 2$. Por eso las transformadas de Hilbert generalizadas forman una familia más amplia e incluyen también a los operadores del tipo de Fejer o ergódicos (ver [6]). Mucho más amplia aún es la familia de los operadores generalizados * donde tenemos infinitos núcleos arbitrarios k_i que deben verificar a_i') - c_i'). Resulta que las propiedades básicas de los operadores potenciales ordinarios valen también para los generalizados *. Más aún, una parte de las mismas (que corresponden al caso $s = p'$) valen para las sumas γ-ortogonales. Pasamos a resumir estos hechos y algunos problemas que se les vinculan.

A) Calderón y Zygmund probaron (extendiendo a E^n resultados clásicos de E^1, debidos a Privalov, Lusin, M. Riesz y Kilmogorov [9]) que la transformada de Hilbert $\tilde{f}_{0n}$ existe como valor principal para toda $f \in L^p, 1 \leqq p < \infty$, y que el operador correspondiente es de tipo (p, p) si $1 < p < \infty$, y de tipo débil $(1, 1)$, [4]. O sea los operadores de Hilbert son de tipo p para todo punto P interior de la diagonal $d_0 = A_0 B_0$, siendo de tipo débil en el extremo $B_0 = (1, 1)$. Todos estos resultados valen también [6] para los operadores de Hilbert generalizados *. Más aún, si $p = 2$ ellos valen también para las sumas 0-ortogonales ($p = 2$ corresponde a la intersección de d_0 con d') (*). (Cfr. Nota I). Para nosotros es de especial interés el siguiente

P r o b l e m a 1. Determinar para que otros valores de p, $p \neq 2$, son las sumas 0-ortogonales de tipo (p, p), o de tipo débil 1, y si es posible generalizar el concepto de 0-ortogonalidad de modo que esto valga para todo p.

E. Oklander está considerando [10] algunas aproximaciones al problema 1, usando la siguiente fórmula que generaliza la expresión clásica del radio espectral: si T es un operador en L^p, si $(Tf, g) = (f, Tg)$ para todo par de funciones elementales, entonces $\|T\| = \lim_{r \to \infty} (\|T_1{}^r\|)^{1/s}$ donde $s = 1 + rp'$, y $T_1 f = T\{[T(|Tf|^{p-1}\, sgn\, f]^{p'-1}\, sgn\, f\}$. Fórmulas análogas valen en el caso general de operadores de L^p en L^s.

Para las cuestiones indicadas en E), I), y otras, puede resultar útil considerar sumas 0-ortogonales continuas, dependientes de

(*) Aprovechamos la oportunidad para corregir una errata de [6] que puede inducir a confusiones: al comienzo de la última línea de la página 47, falta la palabra "luego".

un parámetro continuo $t \in E^m$: Sea $k_t(x) = k(t, x), t \in E^m, x \in E^n$, una familia de núcleos tal que $\|k_t * k_{t+s}\|_1 \leqq M^2 \varepsilon^{-1+sm}$; entonces la suma continua (integral) $Hf = f * \left(\int k_t(x) \, d_t \mu \right)$ (μ = medida de Radón) es convergente para toda f y representa un operador de tipo $(2, 2)$. A estos teoremas sobre sumas 0-ortogonales se les puede dar una gran generalidad (cfr. [8], capítulo 2). Por ejemplo vale el siguiente teorema. Sea $V(a) \geqq 0$ una función decreciende de $a > 0$, $W(a, b)$ una función creciente en $a > 0$, y $b > 0$, μ una medida en E^m, y $\{x, y\}$ la medida-μ de la esfera de centro x y rado $|x - y|$. *Teorema:* Si a cada x de E^n está asignado un operador hermiteano $T(x)$, si para cada x, y los operadores $T(x), T(y)$ permutan y verifican $\|W(T(x); T(y))\| \leqq V(\{x, y\})$, entonces

$$\left\| \int_{E^n} T(x) \, d\mu \right\| \leqq \int_0^\infty V^{-1}(W(a, a)) \, da.$$

Si $V(a) = \varepsilon^{a-1}$, $W(a, b) = ab$, $V^{-1}(a) = 1 + \log a / \log \varepsilon$, μ = medida discreta, obtenemos el teorema de las sumas ortogonales

B) Hardy y Littlewood (para $n = 1$, [12]), Sobolev y Thorin (para $n > 1$, [13], [14]), probaron que el operador potencial $\tilde{f}_{\gamma n}$, dado por (3), es de tipo $(L^p(E^n), L^s(E^n))$ para todo p, s tales que $1/p - 1/s = \gamma/n$, $\gamma/n < 1/p < 1$. O sea el operador (3) es de tipo P para todo punto interior del segmento d_γ que se obtiene trasladando d_0 en γ/n. Otras demostraciones de este teorema fueron dadas por Stein-Weiss [15] y Du Plessis [16]. Zygmund probó [1] que este operador es de tipo débil $(1, n/(n-\gamma))$, o sea de tipo débil en el extremo B de d_γ. Si $E^m \subset E^n$, y si en (3) hacemos t varían en E^n y x en E^m, entonces el operador (3) hace corresponder a funciones $f(t)$ definidas en E^n funciones $\tilde{f}_{\gamma n}$ definidas en E^m, de modo que cabe preguntar para que p, s este operador es de tipo $(L^p(E_n), L^s(E^m))$. Sobolev [4a] probó que el operador (3) es de tipo $(L^p(E^n), L^s(E^m))$ si $1/p - (m/n)(1/s) = \gamma/n, \gamma/n < 1/p < 1, m < n < m + \gamma$, o sea de tipo P para todo punto interior al segmento $d_{\gamma m}$ que se obtiene rotando d_γ con pendiente m/n. En realidad Sobolev probó un resultado mucho más débil, suponiendo que el operador se considera sobre dominios acotados (es decir t, y x, varían en (3) sólo en dominios acotados y no en todo el espacio), y que P está encima de $d_{\gamma m}$ estrictamente, y propuso como problema el resultado que acabamos de enunciar. El problema fue resuelto por Ilin [17] (ver también Smolitzki [17a]). Sin conocer el trabajo de Ilin, Panzone y el autor [7b], (cfr. [7a]), obtuvieron el mismo resultado por un método diferente que se aplica a situaciones más generales, probando además que el operador es de tipo débil $(1, m/n - \gamma)$ en el extremo del segmento. La misma situación se presenta si $E^m \supset E^n$. Si f y $\tilde{f}_{\gamma n}$ son considerados sobre dominios acotados $D^n \subset E^n$, $D_m \subset E^m$ (de modo que la integral en (3) se extiende solo a D_n) entonces, según lo probaron Sobolev y Kondrachiev [15a], el operador es de tipo P para todo punto situado sobre o encima de $d_{\gamma m}$; además si P está estrictamente encima de $d_{\gamma m}$ el operador es también completamente continuo (compacto); finalmente si $0 < 1/p < \gamma/n$ entonces el operador (3) actúa de $L^p(D^n)$ en $C(D_m)$ y es compacto, (cfr. Nota 2).

Todos estos resultados de Thorin, Zygmund, Sobolev y Kondrachiev valen [7], [7a], [7b], para los operadores potenciales generalizados $* \; H_{\gamma n}$, $0 < \gamma \leqq n$. Estos resultados valen para sumas γ-ortogonales si $1/p + 1/s = 1$ (es decir si P está en la intersección de d_γ con d'), y se puede extender un poco más el dominio de los p donde estos resultados subsisten.

P r o b l e m a 2. No sabemos si para sumas γ-ortogonales estos resultados valen para todos los p, y cual es el campo de su validez; falta además aclarar la compacidad del operador.

C) De los resultados de B) resulta en particular que si $f \in L^p$, entonces $\tilde{f}_{\gamma n}$ es integrable sobre todo compacto, luego la integral (3) converge para todos los x salvo conjunto de medida nula. Más aún si $m < n < m + \gamma/p$ y $E^m \subset E_n$, entonces $\tilde{f}_{\gamma n}$ pertenece a cierto $L^s(E^m)$ y por tanto los puntos donde la integral (3) no converge forman conjunto de medida nula m-dimensional en todo subespacio E^m (y esto es mucho más que decir que es de medida nula n-dimensional). Consideremos ahora los puntos de divergencia contenidos en un conjunto m-dimensional pero no situado en un mismo subespacio E^m (por ejemplo, un conjunto contenido en una suma numerable de superficies m-dimensionales, $m < n$). Como se sabe, para tales conjuntos conviene usar las medidas fraccionarias de Hausdorff o la noción de capacidad.

Recordemos que un conjunto compacto $B \subset E$ tiene γ-*capacidad* nula si para toda medida de Radón μ tal que $\mu(B) > 0, \mu(E-B) = 0$ se verifica $\|\tilde{\mu}_\gamma(x)\|_\infty = \infty$, donde $\tilde{\mu}_\gamma = \mu * |x|^{\gamma-n}$. Du Plessis [16] probó el siguiente teorema: Si $\gamma/n < 1/p, p > 2$ y si $f \in L^p(E^n)$ entonces los puntos x en que la integral (3) no converge forman un conjunto de γ'-capacidad nula, para todo $\gamma' > n - \gamma p$; si $1 \leqq p \leqq 2$, entonces este conjunto es de $(n-\gamma p)$-capacidad nula. Introduciendo la noción de capacidad respecto de núcleo generales $K_{\gamma n}$, el teorema de Du Plessis se extiende [7] a los operadores potenciales $H_{\gamma n}$ generalizados $*$, así como a capacidad m-dimensional, $E^m \subset E^n$. En el mismo trabajo Du Plessis probó el siguiente teorema, que Hardy y Littlewood [12] demostraron para $n=1$: Si $f \in \text{Lip}\,\beta, 0 < \beta < 1$, entonces $\tilde{f}_{\gamma n} \in \text{Lip}(\gamma + \beta)$, $0 < \gamma + \beta < 1$; si $f \in L^p(E^n), p > 1, 1/p + 1/n > \gamma/n > 1/p$, entonces $\tilde{f}_{\gamma n} \in \text{lip}(\gamma - n/p)$. Para $n=1$ Hardy y Littlewood dieron varios otros teoremas de este tipo (generalizados a $n > 1$ en [7]), por ejemplo: $f \in L^p(E^n)$ implica $f_{\gamma n} \in \text{Lip}\,(p, \gamma)$ si $0 < \gamma < 1$. También estos teoremas se extienden a los operadores potenciales generalizados $*$ [7], así como al caso de clases $\text{Lip}\,\beta(E^m), m < n$.

Problema 2a. Determinar la estructura de los conjuntos de divergencia de las sumas γ-ortogonales, así como la validez para estas sumas de los teoremas referentes a las clases Lip.

D) Si, en vez de normas tomadas respecto de la medida de Lebesgue dx, se consideran normas respecto de meddias ponderadas $|x|^a dx$, entonces hablaremos de tipos $(L^p(E^n); |x|^a dx)$; $L^s(E^m, |x|^b dx))$. En caso de un dominio $D \subset E^n$ se usa en vez de $|x|^a$ un peso $\sigma(x)$ que tiende a cero, al tender x al contorno de D, con «velocidad» $|d(x)|^a$, $d(x) =$ distancia al contorno. Hardy - Littlewood [12] probaron para $n=1$ que los operadores (3) son del tipo $(L^p(E^n), |x|^b dx)$; $L^s(E^n, |x|^a dx)$ si $1/p - 1/s = \gamma/n - (a+b)$; Stein - Weiss [15a] extendieron este teorema a $n > 1$, que se reduce al teorema de Thorin - Sobolev si $a = b = 0$. En un trabajo en preparación, E. Ortiz y el autor [22] prueban que los resultados más precisos de Sobolev (para $E^m \subset E^n$, compacidad, tipo débil, etc.), se extienden al caso de tales pesos. E. Stein (para $n > 1$, [23]) y Babenko ($n=1$, [23a]) probaron teoremas análogos para las transformadas de Hilbert. Todos estos teoremas valen para operadores (potenciales o de Hilbert) generalizados $*$, y parcialmente para las sumas ortogonales.

Kantarovich [18] mostró que los resultados «más débiles» de Sobolev-Kondrachev (para dominios compactos y P encima de d_Y) pueden deducirse de teoremas generales sobre operadores integrales, que extienden un teorema de Young (ver [8], cap. 4).

Problema 2b. Examinar para estos operadores integrales los tipos débiles, teoremas de capacidad, tipos ponderados, así como los teoremas de Horvath que se mencionan en F) y de las clases de Sobolev que se mencionan en E).

E) En [4] Calderón y Zygmund imponen al núcleo N_{0n} (o a su función característica $w(x'))$ ciertas coniciones de continuidad uniformes. En [4a] ellos prueban que es suficiente exegir $|w|\log(1+|w|)\in L^1(\Sigma)$ (si $p>1$; el caso $p=1$ no está aclarado). Más aún ellos extienden los teoremas de A) a los operadores $f*N$ con $N(x)=N_{0n}(x)\,\psi(|x|)$, donde N_{0n} es como antes y ψ es una transformada de Fourier Stieltjes. En una nota de próxima publicación, E. Oklander y el autor dan otra demostración de estos resultados, basada en el siguiente teorema general. Dada una función $w(s)$ sobre Σ y para todo $s\in\Sigma$ un operador $T_s f$, definimos al operador radial (cfr. 4a) $Hf=\int\limits_{\Sigma} w(s)\,T_s f\,ds$. Bajo condiciones generales sobre w y T, si los T_s son de seudo-tipo «uniforme» (ver definición en G)), y si los T_s son de tipo (p, p), resulta que Hf es también de tipo (p, p). Este teorema puede aplicarse también a operadores de Hilbert generalizados, y estamos considerando con Oklander el siguiente

Problema 3. Extender (mediante el teorema de operadores radiales), los resultados de [4a] a transformadas de Hilbert generalizadas $*$. Idem para los operadores potenciales generalizados $*$, y examinar sistemáticamente las propiedades de los operadores radiales arriba definidos.

Los operadores de Hilbert son casos particulares de las integrales singulares de la forma ([4a], [5]) $Hf=\int f(y)\,K(x,y)\,dy$, donde $K=N(x,x-y)$, siendo $N(x,az)=a^{-n}N(x,z)$ para todo $a>0$, y la integral de N sobre $|z|=1$ es nula. Más generalmente en [4a] se consideran núcleos de la forma $K = N(x, x-y)\,\psi(|x-y|)$. Calderón y Zygmund demuestran [4a] que bajo ciertas condiciones generales estos operadores son de tipo (p, p) si $1 < p < \infty$ (para $p = 1$, está sin aclarar) y valen los demás resultados de A). Parece que también aquí el teorema general sobre operadores radiales, mencionado más arriba, permite extender estos resultados a operadores generalizados. Llamando *operadores potenciales fuertemente generalizados* a los operadores integrales cuyo núcleo es de la forma $K_\gamma(x, y) = N(x, x-y)\,\psi(|x-y|)$ y donde N verifica la propiedad homogénea para un sólo valor de *a*: $N(x, 2z) = 2^{\gamma-n} N(x, z)$, estamos considerando el siguiente

P r o b l e m a 4. Extender los resultados de A), B), D), a los operadores potenciales fuertemente generalizados, y definir los fuertemente generalizados $*$ y las sumas fuertemente ortogonales; ídem para C).

En [4b] Calderón y Zygmund prueban que los operadores de Hilbert son de tipo $(W_p{}^r, W_p{}^r)$ donde $W_p{}^r$ son los espacios de Sobolev (ver Nota II).

P r o b l e m a 4a. Examinar como actúan los operadores tenciales y potenciales generalizados o fuertemente generalizadas con respecto a tipos $(W_p{}^r, W_s{}^r)$.

P r o b l e m a 4b. Extender a operadores potenciales generalizados la teoría de periodización de Calderón-Zygmund en [4d].

F) J. Horvath [24] probó que los operadores de Hilbert son de tipo $(D_{L^{p'}}, D_{L^{s'}})$ (*) si $1 < p < \infty$. Análogamente los potenciales (3) son de tipo $(D_{L^{p'}}, D_{L^{s'}})$, con $1/p - 1/s = \gamma/n$, $p > 1$. Usando una definición equivalente de tipo débil (ver [7]) es posible definir el tipo débil en $D_{L^{p'}}$ y completar los teoremas de Horvath para $p = 1$, así como con los teoremas de Sobolev Kondrachev de B). Todos estos teoremas se extienden a operadores generalizados $*$ quedando como antes por aclarar el caso de sumas ortogonales, así como los teoremas de C).

Cora Ratto de Sadosky [25] mostró que los resultados de B) valen para los operadores potenciales hiperbólicos con núcleo $(|t_1{}^2 - t_2{}^2|^{1/2})^{2-\gamma}$, si $t \in E^2$, y aún para potenciales hiperbólicos

(*) $f \in D_{L^p}$ si es infinitamente derivable y las derivadas $\in L^p$; $f_n \to 0$ en este espacio si $D^i f_n \to 0$ en L^p para todo i. $D_{L^{p'}}$ es el dual D_{L^q}, $q = p'$.

generalizados; la propiedad de tipo débil (1, 1) no vale en el caso hiperbólico. Este trabajo considera sistemáticamente tan sólo el caso $n=2$, y Cora Ratto está examinando en detalle el caso general, así como las propiedades de C) para los hiperbólicos.

Las propiedades de los operadores hiperbólicos de E^2 están vinculadas a la teoría general de operadores dobles o iterados: si $f(x, y)$ es función de dos variables $(x, y) \in E^m \times E^n$, y si T_x actúa en E^m, T_y en E^n, cabe considerar el operador doble $T_x T_y f = Tf$ y la relación entre los tipos de los operadores T, T_x, T_y. El caso en que T_x, T_y son operadores de Hilbert generalizados $*$ fue estudiado en [6]. Sin embargo falta aún un estudio sistemático del caso general; en particular convendría examinar el tipo de operadores dobles respecto de normas mixtas ${}_x\| \; {}_y\|f(x, y)\|_p\|_r$.

G) La teoría, y las demostraciones de las propiedades, de los operadores potenciales generalizados, está estrechamente vinculada al teorema de convexidad de Riesz-Thorin y sus extensiones. En los teoremas de A), B), D) se trata de establecer que los operadores potenciales generalizados $*$ son de tipo P en todos los puntos interiores de $d_{\gamma m} = AB'$, y de tipo débil en B'; además en caso de dominios acotados se trata de establecer el tipo compacto. Se obtiene pues una considerable simplificación de las demostraciones usando el siguiente *teorema de Marcinkiewicz-Zygmund* [1]: Si un operador T es (*) de tipo débil P_1 con norma débil M_1 y de tipo P_2 con norma débil M_2, entonces T es de tipo P en todo punto P interior a $P_1 P_2$ y con norma $M \leqq c M_1^{1-\alpha} M_2^{\alpha}$, siendo α la razón en que P divide al segmente (siempre que el segmento no sea paralelo al eje de abcisas); la constante c depende de P y tiende al infinito si P tiende a P_1 o P_2. Este teorema generaliza la parte esencial del teorema clásico de Riesz-Thorin que afirma: si T es de tipo en P_1 y P_2 entonces es de tipo en todo P del segmento $P_1 P_2$ valiendo $M \leqq M_1^{1-\alpha} M_2^{\alpha}$. Gracias al teorema de Marcinkiewicz, para establecer el tipo de $H_{\gamma n}$ basta probar que $H_{\gamma n}$ es de tipo débil en el extremo B' y de tipo en el punto C' en que $d_{\gamma m}$ corta a d'; porque entonces por este teorema $H_{\gamma n}$ será de tipo en todo punto de C', B', y siendo $\mathrm{H}_{\gamma n}$ esencialmente hermiteano esto implica enseguida el tipo en la parte simé-

(*) Como las funciones elementales (escaleras) son densas en L^p, todo operador acotado T queda determinado por sus valores en estas funciones. Por tanto en todos los teoremas de convexidad se supone que T está definido en el conjunto de las funciones elementales escaleras.

trica AC'. La demostración del tipo en C' es más fácil de tratar pues C' es punto de d' luego L^p y L^s son en este caso espacios duales, y pueden aplicarse los teoremas de operadores ortogonales. Por otra parte la demostración del tipo débil en $B' \dashv (1, (n-\gamma)/m)$ es más fácil de tratar gracias a los dos hechos siguientes. 1) En caso de B' es $p=1$ y este es el único valor de p para el cual vale $\Sigma \|f_i\|_p = \|\Sigma f_i\|_p, f_i \geqq 0$. Debido a esto resulta ([7], proposición 3) que para establecer el tipo débil en B' de T basta probarlo para funciones características de intervalos (cubos), y esto último suele ser fácil. 2) Para el caso $p=1$ se puede dar una nueva extensión del teorema de Riesz-Thorin basada en la siguiente noción de seudo-tipo ([6], [7]). Por lo observado sólo consideraremos funciones escaleras f luego el soporte $S(f)$ de f es un conjunto acotado y podemos hablar de $m(f) =$ mínimo de $|f|$ en $S(f)$; con Q indicaremos un cubo que contiene a $S(f)$ y con $\mu(f, Q) = |Q|^{-1} \|f\|_1$. Para muchos operadores T dados por integrales singulares, tales como los $H_{\gamma n}, Tf(x)$ es «bueno» en los puntos x fuera de $S(f)$, y «malo» en $S(f)$; además existe una h tal que Tf mejora si sustituimos f por $f-h$, donde h se mantiene menor que $m(f)$ o que $\mu(f, Q)$. Por tanto es de esperar que para muchos T sea posible encontrar una tal h, y un conjunto F del «tamaño» de $S(f)$, tales que verifica

$$\left\{ \int_{E^n - F} |T(f-h)|^s \, dx \right\}^{1/s} \leqq c\|f\|_1. \tag{8}$$

Decimos que T es de *seudo tipo* $*$ $(1, s; a), a > 0$, si para toda f existe una h y un F para los cuales se verifica (8) y tales que $|h(x)| \leqq c\, m(f)$, $|F| \leqq [c\|f\|_1/m(f)]^{s/a}$. T es de *seudo tipo* $(1, s; a), a > 0$, si para todo Q existe un F y una h tales que vale (8) y $|h(x)| \leqq c\,\mu(f, Q)$, $|F| \leqq c|Q|^{s/a}$. Evidentemente tipo $(1, s)$ implica seudo tipo $*$ y seudo tipo. Se prueba que si $a \leqq s$ entonces seudo tipo implica seudo tipo $*$, y se tiene *la siguiente extensión del teorema de Riesz:* Si $P_2 = (1, 1/s)$, si T es de tipo débil P_1 y de seudo tipo $(1, s; a)$, entonces T es de tipo débil en P_2, y por tanto de tipo P en todo punto interior de P_1P_2; aquí $a = \operatorname{tg}\varphi/\operatorname{tg}\vartheta$, $\varphi =$ argumento del vector OP_2, $\vartheta =$ el del vector P_1P_2. Gracias a este teorema, para establecer el tipo débil en B' basta probar el seudo tipo $(1, s; a)$ y esto es tarea mucho más fácil, por lo menos en caso de los operadores $H_{\gamma n}$.

Indiquemos todavía otros dos perfeccionamientos de los teoremas de convexidad que resultan útiles en la teoría generalizada de potenciales. En el teorema de Riesz - Thorin P_1, P_2 son puntos cualesquiera del cuadrado de los tipos, mientras que en el de Marcinkiewicz se supone que estos puntos están el triángulo inferior del mismo. En los teoremas de Sobolev y las teorías generalizadas de potenciales aparecen segmentos $P_1 P_2$ con puntos en el triángulo superior; estas y otras cuestiones hacen pensar en la utilidad de extender el teorema de convexidad de Marcinkiewicz a todo el cuadrado. Tal extensión parece posible y la demostración será publicada en un trabajo próximo. Por otra parte los teoremas de Sobolev - Kondrachev sugieren la extensión de los teoremas de convexidad de Riesz y de Marcinkiewicz a tipos, y tipos débiles, compactos. Creo haber demostrado el teorema de Riesz para tipos compactos, y el de Marcinkiewicz - Zygmund para el caso de medidas de Lebesgue en espacios euclídeos.

En las demostraciones de las propiedades de potenciales generalizados se usa también una extensión del teorema de Riesz para operadores que dependen analíticamente de una variable compleja; esta extensión se debe a I. Hirshman [26] y E. Stein [15b]. Los teoremas de convexidad fueron también estudiados en los espacios H^p de Hardy por Calderón - Zygmund [4c] y Stein - Weiss [15c]. Stein y Weiss extendieron los teoremas de convexidad al caso de medidas variables [15b], además ellos probaron [15d] que en los teoremas de convexidad es suficiente que la hpóteisis se verifique para funciones características de conjuntos. Calderón (comunicación oral) consideró el teorema de Riesz en los espacios de Sobolev, y en un trabajo de próxima publicación, Lions estudia cuestiones más generales de este tipo. Finalmente en [17] (ver también [8], cap. III) se indica una unificación parcial de los teoremas de Riesz y Marcinkiewicz, pero está aún sin resolver la unificación completa.

P r o b l e m a 5. Generalizar la noción de seudo tipo para $p \neq 1$, y aclarar las relaciones entre seudo tipo, tipo, tipo débil, unificando estos conceptos.

P r o b l e m a 5a. Examinar los teoremas sobre seudo tipo en otros espacios, tales como los de Hardy, Sobolev, Nikolski; ídem tipo débil en los dos últimos espacios.

P r o b l e m a 5b. Demostración del teorema de Marcinkiewicz - Zygmund para tipos compactos en el caso de medidas arbitrarias; ídem en el triángulo superior de los tipos.

H) Si $Tf = f * K$ y si K, f son funciones «buenas», definidas en E^n entonces $F(Tf) = F(f)\,\sigma$, con $\sigma = F(K)$, donde F es la transformada de Fourier. Más generalmente, diremos que T es un operador dado por un *multiplicador* σ, si σ es una función definida en E^n y para toda función elemental f se tiene $F(Tf) = F(f)\,\sigma$. Si K no es integrable se puede definir $F(K)$ de dos maneras: 1) Aproximando (por ejemplo, truncando) a K por núcleos integrables $K_j \to K$ y probando que $F(K_j)$ converge en cierto sentido a un límite σ de modo que $F(Tf) = F(f)\,\sigma$. 2) Definir $F(K)$ en sentido de las distribuciones. No siempre ambas definiciones concuerdan y en 1) diferentes aproximaciones pueden dar diferentes límites. En el caso de las transformadas de Hilbert $Hf = f * K, K = N_{01}$, Calderón y Zygmund probaron [4], [4e] que: a) $\sigma = F(K)$ existe en sentido de 1) de modo que estos operadores son dados por multiplicadores; b) σ es una función homogénea de grado 0, luego $\sigma(x)$ está determinada por su restricción $\sigma(x')$ a Σ, y esta restricción recibe el nombre de *símbolo del operador* $\sigma(H)$; c) si $N_{01} \in C^\infty$ (en $x \neq 0$), también $\sigma \in C^\infty$, recíprocamente toda $\sigma \in C^\infty$, homogénea de grado 0, es el símbolo de un operador de Hilbert; d) el símbolo del producto de operadores es igual al producto de los símbolos; e) el operador tiene inverso si y sólo si su símbolo no se anula; f) si $w(x')$ es la característica del operador entonces la correspondencia $w(x') \to \sigma(x')$ proporciona una generalización del concepto de función conjugada para E^n; g) una teoría análoga tiene lugar para el caso $u \in L^p(\Sigma)$. Horváth [24] probó que $F(N_{01})$ existe en sentido 2) concordando ambas definiciones. Los operadores de Hilbert generalizados son también dados [6] por un multiplicador σ que verifica la propiedad homogénea sólo para $a = 2$: $\sigma(2x) = \sigma(x)$; recíprocamente, toda función $\sigma \in C^\infty$ homogénea para $a = 2$ es el símbolo de un operador de Hilbert generalizado. Las propiedades d) y e), en cambio, no están aclaradas del todo aún, y menos aún la f), que aquí *cambia fundamentalmente*, pues ahora $w(x')$ y $\sigma(x')$ están definidas en la *esfera sólida*. En el caso de los operadores potenciales generalizados también se extienden las propiedades a) - c) [8] en sentido de la definición 2), y si $0 < \gamma < 1/2$ también en sentido de 1).

Problema 6. Aclarar las propiedades d) - f) para los operadores de Hilbert y potenciales generalizadas. El problema está sin abordar para los operadores generalizados *.

Un importante teorema de Marcinkiewicz (para series Fourier, extendido a integrales Fourier por Mijlin [5a]) da la siguiente condición suficiente para que un operador general T, dado por el multiplicador σ, sea de tipo (p, p) para todo $1 < p < \infty$: existe la derivada $\partial \sigma^n / \partial x_1 \dots \partial x_n$, siendo continuas las derivadas precedentes, $|x|^s |D^{(s)} \sigma(x)| \leqq M$ para $s = 0, \dots, n$. Las propiedades de tipo de los operadores de Hilbert pueden obtenerse como caso particular de este teorema. La demostración de Marcinkiewicz usa propiedades sútiles de funciones de Walsh y funciones analíticas. Calderón - Zygmund [4d] dieron una demostración directa, para algunos casos particulares importantes, como aplicación de [4], con extensión al caso $p = 1$; según comunicación oral de Calderón, estos autores obtienen el teorema completo con los mismos métodos directos. Sería útil extender el teorema a los tipos (p, s); creo que para ello habría que reemplazar, en la última desigualdad, $|x|^s$ por $|x|^{s+\gamma}$ con $1/p - 1/s = \gamma/n$.

Problema 6a: Generalizar este teorema de Marcinkiewicz para tipos $(p, s), 1/p - 1/s = \gamma/n$, y deducir su demostración aplicando los teoremas de tipo de los operadores potenciales generalizados; ídem para tipos $(L^p(E^n); L^s(E^m))$.

I) Si Hf es una transformada de Hilbert en E^2, su característica $w(t)$ es una función definida en la circunferencia, o en $(0, 2\pi)$, y por tanto desarrollable en serie de Fourier $w(t) = \Sigma\, c_n e^{int}$. Son pues de especial importacia los operadores U_m cuya característica es $w(t) = e^{imt} (m \neq 0)$, y se tienen los resultados siguientes (Giraud, Mijlin [5], [5b]; ver también Horváth [24] donde estas fórmulas se deducen por un método original basado en álgebras Grassmann): h) $U = U_1$ es un operador unitario fijo y $U_m = 1/m\, U^m, U_{-m} = (-1)^m m^{-1} U^{-m}$; h$_1$) $\sigma(U_m) = (-i)^m m^{-1} e^{imt}$ si $m > 0$ y $(i)^m |m|^{-1} e^{imt}$ si $m < 0$; h$_2$) todo operador de Hilbert H de característica $w = \Sigma\, c_m e^{imt}$ se desarrolla en serie de Laurent del operador U:

$$H = \sum_1^\infty c_m \mathrm{m}^{-1} U^m + \sum_1^\infty (-1)^m m^{-1} c_{-m} U^{-m} \qquad \text{(Mijlin)};$$

h$_3$) en caso de $E^n, n > 2$, la característica w, definida en la superficie esférica, se desarrolla en serie de funciones esféricas

Y_{ml}; luego es de interés particular el caso $w = Y_{ml}$, y en este caso $\sigma = \varepsilon_{me} Y_{me}$, donde $\varepsilon_m =$ constante; h₄) si $w = \Sigma\, c_{me} Y_{me}$ entonces $H = \Sigma\, c_{me}\, \varepsilon_m Y_{me}$. Así pues, entre los posibles operadores de Hilbert están los operadores «fundamentales» U_{ml}, y todo otro operador se descompone en serie de fundamentales. Finalmente, si H es una integral singular con núcleo $K(x, y) = N(x, x \rightarrow y)$, el símbolo se define como la restricción a Σ de $F_z N(x, z)$; aquí $N(x, z')$ se desarrolla en una serie de funciones esféricas con coeficientes no constantes, dependientes de x:

$$N(x, z') = \Sigma\, c_{me}(x)\, Y_{ml}(z'), \quad \text{y} \quad \sigma = \Sigma\, c_{me}(x)\, \varepsilon_m Y_{ml}(z').$$

Perfeccionando resultados anteriores de Giraud, Mijlin y Tricomi, Calderón y Zygmund [4b] extendieron los resultados a)-h) a integrales singulares con núcleos $N(x, x - y)$; sólo que las propiedades d) y e) valen no en forma absoluta sino módulo los llamados operadores regulares; en caso de dominios acotados estos operadores regulares son los compactos.

Pasando a operadores de Hilbert generalizados, las propiedades h) no están aclaradas del todo. Por otra parte es *necesario tomar un camino diferente* al de la teoría clásica de Giraud-Mijlin y Calderón-Zygmund, pues en las tranformadas generalizadas la característica está definida en $|x| < 1$ y no se aplica la descomposición en funciones esféricas sino la de series de Fourier. Por otra parte la descomposición en elementos fundamentales puede hacerse para la característica o para el símbolo, y parece que los dos procedimientos conducen a desarrollos diferentes.

Problema 6b. Aclarar la teoría de descomposición correspondiente a h) para operadores de Hilbert y potenciales generalizados, desarrollando la característica o el símbolo en series de Fourier en el anillo $1 < |x| < 2$. El problema correspondiente para operadores fuertemente generalizados está sin abordar.

J) Vamos a insistir una vez más en el hecho de que los a, para los cuales el núcleo verifica $K(ax) = a^{-n} K(ax)$, forman un grupo contínuo en el caso de las transformadas de Hilbert ordinarias, y un grupo discreto en caso de los operadores generalizados. Este hecho no influye en las propiedades de tipo del operador, pero vimos que al considerar la descomposición en núcleos fundamentales surgen diferencias esenciales, apareciendo por lo menos dos formas diferentes de abordarla. Por ahora no tenemos elementos para decidir cual de las dos formas es la más adecuada para los operadores potenciales generalizados $*$ y si es posible pasar de una de ellas a la otra.

Por eso creemos que conviene enfocar el problema desde un punto de vista general, en relación con algunas ideas de L. Schwartz [3a] y el problema de los momentos. Tratándose de cuestiones que recién estamos abordando, nos limitaremos a esbozar la idea básica.

Como los operadores potenciales H son acotados basta considerarlos sobre un espacio vectorial D, de funciones, denso en los L^p; por ejemplo, D puede ser el espacio L_0 de las funciones escaleras, o el espacio $\mathcal{D}$ de las funciones infinitamente derivables, nulas fuera de compactos. Siendo estos operadores H convoluciones, con un ligero cambio de definición podemos suponer que verifican $(Hf,g) = (f,Hg)$ para todo f,g de D, donde $(f,g) = \int f(x)\, g(x)\, dx$. Además estos operadores son dados por multiplicadores.

Más generalmente, fijado D, consideremos un operador lineal T, definido en D, que a cada f de D le hace corresponder cierta función localmente integrable Tf, y tal que $(Tf,g) = (f,Tg)$. Para cada $f,g \in D$ definimos

$$(f|g) = (Tf,g) = (\mathrm{F}(Tf), \mathrm{F}\, g).$$

Entonces a todo tal operador T le corresponde una forma bilineal $(f|g)$, y toda forma bilineal corresponde a un único operador. Toda medida μ define una forma bilineal

$$(f|g) = \int_{E^n} \mathrm{F}\, f(x)\, \mathrm{F}\, \overline{g(x)}\, d\mu$$

y por tanto un operador T. En este caso diremos que T es un operrador *multiplicador* (en sentido amplio) siendo μ el multiplicador. Si $d\mu = \sigma(x)\, dx$ obtenemos la noción de multiplicador dada más arriba. Si μ es una medida positiva la $(f|g)$ correspondiente es esencialmente un producto escalar y define una estructura prehilberteana en D. Si μ es una medida cualquiera, $(f|g)$ es una combinación lineal de tales productos escalares. Recíprocamente, dada una forma bilineal $(f|g)$ en D, que es un producto escalar, o una combinación de productos escalares, surge el problema si tal forma bilineal es dada por una medida μ, es decir si define un operador multiplicador. Si $D=\mathcal{D}$ entonces se tiene el siguiente teorema que generaliza un resultado de Schwartz (Schwartz impone la condición que $(f|g)$ sea contínua en $D \times D$, lo que aquí no se supone): *Teorema A*. Si $D=\mathcal{D}$ y $(f|g)$ es un producto escalar en D, entonces las condiciones siguientes son equivalente:

a) $(f|g)$ es dado por un multiplicador $d\mu$, y μ es una medida a crecimiento lento ($(1+|x|^a)$ es integrable $-\mu$ para algún $a<\infty$)) y única.

b) $(f'|g)=-(f|g')$, o sea el operador $Af=if'$ es simétrico.

c) Si $\tau_a f(x)=f(x-a)$ entonces $(\tau_a f|\tau_a g)=(f|g)$, o sea τ_a es un grupo de operadores unitarios en el espacio prehilberteano D.

Así pues los operadores multiplicadores T son aquellos cuya forma bilineal asociada es un producto escalar tal que el operador $Af=if'$ es simétrico en el espacio de Hilbert correspondiente. Este punto de vista está relacionado a ciertos resultados de Krein - Lifshitz [29] y A. Devinatz [30] sobre el problema de momentos. En efecto, podemos considerar que $(f|g)=(\varphi|\psi)$, $\varphi=\mathrm{F}f$, $\psi=\mathrm{F}g$, es un producto escalar en el espacio $\Lambda=\mathrm{F}(D)=\{\varphi\}$ de las funciones $\varphi=\mathrm{F}f, f\in D$. Para cada $f\in D$, $\varphi=Ff$ es función analítica y tiene la propiedad siguiente (P): si $\varphi\in\Lambda$ y si $\varphi(x_0)=0$ entonces $(x-x_0)^{-1}\,\varphi(x)\in\Lambda$. Luego el teorema A equivale al siguiente

Teorema A': Si $(\varphi|\psi)$ es producto escalar en $\Lambda=\mathrm{F}(D)$ tal que $(u\,\varphi(u)|\psi(u))=(\varphi|u\,\psi)$, entonces $(\varphi|\psi)=\int\varphi(u)\,\overline{\psi}(u)\,d\mu$ donde $d\mu$ es una medida positiva; más aún $d\mu$ es única y a crecimiento lento.

En esta forma, y en E^1 la primera parte del teorema A' es un caso particular del teorema siguiente de Krein-Lifshitz: *Teorema B* (teorema general de los momentos). Si $\Lambda=\{\varphi\}$ es un espacio vectorial cualquiera de funciones analíticas con la propiedad (P), y si $(\varphi|\psi)$ es un producto escalar en Λ tal que $(u\,\varphi|\psi)=(\varphi|u\,\psi)$, entonces $(\psi|\varphi)=\int\varphi(u)\,\overline{\psi}(u)\,d\mu$, donde μ es una medida positiva. En general μ no es única ni es a crecimiento lento. Krein probó el teorema sólo para E^1 y el teorema fue parcialmente extendido a E^n por Devinatz, sin embargo parece que el teorema completo no vale si $n > 1$. El espacio $\Lambda = F\mathcal{D}$ es un espacio especial de funciones analíticas para el cual el teorema B vale para todo E^n (esto puede verse por un razonamiento directo o extendiendo una idea de Devinatz), y además en este caso la medida es única y a crecimiento lento. (Esto sugiere el problema de hallar otros espacios Λ de funciones analíticas en E^n donde se presenta la misma situación; en particular sería interesante considerar el caso $\Lambda = F_s D$ donde F_s es la transformada de Fourier - Sturm - Licuville correspondiente a cierto operador diferencial A: si $A = f'$ tendremos $F_s = F$, el caso precedente). Designaremos con M la clase de todas las medidas en E^n, con M' las medidas a crecimiento lento, con M'' las de masa total finita, y con M''' las de la forma $d\mu = \sigma(x)\,dx$. Para nosotros es de especial interés el siguiente problema: bajo que condiciones suplementarias la medida $d\mu$ del teorema A pertenece a M'''; y cuando es ella además a crecimiento lento con $\alpha < n$. Este problema está relacionado a la teoría de Markov - Lifshitz - Krein quienes han considerado el caso $\Lambda = \{1, u, u^2, \ldots\}$. Para nosotros es especialmente interesante el caso $\Lambda = F\mathcal{D}$.

K) Vimos que las formas $(f|g)$ definidas en $\mathcal{D}$ dadas por una medida μ son aquellas que dejan invariante el grupo de traslaciones τ_a, para todo a. Sea ahora $\Gamma = \{\gamma\}$ un grupo (lineal) fijo en E^n o en $\mathcal{D}$: a cada γ le corresponde una transformación lineal $f(x) \to \gamma f(x)$ en $\mathcal{D}$. Sean $M(\Gamma), M'(\Gamma)$, $M''(\Gamma), M'''(\Gamma)$ las medidas de M, M', etc., que son invariantes respecto de Γ. Los productos escalares $(f|g)$ correspondientes son también invariantes- Γ y se presenta el problema de determinar todos los elementos extremales o irreducibles, y descomponer en elementos irreducibles toda otra medida de $M(\Gamma), M'(\Gamma), \ldots$ (Una medida μ, pongamos $\mu \geqq 0, \mu \in M(\Gamma)$, es irreducible si $0 \leqq \mu_1 \leqq \mu$ implica $\mu_1 = c\,\mu$). Aquí se podría aplicar las teorías generales existentes de la descomposición de un espacio de Hilbert, invariante respecto de un grupo, en partes irreducibles; solamente que en nuestro caso importan también las *formas bilineales que no son propiamente productos escalares* sino combinaciones lineales, a coeficientes complejos, de tales productos, de modo que no tenemos propiamente un espacio de Hilbert sobre $\mathcal{D}$. Por otra parte para nosotros es importante también el caso de grupos Γ discretos. Los elementos extremales de $M''(\Gamma)$

fueron determinados por Schoenberg y Krein en el caso cuando Γ es el grupo de todos los movimientos rígidos de E^n (ver [29]). En este caso, las transformadas de Fourier de los elementos extremos son las soluciones fundamentales de la ecuación diferencial $\Delta u + \lambda u = 0$, $u(0) = 1$. Los elementos extremales de $M'(\Gamma)$ fueron determinados por Méthée y Schwartz [3a] en caso en que $n = 4$ y Γ es el grupo de Lorentz, y ahora se obtienen las soluciones elementales de la ecuación de Klein - Gordon. Para nosotros será de interés especial poder desarrollar los métodos de Krein y Schwartz en el caso $M'''(\Gamma)$ y también cuando Γ es un grupo discreto. En efecto, consideremos por ejemplo el caso de la transformada de Hilbert ordinaria en $E^1, Hf = f * (x^{-1})$; la forma bilineal correspondiente es

$$(f|g) = (Hf, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(x)/(x-t)\, dt\, dx; \quad f, g \in \mathrm{D}.$$

Este operador es dado por un multiplicador de M''' y por tanto la forma bilineal es invariante respecto de traslaciones. De la propiedad homogénea $H[f(ax)] = [Hf](ax)$ se deduce enseguida que $(a^{1/2} f(ax) \mid a^{1/2} g(ax)) = (f|g)$. O sea, si $\rho_a f(x) = a^{1/2} f(ax)$, la forma bilineal $(f|g)$ correspondiente a H es invariante-Γ donde $\Gamma = \{\rho_a\}$ es el grupo de las «dilataciones», $a > 0$. Análogamente las formas bilineales de las transformadas de Hilbert en E^n son invariantes-Γ donde $\Gamma = \{\rho_a\}, \rho_a f(x) = a^{n/2} f(ax)$. O sea las transformadas de Hilbert son dadas por multiplicadores de $M'''(\Gamma)$ donde Γ es el grupo *contínuo* de las dilataciones ρ_a. Por tanto la teoría de Mijlin - Giraud - Calderón - Zygmund de descomposición en núcleos fundamentales corresponde a nuestro problema de descomposición de $M'''(\Gamma)$ en elementos extremales irreducibles, cuando Γ es el grupo de dilataciones, *para todo* $a > 0$. El problema 6b corresponde por tanto al de la descomposición en elementos irreductibles de $M'''(\Gamma)$ cuando Γ *es un grupo discreto de dilataciones*, y es la discontinuidad del grupo lo que cambia el aspecto del problema, además de ser complejo el producto escalar. Llegamos así a los siguientes problemas.

P r o b l e m a 7. Extender la teoría clásica de descomposición en subespacios irreducibles al caso de espacios con un producto escalar complejo, combinación lineal de productos escalares ordinarios.

Problema 7a. Extender las teorías de Schwartz y de Krein al caso de grupos discontínuos.

Problema 7b. Desarrollar una teoría análoga a la de Schwartz y Krein en el caso de $M'''(\Gamma)$, donde Γ es un grupo discreto de dilataciones, determinar las características y símbolos de los elementos irreducibles, y a que ecuaciones diferenciales corresponden (ídem para los operadores potenciales que corresponden a los grupos de dilataciones $\rho_{a\gamma}$, $\rho_{a\gamma} f(x) = a^{n+\gamma/2} f(ax)$).

Estos problemas, especialmente el último punto del problema 7b, pueden considerarse también desde el punto de vista de la teoría de Gelfand y Shilov [2a]. Finalmente estas cuestiones pueden considerarse también desde el punto de vista de núcleos reproductivos «singulares»: Si los elementos de un espacio de Hilbert son funciones $f(x)$ definidas en cierto conjunto X, un núcleo reproductivo de este espacio es una función $K(x, y)$ tal que para todo y es $K(x, y)$ un elemento del espacio y $f(y) = (f, K(x, y))$, para toda f y todo punto y. La fórmula de inversión de Fourier puede escribirse formalmente $f(y) = (f, K(x, y))$ donde $K(x, y) = \int_{E^n} e^{it(x-y)}\, dt$. La última integral naturalmente no es convergente pero se puede todo entender en sentido de integrales singulares, por tanto la fórmula de inversión de Fourier puede interpretarse como un núcleo reproductivo singular. Más generalmente si $K(x, y)$ es igual formalmente, a $\int_{E^n} K_t(x, y)\, dt$, y en el sentido de integrales singulares es $f(y) = (f, K(x, y))$ hablaremos de núcleos reproductivos singulares. Podemos considerar pues tales núcleos singulares invariantes respecto de traslaciones y otros grupos, y obtener teoremas análogos a los teoremas A, B de J). Desde este punto de vista, los problemas que acá nos interesan se vinculan a la teoría de Krein [29].

Nota I. El teorema de las sumas 0-ortogonales es caso particular del teorema general siguiente ([6], [8], cap. 2, [11]): Sea T_i una sucesión de operadores en un espacio de Hilbert tales que 1) cada T_i es hermiteano (o normal); 2) comutan entre sí; 3) $\|T_i T_{+ij}\| \leqq M^2 \varepsilon j, \varepsilon < 1$ (casi ortogonalidad). Entonces si $S_n = T_1 + \ldots + T_n$, se tiene $\|S_n\| \leqq M\,c(\varepsilon)$, $S_n f$ converge hacia un Sf para todo f del espacio, y Sf es un operador acotado, $\|S\| \leqq M\,c(\varepsilon)$. Teoremas análogos valen para sumas contínuas o con funciones V, W indicadas en A).

Problema 1ª. Falta aclarar si este teorema vale para operadores no normales, o que no comutan.

Nota II. Los teoremas de Sobolev - Kondrachev juegan un papel importante en la teoría de los espacios $W_p{}^r$ de Sobolev [14a], ver [8], cap. 4 y [18]). $f \in W_p{}^r(D)$ si ella y sus primeras r derivadas (en sentido de distribuciones) pertenecen a $L_p(D)$. Los teoremas de B) proporcionan los llamados teoremas de inmersión de Sobolev, por ejemplo: el operador idéntico es de tipo $(W_p{}^1(D);\ L(D \cap E^m))$ si $(1/p, 1/s)$ está encima de $d_{\gamma m}$. Deny - Lions [19] estudiaron los espacios de Beppo Levi donde las derivadas de f pertenecen a $L^p(D)$ pero f misma pertenece tan solo localmente a $L^p(D)$. Vishik, Vasharin y otros [20] consideraron espacios de Sobolev para medidas ponderadas $\sigma(x)\,dx$ (ver D)) y los teoremas de inmersión correspondientes; sus resultados pueden obtenerse de los teoremas generales indicados en D) (ver 22). Nikolski consideró espacios más generales, por decir así de funciones con derivadas de orden fraccionario pertenecientes a L^p. Del trabajo de Calderón-Zygmund [4b] se deduce el isomorfismo de los espacios $W_p{}^r$ con p fijo, para $D = E^n$. No sabemos cual es la situación para los D generales, o para los espacios de Nikolski y Beppo Levi, ni como son los duales de estos espacios (según información oral del Prof. Kahane, parece que Lions ha considerado este problema); más generalmente habrá que determinar la forma integral de los operadores contínuos entre dos tales espacios. El hecho de que los teoremas de Sobolev valen en el extremo de $d_{\gamma m}$ con tipo débil, permite extender para este extremo los teoremas de inmersión (cfr. [7], pág. 12); este aspecto de los espacios de Sobolev será estudiado en una nota próxima. No sabemos si esto se aplica a espacios de Nikolski, pues Nikolski estudió sus espacios por métodos diferentes de la teoría de aproximación.

REFERENCIAS

(1) ZYGMUND, *Theorem of Marcinkiewicz*, Jornal M. Pures App (1956), 223; (2) GELFAND-SHILOV, *Foiones. generalizadas*, 1958, Moscú; (2a) *Journal M. Purres App.* (1956), p. 383; (3) L. SCHWARTZ, *Théorie des Distributions*, 1950; (3a) *Matemática y Física cuántica*, Cursos y Seminarios, Buenos Aires, 1958; (4) CALDERÓN-ZYGMUND, *Existence of Singular Integrals*, Acta Math. 88, 1952; (4a) *American Journal* 1956; (3b) *Ibid* 1957; (4c) *Studia Math* 1955, p. 142; (4d) *Amer. Journal* (1956) p. 282; (4e) *Ibid*, pág. 315; (5) S. MIJLIN, *Singular integral equations*, Uspehi M. Nauk (traducción inglesa) 3 (1948); (5a) VESTORIK LGU (1957); (5b) SBORNIK 43 (1936); (6) M. COTLAR, Revista *M. Cuyana* 1 (1955); (7) COTLAR-PANZONE, *Generalidad potential operators*, Revista UMA (1959); (7a) *Acta M. Hung.* 19 (1958); (7) *Comunicación* UMA, 1957, Bahía Blanca; (8) M. COTLAR, *Seminario sobre operadores potenciales*, Universidad Bs. Aires, 1959; (9) A. ZYGMUND, *Series trigométricas*. 1935 y 1959; (10) E. OKLANDER, *Fórmula para normas en Lp*, Comunicación UMA 1959; (11) BELA Sz. Nagy, *Acta M. Hung.* 18 (1957); (12) HARDY-LITTLEWOOD, *Fractional integrals*. Math. Zeit. 27 (1928) y 28 (1928); (13) G. THORIN, *Convexity Theormes*. Uppsala 1948; (14) S. SOBOLEV, *Doklady Acad.* Nauk 20 (1938); (14a) *Aplicaciones del Análisis Funcional*, Leningrado 1950; (15) STEIN-WEISS, *Jornal Math.* Mech. 7 (1958); (15a) *Ibid* 8 (1959); (15b) TOHOKU *Math.* J. 9 (1957); (15c) *Trans. Amer.* M. Soc. 87, 1 (1958); (15d) *Jour. Math. Mech.* 8, 2 (1959); (16) DU PLESSIS, *Fractional integrals*. Trans., *Amer. Math. Soc.*, 80, 1 (1955); (17) V. ILIN, *Uspehi Math.* Nauk 1956; (17a) SMOLITZKI. *Ibid*. 12 (1957); (18) L. KANTOROVICH, *Operadores integrales* Ibid 1956; (19 DENY-LIONS, *Les espaces de B. Levi*, Ann. Ins. Fourier V, 1953; (20) A. VASHARIN, *Izvestia Ac.* Nak 23, 3 (1959); (21) S. NIKOLSKY, *Trudi Inst. Steklov* (1951), Mat. Sbornik 1953, 56, 57, 58; (22) COTLAR-ORTIZ, *Tipos ponderados de op. potenciales*, Com. UMA 1959; (23) E. STEIN, *Procedings Am. M. Soc.* 8, 2 (1957); (23a) *Trans. Am. M.* Soc. 43 (1956); (24) J. HORVATH, *Singular operators, spherical harmonics*, Ibid 82 (1956), *Procedings* 9 (1958), 10 (1959); (25) CORA RATTO SADOSKY, *Tesis*, Universidad Bs. Aires 1959; (26) I. HIRSCHMAN, *Convexity theorem*, Journal d'Analyse, 2 (1952); (27) COTLAR-BRUSCHI, *Revista*, Univ. La Plata V, 3 (1956); (28) J. MARCINKIEWICZ, *Studia Math.* 8, 1939; (29) M. KREIN, *Núcleos hermiteanos*. Ukrainski Journal 14 (1949) (1950); (30) A. DEVINATZ, *Two Parameter Moment Problems*, Transac. Am. Math. Soc. 74 (1953), (1957).

rema de *Carmichael* afirma que d (en lugar de $d+1$) elementos son suficientes para generar el producto directo $H \times C_n$. *Carmichael* indica también relaciones que pueden usarse para definir este producto directo como grupo abstracto, pero no las reproduciremos aquí, porque no haremos uso de ellas.

Al final del § 47 de su libro (en el cual se enuncia y demuestra este teorema) *Carmichael* observa, además, que su teorema se puede aplicar repetidas veces; p. ej., si H es un grupo generado por 2 elementos a y b, donde $|a| = \alpha$, $|b| = \beta$, entonces también el producto directo $H \times C_\gamma \times C_\delta$ puede ser generado por 2 elementos, siempre que se cumplan las condiciones (¹):

$$(1) \qquad (\gamma, \alpha) = (\delta, \beta) = 1,$$

o, si cambiamos γ con δ, las condiciones equivalentes:

$$(1') \qquad (\gamma, \beta) = (\delta, \alpha) = 1.$$

De paso sea observado que las condiciones (1) o las (1′) son suficientes para asegurar, de un modo general, la posibilidad de generar por 2 elementos a todo producto directo $H \times G$, si $H = \{a, b\}$ y $G = \{c, d\}$ con $|c| = \gamma$, $|d| = \delta$, sin que G sea necesariamente un producto de 2 grupos cíclicos; de esta generalización ya me he ocupado en una publicación anterior (²). En cambio en el presente trabajo deseo enunciar otra generalización del mismo teorema de Carmichael:

Siempre en el caso $H = \{a, b\}$, con $|a| = \alpha$, $|b| = \beta$, es fácil darse cuenta de que las condiciones (1), o las (1′), son suficientes, pero de ninguna manera son siempre necesarias para que un producto directo $H \times C_\gamma \times C_\delta$ pueda ser generado por 2 elementos; hay ciertos grupos $H = \{a, b\}$ tales que *todos* los productos directos $H \times C_n$ o $H \times C_\gamma \times C_\delta$ pueden ser generados por 2 elementos *sin imponer restricciones a los órdenes n*, o γ y δ, de los grupos cíclicos. Claro está que entonces habrá que imponer ciertas restricciones al grupo $H = \{a, b\}$, pues de lo

(¹) Indicaremos siempre con (u, v) el máximo común divisor de 2 números u y v; con $|h|$ el orden (o período) de un elemento h; y con $\{h_1, h_2, \ldots, h_d\}$ el grupo generado por los elementos $h_1, h_2, \ldots, h_d$.

(²) *Remarks on finite groups defined by generating relations, Canadian Journal of Math.*, vol. 7 (1955), págs. 8-17 y 413.

contrario el teorema resultaría falso, ya que es fácil hallar ejemplos donde se necesitan más de 2 generadores para $H \times C_n$ o $H \times C_\gamma \times C_\delta$ (basta elegir p. ej., el grupo $C_2 \times C_2$ como H y tomar $n=2$ ó $\gamma=\delta=2$).

Las restricciones para el grupo $H=\{a, b\}$ que voy a considerar, se refieren al caso en que uno de los 2 generadores, p. ej., a (§ 2), o ambos (§ 3), pertenecen al subgrupo conmutador [3] de H; en estos casos, *todo* producto directo $H \times C_n$, o respectivamente $H \times C_\gamma \times C_\delta$, puede ser generado por 2 elementos, y si se conocen relaciones que definen H como grupo abstracto, es posible encontrar relaciones para la definición abstracta de $H \times C_n$ o $H \times C_\gamma \times C_\delta$.

Teoremas análogos a estos dos que vamos a considerar, se podrían enunciar para grupos $H=\{h_1, h_2, h_3, \ldots, h_d\}$ generados por $d>2$ elementos, pero he preferido limitarme al caso $d=2$ con el objeto de facilitar la redacción que resultaría algo engorrosa cuando $d>2$. Tampoco se mencionará el caso $d=1$ en el cual no es posible una generalización del teorema de Carmichael, ya que en el caso de un grupo cíclico $H=\{a\}$, con $|a|=\alpha$, la condición $(n, \alpha)=1$ es evidentemente indispensable para que el producto directo $H \times C_n$ sea nuevamente un grupo cíclico.

§ 2. Grupos $H=\{a, b\}$ en que un generador pertenece al subgrupo conmutador.

Teorema I: Si $H=\{a, b\}$ es un grupo tal que a lo menos uno de sus dos generadores pertenece al subgrupo conmutador de H, entonces para cualquier $n=2, 3, 4, \ldots$ también el producto directo $H \times C_n$ puede ser generado por dos elementos. (Con C_n indicaremos siempre el grupo cíclico de orden n, evitando el empleo de letras góticas por razones tipográficas; por la misma razón indicaremos en los ejemplos que seguirán más adelante, los grupos simétrico y alternado de n símbolos respectivamente con S_n y A_n).

---

(3) El subgrupo conmutador de H es, por definición, generado por todos los conmutadores, o sea, por todos los elementos del tipo

$$[g, h] = g^{-1} h^{-1} gh,$$

donde g y h son elementos de H.

Antes de demostrar el teorema I será conveniente considerar un ejemplo sencillo (4) que servirá para aclarar la idea que está a base de la demostración:

Sea $H = S_3 = \{a, b\}$ con

$$a = (\mathrm{I\ II\ III}), \quad b = (\mathrm{I\ II}),$$

donde (por motivos que se verán en seguida) hemos usado números romanos para los símbolos de permutación; en este ejemplo a pertenece al subgrupo conmutador de H, puesto que

$$(2) \qquad a = [a, b] = a^{-1} b^{-1} ab.$$

Introduciendo ahora n símbolos de permutación más, que llamaremos $1, 2, 3, \ldots, n$, el grupo generado por a, b y el ciclo

$$(3) \qquad c_n = (1\,2\,3 \ldots n)$$

será evidentemente el producto directo $S_3 \times C_n$. Hemos de demostrar que el mismo producto directo puede ser generado por dos elementos, digamos r y s. Con este objeto sea

$$(4) \qquad r = c_n a = (1\,2\,3 \ldots n)\,(\mathrm{I\ II\ III})$$

y

$$(5) \qquad s = b = (\mathrm{I\ II}).$$

Evidentemente $\{r, s\}$ es un subgrupo de $\{a, b, c_n\}$; por lo tanto para demostrar que este subgrupo coincide con el grupo entero, bastará expresar a, b, c_n (o sea, los generadores de $S_3 \times C_n$) en función de r y s.

Para b no hay problema, ya que, debido a la misma definición (5), b coincide con s. En cuanto al elemento a, se comprueba fácilmente que como consecuencia de la fórmula (2), rige también:

$$(6) \qquad a = [r, s];$$

en efecto:

$$[r, s] = [c_n a, b] = [a, b],$$

(4) Lo elegimos precisamente por su sencillez, aun cuando representa uno de los numerosos casos en que se puede aplicar también el teorema de *Carmichael* mismo, no haciendo falta nuestra generalización.

ya que c_n conmuta con a y b. Finalmente, en cuanto a c_n, tenemos como consecuencia de (4) y (6) la relación:

$$c_n = r\,[r, s]^{-1}. \tag{7}$$

La demostración del teorema I en el caso general se efectúa de manera análoga:

a sea en el grupo abstracto $H = \{a, b\}$ aquel generador que por hipótesis pertenece al subgrupo conmutador de H; esta hipótesis podrá entonces expresarse por medio de una relación análoga a la (2):

$$a = \phi\,(a, b), \tag{8}$$

donde

$$\phi\,(a, b) = a^{\rho_1}\,b^{\sigma_1}, a^{\rho_2}\,b^{\sigma_2} \ldots a^{\rho_\tau}\,b^{\sigma_\tau} \tag{9}$$

es un producto de potencias de a y b cuyos exponentes (positivos, nulos o negativos) han de cumplir con las condiciones:

$$\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_\tau = 0, \qquad \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_\tau = 0, \tag{10}$$

las que resultan como consecuencia de la hipótesis de que a pertenece al subgrupo conmutador.

Como grupo de orden finito, H admite una representación fiel por permutaciones que podemos imaginar escritas *en números romanos*; p. ej., podemos recurrir a la representación por permutaciones regulares a que da origen la tabla de multiplicación que rige en H. Sean, pues, P_a y P_b las permutaciones que correspondan, respectivamente, a los generadores a y b. Introduciendo, además, como en el ejemplo recién considerado, el ciclo

$$c_n = (1\,2\,3 \ldots n) \tag{3}$$

en n nuevos símbolos de permutación, el producto directo $H \times C_n$ evidentemente podrá obtenerse como grupo de permutaciones en la forma $\{P_a, P_b, c_n\}$. Para obtenerlo con sólo 2 generadores r y s defínanse permutaciones r y s por

$$r = c_n\,P_a \tag{11}$$

y

$$s = P_b. \tag{12}$$

De esta manera $\{r, s\}$ será un subgrupo de $\{P_a, P_b, c_n\}$; para demostrar el teorema I bastará indicar relaciones inversas a las (11) y (12) que permitan expresar P_a, P_b, c_n en función de r y s. Tales relaciones son:

(13) $$P_a = \phi(r, s)$$

(14) $$P_b = s$$

(15) $$c_n = r \,.\, (\phi(r, s))^{-1}.$$

En efecto, calculando $\phi(r, s)$ de acuerdo con las definiciones (9), (11) y (12) resulta:

$$\phi(r, s) = \phi(c_n P_a, P_b) =$$
$$= (c_n P_a)^{\rho_1} P_b^{\sigma_1} (c_n P_a)^{\rho_2} P_b^{\sigma_2} \ldots (c_n P_a)^{\rho_\tau} P_b^{\sigma_\tau};$$

pero el ciclo c_n actúa, debido a su definición (3), sólo sobre los símbolos $1, 2, 3, \ldots, n$, mientras que P_a y P_b son permutaciones de números romanos únicamente; por consiguiente, c_n conmuta con P_a y P_b, de modo que:

(16) $$\phi(r, s) = c_n^{\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_\tau} P_a^{\rho_1} P_b^{\sigma_1} P_a^{\rho_2} P_b^{\sigma_2} \ldots P_a^{\rho_\tau} P_b^{\sigma_\tau},$$

o sea, debido a (9) y (10),

(17) $$\phi(r, s) = \phi(P_a, P_b);$$

pero las permutaciones «P» *representan* el grupo H, de modo que la fórmula (8) que rige para los generadores abstractos a y b, vale también para las permutaciones P_a y P_b:

(18) $$P_a = \phi(P_a, P_b);$$

y combinando las relaciones (17) y (18) se obtiene la (13).

Siendo la relación (14) equivalente a la definición (12), falta por demostrar sólo la (15). Con este objeto basta deducir de la definición (11) y de la fórmula (13) ya demostrada la conclusión:

(15') $$r = c_n \phi(r, s)$$

que evidentemente es equivalente a la (15).

Cabe observar que en esta demostración del teorema I, de las dos fórmulas (10) sólo hemos usado la primera [cuando se trataba de deducir la relación (17) de la (16)]; por consiguiente, el teorema I sigue válido aún para grupos $H = \{a, b\}$ en los cuales del generador a se supone únicamente que rijan las fórmulas (8), (9) y la primera de las (10). Sin embargo, esta generalización del teorema I puede considerarse como más aparente que real. En efecto, si se cumple sólo la primera de las fórmulas (10), entonces el producto $a \,.\, b^{-(\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_\tau)}$ pertenecerá al subgrupo conmutador de H, de modo que un reemplazo de los generadores $\{a, b\}$ por $\{a \,.\, b^{-(\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_\tau)}, b\}$ reduce este caso aparentemente más general al caso ya considerado en el teorema I (y más fácil de redactar), donde uno de los generadores mismos, y no sólo su producto por una potencia del otro generador, pertenece al subgrupo conmutador.

Otra observación que puede hacerse sobre el teorema I es la siguiente: Aun cuando en la demostración hemos recurrido a representaciones por permutaciones, es posible obtener relaciones que definan el producto directo $H \times C_n$ como grupo abstracto, partiendo, desde luego, de relaciones análogas para el grupo H. El procedimiento que hay que seguir con este objeto resultará claramente del ejemplo siguiente. Consideremos nuevamente el grupo simétrico S_3 que arriba generamos por las permutaciones $a = (\mathrm{I\ II\ III})$ y $b = (\mathrm{I\ II})$. Para definir S_3 como grupo abstracto bastan las 2 relaciones siguientes:

$$(19) \qquad a^3 = b^2, \qquad b^{-1} ab = a^2,$$

como ha sido demostrado por *B. H. Neumann* ([5]) para grupos metacíclicos en general. La segunda de las relaciones (19) equivale, desde luego, a la

$$(2) \qquad a = [a, b]$$

y con su ayuda podemos transformar la primera en

$$(20) \qquad [a, b]^3 \,.\, b^{-2} = 1;$$

([5]) *On some finite groups with trivial multiplicator, Publ. Math. Debrecen* 4 (1956), págs. 190-194.

esta forma nos conviene más, pues al escribirla como

$$(20') \qquad a^{-1} b^{-1} aba^{-1} b^{-1} aba^{-1} b^{-1} ab^{-1} = 1$$

se ve que en el primer miembro la suma de todos los exponentes de a es ahora igual a cero, lo que nos da la posibilidad de postular la misma relación para r y s, los generadores de $S_3 \times C_n$:

$$(21) \qquad [r, s]^3 . s^{-2} = 1.$$

En cambio, en lugar de la relación (2) para a y b, tendremos ahora para r y s la condición de que el producto $r^{-1} . [r, s]$ (a que, en la representación por permutaciones considerada más arriba, corresponde la permutación cíclica $c_n{}^{-1}$) sea un elemento *invariante* de orden n; o sea, para definir $S_3 \times C_n$ como grupo abstracto, a la (21) habrá que agregar todavía las 3 relaciones:

$$(22) \qquad (r^{-1} . [r, s])^n = 1$$

$$(23) \qquad [r^{-1} . [r, s], r] = 1$$

$$(24) \qquad [r^{-1} . [r, s], s] = 1,$$

la segunda de las cuales se reduce evidentemente a

$$(25) \qquad [[r, s], r] = 1.$$

Cabe observar, sin embargo, que en este ejemplo no se necesitarían en realidad 4 relaciones para definir $S_3 \times C_n$ como grupo abstracto; p. ej., si $n = 3$ resulta que las 2 relaciones:

$$(26) \qquad t^3 = u^6, \qquad u^{-1} tu = t^2$$

son suficientes para generar $S_3 \times C_3$, usando en lugar de r y s los generadores:

$$(27) \qquad t = [r, s], \qquad u = sr . [r, s]^{-1}.$$

El interés del procedimiento empleado en este ejemplo estriba más bien en la posibilidad de generalizarlo en la forma siguiente:

Sea $H = \{a, b\}$ un grupo en que el generador a pertenece al subgrupo conmutador de modo que rige una relación (8) con (9) y (10); y para cuya definición se necesiten, además, $(e-1)$ relaciones:

$$(28) \qquad \phi_2(a,b)=\phi_3(a,b)=\ldots=\phi_e(a,b)=1,$$

donde *cada* $\phi_i(a,b)$ es un producto del mismo tipo del segundo miembro de (9) y donde será lícito suponer que cada uno de estos productos cumplirá con la primera de las ecuaciones (10); si no fuera así, bastaría hacer uso de la (8) para reemplazar la respectiva relación $\phi_i(a,b)=1$ por la equivalente

$$(29) \qquad \phi_i(\phi(a,b),b)=1$$

[tal como hicimos arriba en el ejemplo $H=S_3$ al reemplazar la primera de las relaciones (19) por la (20)]. Entonces el producto directo $H\times C_n$ será, como grupo abstracto, definido por las $(e+2)$ relaciones siguientes:

$$(30) \qquad (r^{-1}\phi(r,s))^n=1,$$

$$(31) \qquad [\phi(r,s),r]=1,$$

$$(32) \qquad [r^{-1}\phi(r,s),s]=1,$$

$$(33) \qquad \phi_2(r,s)=\phi_3(r,s)=\ldots=\phi_e(r,s)=1.$$

Creemos que no valdría la pena indicar una demostración para el caso general, ya que las relaciones (30), (31), (32) corresponden perfectamente a las (22), (25) y (24) del ejemplo considerado más arriba y la (21) del ejemplo se ha reemplazado por las relaciones (33).

§ 3. Grupos $H=\{a,b\}$ en que ambos generadores pertenecen al subgrupo conmutador.

En tales grupos se puede aplicar 2 veces el teorema I, llegando así inmediatamente al siguiente teorema:

Teorema II. Si un grupo H con dos generadores coincide con su subgrupo conmutador, entonces también todo producto *directo del tipo* $H \times C_\gamma \times C_\delta$ *puede ser generado por dos elementos* (6).

Como ejemplo ilustrativo se puede considerar cualquier grupo simple que admita 2 generadores, p. ej., el grupo alternado A_5 del orden 60 que se puede obtener en la forma $\{a, b\}$ con

$$a = (\mathrm{I\ II})(\mathrm{IV\ V}), \qquad b = (\mathrm{I\ III\ IV}). \tag{34}$$

Introduciendo $\gamma + \delta$ símbolos de permutación más, el producto directo $A_5 \times C_\gamma \times C_\delta$ será generado por

$$r = (\mathrm{I\ II})(\mathrm{IV\ V})(1\,2\,3 \ldots \gamma) \tag{35}$$

y

$$s = (\mathrm{I\ III\ IV})(\gamma+1, \quad \gamma+2, \quad \gamma+3, \ldots, \gamma+\delta), \tag{36}$$

como lo demuestran las fórmulas siguientes que expresan los generadores (34) de A_5 y los de C_γ y C_δ en función de r y s:

$$a = r^{15} s^{15} (rs)^{-15} \tag{37}$$

$$b = s^{10} r^{10} (rs)^{-10} \tag{38}$$

$$(1\,2\,3 \ldots \gamma) = r^{16} s^{15} (rs)^{-15} \tag{39}$$

$$(\gamma+1, \quad \gamma+2, \ldots, \gamma+\delta) = (rs)^{10} r^{-10} s^{-9}. \tag{40}$$

Estas fórrmulas que se comprueban fácilmente se han obtenido de la manera siguiente:

Por ser a y b elementos del subgrupo conmutador, en A_5 deberán regir para ambos generadores relaciones del tipo (8),

---

(6) C_γ y C_δ son grupos cíclicos de órdenes cualesquiera γ y δ. De estos números dependerá en cada caso concreto si el teorema II es efectivamente útil o si el teorema de *Carmichael* mismo sería suficiente para generar $H \times C_\gamma \times C_\delta$ por 2 elementos.

con (9) y (10); para hallarlas se puede partir de las relaciones obvias:

$$(41) \qquad a^2 = b^3 = (ab)^5 = 1,$$

deduciendo de ellas las fórmulas:

$$(42) \qquad a = a^{15} b^{15} (ab)^{-15}$$

y

$$(43) \qquad b = b^{10} a^{10} (ab)^{-10}.$$

Ahora bien, debido al hecho de que en estas 2 relaciones las sumas de los exponentes de a y b en el segundo miembro son iguales a cero, estas fórmulas siguen válidas al reemplazar a y b en el segundo miembro por r y s respectivamente, resultando así las fórmulas (37) y (38), de las cuales las (39) y (40) son consecuencias inmediatas.

Para terminar diremos que, si se conocen relaciones que definen un grupo H que cumple con las premisas del teorema II, como grupo abstracto —como las (41) en el caso de A_5— será posible deducir relaciones que definen el producto directo $H \times C_\gamma \times C_\delta$, siguiendo un camino análogo al indicado al final del § 2 para el caso del teorema I. Sin embargo, no indicaremos tales relaciones en forma explícita, pues ellas parecen ya demasiado «complicadas» para despertar mucho interés.

Dirección del autor: Casilla 110-V, Valparaíso, Chile.

APLICACION DEL METODO DE LA TRANSFORMACION DE LAPLACE A LA EVALUACION DE CIERTAS INTEGRALES QUE CONTIENEN FUNCIONES TRASCENDENTES NO ELEMENTALES

por MARIO O. GONZALEZ
Universidad de La Habana

1. Si $L\{F(t)\} = f(s)$ y si $(s+\beta)^{\alpha+1} f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u^n$, en donde

$$u = \frac{s-\beta}{s+\beta} \quad \text{y} \quad s = \beta \frac{1+u}{1-u}$$

se sigue

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{1}{(s+\beta)^{\alpha+1}} \left(\frac{s-\beta}{s+\beta}\right)^n. \tag{1}$$

Puesto que

$$L\{t^\alpha L_n^{(\alpha)}(t)\} = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} \frac{1}{s^{\alpha+1}} \left(\frac{s-1}{s}\right)^n$$

se infiere fácilmente

$$L\{e^{-\beta t} t^\alpha L_n^{(\alpha)}(2\beta t)\} = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} \frac{1}{(s+\beta)^{\alpha+1}} \left(\frac{s-\beta}{s+\beta}\right)^n.$$

Por tanto, tomando las transformadas inversas en ambos miembros de (1), lo que aquí es legítimo, resulta

$$F(t) = e^{-\beta t} t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{n!}{\Gamma(\alpha+n+1)} L_n^{(\alpha)}(2\beta t). \tag{2}$$

Multiplicando ambos miembros de (2) por $e^{-\beta t} L_n^{(\alpha)}(2\beta t)$ integrando entre límites 0 y $+\infty$ y teniendo en cuenta la ortogonalidad de los polinomios generalizados de Laguerre en dicho intervalo, se obtiene

$$\int_0^\infty e^{-\beta t} F(t)\, L_n^{(\alpha)}(2\beta t)\, dt = \frac{c_n\, n!}{\Gamma(\alpha+n+1)} \int_0^\infty e^{-2\beta t}\, t^\alpha\, [L_n^{(\alpha)}(2\beta t)]^2\, dt$$

$$= \frac{c_n}{(2\beta)^{\alpha+1}}. \qquad (3)$$

2. *Aplicaciones*. I. Tomemos $F(t) = e^{-\beta t}\operatorname{erf}\sqrt{at}$. Se sabe que la transformación de Laplace de esta función es

$$f(s) = \frac{\sqrt{a}}{(s+\beta)\sqrt{s+a+\beta}}$$

y resulta

$$(s+\beta)^{\alpha+1} = a^{1/2}(s+\beta)^\alpha (s+a+\beta)^{-1/2}$$

$$= a^{1/2}(2\beta)^\alpha (1-u)^{-\alpha}\left(\frac{2\beta}{1-u}+a\right)^{-1/2}$$

$$= a^{1/2}(2\beta)^\alpha (2\beta+a)^{-1/2}(1-u)^{-\alpha+1/2}\left(1-\frac{a}{2\beta+a}u\right)^{-1/2}$$

$$= a^{1/2}(2\beta)^\alpha (2\beta+a)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\alpha+1/2}{u}$$

$$u^n \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-1/2}{n}\left(\frac{a}{2\beta+a}\right)^n u^n$$

$$= a^{1/2}(2\beta)^\alpha (2\beta+a)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left\{\sum_{r=0}^{n}\binom{-\alpha+1/2}{n-r}\right.$$

$$\left.\binom{-1/2}{r}\left(\frac{a}{2\beta+a}\right)^r\right\}u^n.$$

Por tanto, haciendo $2\beta = b$ se obtiene la fórmula

$$\int_0^\infty e^{-bt} \operatorname{erf} \sqrt{a\,t}\, L_n^{(\alpha)}(b\,t)\, dt =$$

$$= a^{1/2}\, b^{-1}\, (a+b)^{-1/2}\, (-1)^n \sum_{r=0}^{n} \binom{-\alpha+1/2}{n-r} \binom{-1/2}{r} \left(\frac{a}{a+b}\right)^r .$$

Para $\alpha = 1/2$ se deduce, en particular,

$$\int_0^\infty e^{-bt} \operatorname{erf} \sqrt{a\,t}\, L_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(b\,t)\, dt = b^{-1}\, (-1)^n \binom{-1/2}{n} \left(\frac{a}{a+b}\right)^{n+\frac{1}{2}} .$$

Las fórmulas siguientes se obtienen análogamente, por aplicación de la fórmula (3).

II.

$$\int_0^\infty e^{-bt} J_0(2\sqrt{a\,t})\, L_n^{(\alpha)}(b\,t)\, dt = b^{-1} e^{-a/b} \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^{n-r}}{r!} \binom{-\alpha}{n-r} \left(\frac{a}{b}\right)^r .$$

III.

$$\int_0^\infty e^{-bt} S_i(t)\, L_n^{(\alpha)}(b\,t)\, dt = b^{-1} \left\{ (-1)^n \binom{-\alpha}{n} \cot^{-1} b - \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^{n-r}}{r(1+b^2)^{r/2}} \binom{-\alpha}{n-r} \operatorname{sen}(r \tan^{-1} b) \right\} .$$

IV.

$$\int_0^\infty e^{-bt} [1 - e^{-bt} e_k(b\,t)]\, L_n^{(k)}(2\,b\,t)\, dt = \begin{cases} 1/2^{k+1}\, b & (n=0) \\ (-1)^n/2^k\, b & 0<u) \end{cases}$$

V.

$$\int_0^\infty e^{-(a+b)t} \gamma[\nu, (a-b)\,t]\, L_n^{(\nu-1)}(2\,a\,t)\, dt =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\nu)(a-b)^\nu}{(a+b)(2a)^\nu} & (n=0) \\[2ex] (-1)^n \dfrac{\Gamma(\nu)}{(2a)^{\nu-1}} \quad \dfrac{(a-b)^{n+\nu-1}}{(a+b)^{n+1}} & (n>0. \end{cases}$$

3. Sea, como antes, $L\{F(t)\}=f(s)$ y supongamos

$$\sqrt{1+s^2}\,f(s)=\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}\,u^{2n+1}$$

en donde

$$u=\sqrt{1+s^2}-s \quad \text{y} \quad s=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u}-u\right).$$

Se tiene

$$f(s)=\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}\frac{[\sqrt{1+s^2}-s]^{2n+1}}{\sqrt{1+s^2}}$$

y tomando transformadas inversas resulta

$$F(t)=\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}\,J_{2n+1}(t).$$

Multiplicando ambos miembros por $t^{-1}J_{2n+1}(t)$ e integrando entre 0 y $+\infty$ se obtiene la fórmula

$$\int_0^{\infty} t^{-1}F(t)\,J_{2n+1}(t)\,dt=c_{2n+1}\int_0^{\infty} t^{-1}J^2_{2n+1}(t)\,dt=\frac{c_{2n+1}}{2(2n+1)}. \qquad (4)$$

4. *Aplicaciones*. I. Tomando $F(t)=Si(t)$ se tiene $f(s)=\dfrac{1}{s}\tan^{-1}\dfrac{1}{s}$ y resulta

$$\sqrt{1+s^2}\,f(s)=\frac{\sqrt{1+s^2}}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}=\frac{1+u^2}{1-u^2}\tan^{-1}\frac{2u}{1-u^2}$$

$$=2\,\frac{1+u^2}{1-u^2}\tan^{-1}u=2\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}2\,u^{2n}\right].\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\,u^{2n+1}$$

$$\int_0^{\infty} t^{-1}\,Si(t)\,J_{2n+1}(t)\,dt=\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{(-1)^n}{2n+1}+2\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(-1)^r}{2n+1}\right\}.$$

II. Para $F(t) = 2\,t^{-1}(1 - \cos t)$ se obtiene, análogamente,

$$\int_0^\infty t^{-2}(1-\cos t)\, J_{2n+1}(t)\, dt = \begin{cases} \dfrac{1}{2(n+1)(2n+1)} & (n=2m) \\[2ex] \dfrac{1}{2n(2n+1)} & (n=2m+1). \end{cases}$$

BIBLIOGRAFIA

(1) DOETSCH, G., *Theorie und Anwendung der Laplace-transformation*, Dover, 1943.

(2) ERDÉLYI, Magnus, Oberhettinger, Tricomi: *Tables of Integral Transforms*, 2 vol., McGraw-Hill, 1954.

(3) SNEDDON, I. N., *Functional Analysis*, Handbuch der Physic, Band 2, Springer, 1955.

(4) VITALI-SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*, vol. 2, Zanichelli, 1946.

DIVERSAS CARACTERIZACIONES DE LA CONTINUIDAD EN CIERTOS HOLOIDES

CARLOS ALBERTO INFANTOZZI
(Facultad de Humanidades y Ciencias. Inst. de Estudios Superiores)
Montevideo

Resumen

Sea $(G, +)$ un hemi-grupo (1) aditivo de más de un elemento. Si la ley de composición posee un elemento neutro derecho, o sea verifica la condición:

G_0) (neutro derecho). - Existe un único elemento $0 \varepsilon G$ tal que: $a+0=a$ para todo $a \varepsilon G$

y, además, se cumple la siguiente propiedad, que permite introducir el carácter holoidal:

G_n) (nulidad). - $a+b=0 \longrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$

se dirá que la estructura es un holoide *simple* (2).

El sistema G es linealmente-ordenable, y organizable como «semi-grupo» (3), si la operación cumple todava la siguiente propiedad:

G_d) (cuasi-grupo débil). - Si $a \neq b$, entonces existe un x tal que $a+x=b$, o un y tal que $b+y=a$. Si para un $x \neq 0$ es $x+a=b$, entonces existe un $y \neq 0$ tal que $a+y=b$.

Obsérvese que, aún cuando la estructura no llega a ser un «cuasi-grupo» (4), es posible probar la *unicidad* del x y el y

(1) DUBREIL, *Demi-groupe.*
(2) Sin conmutatividad. KLEIN-BARMEN exigen que sea abeliano y una condición que es consecuencia de la G_n).
(3) CHATELET.
(4) HAUSMANN-ORE.

que aparecen en G_d), valen las dos propiedades uniformes inversas [5] y hay compatibilidad [6] entre la operación y la relación «$<$» definida del modo usual [7].

Un holoide simple en el que se cumpla G_d) diremos que es *ordenable.*

Lo llamaremos *encadenado* si además verifica la siguiente condición:

G_e) (encadenamiento). - Si $a \varepsilon G$, $b \varepsilon G$ y $a < b$, para cada $\varepsilon \neq 0$, $\varepsilon . \varepsilon . G$, existen elementos $a_i . \varepsilon . G$ $(0 \leqq i \leqq n(a, b, \varepsilon))$ tales que $a_0 = a$, $a_n = b$, $a_i < a_{i+1}$ y $a_{i+1} - a_i < \varepsilon$ para todo $i < n$ [8].

Se puede probar que todo holoide encadenado es *abeliano* [9].

La teoría de los holoides simples abelianos puede desarrollarse sobre la base de las propiedades del «hemi-grupo» más las G'_0). Existe un elemento $0 . \varepsilon G$ tal que $a + 0 = a$, cualquiera que sea a; G_n) y G_c). La de los holoides abelianos ordenables, sobre la base de las anteriores más la G'_d). Si $a \neq b$, entonces existe un x tal que $a + x = b$ o un y tal que $b + y = a$.

Un holoide se dice *continuo* cuando cumple la siguiente condición:

G_C) Toda cortadura *tiene* un *único* elemento de separación.

En los holoides ordenados se introduce el concepto de entorno y el de punto de acumulación del modo corriente, resultando así organizada una topología de espacio de Hausdorff. Si el holoide es encadenado, el espacio es de «carácter numerable» [10]. Los conjuntos ordenadamente-densos [11] son los mismos que los que tienen una subclase mediana [12], y por lo tanto resultan acumulados. Los conjuntos conexos son ordenadamente-densos, y en éstos la condición necesaria y suficiente para que

---

(5) De regularidad, simplificación o cancelativas, resultando ser G un semigrupo.
(6) BOURBAKI.
(7) Por ejemplo con un sumando no nulo derecho.
(8) Las diferencias son derechas.
(9) Cumple la condición G_c). $a + b = b + a$. En lo que sigue no prescindiremos de la conmutatividad.
(10) 1er. axioma de numerabilidad de Hausdorff.
(11) SIERPINSKI.
(12) RUSSELL.

una sub-clase D sea mediana es que cada uno de sus puntos sea de acumulación de D.

Los holoides encadenados son espacios separables [13].

Por «holoide» separable se entiende el que tiene una subclase mediana numerable [14]. Hay «holoides» separables no-encadenados.

Los holoides encadenados resultan espacios perfectamente-separables [15], tomando «distancias» pertenecientes al holoide separable, y, por lo tanto, son completamente normales [16], existiendo funcionales monótonas continuas no triviales definidas en todo el holoide [17].

Se puede probar que sobre un holoide separable es posible construir una funcional continua monótona *estricta*.

Es claro que toda funcional continua —y, en particular, monótona estricta—, sobre un holoide continuo —y, por lo tanto separable—, tiene la propiedad de Darboux; pero esta propiedad, recíprocamente, permite caracterizar la continuidad porque puede probarse que un holoide separable H es continuo si cumple la siguiente condición:

I) Toda funcional continua monótona estricta sobre H, tiene la propiedad de Darboux.

Para los holoides H ordenables, simplemente, se puede probar la continuidad por medio de la propiedad:

II) H es conexo.

En los holoides H ordenables que carezcan de mínimo elemento no nulo, la continuidad puede caracterizarse de uno de los modos siguientes:

III) H tiene la propiedad de Borel [18] en toda parte acotada y cerrada.

IV) Todo conjunto parcial acotado de infinitos elementos distintos, tiene al menos un elemento de acumulación.

(13) Fréchet.
(14) No confundir con la noción de "espacio" separable.
(15) Fréchet.
(16) Tietze y Tychonoff.
(17) Urysohn-Tietze.
(18) Fréchet.

La continuidad de un holoide H encadenado se puede demostrar por medio de la siguiente propiedad:

V) H no está estrictamente contenido en otro holoide continuo.

En los holoides encadenados puede probarse que existen pares de clases contiguas, sucesiones fundamentales [19], pares de sucesiones monótonas convergentes, y su continuidad puede caracterizarse de una de las maneras siguientes:

a) Todo par de clases contiguas *tiene* elemento de separación.

b) Todo par de sucesiones monótonas convergentes *tiene* elemento de separación.

c) Toda sucesión fundamental *tiene* límite.

Caracterizaciones de la continuidad en los holoides ordenados sin mínimo elemento no-nulo [20] pueden hacerse por medio de una de las proposiciones siguientes:

d) Toda sucesión acotada tiene algún límite de oscilación.

e) Toda sucesión acotada tiene límite superior de oscilación [21].

f) Toda sucesión monótona creciente y acotada tiene extremo superior [22].

g) Todo conjunto no vacío acotado superiormente tiene extremo superior [23].

Hay muchas otras condiciones parecidas a las precedentes que permiten caracterizar la continuidad. En casos de holoides ordenables simplemente puede prescindirse de la condición G_m)

(19) Que cumplen la condición de Cauchy.
(20) Condición G_m). Si $\varepsilon \neq 0$ es elemento de G, existe un $\varepsilon' \neq 0$ perteneciente a G tal que $\varepsilon' < \varepsilon$.
(21) Id. para límite inferior de oscilación.
(22) Id. para decrecimiento monótono y extremo inferior.
(23) Id. para acotado inferiormente y extremo inferior.

agregando la *unicidad* del elemento fundamental que aparece en el postulado, o modificando ligeramente la *definición* del concepto clave que en él se encuentra (sucs. monóts. convs., límite-superior, extremo-superior, ...), o postulando, además, la *existencia* del mencionado concepto en el holoide (es decir: se supone existente un par de clases contiguas, o una sucesión monótona creciente y acotada, ... etc.).

Hay varias proposiciones equivalentes a la G_m), así como otras muy vinculadas a la de encadenamiento. La G_c) es deducible, además, de otras propiedades parecidas a las aquí indicadas sin necesidad de llegar a la continuidad.

La continuidad ordinal ([24]) equivale a la dedekindiana y a la cantoriana ([25]).

Es claro que en los holoides continuos se verifican todas las propiedades anteriores.

Los holoides encadenados u ordenables abelianos son semigrupos y pueden inmergirse en grupos por el procedimiento corriente.

Las líneas anteriores implican una colección de caracterizaciones de la continuidad en tales estructuras.

Exposiciones directas del tema pueden lograrse adjuntando a una cualquiera de las diversas axiomáticas sobre grupos, algunas de las referentes a una relación de orden-lineal compatible con la ley de composición de la estructura, más las proposiciones aquí mencionadas para la continuidad.

Consideraciones semejantes pueden volver a hacerse en lo que sigue.

Se puede probar que todo holoide encadenado es parte de un holoide continuo, valiendo una proposición análoga para el caso de grupos.

Si a un holoide encadenado se le impone una condición de primitividad ([26]), se obtiene una estructura isomorfa del campo de los racionales $\geqq 0$. Es fácil lograr isomorfismos con otros

---

([24]) CANTOR.
([25]) RUSSELL.
([26]) BLUMBERG.

campos numéricos notables (hasta el de los reales inclusive), obteniéndose varias fundamentaciones de la Aritmética.

Los isomorfismos entre holoides se pueden caracterizar de diversos modos.

Las clases-cociente de un sinnúmero de entidades matemáticas por una relación de equivalencia suelen ser holoides.

Las múltiples caracterizaciones de la continuidad para holoides permiten introducir de otras tantas maneras el concepto de continuidad en las fundamentaciones de la Geometría.

Pruebas de estos resultados y la bibliografa correspondiente, aparecerán en una publicación de la Universidad de la República.

EXTREMALES CERRADAS DEL TIPO MINIMO EN TORNO A PUNTOS SINGULARES DE UN PROBLEMA VARIACIONAL REGULAR

por Wilhelm Damköhler
Departamento Matemático del Laboratorio de Física Cósmica Chacaltaya, Universidad La Paz/Bolivia

Introducción y resultados: Si nos damos en el plano x_1, x_2 un problema variacional regular arbitrario en la forma paramétrica de Weierstrass

$$F(x, x') = F(x_1, x_2, x_1', x_2') \gtrless 0, \tag{I,1}$$

señalamos, para los fines de este artículo, dos o más puntos P_1, P_2, etc., del plano como «singulares» respecto a este problema variacional, si son simultáneamente separables uno del otro mediante pequeñas curvas simplemente cerradas C_1, C_2, etc., que son «orientadamente F-extremalconvexas» hacia su exterior, yacen una siempre en el exterior de la otra y comprenden en su interior: C_1 al punto P_1, C_2 a P_2, etc. (vea la fig. 1).

Se dice de una curva cerrada C que sea «orientadamente F-extremalconvexa» hacia su exterior, si dos arbitrarios de sus puntos Q_1 y Q_2 suficientemente vecinos uno a otro y que se suceden en la dirección de la orientación de C, pueden ser

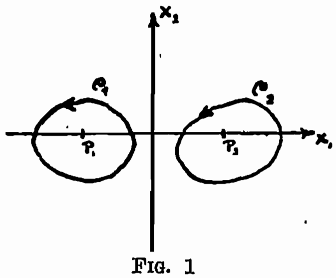


Fig. 1

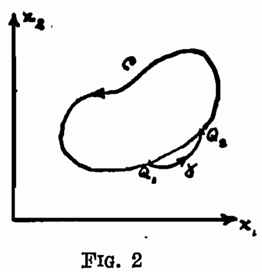


Fig. 2

unidos mediante un pequeño arco γ, F-extremal, del mismo sentido de recorrimiento que C, y que queda con excepción de sus extremos completamente en la parte exterior de la curva C. (vea la fig. 2).

Entonces valen, bajo la restricción del § 4, los siguientes teoremas:

A) Para el caso de un problema variacional irreversible (lo que quiere señalar, que una curva, extremal en un sentido de su recorrimiento, pierde esta propiedad, si se la invierte su orientación):

T e o r e m a 1) Si los dos lazos separadores C_1 y C_2 de dos puntos singulares P_1, P_2 (fig. 1), tienen orientación igual (opuesta), entonces hay por lo menos una F-extremal cerrada elíptiforme (octoforme) del tipo mínimo que circunda con una sola vuelta simultáneamente ambos puntos P_1 y P_2, y cada uno en el sentido de orientación de su lazo C_1 y C_2 perteneciente (vea las figs. 3 y 4).

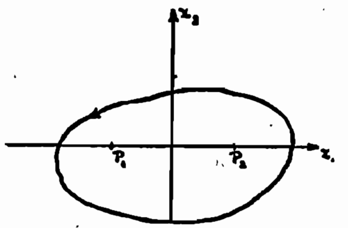


FIG. 3

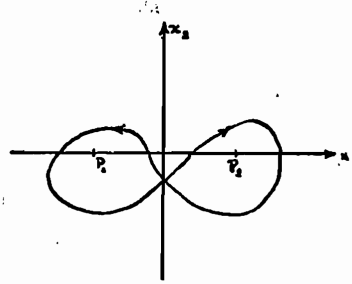


FIG. 4

B) Para el caso de la reversibilidad, donde el carácter de una curva C, de ser una F-extremal, no depende del sentido de su recorrimiento:

T e o r e m a 2) Tenemos en el plano x_1, x_2 distribuídos cierto número de puntos singulares $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_m$, entonces existe siempre una F-extremal cerrada del tipo mínimo, que circunda simultáneamente a todos estos puntos singulares y que da

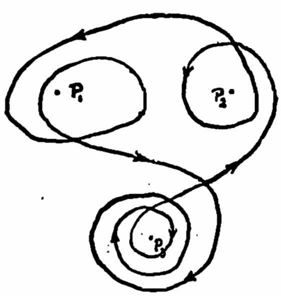


FIG. 5

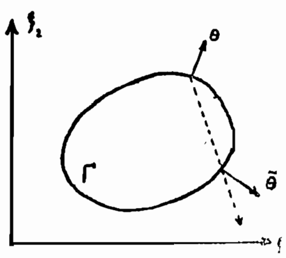


FIG. 6

un número arbitrariamente prescrito de vueltas y en un sentido también arbitrariamente prefijado, en torno a cada uno de éstos. (Ver fig. 5).

Estos teoremas pueden considerarse de cierta importancia, si planteamos el problema de los tipos topológicamente posibles de órbitas en el problema de los n-cuerpos. Ya que tales órbitas resultan extremales de la integral de acción de Maupertuis:

$$J_C = \int_c \sqrt{E_{pot} + \text{const.}} \cdot \sqrt{E_{cin}} \cdot dt. \qquad (I, 2)$$

Pues si en primera aproximación fijamos $(n-1)$ de estos cuerpos y permitimos solamente al n-ésimo su movimiento, entonces enseñan los teoremas 1 y 2 formas de órbitas periódicas posibles alrededor de $(n-1)$ centros fijos; partiendo de las cuales, mediante un cálculo de perturbaciones, podemos obtener luego idea de los tipos de movimientos también para el caso de que los $(n-1)$ cuerpos anteriormente fijados ahora son lentamente movibles.

Deben estos teoremas su origen a conversaciones del autor con el Dr. Santaló sobre las posibles órbitas del cohete lunar, durante el tercer simposio sobre «Algunos problemas matemáticos que se están estudiando en América Latina», que se realizó en el mes de julio de 1959 bajo los auspicios de la UNESCO en Buenos Aires. Pertenecen a la familia de los teoremas de Whittaker-Birkhoff-Tonelli sobre órbitas periódicas en campos anulares, en problemas mecánicos (1).

Respecto a la técnica de pruebas menciono aquí solamente dos artificios que parecen esenciales: 1) La introducción de una superficie de Riemann ramificada en los puntos singulares, de varias hojas, para disponer de una topología apropiada de curvas de comparación «simples» (a lo largo de la superficie introducida), y 2) (sólo para el caso de la irreversibilidad) el uso de los «complejos de curvas», que es una figura geométrica

(1) Vea: LEONIDA TONELLI, *Fondamenti de Calcolo dell Variazioni*, Tomo II § 136. (Bologna, Nicolá Zanichelli 1923), y WILHELM DAMKÖHLER, *Periodische Extremalen vom Minimumtyp in Ringbereichen*, Annali Reg. Scuola Norm. Sup. di Pisa, Cl. sci. fis. mat., Serie II, Vol. V (1936), pg. 127-140.

invariante frente a la producción de «autocontactos» de una curva consigo misma, que puedan ocurrir si la acompañamos a través de una sucesión minimizante.

Ambos artificios unidos permiten la aplicación de la «Transformación de Green» (§ 3) mediante la cual obtenemos acotaciones uniformes de la longitud para las clases de curvas admisibles de comparación, que de esta manera resultan compactas y establecen así la existencia de una solución mínima para el problema variacional considerado (I, 1).

CAPITULO I. FORMULAS Y CONCEPTOS PRELIMINARES.

§ 1) *La figuratriz:* Describimos un problema variacional (I, 1) geométricamente mediante su figuratriz que es definida paramétricamente por las ecuaciones

$$\begin{gathered} \xi_i = F_{x_i'}(x, x') \qquad (i = 1, 2) \\ x_1' = \cos\vartheta, \quad x_2' = \operatorname{sen}\vartheta, \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi \end{gathered} \tag{1,1}$$

y cuya gráfica es la curva convexa Γ de la figura 6, cuando se trata de un problema variacional positivimente regular:

$$F_1 = \frac{F_{x_1' x_1'}}{x_2'^2} = \frac{-F_{x_1' x_2'}}{x_1' x_2'} = \frac{F_{x_2' x_2'}}{x_1'^2} > 0. \tag{1,2}$$

ϑ significa para la figuratriz el ángulo que forma su normal exterior con el eje positivo de los ξ_1, y para la curva de comparación $C : x_i(t)$ $(i = 1, 2)$ en el problema variacional (I, 1) la dirección de su tangente positiva.

§ 2) *La semicontinuidad:* Si consideramos la integral

$$J(c) = \int_c F(x, x')\, dt \tag{2,1}$$

de nuestro problema variacional en su dependencia del camino de integración, goza de la propiedad de la «Semicontinuidad inferior», cuando su integrando F es positivamente regular, es decir, cuando vale (1, 2).

Tomamos al lado de una curva «fija» $C: x_i(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$, otra «variable» de comparación $\tilde{C}: \tilde{x}_i(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$, y recordamos la relación de homogenidad

$$F(x, x') \equiv \sum_{i=1}^{2} F_{x_i'}(x, x') \,.\, x_i', \tag{2,2}$$

entonces resulta para la diferencia

$$\begin{aligned} J(\tilde{C}) - J(C) &= \int_0^1 [F(\tilde{x}, \tilde{x}') - F(x, x')] \,.\, dt = \\ &= \int_0^1 [F(\tilde{x}, x') - F(x, x') + \sum_{i=1}^{2} (\tilde{x}_i' - x_i') \,.\, F_{x_i'}(\tilde{x}, x')] \,.\, dt + \\ &+ \int_0^1 \sum_{i=1}^{2} \tilde{x}_i' \,.\, [F_{x_i'}(\tilde{x}, \tilde{x}') - F_{x_i'}(\tilde{x}, x')] \,.\, dt \geqq \\ &\geqq \int_0^1 [F(\tilde{x}, x') - F(x, x') + \sum_{i=1}^{2} (\tilde{x}_i' - x_i') \,.\, F_{x_i'}(\tilde{x}, x')] \,.\, dt, \end{aligned} \tag{2,3}$$

porque el integrando de la penúltima línea es siempre positivo, en consecuencia de la convexidad de la figuratriz Γ (fig. 6). Pues el corchete del mencionado integrando está representado allá por el vector punteado que forma un ángulo agudo con la dirección $\tilde{\vartheta}$. Y la última línea de (2, 3) se hace arbitrariamente pequeña, si $\tilde{C}$ está en suficiente cercanía de C, como se convence mediante una simple integración por partes [2].

Vale por lo tanto

$$J(\tilde{C}) \geqq J(C) - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \tag{2,4}$$

siempre que $\tilde{C}$ yazga en suficiente vecindad de C; y ésta es la fórmula de definición para la semicontinuidad inferior.

---

(2) Para mayores detalles vea: L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni,* Tomo I (1921), § 79.

§ 3) *La Transformación de Green:* Ella permite librarse de toda «definidad psoitiva» del integrando $F(x, x')$ en caso de que la familia de curvas de comparación admisibles consiste de curvas «simplemente cerradas» sobre una variedad bidimensional.

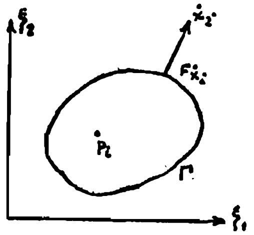


FIG. 7

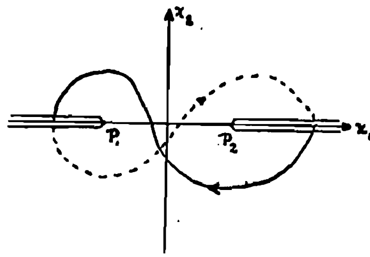


FIG. 8

Recordamos primero que para cualquier punto con coordenadas (p_1, p_2) en el interior (no sobre el borde) de la figuratriz Γ (fig. 7) vale la desigualdad

$$\sum_{i-1}^{2} (F_{xi'} - p_i)\, x_2' = F(x, x') - p_1 x_1' - p_2 x_2' \geqq$$
$$\geqq m \,.\sqrt{x_1'^2 + x_2'^2} \qquad (3,1)$$

con cierta constante $m > 0$.

Ahora tomamos cualquier par de funciones $p_1(x_1, x_2)$, $p_2(x_1, x_2)$ continuas y suficientemente diferenciables que en la manera indicada por la figura 7 yacen, para cada valor de x_1, x_2, en el interior de la figuratriz Γ (x_1, x_2) correspondiente. Entonces vale (3,1). Pero en base del teorema de Green podemos transformar una integral curvilínea a lo largo de una curva simplemente cerrada C, en una integral areal sobre el interior de esta curva:

$$\oint (p_1 x_1' + p_2 x_2')\, dt = -\iint\limits_{(c)} \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_2} - \frac{\partial p_2}{\partial x_1} \right) dx_1\, dx_2; \qquad (3,2)$$

así que para toda curva simplemente cerrada C obtenemos de (3,1) y (3,2) la acotación

$$m \,. \oint\limits_{c} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \,.\, dt \leqq \oint\limits_{c} F(x, x')\, dt + \iint\limits_{(c)} \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_2} - \frac{\partial p_2}{\partial x_1} \right) dx_1\, dx_2 \qquad (3,3).$$

(3, 3) es la indicada y en lo subsiguiente muy aprovechada transformación de Green.

§ 4) *Una restricción decisiva:* Los teoremas 1 y 2 no valen sino a condición de la siguiente restricción sobre la posible distribución de las figuratrices Γ (x_1, x_2) a lo largo del plano x_1, x_2: Cuando $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \infty$, los Γ (x_1, x_2) deben cubrir cierto círculo invariable fijo K_0 de radio positivo $r_0 > 0$; en fórmulas

$$\lim_{x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \infty} \Gamma(x_1, x_2) \supset K_0 \neq 0. \qquad (4, 1)$$

Pues nuestros teoremas admiten como campo de variabilidad de las órbitas, todo el plano x_1, x_2. Pero para la conducción de la prueba necesitamos la equifinitud de sus longitudes y por lo tanto la validez de la acotación (3, 3). Ahora bien, esta acotación no puede ser garantizada sino bajo la restricción (4, 1). En realidad permite esta restricción como campo de variabilidad donde $\dfrac{\partial p_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial p_2}{\partial x_1} \neq 0$, solamente una región limitada. Pues si determinamos un par de funciones $p_1(x_1, x_2)$, $p_2(x_1, x_2)$ conforme a la transformación de Green, estas funciones pueden ser tomadas constantes, y vor lo tanto $\dfrac{\partial p_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial p_2}{\partial x_1} = 0$, para todos los valores de x_1, x_2 para los que vale Γ $(x_1, x_2) \supset K_0$.

Si ahora trazamos del origen $x_1 = x_2 = 0$ cualquier radio vector r y marcamos sobre él, el primer punto $Q(r)$ a partir del cual todos los Γ $(x_1, x_2) \supset K_0$, hemos determinado sobre este radio vector r cierto segmento finito. Si luego damos vuelta a este radio vector, estos segmentos recubren cierto dominio astroforme que no se extiende, en ninguna dirección, al infinito. Si señalamos este dominio astroforme con S, entonces fuera de S es siempre $\dfrac{\partial p_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial p_2}{\partial x_1} = 0$, y por la finitud de la extensión de S funciona la acotación (3, 3) que garantiza la compacticidad de la familia de curvas simplemente cerradas de comparación.

§ 5) *La superficie de Riemann:* Colocamos los dos puntos singulares P_1 y P_2 simétricamente al origen $x_1 = x_2 = 0$ sobre el eje de los x_1 del plano x_1, x_2, y tomámosles como los dos puntos de ramificación de una superficie de Riemann a dos hojas (vea las figs. 8 y 9).

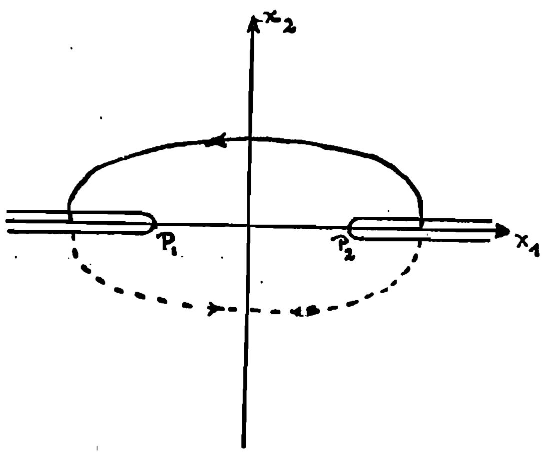


FIG. 9

Sobre esta superficie ponemos las órbitas, octo-o-elíptiforme según el caso, que en parte corren en la hoja superior (línea continua) y en parte en la hoja inferior (línea punteada). Evitamos así (sobre la superficie de Riemann) entrecruzamientos de esta órbita consigo misma y consideraremos en lo subsiguiente solamente órbitas que en este sentido son «simples» (quiere decir sin entrecruzamientos propios sobre la superficie de Riemann).

§ 6) *El complejo de curvas:* Miramos a las figuras 10 y 11 que muestran ejemplos de un «Complejo de Curvas». (Las partes continuas están en la hoja superior, las punteadas en la hoja inferior de nuestra superficie de Riemann).

Cada tal complejo consiste de cierto número de curvas simplemente cerradas sin puntos comunes, que se clasifican en una «curva principal» C_p y varias «curvas satélites» C_s. La curva principal corta siempre ambos cortes de ramificación que empiezan en P_1 y P_2 respectivamente y se extienden al infinito.

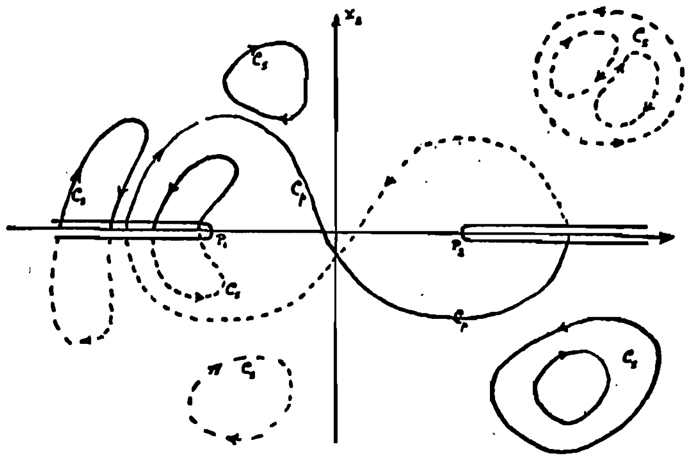


Fig. 10

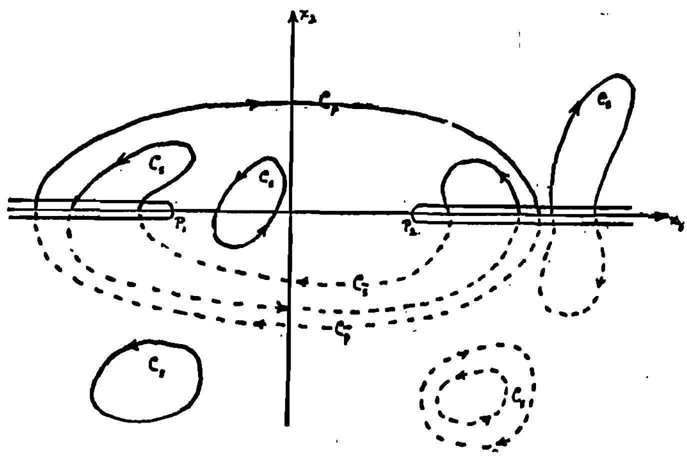


Fig. 11

Yace siempre en el «exterior» de ambos lazos C_1 y C_2 (fig. 1) F-extremalconvexos que separan P_1 de P_2.

Todas las curvas (principal y satélites) de un complejo son orientadas, y la curva principal determina las orientaciones de las curvas satélites C_s conforme a la siguiente regla:

Primero clasificamos las curvas satélites C_s en varias categorías: Decimos: C_s es de la primera categoría, si es unible a los puntos de la curva principal C_p mediante un camino γ sobre la superficie de Riemann, que es libre de cualquier punto del complejo, si prescindimos de los extremos de γ.

Un complejo C_s es de la segunda categoría, si no es de la primera, pero hay un complejo C_s' de la primera categoría a cuyos puntos es unible mediante un camino γ, a excepción de sus extremos, libre de puntos del complejo.

Generalmente, un complejo C_s es de la n-ésima categoría, si no es de la $(n-1)$-ésima pero si hay un complejo C_s' de esta $(n-1)$-ésima categoría a cuyos puntos C_s es unible mediante un camino γ, a excepción de sus extremos, libre de puntos del complejo.

Luego transmitimos, de la siguiente manera, la orientación de la curva principal C_p a los complejos satélites C_s (de primera, segunda, etc., categoría): Sea γ una curva simple que une C_p con un C_s de primera categoría. Deformamos C_s a lo largo de γ hasta tocar con C_p. Entonces obtiene C_s la orientación opuesta a la de C_p.

Habiendo así orientado todas las curvas C_s de la primera categoría, orientamos ahora con ellas las C_s de la segunda categoría, usando exactamente el mismo procedimiento de deformación a lo largo de un camino γ simple que una dos C_s de la primera y segunda categoría respectivamente. Resultan así todos los C_1 de la segunda categoría con orientación opuesta a la de la primera categoría. Etc.

Una vez orientadas todas las curvas de un complejo, demostraremos la equifinitud de la suma de las longitudes de todas las curvas componentes contenidas en él. Comenzamos con las curvas satélites C_s: Combinamos para tal fin siempre dos categorías sucesivas: 1-era y 2-nda, 3-era y 4-ta, etc. Forman estas combinaciones las fronteras de regiones simple o múltiplemente coherentes, sobre las cuales aplicamos la transformación de Green del § 3. Resulta de este modo, si K_s significa todavía la suma de todas las curvas satélites contenidas en nuestro complejo:

$$m.\int_{K_s}\sqrt{x_1'^2+x_2'^2}\,.\,dt \leqq \int_{K_s} F(x,x')\,dt + 2\iint_{(\infty)}\left|\frac{\partial p_1}{\partial x_2}-\frac{\partial p_2}{\partial x_1}\right| dx_1\,dx_2, \tag{6,1}$$

donde la integral $\displaystyle\iint_{(\infty)}\left|\frac{\partial p_1}{\partial x_2}-\frac{\partial p_2}{\partial x_1}\right| dx_1\,dx_2$ extendida a lo largo de todo el plano $x_1 x_2$ es finita ($\leqq M \leqq \infty$) por la restricción impuesta en § 4 a la distribución de las figuratrices $\Gamma(x_1, x_2)$. El factor «2» aparece en (6, 1) por tratarse de una superficie de Riemann con solamente dos hojas.

Pasamos ahora a la curva principal C_p:

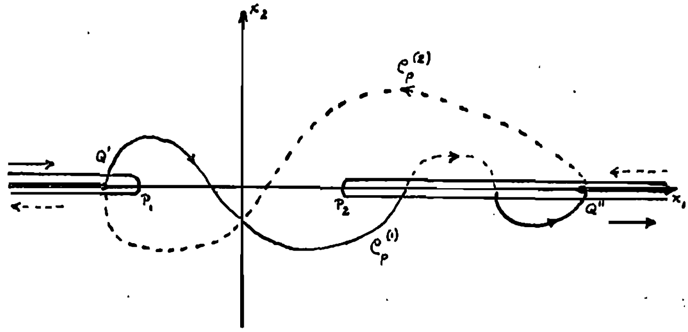


FIG. 12

Dividimos C_p en dos subarcos $C_p^{(1)}$ y $C_p^{(2)}$ mediante los puntos Q' y Q'', que son el primer respectivamente último punto de intersección con el eje de las x_1 que encontramos recorriendo este eje de menos a más infinito. (Vea la fig. 12). Entonces tenemos:

$$\int_{C_p} (p_1 x_1' + p_2 x_2')\, dt = \tag{6, 2}$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{Q'} + \int_{C_p^{(1)}} + \int_{Q''}^{\infty} (p_1 x_1' + p_2 x_2')\, dt\right] + \left[\int_{\infty}^{Q''} + \int_{C_p^{(2)}} + \int_{Q'}^{-\infty} (p_1 x_1' + p_2 x_2')\, dt\right],$$

porque se concelan las integrales

$$\int_{-\infty}^{Q'} \text{y} \int_{Q'}^{-\infty}, \quad \int_{Q''}^{\infty} \text{y} \int_{\infty}^{Q''}$$

respectivamente, tratándose de integrales lineales tomadas a lo largo de los mismos caminos de integración pero recorridos en sentidos opuestos. (Ver las flechas en la fig. 12). Pero a cada corchete de (6, 2) podemos aplicar la transformación de Green del § 3. que nos da para cada uno de ellos la acotación $\leqq \iint\limits_{(\infty)} \left| \frac{\partial p_1}{\partial x_2} - \frac{\partial p_2}{\partial x_1} \right| dx_1\, dx_2 \leqq M$. Por lo tanto resulta de (6, 2)

$$\left| \int\limits_{C_p} (p_1 x_1' + p_2 x_2')\, dt \right| \leqq 2M \tag{6, 3}$$

y en combinación con (3, 1)

$$m \,.\, \oint\limits_{C_p} \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2} \,.\, dt \leqq \oint\limits_{C_p} F(x, x')\, dt + 2M. \tag{6, 4}$$

Significa ahora $K = C_p + k_s$ todo el complejo completo de curvas, entonces sacamos de la combinación de (6, 1) con (6, 4) el resultado final

$$m \,.\, \int\limits_{K} \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2} \,.\, dt \leqq \int\limits_{K} F(x, x')\, dt + 4M, \tag{6, 5}$$

o sea la equifinidad de la «longitud total» de las curvas contenidas en un complejo.

§ 7) *La sucesión minimizante:* La clase de curvas admisibles a lo largo de las cuales consideramos la integral (2, 1), es ahora la clase de los complejos K de curvas, como los hemos definido en el párrafo anterior § 6. Sea $\{K_n\}$ una sucesión minimizante de tales complejos. Entonces nos convencemos primero de que el númeero N_n de curvas componentes contenidas en tal complejo K_n es, independientemente del «n», uniformemente limitado. Pues por la convexidad de la figuratriz (x_1, x_2) (§ 1) hay un diámetro $d > 0$ fijo de tal manera queΓ a lo largo de cualquier curva γ cerrada que yace completamente en un círculo del diámetro $d > 0$, la integral

$$\oint\limits_{\gamma} F(x, x')\, dt > 0.$$

Por lo tanto, las curvas compnnentes que cuentan en un K_n, deben tener una longitud $\geqq 2d$, es decir no pueden estar contenidas en dicho círculo de diámetro d. En caso contrario podríamos obtener una sucesión minimizante mejor $\{K_n\}$ que tendiese a un mínimo menor, si quitamos a cada K_n las curvas componentes contenibles en un círculo de diámetro $d > 0$. Por lo tanto es una cota superior para el número N_n de curvas componentes contenidas en un complejo K_n, el cociente

$$\frac{1}{2d}\int_{K_n}\sqrt{x_1'^2+x_2'^2}\,.\,dt \leqq \frac{2M}{md}+\frac{1}{2md}\int_{K_n}F(x,x')\,dt, \qquad (7,1)$$

si aprovechamos todavía (6, 5). (7, 1) prueba la afirmación.

En base de esta equifinitud de los números N_n hallamos ahora fácilmente, mediante el procedimiento de Cantor-Hilbert de seleccionar «diagonalmente», una subsucesión convergente de complejos K_n. Supongamos que ya la sucesión original $\{K_n\}$ converja hacia un complejo límite K_∞, del que queremos probar que consiste de un número finito de F-extremales lisas simplemente cerradas (sobre la superficie de Riemann) y sin contactactos mútuos entre ellas. Su curva componente principal, que nunca puede faltar, da entonces la órbita afirmada en el Teorema 1.

Primero tenemos en base de la semicontinuidad inferior de la integral $J(C)$ (§ 2)

$$\int_{K_\infty}F(x,x')\,dt \leq \lim_{n\to\infty}\int_{K_n}F(x,x')\,dt, \qquad (7,2)$$

y es preciso demostrar que también K_∞ es un complejo admisible, quiere decir: con un número finito de curvas componentes simples, y sin contactos mutuos.

La finitud del número de componentes en K_∞ es consecuencia de la equifinitud de los N_n. La ausencia de contactos mutuos se convence de la manera siguiente: Miramos las figuras 13 y 14 que esquematizan dos tipos de contactos mutuos, la primera un «autocontacto» de una curva componente consigo misma, la segunda el contacto entre dos curvas componentes diferentes. Las líneas punteadas son pequeños arcos F-extremales, que disminuyen la integral $\int Fdt$, cuando corren en suficiente cercanía del punto P del contacto considerado. Así se produce en el primer modelo de la figura 13 una separación en dos nuevas curvas componentes, en el segundo modelo (fig. 14), empero la fusión de dos curvas componentes, anteriormente separadas, en una única sola curva componente nueva.

Por lo tanto, si K_∞ todavía no cumpliese con las exigencias para un complejo admisible, podríamos deducir por el método indicado, un $K_\infty{}^*$ que cumpliría y además daría un valor menor a la integral de lo que hizo K_∞. ¡Contradicción!.

Del mismo modo se convence también de la ausencia de codos (= vértices) en una curva componente de K_∞, así que todas exhiben una tangente continua.

Porque, finalmente, la curva principal corre siempre completamente en el exterior de los lazos C_1, C_2 de la figura 1, que son F-extremalconvexos hacia su exterior, esta curva principal nunca puede «engancharse» en los puntos singulares P_1 y P_2, y resulta así una F-extremal lisa en toda su extensión.

Esto termina la demostración del Teorema 1.

CAPITULO III. EL CASO DE LA REVERSIBILIDAD

§ 8) *La curva simple «abierta» a lo largo de la Superficie de Riemann, con proyección cerrada sobre el plano simple:* Para tratar el *Teorema 2)* consideramos el ejemplo de tres puntos singulares P_1, P_2, P_3 en torno a los cuales la órbita buscada da $N_1 = 2$, $N_2 = 3$, $N_3 = 2$ vueltas respectivamente (vea las figuras 15 y 16)

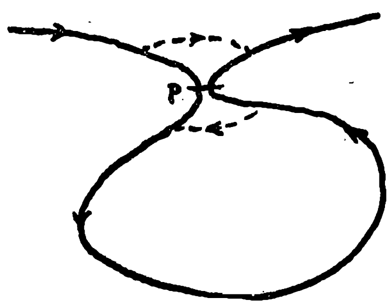


FIG. 13

Extendemos sobre el plano $x_1\, x_2$ una superficie de Riemann de ocho hojas cuyo esquema de ramificación muestra la fig. 16.

Están conectadas en los puntos (de ramificación) P_1, P_2, P_3 las hojas $(0, 1, 2)$, $(2, 3, 4, 5)$ y $(5, 6, 7)$ respectivamente. Coloca-

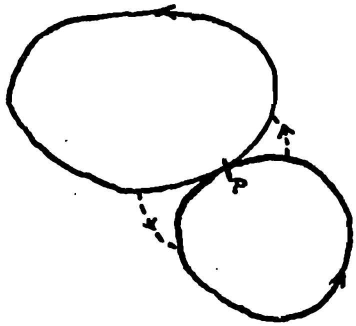


Fig. 14

mos sobre esta superficie de Riemann la curva C simple y abierta de comparación, cuya proyección sobre el plano simple (*no*

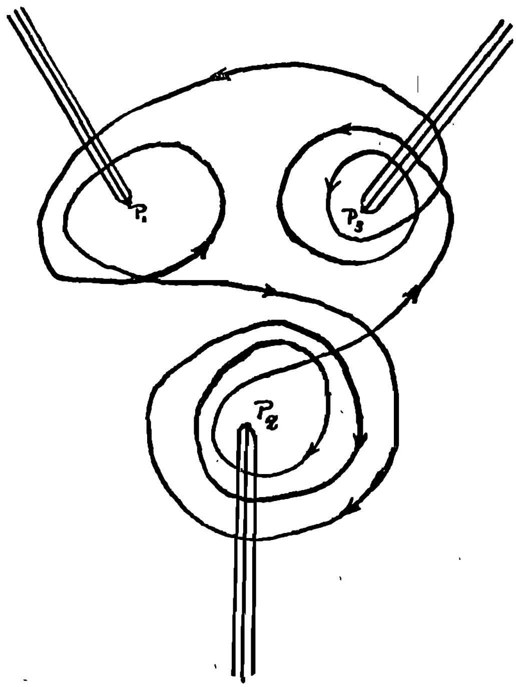


Fig. 15

ramificado como es la superficie de Riemann) siempre es cerrada, y que corre en toda su extensión en las regiones exteriores de los (esta vez) tres lazos C_1, C_2 y C_3 de la figura 1.

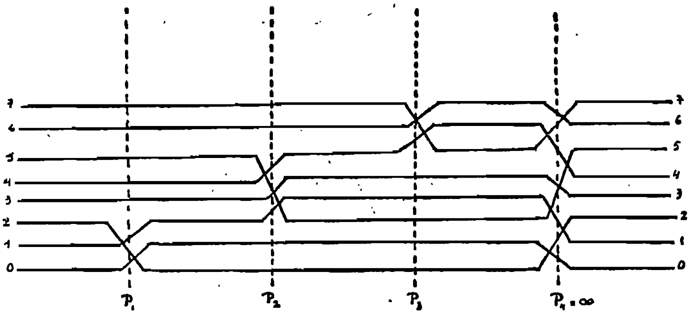


FIG. 16: Esquema de ramificación para la figura 15.

No necesitamos para un problema variacional reversible el artificio de los complejos de curvas, porque esta vez podemos excluir contactos mutuos entre diferentes arcos de la curva minimizante (que son forzosamente F-extremales) recurriendo a los teoremas de unicidad para soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. Pues en el caso reversible, una extremal conserva su carácter de tal también con la inversión del sentido de su recorrimiento.

Demostraremos ahora la equifinitud de las longitudes de las curvas C en una sucesión minimizante: Para no enmarañarnos con la superposición de elementos conceptuales idénticos en una superficie de Riemann con muchas hojas y puntos de ramificación (en nuestro ejemplo: 8 hojas y 4 puntos de rami-

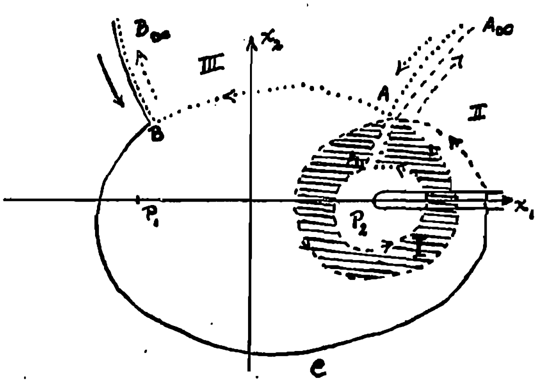


FIG. 17

ficación!) estudiamos la situación en el caso más sencillo de una superficie con solamente tres hojas y un solo punto de ramificación en el finito (el otro que todavía es necesario para cerrar la superficie, está en el infinito). Miramos a la fig. 17, donde el punto singular P_1 no es ramificado, mientras en P_2 están conectadas 3 hojas. La curva C da 2 vueltas alrededor de P_2 y sube así de la hoja cero a la hoja número 2. Los varios tipos del rayado indican la estada en una u otra hoja de la superficie. Fuera la órbita C contiene la fig. 17 todavía las líneas auxiliares (superpuestas, es decir con la misma traza sobre un plano simple) BB_∞, AA_∞, y AA_1. Estas líneas se trazaron con motivo de poder aplicar la transformación de Greeen del § 3.

En nuestro ejemplo de la fig. 17 recortamos así de la superficie de Riemann tres dominios simplemente coherentes *I*, *II*, *III* y aplicamos a cada uno de ellos la transformación de Green. En esta no contribuyen nada las integrales $\int (p_1 x_1' + p_2 x_2')\, dt$ a lo largo de las indicadas líneas auxiliares. Y resulta así finalmente (cf. también las ideas análogas del § 6)

$$\left|\int\limits_C (p_1 x_1' + p_2 x_2')\, dt\right| \leqq 3 \iint\limits_{(\infty)} \left|\frac{\partial p_1}{\partial x_2} - \frac{\partial p_2}{\partial x_1}\right| dx_1\, dx_2 \leqq 3M, \qquad (8,1)$$

donde el factor 3 deriva del hecho de que tenemos que vernos con una superficie de Riemann de tres hojas.

Volviendo ahora al ejemplo de la figura 15, deducimos de (8, 1) por analogía

$$\left|\int\limits_C (p_1 x_1' + p_2 x_2')\, dt\right| \leqq 8M, \qquad (8,2)$$

y la ecotación para la longitud (mediante (3, 3):

$$\int\limits_C \sqrt{x_1^{2\prime} + x_2^{\prime 2}}\, dt \leqq \frac{8M}{m} + \frac{1}{m} \int\limits_C F(x, x')\, dt. \qquad (8,3)$$

De aquí sigue la prueba del Teorma 2 idénticos pasos que en el § 7 para el Teorema 1, y da en consecuencia también los mismos resultados.

SOBRE LA DETERMINACION DE FUNCIONALES EN GEOMETRIA INTEGRAL

KURT LEGRADY
(Universidad de Chile, Santiago de Chile)

1. Sea (G, M, ψ) un espacio de K l e i n con grupo de L i e G, variedad analítica M y aplicación analítica $\psi : G \times M \longrightarrow M$ que define G como grupo de homeomorfismos de M. G se considera como espacio fibrado con base M, fibra típica y grupo $F(p_0)$ — grupo estábil de un punto $p_0 \in M$ y proyección π_0. Sea $N \subset M$ tal que su grupo estábil $F(N)$ esté cerrado. $F(N)$ define una otra fibración de G con la variedad analítica $G/F(N)$ como base y proyección π_1. Los elementos de la base representan los transformados σN de N. Si en particular $F(N)$ opera transitivamente sobre $N \ni p_0$ la relación $p \in \sigma N, p = \tau p_0$ es equivalente a $\sigma F(N) \quad \tau F(p_0) \neq \emptyset$. Resulta que la variedad $G/F(N) \quad F(p_0)$ representa los pares de objetos $(\sigma N, p)$ coincidentes.

2. Una forma diferencial Ω sobre $G/F(N)$ invariante bajo las operaciones de G y con grado $|\Omega| = \dim G/F(N)$ define una medida invariante μ_N sobre este espacio. Sea $\{A\}$ la familia de los subconjuntos de M tal que $\{\pi_1(\sigma) | \sigma N \quad A \neq \emptyset\}$ es μ_N-medible. La función $A \longrightarrow \mu_N(A)$ es constante sobre las clases de intransitividad de $\{A\}$ respecto a G pero generalmente no cumple la relación

$$\mu_N(A \cup A') = \mu_N(A) + \mu_N(A') - \mu_N(A \cap A'). \qquad (1)$$

Una función $\varphi : G/F(N) \times \{A\} \longrightarrow R$ (o con valores en un espacio vectorial sobre R), $(\dot{\sigma}, A) \longrightarrow \varphi(\dot{\sigma} N \cap A)$ se llama función de coincidencia si es constante sobre las clases de intransitividad de $(\dot{\sigma} N \cap A)$ cumple a (1) para todo $\dot{\sigma}$ fijo, mientras para todo A fijo define una función integrable sobre $G/F(N)$. Ella define un funcional sobre $\{A\}$ invariante a izquierda que cumple con (1).

3. Sean $\{\{A^{\nu}, A'^{\nu}\ldots\}\}_{\nu=1\ldots n}$, $n = \dim M$ las familias de subvariedades de M diferenciables y de dimensión ν cuyos grupos estables poseen densidades —é. d. sobre los $G/F(A^{\nu})$ existen medidas $\mu_{A_{\nu}}$. Sea $\{\{B^{\mu}\}\}$ una familia de subvariedades de M diferenciables tal que cada intersección finita de los A y su transformados con los B pertenece a $\{\{B^{\mu}\}\}$— salvo tal vez de transformados cuyos representantes formen un subconjunto de medida nula. Sea $\Phi' \subseteq \sum_{v=1}^{m} \Phi^{\nu} = \Phi$ un subespacio vectorial (graduado) de funcionales $\varphi^{\nu} \epsilon \Phi^{\nu}$ definidos para subvariedades cuya totalidad contiene las familias de arriba, que cumplen con (1), son invariantes respecto a G y definen funciones de coincidencia

$$\sigma_{\nu_1}, \ldots \sigma_{\nu k}, B^{\mu}) \longrightarrow \varphi^{\nu}(\sigma_{\nu_1} A^{\nu_1} - \ldots - \sigma_{\nu k} A^{\nu^k} - B^{\mu}). \qquad (2)$$

Las integraciones por los $\mu_A{}^{\nu_1} \square \ldots \square \mu_A{}^{\nu^k}$ definen un homomorfismo(*)

$$\Phi' \longrightarrow \sum_{(i_1,\ldots j k)} \mathop{\square}_{\rho=1}^{k} \Phi^{(j\rho)}. \qquad (3)$$

La tarea principal de la geometría consiste en la determinación de este homomorfismo.

4. En [1] Chern generalizó las fórmulas de Crofton y Cauchy del plano euclideo a un espacio de Klein cualquiera esencialmente en las siguientes condiciones: (*i*) $F(N)$ opera transitivamente sobre N. (*ii*) para todo $A \epsilon \{A\}$ G admite una sección diferenciable sobre A respecto a π_0 construída por el método del «repère mobile» de Cartan. (*iii*) $F(p_0)$ admite una sección diferenciable sobre $F(p_0)/F(N) - F(p_0)$.

Así se obtiene una sección diferenciable (canónicamente para la familia $\{A\}$) de G sobre el conjunto representativo de los pares coincidentes en $G/F(N) - F(p_0)$. La forma Ω sobre

(*) Indicamos con $\square$ el producto tensorial.

$G/F(N)$ tiene imagen recíproca $\pi_1{}^*\Omega = \Omega_1$ en el anillo de las formas invariantes a izquierda y en el caso de la fórmula de Crofton su grado es igual a la dimensión de la imagen de la sección última. La integración sobre este conjunto se efectúa de dos maneras: a) Integración a lo largo de las fibras $F(N)$ da la función de coincidencia —número de los puntos de la intersección— que después se integra sobre $G/F(N)$; b) Integración a lo largo de las secciones (*iii*) en las fibras $\sigma F(p_0)$ que da la función de coincidencia —número de los puntos de la in- $\{A\}$, supuesto que $F(p_0)/F(N)$ $F(p_0)$ sea compacto, $F(p_0)$ opere transitivamente sobre los subespacios k-dimensionales del espacio tangencial en p_0 y que N posea una densidad «alrededor de p_0». Esta forma se integrará a lo largo de la sección (*ii*). Así el homomorfismo (3) asocia a la forma de grado cero cuya integral es el número de los puntos de la intersección σN A una forma de grado k $(=\dim A)$ definida sobre la familia $\{A\}$. Tomando en cuenta la orientación se puede evitar que el homomorfismo resulte idénticamente cero.

5. Se notará que las condiciones señaladas en 4, son demasiado fuertes. En particular, el suponer que A admite una sección del espacio fibrado principal, excluye en el caso euclideo la teoría de los funcionales de los cuerpos convexos, ya que no existe tal sección mientras los funcionales dependen de secciones de espacios fibrados asociados [2].

En el álgebra P de las formas locales sobre un espacio fibrado principal P para todo elemento x del álgebra G de Lie del grupo estructural G se define [3] las derivaciones y antiderivaciones $\vartheta_x = \chi_x d + d\chi_x$ y χ_x, donde $\chi_x \omega|_p$ para $|\omega| = 1$ es el valor de ω para el vector tangencial de la fibra definida por la transformación infinitesimal x. Asimismo d es la derivación exterior en P. Una forma $\Omega \in$ P, cero común de todos los $\chi_x, \vartheta_x, x \in G$ se llama forma básica de P; a ella corresponde una forma Ω' de la base de P tal que $\pi_0{}^*\Omega' = \Omega$. Por ejemplo las densidades en la geometra integral son formas básicas. En este caso, como se notará, la condición se reduce a $d\Omega = 0$ [1, 4].

Si $F(N)$ opera transitivamente sobre los elementos de contacto de un orden fijo del espacio de Klein N, $F(N)$ puede ser connsiderado como espacio fibrado con base: los elementos de contacto y grupo y fibra típica $G' \subset F(N) - F(p_0)$ y toda forma básica con respecto G' define una función de coincidencia por medio de la integral de esta forma extendida a la inyección canónica (según un esquema de Cartan) de $\sigma N \quad A$ en la base. Una construcción análoga a la anterior asocia luego otra forma básica a una tal forma básica relativa (a N). La última lo es respecto a un grupo $G'' \subset F(p_0)$ y se extiende a la imagen canónica de A en la variedad de sus elementos de contacto-base de G con respecto a la fibración por G″.

La introducción de las formas básicas permite formular un principio para asociar a todo espacio de Klein un espacio $\Sigma \phi^{(\nu)}$ lo que representa una generalización natural de consideraciones para grupos particulares.

6. La generalización de la «kinematische Hauptformel» exige una regularización ya que los bordes de las intersecciones no son variedades diferenciables. Si $F(N)$ no opera transitivamente en N la construcción de un conjunto representativo de los pares coincidentes se efectúa de otra manera. Todas las consideracionnes anteriores suponen que $F(p_0)$ opere transitivamente sobre los subespacios tangenciales de dimensión fija de p_0. Si esta condición no está satisfecha, quizás, una métrica Riemanniana puede servir para determinar en forma sencilla un espacio $\Sigma \phi^{(\nu)}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Chern, *Integralgeometry in Klein Spaces* (Ann. o. Math. 43, 1942).

[2] Hadwiger, *Integralsiätze im Konvexring* (Abh. Sem. Hamburg, 20, 1956).

[3] Koszul, *Homologie et Cohomologie des Algèbres de Lie* (Bull. Soc. Math. France 78, 1950).

[4] Santaló, *Integralgeometry in aff. and proj. Spaces* (Ann. o. Math. 51, 1950).

ECUACIONES DIFERENCIALES Y ANALISIS FUNCIONAL

por José L. Massera
(Instituto de Matemática y Estadística, Universidad de la República, Montevideo)

Genéricamente hablando, el tema de esta investigación es el estudio de ciertas propiedades de las ecuaciones y sistemas diferenciales lineales y cuasi-lineales, utilizando métodos del análisis funcional. La investigación fue realizada en estrecha colaboración con J. J. Schäffer y está íntimamente vinculada con los trabajos sobre espacios funcionales que él ha expuesto en otra comunicación de este Symposium. Los resultados obtenidos han sido publicados en parte; otros resultados están en curso de publicación y hay diversos temas sobre los cuales la investigación continúa, tales como, por ejemplo, la extensión de los resultados a ecuaciones definidas en todo el eje real, a ecuaciones en diferencias finitas, etc.

Las ecuaciones consideradas son:

$$\dot{x} + A(t)\,x = 0 \tag{1}$$

$$\dot{x} + A(t)\,x = f(t) \tag{2}$$

$$\dot{x} + A(t)\,x = h(x, t) \tag{3}$$

en que x es un elemento de un espacio de Banach X; $A(t)$ un endomorfismo de X y f una función con valores en X; ambos funciones de la variable independiente escalar $t \in J = [0, \infty]$, integrales (Bochner) en cada intervalo finito parcial; $\dot{x} = dx/dt$; h una función, en general no lineal, de $X \times J$ en X, que satisface oportunas hipótesis de regularidad y acotación.

Un problema central en todo el trabajo es el siguiente: ¿en qué condiciones puede asegurarse que (2) tiene al menos una solución perteneciente a un espacio funcional de Banach D (una D-solución) para cada $f \in$ B, en que B es otro espacio funcional de Banach dado? (En ese caso, diremos que la pareja (B, D) es *admisible* para la ecuación (2)). Los espacios funcionales considerados pertenecen a las clases estudiadas por J. J. Schäffer en [14], entre los cuales figuran todos los espacios de Orlicz y, a fortiori, los espacios $L^p, 1 \leqq p \leqq \infty$; en lo sucesivo utilizaremos la terminología y anotaciones de ese trabajo. El caso particular B = D = C, el espacio de las funciones continuas y acotadas en J, siendo X de dimensión finita y A continuo, fue estudiado por Perron [11] que, desde este punto de vista, puede considerarse como el iniciador de este tipo de investigaciones. Ciertos trabajos de Persidskii [12], Malkin [5], Maizel [4], Krein [2], Kučer [3], se vinculan también a estos problemas; los dos últimos utilizan algunos métodos del análisis funcional.

La incidencia del análisis funcional en nuestro trabajo proviene de tres ángulos diferentes:

a) Del hecho de que X es un espacio de Banach, en general de dimensión infinita. Esto no constituye, sin embargo, ni la aplicación más importante del análisis funcional ni el motivo esencial de la generalidad de los teoremas obtenidos; casi todos los teoremas conservan su significación en el caso en que X es un espacio euclideano de dimensión finta.

b) De la aplicación de teoremas de categoría del análisis funcional (aún en el caso en que $\dim X < \infty$).

c) De las propiedades de las clases de espacios funcionales consideradas.

Análogos comentarios pueden hacerse en relación a la sustitución de las hipótesis de continuidad usuales en la teoría de las ecuaciones diferenciales por hipótesis del tipo de Carathéodory. En efecto, los teoremas conservarían, en lo fundamental, todo su valor si se les enunciara bajo hipótesis de continuidad. Sin embargo, muchas demostraciones se simplifican formalmente bastante cuando se trabaja en las condiciones más generales.

De los teoremas demostrados resulta que la admisibilidad de tales o cuales parejas (B, D) es condición necesaria y suficiente para que las soluciones de la ecuación (1) tengan uno u otro de los siguientes tipos de comportamiento:

Dicotomía de las soluciones de (1): Existen dos subespacios complementarios Y_0, Y_1 de X (puede extenderse la definición y los teoremas al caso en que existe Y_0 pero no tiene complemento Y_1) y constantes positivas N_0, N'_0, γ_0, tales que:

(Di) Para toda solución $x(t)$ de (1) con $x(0) \in Y_0$, y todo par de valores $t \geqq t_0 \geqq 0$, $\|x(t)\| \leqq N_0 \| x(t_0)\|$;

(Dii) Para toda solución $x(t), x(0) \in Y_1$, $\|x(t)\| \geqq N'_0 \|x(t_0)\|$, $t \geqq t_0 \geqq 0$;

(Diii) Para toda pareja de soluciones no triviales $x_i(t)$, $x_i(0) \in Y_i$, $i = 0, 1$, $\gamma[x_0(t), x_1(t)] \geqq \gamma_0$, $t \geqq 0$. ($\gamma[x, y]$ designa la «distancia angular» [1] $\| \|x\|^{-1} x - \|y\|^{-1} y\|$).

Dicotomía exponencial de las soluciones de (1): Existen dos subespacios complementarios Y_0, Y_1 y constantes positivas N, N', ν, ν', γ_0, tales que:

(Ei) Para toda solución $x(t)$, $x(0) \in Y_0$, $\|x(t)\| \leqq N e^{-\nu(t-t_0)}$ $\|x(t_0)\|$, $t \geqq t_0 \geqq 0$;

(Eii) Para toda solución $x(t)$, $x(0) \in Y_1$, $\|x(t)\| \geqq N' e^{\nu'(t-t_0)}$ $\|x(t_0)\|$, $t \geqq t_0 \geqq 0$;

(Eiii) = (Diii).

En el caso particular $Y_0 = X$, la dicotomía [exponencial] equivale a la estabilidad uniforme [exponencial o asintótica, que en este caso son equivalentes] de las soluciones de (1). En el caso general, podría designarse esos comportamientos como estabilidad [asintótica] condicional uniforme. Otros tipos de estabilidad también considerados son la estabilidad «en media» y «por trozos» en que, en lugar de los valores puntuales $x(t)$ que intervienen en las dicotomías, se consideran, respectivamente, los valores medios $\Delta^{-1} \int_t^{t+\Delta} \|x(\tau)\| \, d\tau$, y las D-normas de los «trozos» $\chi_{[t, t+\Delta]}(\tau)\, x(\tau)$ en que χ_E designa la función característica de un confunto E cualquiera; $\Delta > 0$ se supone fijo.

Una selección de resultados típicos de [9], que incluyen como casos muy particulares muchos teoremas de [6], son los siguientes:

L e m a 1. *Si* $f_n \to f$, $x_n \to x$ *(convergencia en media en cada intervalo finito) y* $\dot{x}_n + A(t)\, x_n = f_n$ *para todo* n*, entonces* x *es (a menos de equivalencias) una solución de (2) y la convergencia* $x_n \to x$ *es uniforme en cada intervalo finito.*

(Este lema expresa que la correspondencia lineal que asocia a cada $x(t)$ absolutamente continua la función $\dot{x}(t) + A(t)\, x(t)$ tiene su gráfico cerrado en la topología indicada).

L e m a 2. *Si* D *es un espacio funcional de Banach más fino que* L*, la familia* X_D *de las* D*-soluciones de* (1) *es un subespacio de* D *y la correspondencia* $T_0 : X_D \to X$ *definida por* $T_0\, x = x(0)$ *es biunívoca y acotada.*

T e o r e m a 1. *Si* X_{0D} *es la variedad lineal de los valores iniciales de las* D*-soluciones de* (1), X_{0D} *es cerrado si y sólo si existe* $S > 0$ *tal que, para toda D-solución* $|x|_D \leqq S \|x(0)\|$.

T e o r e m a 2. *Si* (B, D) *es una pareja admisible, existe* $K > 0$ *tal que, para todo* $\varepsilon > 0$ *y toda* $f \in$ B*, existe una* D*-solución* $x(t)$ *de* (2) *tal que* $|x|_D \leqq (K + \varepsilon)\, |f|_B$.

La demostración de los Teoremas 1 y 2, fundamentales para lo que sigue, se basa en los teoremas de categoría. De ahora en adelante, para evitar complicaciones suplementarias, nos limitaremos a considerar el caso $\dim X < \infty$ y designaremos con X_{1D} a un subespacio cualquiera complementario de X_{0D}. Observamos que las parejas (B, D) de $\mathcal{T}$-espacios de Banach forman un conjunto parcialmente ordenado por la relación definida por: (B_1, D_1) es *más fuerte* que (B_2, D_2) si B_1 es más débil que B_2 y D_1 más fino que D_2 (ver [14]). Como esto equivale a decir que, como conjuntos de funciones, $B_1 \supset B_2$, $D_1 \subset D_2$, es claro que la hipótesiss «(B_1, D_1) es admisible» es más fuerte que (implica) la hipótesis «(B_2, D_1) es admisible». Observamos además que las relaciones «más fuerte», «más débil», no son estrictas (toda pareja es, a la vez, más fuerte y más débil que sí misma); las relaciones estrictas se expresan con las locuciones «no más débil», «no más fuerte».

Teorema 3. *Si* (B, D) *es una* $\mathcal{C}$*-pareja admisible, existen funciones positivas* $M_0(\Delta)$, $M'_0(\Delta)$ *de* $\Delta>0$, *respectivamente no creciente y no decreciente, tales que, si* $t \geqq t_0 \geqq 0$,

(i) *para toda solución* $x(t)$ *de* (1) *con* $x(0) \in X_{0D}$ (*toda* D-*solución*)

$$\int_t^{t+\Delta} \|x(\tau)\|\, d\tau \leqq M_0(\Delta) \int_t^{t_0+\Delta} \|x(\tau)\|\, d\tau,$$

$$|\chi_{[t,t+\Delta]}\, x|_D \leqq M_0(\Delta)\, |\chi_{[t_0,t_0+\Delta]}\, x|_D;$$

(ii) *para toda solución* $x(t)$ *de* (1) *con* $x(0) \in X_{1D}$,

$$\int_t^{t+\Delta} \|x(\tau)\|\, d\tau \geqq M'_0(\Delta) \int_t^{t_0+\Delta} \|x(\tau)\|\, d\tau,$$

$$|\chi_{[t,t+\Delta]}\, x|_D \geqq M'_0(\Delta)\, |\chi_{[t_0,t_0+\Delta]}\, x|_D.$$

Teorema 4. *Si la* $\mathcal{C}$*-pareja* (B, D) *es admisible, y no más débil que* (L^1, L_0^∞), *existen funciones y números positivos* $M(\Delta)$ (*no creciente*), $M'(\Delta)$ (*no decreciente*), ν, ν', *tales que, si* $t \geqq t_0 \geqq 0$,

(i) *para toda solución* $x(t)$ *de* (1) *con* $x(0) \in X_{0D}$ (*toda* D-*solución*)

$$\int_t^{t+\Delta} \|x(\tau)\|\, d\tau \leqq M(\Delta)\, e^{-\nu(t-t_0)} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \|x(\tau)\|\, d\tau,$$

$$|\chi_{[t,t+\Delta]}\, x|_D \leqq M(\Delta)\, e^{-\nu(t-t_0)}\, |\chi_{[t_0,t_0+\Delta]}\, x|_D;$$

(ii) *para toda solución* $x(t)$ *de* (1) *con* $x(D) \in X_{1D}$,

$$\int_t^{t+\Delta} \|x(\tau)\|\, d\tau \geqq M'(\Delta)\, e^{\nu'(t-t_0)} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \|x(\tau)\|\, d\tau,$$

$$|\chi_{[t,t+\Delta]}\, x|_D \geqq M'(\Delta)\, e^{\nu'(t-t_0)}\, |\chi_{[t_0,t_0+\Delta]}\, x|_D.$$

El Teorema 3 [4] expresa las propiedades ya enunciadas de estabilidad [asintótica] condicional uniforme en media y por trozos. (Comparar con las dos primeras propiedades (puntuales) de las dicotomías).

Teorema 5. *Si la $\mathcal{C}$-pareja* (B, D) *es admisible y además, o bien es más fuerte que* (L^1, L^∞) *o bien* $A \in M$, *los subespacios* X_{0D} X_{1D} *engendran una dicotomía de las soluciones de* (1). *Recprocamente, si hay una dicotomía,* (L^1, L_0^∞) *es admisible (y toda pareja más débil).*

Teorema 6. *Si la $\mathcal{C}$-pareja* (B, D) *es admisible y no más débil que* (L^1, L_0^∞) *y si hay una dicotomía (en particular, si* $A \in M$), *los subespacios* x_{0D}, x_{1D} *engendran una dicotomía exponencial de las soluciones de* (1). *Recíprocamente, si hay dicotomía exponencial, son admisibles las parejas* (M, L^∞), (M_0, L_0^∞), (L^1, T) *(y muchas otras).*

El Teorema 5 [6] expresa la relación entre la admisibilidad de ciertas parejas y la estabilidad [asintótica] condicional uniforme puntual.

En trabajos anteriores se han examinado otros diversos problemas, de los cuales puede dar idea la siguiente selección de teoremas.

a) Teoremas de existencia de soluciones casi-periódicas (esencialmente en [6], [10]):

Teorema 7. *Si la $\mathcal{C}$-pareja* (B, D) *es admisible y no más débil que* (L^1, L_0^∞) *y si* $A(t)$ *es casi-periódico, para cada* f *casi-periódica la* (2) *tiene una y una sola solución casi-periódica.*

b) Teoremas sobre ecuaciones no lineales (esencialmente en [6]):

Teorema 8. *Sea* (B, D) *una $\mathcal{C}$-pareja admisible y* $h(x, t)$ *una función definida para* $t \in J$, $x \in X$, $\|x\| < a$ $(0 < a \leqq \infty)$, *con valores en* X, *tal que, para cada* $x \in D \wedge L^\infty$, $|x|_\infty < a$, *sea* $h(x(t), t) \in B$. *Sea* $\beta = |h(0, t)|_B$ *y supongamos que exista una constante* $\gamma > 0$ *tal que, para cada pareja* $x', x'' \in D \wedge L^\infty$, $|x'|_\infty$, $|x''|_\infty < a$, *sea* $|h(x'(t), t) - h(x''(t), t)|_B \leqq \gamma\, |x' - x''|_D$. *Entonces, si* β, γ *son suficientemente pequeños, existe* $b > 0$ *tal que, para cada* $\xi_0 \in X_{0D}$, $\|\xi_0\| < b$, *existe una y una sola solución* $x(t, \xi_0) \in D$ *de la* (3) *tal que* $x(0, \xi_0) = \xi_0 + \xi_1$, $\xi_1 \in X_{1D}$.

Corolario. *Sea* (B, D) *una* $\mathcal{C}$*-pareja admisible y no más débil que* $(\mathrm{L}^1, \mathrm{L}_0^{\infty})$, $A \in \mathrm{M}$. *Si* $h(x, t)$ *es una función definida para* $t \in J$, $x \in \mathrm{X}$, $\|x\| < a$, *tal que es continua y acotada, como función de* t, *para cada* x *fijo, y si existe una constante positiva* γ *tal que* $\|h(x', t) - h(x'', t)\| \leqq \gamma \|x' - x''\|$ *para toda pareja* $x', x'' \in X$, $\|x'\|$, $\|x''\| < a$ *y todo* $t \geqq 0$, *entonces vale la conclusión del Teorema 8, con* C *en lugar de* D.

Un resultado análogo vale para la existencia de soluciones casi-periódicas de la (3).

c) Teoremas de «grossièreté» (esencialmente en [6]):

Teorema 9. *Sea* $(\mathrm{B}, \mathrm{L}^{\infty})$ *admisible y* $B \in \mathrm{B}(\widetilde{X})$ ($\widetilde{X}$: *espacio de los endomorfismos de* X). *Entonces, si* $|B|_{\mathrm{B}}$ *es suficientemente pequeña,* $(\mathrm{B}, \mathrm{L}^{\infty})$ *es admisible para la ecuación*

$\dot{x} + (A(t) + B(t))\, x = f(t)$.

d) Teoremas del segundo método de Lyapunov [8]:

Teorema 10. *Condición necesaria y suficiente para que haya dicotomía exponencial es que exista una función de Lyapunov (generalizada)* V *con una cota superior infinitamente pequeña y tal que* V' *sea definida.*

Teorema 11. *Condición necesaria y suficiente para que haya dicotomía es que existan dos funciones no negativas* V_0, V_1, *positivamente homogéneas del mismo grado, tales que* $V_0 + V_1$ *sea definida positiva y tenga una cota superior infinitamente pequeña, y* $V'_0 \leqq 0$, $V'_1 \geqq 0$.

e) Teoremas sobre ecuaciones periódicas (que son esencialmente nuevos sólo si $\dim X = \infty$) [7]:

Teorema 12. *Si* $A(t)$ *es periódica de período* 1 *y* $|A|_{\mathrm{M}} < \log 4$, *existe una representación de Floquet* $x(t) = P(t)\, e^{tB} x_0$ *de las soluciones de* (1), *con* P *periódica y* B *constante.*

(La representación no es posible en general; existen contraejemplos con $|A|_{\mathrm{M}}$ arbitrariamente poco superior a π).

Teorema 13. *Sea* $A(t)$ *periódica de período* 1 *y la adherencia de* $X_0 = X_{0C}$ *reflexiva. Si para alguna* f *periódica de período* 1 *la* (2) *tiene una solución acotada, tiene una solución periónica de período* 1.

Teorema 14. *Si* (B, D) *es una* $\mathcal{C}$*-pareja admisible y no más débil que* (L^1, L_0^∞) *y si* $A(t)$ $f(t)$ *son periódicos de período* 1, *existe una y una sola solución periódica de período* 1.

f) Teoremas sobre ecuaciones con coeficientes constantes [13] (generalizaciones al caso de dimensión infinita).

BIBLIOGRAFIA

[1] J. A. CLAKSON, *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 40 (1936), 396-414.

[2] M. G. KREIN, *Sobre algunas cuestiones relacionadas con las ideas de Lyapunov en la teoría de la estabilidad*, Uspehi Mat. Nauk (N. S.), 3, Nº 3 (25) (1948), 166-169 (en ruso).

[3] D. L. KUČER, *Acerca de algunos criterios de acotación de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 69 (1949, 603-606 (en ruso).

[4] A. D. MAIZEL, *Acerca de la estabilidad de las soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales*, Trudy Uralskogo Politehn. Inst., 5 (1954), 20-50 (en ruso).

[5] I. G. MALKIN, *Acerca de la estabilidad en primera aproximación*, Sbornik Naučnyh Trudov Kazanskogo Aviacionnogo Inst., 3 (1935), 7-17 (en ruso).

[6] J. L. MASSERA AND J. J. SCHÄFFER, *Linear differential equations and functional analysis, I*, Annals of Math., 67 (1958), 517-573.

[7] J. L. MASSERA AND J. J. SCHÄFFER, *Linear differential equations and functional analysis, II. Equations with periodic coefficients*, ibid, 69 (1959), 88-104.

[8] J. L. MASSERA AND J. J. SCHÄFFER, *Linear differential equations and functional analysis, III. Lyapunov's second method in the case of conditional stability*, ibid, 69 (1959), 535-574.

[9] J. L. MASSERA AND J. J. SCHÄFFER, *Linear differential equations and functional analysis, IV*, (en publicación).

[10] J. L. MASSERA, *Un criterio de existencia de soluciones casi-periódicas de ciertos sistemas de ecuaciones diferenciales casi-periódicas*, Publ. Inst. Mat. Estad. (Montevideo), III (1958), 99-103.

[11] O. PERRON, *Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen*, Math. Zeitschrift, 32 (1930), 703-728.

[12] K. P. PERSIDSKII, *Acerca de la estabilidad del movimiento en primera aproximación*, Mat. Sbornik, 40 (1933), 284-293 (en ruso).

[13] J. J. SCHÄFFER, *Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes en espacios de Banach*, Publ. Inst. Mat. Estad. (Montevideo), III (1958), 105-110.

[14] J. J. SCHÄFFER, *Function spaces with translations*, Math. Annalen, 137 (1959), 209-262.

ALGUNS RESULTADOS RECENTES SOBRE EQUAÇOES DIFERENCIAIS PARCIAIS LINEARES DE COEFICIENTES CONSTANTES

por LEOPOLDO NACHBIN

A teoria das equações diferenciais parciais realizou vários progressos importantes nos últimos quinze anos, em virtude do influxo de novos métodos e idéias. Uma bôa parte do avanço verificado tem girado em tôrno dos trabalhos de Garding, Leray, Schwartz e sua escola. Na presente exposição, abordaremos apenas alguns aspectos que se caracterizam pelo emprego sistemático da Análise Funcional e, mais particularmente, dos espaços vetoriais topológicos, das distribuições e da análise harmônica. Limitar-nos-emos às equações diferenciais parciais lineares de coeficientes constantes no R^n, muito embora os resultados sôbre os quais iremos discorrer sejam em parte conhecidos ou se possa naturalmente conjecturar a sua extensão a equações diferenciais parciais mais gerais, lineares de coeficientes variáveis ou não lineares, no R^n ou em variedades diferenciáveis, ou às equações de convolução, ou às equações diferenciais parciais em uma infinidade de variáveis, ou aos sistemas de equações, ou à análise harmônica.

Indicaremos com E a álgebra topológica das funções complexas infinitamente diferenciáveis no R^n. Representaremos com D a álgebra topológica das funções complexas infinitamente diferenciáveis no R^n de suportes compactos. Notemos que D é uma subálgebra de E mas não uma subálgebra topológica. Indicaremos com D′ o espaço vetorial topológico das distribuições em R^n, ou seja o dual topológico de D. Consideremos, também, o dual topológico E′ de E, que será identificado naturalmente como espaço vetorial ao espaço vetorial das distribuições de suportes compactos em R^n. Finalmente, seja S a álgebra topológica das funções complexas infinitamente diferenciáveis e rapidamente decrescentes no infinito em R^n. Designaremos com S′ o dual topológico de S, que será identificado naturalmente como espaço vetorial a um certo espaço vetorial de distribuições em R^n, que são ditas distribuições temperadas.

Consideremos um operador diferencial parcial $O = \Sigma a_p D^p$, onde $p = (p_1, ..., p_n)$ é uma sequência de inteiros positivos, $D^p = \partial^{p_1 + \cdots + p_n} / \partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_n^{p_n}$ e o somatório é finito. O opera sôbre os espaços de funções ou de distribuições. Suporemos $O \neq 0$.

O aplica E sôbre E como uma aplicação contínua e aberta. Em virtude da teoria das equações lineares nos espaços vetoriais topológicos e da teoria da dualidade, essa asserção equivale a dizer-se que O aplica E′ homeomorficamente sôbre o subespaço vetorial fechado O(E′) de E′. Esses resultados foram estabelecidos por Malgrande (1954) e, independentemente, por Ehrenpreis (1954).

O aplica D′ sôbre D′ como uma aplicação contínua e aberta. Em virtude da teoria das equações lineares nos espaços vetoriais topológicos e da teoria da dualidade, tal asserção é equivalente a afirmar-se que O aplica D homeomorficamente sôbre o subespaço vetorial fechado O(D) de D. Esses resultados, conjecturados por Schwartz e Malgrange, foram demonstrados por Ehrenpreis (1955).

Chama-se solução elementar de O a toda distribuição E no R^n tal que $O(E) = \delta$, sendo δ a medida de Dirac. O tem ao menos una solução elementar. Tal fato resulta imediatamente do teorema de Ehrenpreis segundo o qual O aplica D′ sôbre D′, mas uma demonstração direta muito simples já havia sido dada anteriormente por Malgrange (1953); cfr. Ehrenpreis (1954). Vários resultados parciais, devidos principalmente a Malgrange, relativos ao comportamento local ou global de uma solução elementar são conhecidos.

Recentemente, Hormander (1958) demonstrou uma conjetura natural de Schwartz, segundo a qual O admite sempre ao menos uma solução elementar temperada. De um modo mais geral, O aplica S′ sôbre S′ como uma aplicação contínua e aberta. Pela teoria das esquações lineares nos espaços vetoriais topológicos e a teoria da dualidade, essa asserção equivale a dizer-se que O aplica S homeomorficamente sôbre o subespaço vetorial fechado O(S) de S.

Tais resultados de Ehrenpreis, Hormander e Malgrange são, através da transformação de Fourier, caso particular do chamado problema da divisão de distribuições, correspondendo à divisão de uma distribuição por um polinômio. Mais recentemente, Lojasiewicz (1958), generalizando resultados prévios de Schwartz e estabelecendo uma conjetura do próprio Schwartz, demonstrou que a divisão de uma distribuição por uma função analítica real é sempre possivel, isto é a equação $T = \varphi S$ admite sempre uma solução S, quaisquer que sejam a distribuição T e a função analitica real φ não identicamente nula.

A teoria clásica das equações elíticas teve um dos seus aspectos fuundamentais extendido de uma maneira importante por Hormander (1955). Classicamente, se o operador fôr de sequunda ordem, isto é $O = \Sigma\, a_{ij}\, \partial^2 / \partial x_i \partial x_j$ mais têrmos de grau 1 e 0, e se os coeficientes forem reais, então O é dito elítico quando a fórma quadrática $\Sigma\, a_{ij}\, t_i\, t_j$ fôr definida (por exemplo positiva), ou seja $\Sigma\, a_{ij}\, t_i\, t_j \geqq 0$ qualquer que seja $\{t_i\}$ e $\Sigma\, a_{ij}\, t_i\, t_j = 0$ implicar $\{t_i\} = 0$. De um modo mais geral, retomando o caso de O de ordem qualquer m e de coeficientes complexos, a definição apropiada de eliticidade consiste em requerer que

$$\sum_{|p| = m} a_p\, t^p \neq 0 \quad \text{se} \quad t \neq 0,$$

onde $|p| = p_1 + \ldots + p_n$ se $p = (p_1, \ldots, p_n)$ e $t^p = t_1^{p_1} \ldots t_n^{p_n}$ se $t = (t_1, \ldots, t_n)$. Os operadores elíticos têm uma propriedade fundamental, que não é característica apenas dêsses operadores mas sim de uma classe mais ampla, que passaremos a definir.

O é dito hipo-elítico se, toda vez que $O(S) = T$, onde S e T são distribuições no R^n e T fôr uma função infinitamente diferenciável num aberto de R^n, então S será também uma função infinitamente diferenciável nêsse mesmo aberto. Um teorema básico, que remonta a Serge Bernstein, sendo um ingrediente fundamental do chamado método da projeção ortogonal de Weyl, afirma-nos que todo operador elítico é hipo-elítico.

Se E fôr uma solução elementar de O e êsse operador fôr hipo-elítico, como $\delta = 0$ no complementar da origem, então

E será infinitamente diferenciável no complementar da origem. Reciprocamente, se O admitir uma solução elementar que seja infinitamente diferenciável no complementar da origem, então O será hipo-elítico. E' dessa fórma que constatamos que alguns operadores clássicos são hipo-elíticos, através de uma solução elementar conhecida.

A caracterização direta dos operadores hipo-elíticos foi conseguida por Hormander. Seja p o polinômio em n variáveis tal que

$$O = p\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right),$$

onde o denominador i é incluido por conveniência. Então

$\wedge(p) = \{s \in R^n;\ p(x+s) = p(x)$ qualquer que seja $x \in R^n\}$ é um subespaço vetorial de R^n. O polinômio p é dito completo quando $\wedge(p) = 0$, o que significa que, em têrmos de qualquer base em R^n, o polinômio sempre depende de todas as variáveis. Para que O seja hipo-elítico é necessário e suficiente que p seja completo e que sejam satisfeitas as duas condições equivalentes seguintes:

(1) se $\xi, \eta \in R^n$, então $p(\xi + i\eta) \to \infty$ quando $\xi \to \infty$ e η permanece fixo.

(2) dado $A \geqq 0$, existe $k \geqq 0$ tal que $p(\xi + i\eta) \neq 0$ desde que $\xi, \eta \in R^n$, $|\eta| \leqq A$ e $|\xi| \geqq k$.

Outras fórmas equivalentes dessas condições foram, também, indicadas por Hormander.

INSTITUTO DE MATEMATICA PURA E APLICADA

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FISICAS

RIO DE JANEIRO

REFERENCIAS

BROWDER, F., *Regularity theorems for solutions of partial differential equations*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 43, pp. 234-236 (1956).

EHRENPREIS, L., *Solution of some problems of division*, I, Amer. Journ. Math., vol. 76, pp. 883-903 (1954).

— — *Solution of some problems of division*, II, Amer. Journ. Math., vol. 77, pp. 286-292 (1955).

— — *The division problem for distributions*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 41, pp. 756-758 (1955).

— — *Completely inversible operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 41, pp. 945-946 (1955).

— — *Solution of some problems of division*, III, Amer. ourn. Math., vol. 78, pp. 685-715 (1956).

— — *General theory of elliptic equations*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 42, pp. 39-41 (1956).

GARDING, L. & MALGRANDE, B., *Opérateurs différentiels partiellement hypoelliptiques*, Comptes Rendus Acad. Sci. París, vol. 247, pp. 2083-2085 (1958).

GARDING, L., *Some trends and problems in liner partial differential equations*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Edinburgh, 1958, pp. 87-102, Cambridge (1960).

HORMANDER, L., *On the theory of general partial differential operators*, Acta Math., vol. 94, pp. 161-248 (1955).

— — *On the division of distributions by polynomials*, Arvik for Mathematik, vol. 3, pp. 555-568 (1958).

— — *Differentiability properties of solutions of systems of differential equations*, Arkiv for Mathematik, vol. 3, pp. 527-535 (1958).

— — *On interior regularity of the solutions of partial differential equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. 11, pp. 197-218 (1958).

— — *On the regularity of the solutions of boundary problems*, Acta Math., vol. 99, pp. 225-264 (1958).

JOHN, F., *General properties of solutions of liner elliptic partial differential equations*, Proc. Symp. Spectral Theory and Differential Problems, Oklahoma, pp. 113-175 (1951).

— — *Plane waves and spherical means applied to partial differential equations*, New York, (1955).

LAX, P. D., *On Cauchy's problem for hyperbolic equations and the differentiability of solutions of elliptic equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. 8, ps. 615-633 (1955).

LOJASIEWICZ, S., *Division d'une distribution par une fonction analytique de variables réelles*, Comptes Rendus Acad. Sci. París, vol. 246, pp. 683-686 (1958).

— — *Sur le problème de la division*, Studia Mathematica, vol. 18, pp. 87-136 (1959).

MALGRANGE, B., *Equations aux dérivées partielles à coefficients constans. 1. Solutions élémentaires.* Comptes Rendus Acad. Sci. París, vol. 237, pp. 1620-1622 (1953).

— — *Equations aux dérivées partielles à coefficients constants. Equations avec second membre.* Comptes Rendus Acad. Sci. París, vol. 238, pp. 196-198 (1954).

CAMPOS DE HOMOGENEIDAD

(Resumen)

por A. E. Sagastume Berra

Llamamos *campo de homogeneidad* a un conjunto $H = \{0, 1, a, b, \ldots\}$ que verifica ciertos postulados, que pueden resumirse en lo siguiente: para los elementos $\neq 0$ de H está definida una relación ecuable (es decir, simétrica, reflexiva y transitiva), la de *homogeneidad*, $a H b$ (negación, a no $H b$), en virtud de la cual el conjunto de dichos elementos queda repartido en *clases de homogeneidad* H_α, ninguna vacía y sin elementos comunes. El índice α que sirve para distinguir estas clases se llama el *grado* de H_α o de cualquiera de sus elementos, y estos índices constituyen un conjunto $\Gamma = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ que a priori puede ser cualquiera. Se establece además que $0 H a$ y $a H 0$ cualquiera sea a. Que el conjunto $H_\alpha{}^* = H_\alpha \cup \{0\}$ es, para cualquier α, un grupo abeliano respecto a una operación de suma$_\alpha$ (que para simplificar se indica como *suma*), siendo 0 (elemento común a todos los $H_\alpha{}^*$) el elemento unidad de este grupo. Además, se postula que entre los elementos del campo H está defindia una *multiplicación* $a \, . \, b$ o ab, conmutatiiva, asociativa, distributiva respecto a todas las sumas $+_\alpha$, con un elemento unidad 1 tal que $a \, . \, 1 = 1 \, . \, a = a$ para todo a, y a la que se imponen además condiciones que significan en último análisis que el conjunto Γ de los grados puede convertirse en un *semigrupo abeliano ordenado positivo*, si $\alpha + \beta$ es el grado de un producto $a_\alpha \, b_\beta$, siendo a_α de grado α, b_β de grado β. El grado cero 0 (unidad del semigrupo Γ) es el grado de la unidad 1 y de todo elemento homogéneo con 1.

Bajo estas condiciones, se ve que $H_0{}^*$ es el único de los $H_\alpha{}^*$ que sea un anillo, siendo un campo de integridad.

Como casos especiales de los campos de homogeneidad tenemos los dos extremos siguientes: 1º, cuando hay sólo una clase de homogeneidad, es decir, todos los elementos son homogéneos. Entonces $\mathrm{H} = H_0{}^*$ se reduce a un campo de integridad con unidad; y 2º, cuando cada elemento solamente es homogéneo consigo mismo (y con el cero). Entonces H es (isomorfo a) un semigrupo abeliano ordenado positivo con el agregado de un elemento cero para la multiplicación.

Se puede considerar a nuestro campo de homogeneidad H sumergido en un campo de integridad, el de los *polinomios* (que fácilmente pueden definirse por procedimientos conocidos) sobre H. Este campo P de los polinomios sobre H corresponde a lo que se ha llamado un *anillo graduado* o *álgebra graduada* [1], si bien con algunas diferencias. Dentro de P, el conjunto P_α de los polinomios que se reducen a un solo término de grado α es un grupo aditivo, isomorfo a $H_\alpha{}^*$ y estos grupos están ligados por la relación $\mathrm{P}_\alpha \mathrm{P}_\beta \subseteq \mathrm{P}_{\alpha+\beta}$. En particular, P_0 es un campo de integridad isomorfo a $H_0{}^*$.

A cada subcampo H′ de H le corresponde un subsemigrupo Γ' de Γ, formado por aquellos grados α' tales que $H_{\alpha'} \cap \mathrm{H}'$ no es vacío, y entonces los subgrupos aditivos $H'_{\alpha'}{}^* = H_{\alpha'}{}^* \cap \mathrm{H}'$ cumplen la condición

$$H'_{\alpha'}{}^* \, H'_{\beta'}{}^* \subseteq H'_{\alpha'+\beta'}{}^* \qquad (1)$$

y además, $1 \in H_0'^*$. Recíprocamente, dados un subsemigrupo Γ' y para cada $\alpha' \in \Gamma'$ un subgrupo $\mathrm{H}'_{\alpha'}{}^*$ de $H_{\alpha'}{}^*$, de modo que $1 \in H_0'^*$ y que los $H'_{\alpha'}{}^*$ cumplan la condición (1), la reunión de los $H'_{\alpha'}{}^*$ es un subcampo H′ de H.

Un *ideal en* H, o simplemente *ideal*, es un subconjunto I de H tal que, si $a, b \in \mathrm{I}$ y $c \in \mathrm{H}$, se tiene:

1) Si $a H b$, entonces $a - b \in \mathrm{I}$;
2) $ac \in \mathrm{I}$.

La *congruencia* de dos elementos a, b de H según el módulo I, $a \equiv b$ (mód. I), puede definirse así: se verificará tal

3

(1) Véase por ejemplo: C. CHEVALLEY: *Théorie des groupes de* LIE, Tome II: *Groupes algébriques* (Publications de l'Institut Mathématique de l'Université de Nancago). Actualités Sc. et Ind. Nº 1152, Paris. HERMANN & Cie., 1951, Cap. I, § 2.

relación cuando, y solamente cuando, sea $a H b$ y además $a - b \in \mathrm{I}$. Cuando ambos elementos son $\neq 0$, esta noción se reduce a la común en teoría de los grupos, de congruencia respecto al subgrupo $I_a{}^* = \mathrm{I} \cap H_a{}^*$ al que pertenecen ambos.

Esta relación, reflexiva y simétrica, no es transitiva. Para restablecer la transitividad recurrimos a la relación de *congruencia-estrella* (mód. I), definida así: $a \equiv^* b$ (mód. I) cuando: o bien a y b son distintos de cero y $a \equiv b$ (mód. I) en el sentido definido antes, o bien, si uno de los elementos es cero, el otro también lo es. Estas congruencias-estrella tienen la ventaja de poder sumarse y multiplicarse miembro a miembro (siempre que, en la operación de suma, los elementos que se suman sean homogéneos) y permiten por tanto definir el *campo de restos módulo* I $\overline{\mathrm{H}} = \mathrm{H} - \mathrm{I} = \{\overline{0}, \overline{a}, \overline{b}, \ldots\}$ con la relación de homogeneidad $\overline{a}\, \overline{H}\, \overline{b}$ si y solamente si $a H b$ y las operaciones $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b}$, $\overline{a} . \overline{b} = \overline{ab}$. En otros términos, el campo $\overline{\mathrm{H}}$ es *homomorfo* a H, en el sentido de la definición que sigue.

Un campo H′ se llama *homomorfo* al campo H si existe una correspondencia unívoca entre los elementos de H y los de H′, de modo de conservar la relación de homogeneidad y las operaciones de suma y multiplicación:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } a \to a',\ b \to b', \text{ entonces:} \\ a H b \text{ implica } a' H' b' \text{ y viceversa,} \\ a H b \text{ implica } a + b \to a' + b' \\ \qquad\qquad ab \to a' b' \end{array}\right\} . \tag{2}$$

Como de ordinario, el isomorfismo es el caso particular en que el homomorfismo sea biunívoco, de modo que en la correspondencia inversa también se conservan la homogeneidad y las operaciones. El homomorfismo se indica con $\mathrm{H} \to \mathrm{H}'$, el isomorfismo con $\mathrm{H} \cong \mathrm{H}'$.

En un homomorfismo, en general, el semigrupo Γ' de los grados de H′ es ordenadamente isomorfo a Γ.

Con estas nociones, se puede completar el resultado anterior, demostrando que las imágenes homomorfas de H son (salvo isomorfismos), solamente los campos de restos antes definidos. Es decir, que se verifica el

Teorema fundamental del homomorfismo: *Todo campo de restos* $\overline{\mathrm{H}} = \mathrm{H} - \mathrm{N}$ *módulo un ideal* N *es homomorfo a* H. *Recíprocamente, si* H′ *es una imagen homomorfa de* H, *entonces* $\mathrm{H}' \cong \overline{\mathrm{H}} = \mathrm{H} - \mathrm{N}$, *siendo* N *el ideal de los elementos que en el homomorfismo tienen por imagen el* 0′ *de* H′.

Actualmente se están estudiando más en detalle los ideales, que pueden ponerse en correspondencia biunívoca con los *ideales homogéneos* o *H*-ideales, que son ideales (en el sentido ordinario) en P, con la propiedad de que si un polinomio P pertenece a un tal ideal, también pertenecen a él todas las componentes homogéneas de P.

Los resultados de que aquí se da cuenta, así como las investigaciones que siguen, serán publicadas in extenso en la «Revista» de la Facultad de Ciencias Físicomatemáticas de La Plata.

FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMÁTICAS
La Plata, Agosto 1959.

SOBRE LAS TEORIAS DEL CAMPO UNIFICADO

por L. A. SANTALÓ

(Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires)

1. *Introducción.* La teoría de la relatividad general asigna al espacio tiempo una estructura de espacio de Riemann cuadridimensional (postulado fundamental). Sentado este postulado, las ecuaciones del campo aparecen de una manera natural y obligada, con solo tener en cuenta el principio de la «simplicidad», es decir, que ellas deben ser las más simples entre las ecuaciones covariantes (tensoriales) posibles, dada la naturaleza del problema.

En efecto, en el vacío, dichas ecuaciones son

$$R_{ij}=0, \tag{1.1}$$

donde R_{ij} es el tensor de Ricci del espacio, que en un espacio de Riemann es el único tensor contraido del de curvatura y por tanto el tensor más simple de dos índices, después del fundamental g_{ij}.

En presencia de materia o de energía, las ecuaciones (1.1) se sustituyen por las

$$R_{ij}-\frac{1}{2}R\,g_{ij}=T_{ij}, \tag{1.2}$$

donde T_{ij} es el tensor materia-energía (dato físico) y en el primer miembro R es la curvatura escalar $R=R_{ij}\,g^{ij}$. Todavía se puede agregar en el primer miembro el término cosmológico λg_{ij} pero siempre se está dentro del teorema de E. Cartan [1]:

---

(1) *Sur les équations de la gravitation d' Einstein,* Journal de Math. Purès et Appliquées (Liouville), 1922, págs. 141-203.

Todo tensor de dos índices S_{ij} *cuyas componentes sean funciones del tensor simétrico fundamental* g_{ij} *y de sus derivadas parciales de primero y segundo orden, conteniendo a estas últimas linealmente, es de la forma* $S_{ij} = R_{ij} + \alpha R g_{ij} + \lambda g_{ij}$ *donde* α *y* λ *son constantes.*

En el caso de las ecuaciones de la gravitación, la constante α queda determinada por la ecuación de conservación $S^{ij}{}_{;i} = 0$.

En esta determinación de las ecuaciones del campo, que prácticamente elimina toda arbitrariedad de elección entre varias posibilidades, radica el principal atractivo de la teoría de la relatividad general, que posee a este respecto la máxima simplicidad conceptual.

No ocurre lo mismo con las posteriores teorías del campo unificado. En ellas las ecuaciones del campo se eligen entre varias posibilidades y se trata luego de justificar por razones diversas, de índole matemática o física; el porqué se han elegido unas y no otras. Este es el principal defecto de que adolescen la mayoría de las teorías del campo unificado y tal vez en ello radique la razón de su poco éxito.

En este trabajo vamos a considerar la última teoría de Einstein con sus modificaciones sucesivas desde 1950 a 1954. Queremos ver cómo habría que modificar sus ecuaciones del campo, o qué requisitos complementarios deberían cumplir, para que tuviesen el carácter de determinación obligada a partir de ciertos criterios naturales de simplicidad, tal como hemos visto ocurre en la relatividad general. Con estos agregados se obtienen sistemas *incompatibles*, lo que prueba que el ideal perseguido no es posible. Sin embargo, con estos sistemas, siempre tendremos una guía para elegir los sistemas parciales compatibles que parezcan más apropiados y tener en cuenta lo que falta para que la teoría fuera completamente satisfactoria desde este punto de vista.

Recordemos brevemente dicha teoría. Su postulado fundamental es que el espacio tiempo sigue siendo de cuatro dimensiones pero su estructura está ahora determinada por un tensor g_{ij} no necesariamente simétrico y una conexión afín $\Gamma^{i}{}_{hm}$ tampoco necesariamente simétrica. En vez del tensor g_{ij}, de determinante g, es cómodo introducir la densidad tensorial correspondiente, que en general utilizaremos en su forma contravariante

(1.3) $$G^{ij}=g^{ij}\sqrt{g}.$$

Con las notaciones usuales, que resumimos en el n. 2, las primeras ecuaciones del campo o *sistema fuerte* de Einstein, son

(1.4) $$G^{ij}{}_{|k}=0, \quad E_{ij}=0, \quad S_i=0$$

y otras ecuaciones, dadas también por el mismo Einstein poco tiempo después, son las que constituyen el *sistema débil*, a saber

(1.5) $$\begin{aligned} &G^{ij}{}_{|k}=0, \quad H^{ih}{}_{,h}=0, \\ &R_{(ij)}=0, \quad R_{[ij],k}+R_{[ki],j}+R_{[jk],i}=0. \end{aligned}$$

Las ecuaciones (1.4) se eligen por ciertas razones de simetría (simetría hermitiana). Las ecuaciones (1.5) resultan de un principio variacional, con lo cual está asegurada su compatibilidad.

Distintamente de lo que ocurre en la teoría de la relatividad general, los sistemas (1.4) y (1,5), no quedan obligatoriamente determinados a partir de ciertas hipótesis de simplicidad. Con iguales fundamentos se pueden sustituir por otros sistemas análogos pero no equivalentes. Nuestro objeto, como ya hemos dicho, es mostrar esta indeterminación y ver qué ecuaciones deberían agregarse a estos sistemas para que desapareciera.

Como bibliografía fundamental para la teoría del campo unificado a que nos referimos están los libros de Einstein [1], Hlavatý [2], Lichnerowicz [3] y Tonnelat [4]. En los de Hlavatý y Tonnelat, más específicamente dedicados a la teoría del campo unificado, se encuentra abundante bibliografía.

2. *Notaciones y fórmulas utilizadas.* Vamos a recopilar las notaciones y algunas fórmulas que utilizaremos.

a) De la conexión fundamental $\Gamma^m{}_{ih}$ se deduce la conexión simétrica

$$\Delta^m{}_{ih} = \frac{1}{2}\,(\Gamma^m{}_{ih} + \Gamma^m{}_{hi}) \tag{2.1}$$

y el tensor de torsión

$$S^m{}_{ih} = \frac{1}{2}\,(\Gamma^m{}_{ih} - \Gamma^m{}_{hi}) \tag{2.2}$$

del cual, por contracción, se obtiene el vector

$$S_i = S^m{}_{im}. \tag{2.3}$$

b) El tensor de Ricci

$$R_{ih} = \Gamma^m{}_{ih,m} - \Gamma^m{}_{im,h} + \Gamma^m{}_{lm}\,\Gamma^l{}_{ih} - \Gamma^m{}_{lh}\,\Gamma^l{}_{im} \tag{2.4}$$

tiene por parte simétrica

$$R_{(ih)} = \Delta^m{}_{ih,m} - \frac{1}{2}(\Delta^m{}_{im,h} + \Delta^m{}_{hm,i}) + \Delta^m{}_{lm}\,\Delta^l{}_{ih} - \Delta^m{}_{lh}\,\Delta^l{}_{im} - S^m{}_{lh}\,S^l{}_{im} - \frac{1}{2}(S_{i;h}(\Delta) + S_{h;i}(\Delta)) \tag{2.5}$$

y por parte antisimétrica

$$R_{[ih]} = \frac{1}{2}\,(\Delta^s{}_{hs,i} - \Delta^s{}_{is,h}) + S^m{}_{ih;m}(\Delta) - \frac{1}{2}\,(S_{i,h} - S_{h,i}) + S_l\,S^l{}_{ih}. \tag{2.6}$$

c) El tensor de Einstein E_{ih} que figura en (1.4) es

$$E_{ih} = -\frac{1}{2}\,(\Delta^s{}_{is,h} + \Delta^s{}_{hs,i}) + \Gamma^s{}_{ih,s} + \Gamma^l{}_{ih}\,\Delta^s{}_{ls} - \Gamma^s{}_{il}\,\Gamma^l{}_{sh} \tag{2.7}$$

que puede también escribirse

$$E_{ih} = R_{ih} + S_{i;h}(\Delta) - S_l\,S^l{}_{ih} + \frac{1}{2}\,(\Delta^s{}_{is,h} - \Delta^s{}_{hs,i}). \tag{2.8}$$

d) La coma indica siempre derivación parcial ordinaria. El punto y coma derivación covariante. Si no se indica la conexión, se entiende que se trata respecto de la conexión inicial Γ^m_{ih}. En caso contrario se indica la conexión entre paréntesis. Por ejemplo, en (2. 5) y (2. 6) las derivadas covariantes indicadas se refieren a la conexión simétrica (2. 1).

e) Con G^{ih} indicamos siempre una *densidad tensorial* contravariante. Su derivada polarizada o mixta, la indiraremos por la siguiente notación

$$G^{ih}{}_{|s} = G^{ih}{}_{,s} + \Gamma^i_{ms} G^{mh} + \Gamma^h_{sm} G^{im} - \Delta^m_{sm} G^{ih}. \tag{2. 9}$$

Llamando G al determinante de G_{ih}, una consecuencia importante de la ecuación $G^{ih}{}_{|s} = 0$ es (ver por ej. Tonnelat [4], pág. 39),

$$\Delta^m_{hm} = \frac{\partial}{\partial x^h} \log \sqrt{G}. \tag{2. 10}$$

Por comodidad descompondremos G^{ih} en su parte simétrica y antisimétrica

$$G^{ih} = H^{ih} + F^{ih} \tag{2. 11}$$

siendo

$$H^{ih} = \frac{1}{2} (G^{ih} + G^{hi}), \quad F^{ih} = \frac{1}{2} (G^{ih} - G^{hi}). \tag{2. 12}$$

Con estas notaciones, de (2. 10) se deduce la relación importante siguiente, válida para la parte simétrica de cualquier conexión respecto de la cual se cumpla $G^{ih}{}_{|s} = 0$,

$$\Delta^m_{hm,i} - \Delta^m_{im,h} = 0. \tag{2. 13}$$

f) Supondremos que los determinantes de H^{ih} y F^{ih} son siempre distintos de cero.

3. *Tensores de dos índices en un espacio de conexión afín.* Según el teorema general de equivalencia para un espacio de conexión afín no simétrica, los únicos tensores independientes que se pueden formar son el tensor de torsión S^m_{ih}, el de cur-

vatura $R^{m}{}_{ihs}$ y las contracciones y derivadas covariantes de ellos. (Ver, por ej. T. Y. Thomas, *The differential invariants of generalized spaces*, Cambridge University Press, 1934, págs. 204-205).

Las contracciones del tensor de curvatura son el tensor de Ricci (2.4) y el tensor

$$(3.1) \qquad R^{m}{}_{mih} = \Delta^{m}{}_{mi,h} - \Delta^{m}{}_{mh,i} + S_{i,h} - S_{h,i}.$$

En consecuencia, se puede enunciar:

En un espacio de conexión afín no simétrica

$$(3.2) \qquad \Gamma^{m}{}_{ih} = \Delta^{m}{}_{ih} + S^{m}{}_{ih}$$

los únicos tensores de dos índices cuyas componentes cumplen las condiciones

a) *Son funciones de la conexión y de sus derivadas parciales de primer orden;*

b) *Como funciones de la conexión son, a lo sumo, de segundo grado;*

son los ocho siguientes

$$(3.3) \qquad \begin{array}{l} R_{ih}, \quad \Delta^{m}{}_{im,h} - \Delta^{m}{}_{hm,i}, \quad S^{m}{}_{ih;m}, \quad S_{i;h}, \\ S_{h;i}, \quad S^{q}{}_{ir} S^{r}{}_{hq}, \quad S_i S_h, \quad S_m S^{m}{}_{ih}. \end{array}$$

Por tanto, el tensor más general que cumple las condiciones a), b) anteriores es

$$(3.4) \qquad \begin{aligned} T_{ih} = {} & \alpha R_{ih} + \beta (\Delta^{m}{}_{im,h} - \Delta^{m}{}_{hm,i}) + \gamma S^{m}{}_{ih;m} + \delta S^{q}{}_{ir} S^{r}{}_{hq} \\ & + \varepsilon S_{i;h} + \varphi S_{h;i} + \mu S_m S^{m}{}_{ih} + \nu S_i S_h, \end{aligned}$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \nu$ son constantes arbitrarias.

Es decir, así como en un espacio de Riemann el tensor más simple de dos índices, después del fundamental, es el de Ricci, en espacios de conexión afín no simétrca tenemos el anterior T_{ih} combinación lineal de otros ocho tensores todos los cuales poseen las características de simplicidad a) y b).

Para eliminar tal arbitrariedad de elección, las ecuaciones del campo que sustituyeran a las $R_{ih}=0$ de la relatividad general (en el vacío) deberían ser las que anulasen a T_{ih} cualesquiera que fueran las constantes $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \nu$. Para ello se tiene el siguiente

Teorema 1. *Las condiciones necesarias y suficientes para que se anulen todos los tensores T_{ih} cualesquiera que sean las constantes $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \nu$ son*

$$(3.5) \qquad R_{ih}=0, \quad \Delta^m{}_{im,h}-\Delta^m{}_{hm,i}=0, \quad S_i=0, \quad S^q{}_{ir}S^r{}_{hq}=0.$$

En efecto, la única condición no evidente es la $S^m{}_{ih;m}=0$ la cual es una consecuencia del sistema (3. 5) como resulta teniendo en cuenta la expresión (2. 6) de la parte antisimétrica del tensor de Ricci y sabiendo que la anulación de un tensor exige la anulación de sus partes simétrica y antisimétrica.

Obsérvese, de paso, que las condiciones (3. 5) llevan consigo la anulación del tensor de Einstein E_{ih} (2. 8). Para más detalles, ver [5].

4. *Ecuaciones deducidas de un principio variacional.* En la teoría del campo unificado de Einstein, además de la conexión se tiene la *densidad tensorial* G^{ih}. Las ecuaciones del campo pueden deducirse del principio variacional

$$(4.1) \qquad \delta \int R_{ih}\, G^{ih}\, dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4=0$$

con la condición de que $\Gamma^m{}_{ih}$ y G^{ih} puedan variar independientemente, siendo su variación nula en el contorno del dominio cuadridimensional considerado. Ver Lichnerowicz [3] o Tonnelat [4].

La elección en (4. 1) del tensor de Ricci no está a priori justificada. Junto con él tenemos ahora los ocho tensores (3. 3). Unas ecuaciones del campo, más naturales, que eliminarían toda elección arbitraria, serían (caso de existir) unas ecuaciones que satisfacieran al principio variacional

$$(4.2) \qquad \delta \int T_{ih}\, G^{ih}\, dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4=0,$$

para valores cualesquiera de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \nu$.

La solución de (4. 2), aplicando el método clásico de Euler y tras un cálculo un poco largo que hemos desarrollado en otro trabajo (ver [6] salvo un cambio de notación), resulta ser el sistema

$$K^{qs}{}_r = 0, \quad T_{ih} = 0 \tag{4.3}$$

donde T_{ih} es el tensor (3. 4) y

$$\begin{aligned} K^{qs}{}_r = {} & \alpha\,(-G^{qs}{}_{|r} + G^{qs}S_r + \delta^s{}_r\,(G^{qt}{}_{|t} + G^{qi}S_i)) \\ & -\beta\,(F^{qt}{}_{,t}\,\delta^s{}_r + F^{st}{}_{,t}\,\delta^q{}_r) \\ & +\gamma\,(-F^{qs}{}_{|r} + F^{ih}S^q{}_{ih}\,\delta^s{}_r + F^{qs}S_r) \\ & +\delta\,(H^{qi}S^s{}_{ir} - H^{si}S^q{}_{ir}) \\ & +\varepsilon\left(\frac{1}{2}(G^{qt}{}_{|t} + G^{qi}S_i)\,\delta^s{}_r + \right. \\ & \qquad\left. +\frac{1}{2}(G^{st}{}_{|t} + G^{si}S_i)\,\delta^q{}_r - G^{qs}S_r\right) \\ & +\varphi\left(\frac{1}{2}(-G^{tq}{}_{|t} + G^{iq}S_i)\,\delta^s{}_r + \right. \\ & \qquad\left. +\frac{1}{2}(G^{ts}{}_{|t} - G^{is}S_i)\,\delta^q{}_r - G^{sq}S_r\right) \\ & +\mu\left(\frac{1}{2}F^{ih}S^q{}_{ih}\,\delta^s{}_r - \frac{1}{2}F^{ih}S^s{}_{ih}\,\delta^q{}_r + F^{qs}S_r\right) \\ & +\nu\,(H^{qi}S_i\,\delta^s{}_r - H^{si}S_i\,\delta^q{}_r). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Con esta expresión se verifica el siguiente

T e o r e m a 2. *Para que sea* $K^{qs}{}_r = 0$ *para valores cualesquiera de las constantes* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \nu$ *es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones*

$$G^{qs}{}_{|r} = 0, \quad S^q{}_{ir}G^{si} - S^s{}_{ir}G^{iq} = 0. \tag{4.5}$$

Demostración:

a) Por cálculo directo se obtiene fácilmente

$$[G^{qs}{}_{|r}] = F^{qs}{}_{|r} + S^q{}_{ir}G^{si} - S^s{}_{ir}G^{iq} \tag{4.6}$$

donde el primer miembro indica la parte antisimétrica respecto de los índices q, s. Por tanto, de (4.5) se deduce también

$$F^{qs}{}_{|r} = 0 \tag{4.7}$$

y como

$$[F^{st}{}_{|t}] = F^{st}{}_{,t} \tag{4.8}$$

resulta

$$F^{st}{}_{,t} = 0. \tag{4.9}$$

b) Las segundas ecuaciones (4.5), escribiendo que son nulas su parte simétrica y antisimétrica respecto de los índices q, s se desdoblan en

$$S^q{}_{ir} F^{si} + S^s{}_{ir} F^{qi} = 0 \tag{4.10}$$

$$S^q{}_{ir} H^{is} - S^s{}_{ir} H^{iq} = 0. \tag{4.11}$$

De (4.11), haciendo $r = s$, resulta

$$S_i H^{iq} = 0 \tag{4.12}$$

y por tanto, habiendo supuesto no nulo el determinante de las H^{iq} resulta

$$S_i = 0. \tag{4.13}$$

c) De las segundas ecuaciones (4.5), haciendo $s = r$ y sumando, teniendo en cuenta (4.13) resulta

$$F^{ir} S^q{}_{ir} = 0. \tag{4.14}$$

d) Finalmente, la identidad (válida si se cumple (4.13)),

$$G^{ts}{}_{,t} + G^{ih} \Gamma^s{}_{ih} = G^{ts}{}_{|t} - 2 F^{it} S^s{}_{it},$$

teniendo en cuenta (4.14) nos dice que también es

$$G^{ts}{}_{,t} + G^{ih} \Gamma^s{}_{ih} = 0. \tag{4.15}$$

Con todas estas relaciones, es inmediato comprobar que el teorema es cierto.

Para que se cumpliera todo el sistema (4.3) o sea, el principio variacional (4.2), fuera satisfecho para valores cualesquiera de las constantes $\alpha, \beta, \ldots, \nu$, según los teoremas 1 y 2, teniendo en cuenta que como consecuencia de la primera condición (4. 5), se cumple la (2. 13), debería ser

$$(4.16)\quad \begin{aligned} &a)\quad G^{qs}{}_{|r}=0\\ &b)\quad S^q{}_{ir}\,G^{si}-S^s{}_{ir}\,G^{iq}=0.\\ &c)\quad S^q{}_{ir}\,S^r{}_{hq}=0\\ &d)\quad R_{ih}=0. \end{aligned}$$

Consecuencias importantes de este sistema son las ecuaciones (4. 9), (4.13) y (4. 14), a las cuales se puede agregar la ecuación

$$(4.17)\qquad G^{iq}\,S^s{}_{ir}\,S^r{}_{qs}=0$$

que se obtiene de b) multiplicando por $S^r{}_{qs}$ y sumando.

El sistema a), b), c), d) es claramente *incompatible*, por tener más ecuaciones que incógnitas. Esto prueba que una teoría del campo unificado basada en los principios de la que estamos considerando, siempre tendrá cierto grado de arbitrariedad en la elección de sus ecuaciones del campo. Eligiendo entre las a), b), c), d) o entre ellas y las (4. 9), (4,13), (4. 14), (4. 17) un sistema compatible cualquiera, se tendrá una posibilidad, a la cual siempre será posible buscar una justificación a posteriori si es que resulta útil a la física.

5. *Apéndice.* Las ecuaciones del campo para el principio variacional (4. 2) son las (4. 3). El primer grupo parece extraordinariamente complicado. Sin embargo, escribiendo las ecuaciones $K^{ts}{}_t=0$, $K^{qt}{}_t=0$, despejando de las primeras $H^{st}{}_{,t}$ y de las segundas $H^{qt}{}_{,t}$ y sustituyendo en (4. 4) resultan unas ecuaciones que pueden condensarse en la forma relativamente simple siguiente

$$(5.1)\quad \begin{aligned} K^{qs}{}_r=&-(\alpha+\gamma)\,F^{qs}{}_{|r}\,({}^*L)-\alpha\,H^{qs}{}_{|r}({}^{**}L)\\ &+\frac{1}{3}(\gamma+2\beta)\,\delta^s{}_r\,F^{qt}{}_{,t}+\frac{1}{3}(-2\alpha+2\beta-\gamma)\,\delta^q{}_r\,F^{st}{}_{,t}=0 \end{aligned}$$

siendo las conexiones respecto de las cuales están realizadas las derivadas covariantes poralizadas indicadas (recordar (2. 9)) las

$$(5.2)\quad \begin{aligned} {}^{*}L^{q}_{ir} &= \Gamma^{q}_{ir} + \frac{1}{3}\left(2 - \frac{\varepsilon-\varphi-\mu}{\alpha+\gamma}\right)\delta^{q}_{i} S_r - \frac{1}{3}\frac{\varepsilon-\varphi-\mu}{\alpha+\gamma}\delta^{q}_{r} S_i \\ {}^{**}L^{q}_{ir} &= \Delta^{q}_{ir} + \left(1+\frac{\delta}{\alpha}\right) S^{q}_{ir} + \frac{1}{3}\left(2+\frac{\delta-\varepsilon-\varphi}{\alpha}\right)\delta^{q}_{i} S_r - \\ &\quad - \frac{1}{3}\left(\frac{\delta+\varepsilon+\varphi}{\alpha}\right)\delta^{q}_{r} S_i, \end{aligned}$$

las cuales cumplen las condiciones de ser nulos los vectores contraídos de sus partes antisimétricas, o sea

$$ {}^{*}S_i = 0, \quad {}^{**}S_i = 0 $$

siendo estos vectores los análogos a (2. 3) para las conexiones (5. 2).

Esta forma (5. 1) condensa resultados que obtuvimos en [6] y puede servir para interpretar las ecuaciones que se elijan dentro de las a), b), c), d) del número precedente como ecuaciones obtenidas en base a un principio variacional.

B I B L I O G R A F I A

[1] A. Einstein, *The Meaning of Relativity*, Apéndice II, 3ª y 4ª edición, 1950 y 1953, Princenton.

[2] V. Hlavaty, *Geometry of Einstein's unified field theory*, P. Noordhoff Ltd. Groningen, Holanda, 1958.

[3] A. Lichnerowicz, *Les théories relativistes de la gravitation et de l'electromagnetisme*, Masson, París 1955.

[4] M. A. Tonnelat, *La Théorie du champ unifié d'Einstein et quelques-uns de ses développements*, Gauthier-Villars, París, 1955.

[5] L. A. Santaló, *Sobre unos tensores análogos al de curvatura en espacios de conexión afín no simétrica*, Revista de Matemáticas y Física Teórica de la Univ. Nac. de Tucumán, vol. 10, 1954, pp. 19-26.

[6] L. A. Santaló, *Sobre las ecuaciones del campo unificado de Einstein*, Rev. de Mat. y Fis. Teór. de la Universidad N. de Tucumán, vol. 12, 1959, pp. 31-55.

CLASES CARACTERISTICAS GENERALIZADAS Y CUADRADOS DE STEENROD EN LA SUCESION DE GYSIN DE UN ESPACIO FIBRADO ESFERICAMENTE

por Roberto Vázquez
(Universidad Nacional de México e Instituto Nacional de la Investigación Científica)

I. *Introducción.*

El objeto de este trabajo es definir las clases características generalizadas (módulo 2) de un espacio fibrado (en el sentido de Serre) cuya fibra tiene la cohomología (mód. 2) de una esfera, e introducir los cuadrados de Steenrod en la sucesión de Gysin correspondiente. Los resultados obtenidos aquí tienen sus análogos en la teoría de Thom [4] para espacios fibrados localmente triviales, pero nuestra técnica es completamente diferente, técnica que emplea a los cuadrados de Steenrod en la sucesión espectral del espacio fibrado y no requiere que este sea necesariamente trivial en el sentido local.

Para mayor comodidad de la exposición se ha dividido este trabajo en dos partes, en la primera (N.º II) se mencionan los antecedentes del tema tratado y la segunda (N.º III) consta del trabajo propiamente dicho.

II. *Antecedentes.*

1. En la literatura matemática se da al concepto de *espacio fibrado* diversas acepciones. En este trabajo se considerarán únicamente las siguientes:

(a) Espacio fibrado localmente trivial y con grupo estructural operando en la fibra, en el sentido de [3].

(b) Espacio fibrado localmente trivial, en el sentido de [1], página 46.

(c) Espacio fibrado en el sentido de Serre [2].

Nota: Todo (a) es un (b) y todo (b) es un (c).

2. *Clases características de Whitney.*

Sea $\{E, p, B, F\,G\}$ un espacio fibrado del tipo (a) donde E es el espacio total, B la base, $p: E \rightarrow B$ la aplicación fibrante, F la fibra y G el grupo estructural; supongamos que F sea una $(n-1)$-esfera y $G = 0_n = n$-grupo ortogonal. Si B es un complejo finito K se definen las clases caractersticas W_q del espacio fibrado como sigue:

Denotemos con K^q al q-esqueleto de K. En K^q es siempre posible definir un campo de vectores $(n-q)$-dimensionales, unitarios y ortogonales; si se quiere extender el campo a K^{q+1} aparece una obstrucción, a saber, el cociclo c^{q+1} cuyo valor en la $(q+1)$-célula σ es el elemento de $\pi_q(V_{n-q}{}^n)$, q-grupo de homotopía de la variedad de Stiefel $V_{n-q}{}^n$, determinado por el campo en la frontera $\dot{\sigma}$ de σ. La clase de cohomología de c^{q+1} es la clase característica $W_{q+1} \in H^{q+1}(K; \pi_q(V_{q-n}{}^n))$ (coeficientes locales) ([3]) y [7]).

3. *Las clases características generalizadas de Thom.*

Supongamos ahora que $\{E, p, B, F\}$ es un espacio fibrado del tipo (b) y en donde B es localmente compacto y paracompacto y F una $(n-1)$-esfera. Thom asocia al espacio fibrado anterior otros dos $\{A, p_1, B, \tilde{F}\}$, $\{A', p_1', B, \tilde{F}'\}$ donde $\tilde{F}$ es una n-bola cerrada, $\tilde{F}'$ una n-bola abierta y $A' \subset A$. En estas condiciones existe un isomorfismo canónico $\varphi^* : H^q(B, GOT) \approx H^{q+n}(A', T)$ donde G es un faisceau localmente simple de grupos abelianos y T es un sistema local de enteros asociado al espacio fibrado A' (sistema torcido de enteros). Cuando B es un complejo celular se puede dar una interpretación elemental de φ^* que se mencionará después. Si $\omega \in H^0(B, Z)$ es la clase unitaria y $U = \varphi^*(\omega)$ entonces Thom define las clases características generalizadas W_i por la relación: $\varphi^* W_i = Sq^i U$.

Como en el caso anterior W_i es módulo 2 para i par y es una clase entera torcida para i impar.

El resultado fundamental de [4] es: Si el espacio fibrado es como en el número 2 entonces las clases características generalizadas son las clases de Whitney.

4. *Los cuadrados de Steenrod en la cohomología singular cúbica.*

El producto-i (cup-i product) puede definirse así [5]: Si f y g son dos cocadenas módulo 2 del espacio X de grados p y q, respectivamente, entonces $f \underset{i}{\smile} g$ es la cocadena de grado $p+q-i$ cuyos valores se obtienen por la fórmula

$$(f \underset{i}{\smile} g)(c) = \sum_{(H,K)} f(\lambda_K{}^{\beta} c) \cdot g(\lambda_H{}^{\alpha} c) \qquad (0 \leqq i \leqq \text{mín}(p,q))$$

donde c es un $(p+q-i)$-cubo de X y la suma tiene un término para cada par ordenado (H,K) de subconjuntos de $\{1, \dots, p+q-i\}$ siendo $H \cap K = \emptyset$, $\nu(H) = p-i$, $\nu(K) = q-i$ donde ν designa el número de elementos del conjunto; $\lambda_K{}^{\beta} c$ es la cara de c de grado p tal que $(\lambda_K{}^{\beta} c)(t_1, \dots, t_p) = c(y_1, \dots, y_{p+q-i})$ donde $0 \leqq t_i \leqq 1$, $y_k = \beta(k)$ si $k \in K$, $y_k = t_{\varphi_K(k)}$ si $k \notin K$ siendo φ_K la función estrictamente creciente del complemento de K con valores en $\{1, \dots, p+q-i\}$ y $\beta(k) = 0$ ó 1 según sea par o impar, respectivamente, el número $k - \nu[(H \cup K) \cap \{1, \dots, k\}]$; la cara $\lambda_H{}^{\alpha} c$ se define análogamente con la única diferencia: $\alpha(k) = 0$ si $k - \nu[(H \cup K) \cap \{1, \dots, k\}]$ es impar y $\alpha(k) = 1$ en el caso contrario.

Si $i > \text{mín}(p,q)$ o $i < 0$ se define $f \underset{i}{\smile} g = 0$.

La fórmula anterior implica que la cofrontera de $f \underset{i}{\smile} g$ es:

$$d(f \underset{i}{\smile} g) = df \underset{i}{\smile} g + f \underset{i}{\smile} dg + f \underset{i-1}{\smile} g + g \underset{i-1}{\smile} df.$$

En particular si $f = g = p$-cociclo de X entonces $f \underset{i}{\smile} f$ es un $(2p-i)$-cociclo y el cuadrado Sq_i de la clase de cohomología $\{f\}$ de f se define así:

$$Sq_i\{f\} = \{f \underset{i}{\smile} f\}.$$

5. *La sucesión espectral de cohomología de un espacio fibrado y los cuadrados de Steenrod.*

Sea $\{E, p, B\}$ un espacio fibrado del tipo (c); tomemos un punto fijo $b \in B$ de donde $F = p^{-1}(b)$ es la fibra sobre b y sea e un punto fijo de F; se supondrá en lo que sigue que F y B son espacios arcoconectados, lo que implica que E es del mismo estilo, entonces la homología de dichos espacios puede calcularse empleando únicamente cubos cuyos vértices están en b o en e según el caso.

Sea A el grupo de cocadenas cúbicas de E con valores en el grupo abeliano G. Se define ([2]) una filtración decreciente $A = A^0 \supset A^1 \supset \ldots \supset A^p \supset \ldots$ donde A^p es el subgrupo de A de las cocadenas que se anulan en los cubos de filtración $\leqq p-1$. Si ${}^sA$ denota a los elementos homogéneos de grado s de A se definen los grupos:

$$C_r^{p,q} = {}^{p+q}A \cap A^p \cap d^{-1} A^{p+r}; \quad B_r^{p,q} = {}^{p+q}A \cap A^p \cap dA^{p-r};$$

$$(0 \leqq r \leqq \infty).$$

$$E_r^{p,q} = C_r^{p,q} / (C_{r-1}^{p+1,q-1} + B_{r-1}^{p,q}); \quad E_r = \sum_{p,q} E_r^{p,q}$$

A la sucesión $\{E_r\}$ se le llama la sucesión espectral de cohomología, con coeficientes en G, del espacio fibrado $\{E, p, B\}$. La diferencial d en A induce una diferencial d_r en E_r que aplica $E_r^{p,q}$ en $E_r^{p+r, q-r+1}$ y se tiene $H(E_r) = E_{r+1}$. Según [2] se pueden describir los primeros términos de la sucesión espectral como sigue:

$E_0^{p,q}$ es isomorfo al grupo de funciones con valores en G y definidas en los cubos de E de grado $p+q$ y filtración $\leqq p$, que se anulan en los cubos degenerados y en los de filtración $\leqq p-1$.

$E_1^{p,q}$ es canónicamente isomorfo a $C^p(B, H^q(F, G)) = p$-grupo de cocadenas de B con grupo de coeficientes $H^q(F, G)$.

$E_2^{p,q}$ es canónicamente isomorfo a $H^p(B, H^q(F, G)) = p$-grupo de cohomología de B con valores en el sistema local definido en B por $H^q(F, G)$.

Supongamos de aquí en adelante que $G = Z_2$. En [6] se demuestra que los productos-i en E inducen ciertos homomorfismos en los términos de la sucesión espectral, a saber:

Sea f un elemento homogéneo de A y definamos

$$\Phi_i(f) = f \underset{i}{\smile} f + f \underset{i+1}{\smile} df \quad (i \geqq -1)$$

entonces Φ_i induce homomorfismos $(r \geqq 2)$:

$$\overline{\Phi}_i : E_r^{p,q} \longrightarrow E_s^{2p-i,2q} \quad (i \leqq p, \quad r \leqq s \leqq 2r-1)$$

$$\overline{\Phi}_i' : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p,2q-(i-p)} \quad (i \geqq p).$$

Si se identifica $E_2^{p,q}$ con $H^p(B, H^q(F, Z_2))$ y el sistema local en B constituído por $H^*(F, Z_2)$ es simple, entonces

$$\overline{\Phi}_i : H^p(B, H^q(F, Z_2)) \longrightarrow H^{2p-i}(B, H^{2q}(F, Z_2)) \quad (i \leqq p)$$

es el cuadrado Sq_i utilizando como apareamiento de $H^q(F, Z_2)$ consigo mismo al «cup-product», y

$$\overline{\Phi}_i' : H^p(B, H^q(F, Z_2) \longrightarrow H^p(B, H^{2q-(i-p)}(F, Z_2)) \quad (i \geqq p)$$

es el homomorfismo inducido en la cohomología de B por el cuadrado Sq_{i-p} en la fibra F.

III. *Clases características generalizadas módulo 2 y cuadrados de Steenrod en la sucesión de Gysin.*

Sea $\{E, p, B\}$ un espacio fibrado del tipo (c) cuya fibra $F = p^{-1}(\mathrm{b})$ tiene la cohomología sobre Z_2 igual a la de una $(n-1)$-esfera, entonces el sistema local definido en B por $H^*(F)$ es simple. En la sucesión espectral se tienen isomorfismos canónicos para toda q:

$$(1) \qquad \begin{aligned} &H^q(B) \approx H^q(B) \,\square\, H^{n-1}(F) \approx E_2^{q,n-1} \approx E_n^{q,n-1}, \\ &H^q(B) \approx E_2^{q,0} \approx \ldots \approx E_n^{q,0}. \end{aligned}$$

Sea u el generador de $E_n^{0,n-1}$ y $v \in H^n(B)$ tal que $p^* v = d_n u$. Todo elemento de $E_n^{q,n-1}$ puede expresarse de un modo único en la forma $p^* x \smile u$ donde $x \in H^q(B)$; se tiene $d_{n+1}(p^* x \smile p^* v = p^*(x \smile u) = p^* u \smile v)$ donde $d_{n+1}: E_n{}^{q,n-1} \longrightarrow E_n{}^{q+n,0}$. Por otra parte $E_n{}^{q,n-1}$ no tiene elementos frontera distintos de cero entonces $E_{n+1}{}^{q,n-1}$ es el conjunto de ciclos de $E_n{}^{q,n-1}$ y, además, $E_{n+1}{}^{q,n-1} = E_\infty{}^{q,n-1}$ de donde $E_\infty{}^{q,n-1} \approx \{x \in H^q(B) \mid x \smile v = 0\}$. Sea K^q el submódulo de $H^q(B)$ anterior. Si se compone la proyección natural $H^{q+n-1}(E) \longrightarrow E_\infty{}^{q,n-1}$ con el isomorfismo anterior se obtiene un homomorfismo

$$\psi : H^{q+n-1}(E) \longrightarrow H^q(B)$$

cuya imagen es K^q y cuyo núcleo es el mismo que el de $H^{q+n-1}(E) \longrightarrow E^{q,n-1}$ y este último es igual a la imagen de $p^* : H^{q+n-1}(B) \longrightarrow H^{q+n-1}(E)$.

Si definimos el homomorfismo

$$\beta : H^q(B) \longrightarrow H^{q+n}(B)$$

como el resultado de la multiplicación por v, esto es, $\beta x = x \smile v$, se obtiene la sucesión exacta

$$(2) \quad \ldots \xrightarrow{\beta} H^{q+n-1}(B) \xrightarrow{p^*} H^{q+n-1}(E) \xrightarrow{\Psi} H^q(B) \xrightarrow{\beta} H^{q+n}(B) \xrightarrow{p^*} \ldots$$

que recibe el nombre de sucesión de Gysin del espacio $\{\mathrm{E}, p, B\}$.

Los cuadrados $\overline{\phi}_i$ y $\overline{\phi}_i'$ (II-5) en la sucesión espectral son nulos con excepción de $\overline{\phi}_i$ para $q=0$ y $\overline{\phi}'_{p+q}$, sin embargo las operaciones $\overline{\phi}_i$ en cocadenas inducen ahora otros homomorfismos como se ve a continuación:

Se demuestra en [6] que si $i \leqq q$ y $f \in C_n{}^{q,n-1}$ entonces $\phi_i(f) \in C_{2n-1}{}^{2q-i,2(n-1)}$, pero debido a que la fibra es una $(n-1)$-esfera se tiene $C_{2n-1}{}^{2q-i,2(n-1)} = C_n{}^{2q-i+n-1,n-1} + B_1{}^{2q-i,2(n-1)}$; se comprueba fácilmente que para $f, g \in C_n{}^{q,n-1}$:

$$\phi_i(f+g) - [\phi_i(f) + \phi_i(g)] \in C_1{}^{2(q+n-1)-i,0} + B_1{}^{2q-i,2(n-1)}.$$

Entonces ϕ_i induce un homomorfismo

$$C_n{}^{q,n-1} \longrightarrow (C_n{}^{2q-i+n-1,n-1} + B_1{}^{2q-i,2(n-1)}) / (C_1{}^{2(q+n-1)-i,0} + B_1{}^{2q-i,2(n-1)}) = E_n{}^{2q-i+n-1,n-1}.$$

También se comprueba sin dificultad que $\phi_i(C_{n-1}^{q+1,n-2} + B_{n-1}^{q,n-1}) \subset C_1^{2(q+n-1)-i,0} + B_1^{2q-i,2(n-1)}$ entonces ϕ_i induce un homomorfismo Γ_i de $E_n^{q,n-1}$ en $E_n^{2q-i+n-1,n-1}$ que satisface la regla de conmutatividad siguiente: $d_n \Gamma_i = \overline{\phi}_{i+1} d_n$. Para $i > q$ la situación es análoga de donde se tiene el

3. *Lema: Las operaciones ϕ_i inducen homomorfismos*

$$\Gamma_i : E_n^{q,n-1} \longrightarrow E_n^{2q-i+n-1,n-1} \qquad (i \geqq -1)$$

tales que $d_n \Gamma_i = \underline{\phi}_{i+1} d_n$.

Por lo anterior Γ_i induce un homomorfismo Γ_i^* de $E_\infty^{q,n-1}$ en $E_\infty^{2q-i+n-1,n-1}$ y se deduce el

4. *Corolario: Es conmutativo el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} H^{q+n-1}(E) & \xrightarrow{\Psi} & K^q \\ Sq_i \downarrow & & \downarrow \Gamma_i^* \\ H^{2(q+n-1)-i}(E) & \xrightarrow{\Psi} & K^{2q-i+n-1}. \end{array}$$

Si se usa la notación superior $Sq^i = Sq_{q+n-1-i}$, $\Gamma^{*i} = \Gamma^*_{q+n-1-i}$ entonces el diagrama anterior se convierte en

$$\begin{array}{ccc} H^{q+n-1}(E) & \xrightarrow{\Psi} & K^q \\ Sq^i \downarrow & & \downarrow \Gamma^{*i} \\ H^{q+n-1+i}(E) & \xrightarrow{\Psi} & K^{q+i}. \end{array} \tag{4'}$$

Al considerar $\Gamma^i : E_n^{0,n-1} \longrightarrow E_n^{i,n-1}$ resulta $\Gamma^i(u)$ de la forma $p^* W^i \smile u$ donde $W_i \in H^i(B)$ y es $W_0 = 1$, $W_n = v$, $W_i = 0$ para $i > n$.

5. *Definición: Los elementos W_i, $0 \leqq i \leqq n$, son las clases caracterşticas generalizadas del espacio fibrado $\{E,p,B\}$.*

Sea $p^* x \smile u \in E_n^{q,n-1}$; aplicando la fórmula de Cartan se deduce

$$\Gamma^i(p^* x \smile u) = \sum_j p^* Sq^j x \smile \Gamma^{i-j}(u) = p^* (\sum_j Sq^j x \smile W_{i-j}) \quad u,$$

por consiguiente si $x \in K^q$ se obtiene

$$\Gamma^{*i} x = \sum_j Sq^j x \smile W_{i-j}.$$

Este resultado sugiere la

6. *Definición:* El *homomorfismo* $\vartheta^i : H^q(B) \longrightarrow H^{q+i}(B)$ *está definido por la condición* $\vartheta^i x = \sum_j Sq^j x \smile W_{i-j}$.

Ya que $d_n \Gamma^i(u) = Sq^i d_n u$, es $p^* W_i \smile p^* v = Sq^i p^* v$ o, lo que es es lo mismo, $Sq^i v = W_i \smile v$, por la tanto $\beta \vartheta^i = Sq^i \beta$. Así pues se tiene el

7. *Teorema: Es conmutativo el diagrama*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\ldots & \xrightarrow{\beta} & H^{q+n-1}(B) & \xrightarrow{p^*} & H^{q+n-1}(E) & \xrightarrow{\Psi} & H^q(B) & \xrightarrow{\beta} & H^{q+n}(B) & \xrightarrow{p^*} & \ldots \\
 & & \Big\downarrow Sq^i & & \Big\downarrow Sq^i & & \Big\downarrow \vartheta^i & & \Big\downarrow Sq^i & & \\
\ldots & \xrightarrow{\beta} & H^{q+n+i-1}(B) & \xrightarrow{p^*} & H^{q+n+i-1}(E) & \xrightarrow{\Psi} & H^{q+i}(B) & \xrightarrow{\beta} & H^{q+n+i}(B) & \xrightarrow{p^*} & \ldots
\end{array}$$

8. *Comparación con la teoría de Thom.*

Para comparar las dos definiciones de clases características, módulo 2, es necesario suponer que el espacio fibrado es del tipo (b) y que los espacios considerados pertenecen a una categoría en la cual las dos teorías de cohomología coincidan, por ejemplo la categoría de complejos celulares. En tales circunstancias podemos describir el isomorfismo φ^* mencionado en II, 3 en los términos siguientes:

Sea $\{A, p_1, B\}$ el espacio fibrado (localmente trivial cuya fibra es una n-bola cerrada). Si i es la inclusión de E en A entonces $p = p_1 i$. Designemos con $u' \in C_n^{0,n-1}$ a un representante de la clase u en $E_n^{0,n-1}$ y sean $u_1 \in C^{n-1}(A)$, $v' \in Z^n(B)$ tales que $i^{\#} u_1 = u'$, $p_1^{\#} v' = du'$, por lo tanto $U' = p_1^{\#} v' + du_1$ es un n-cociclo de A módulo E; pongamos $U = \{U'\} \in H^n(C, E)$. Si $x \in H^q(B)$ y x' es un cociclo representante resulta

$$p_1^{\#} x' \smile U' \in Z^{q+n}(A, E).$$

Definimos

$$\varphi^* x = \{p_1^{\#} x' \smile U'\}. \tag{8.1}$$

En particular se obtiene $\varphi^* \omega = U$ donde ω es la clase unitaria en $H^0(B)$.

Ahora demostraremos que $Sq^i U = \varphi^* W_i$ para las W_i definidas en III, 5 con lo que quedará demostrada la equivalencia de las dos definiciones en las circunstancias mencionadas al principio de este párrafo. Para el efecto calculemos

$$Sq^i U = \{U' \underset{n-i}{\smile} U'\} ;$$

se deduce sin dicultad

$$Sq^i U = \{p_1{}^{\#}(v' \underset{n-i}{\smile} v') + d\,\phi_{n-i-1}(u_1)\} . \tag{8.2}$$

Pero de la definición III, 5 se desprende

$$\phi_{n-i-1}(u') = p^{\#}\, W_i' \smile u' + p^{\#}\, \alpha_i, \tag{8.3}$$

donde W_i' es un cociclo en W_i y $\alpha_i \in C^{n+i-1}(B)$.
Difenciando (8.3) se obtiene

$$p^{\#}(W_i \smile v') + p^{\#} \mathrm{d}\, \alpha_i = p^{\#}\,(v' \underset{n-i}{\smile} v'),$$

por lo tanto

$$p_1{}^{\#}\,(W_i' \smile v') + p_1{}^{\#}\, d\, \alpha_i + p_1{}^{\#}(v' \underset{n-i}{\smile} v') \in C^{n+i}(A, E). \tag{8.4}$$

De (8.3) se deduce

$$\phi_{n-i-1}(u_1) + p_1{}^{\#}\, W_i' \smile u_1 + p_1{}^{\#}\, \alpha_i \in C^{n+i-1}(A, E)$$

y diferenciando resulta

$$\mathrm{d}\, \phi_{n-i-1}(u_1) + p_1{}^{\#}\, W_i' \smile du_1 + p_1{}^{\#}\, d\, \alpha_i \in B^{n+i}(A, E). \tag{8.5}$$

Sumando (8.4) y (8.5) se obtiene

$$p_1{}^{\#}\,(v' \underset{n-i}{\smile} v') + d\,\phi_{n-i-1}(u_1) \sim p_1{}^{\#}\, W_i' \smile U'$$

mód. E y por consiguiente $Sq^i U = \varphi^* W_i$.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. J. HILTON, *An introduction to homotopy theory*, Cambridge University Press.

[2] J. P. SERRE, *Homologie des espaces fibrés*, Annals of Mathematics, (1951) 54 p. 425-505.

[3] N. STEENROD, *The topology of fibre bundles*, Princenton University Press.

[4] R. THOM, *Espaces fibrés en spheres et carrés de Steenrod*, Annales scientifiques de L'Ecole Normale Supérieure (1952), p. 109-181.

[5] R. VÁZQUEZ, *Los productos-i de cocadenas en la teoría singular cúbica*, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana (1954), XI, p. 9-32.

[6] — — *Nota sobre los cuadrados de Steenrod en la sucesión espectral de un espacio fibrado*, Ibid, (1957) p. 1-8.

[7] H. WHITNEY, *On the topology of diferentiable maniofolds*, Lectures in Topology, Michigan University (1941) p. 101-141.

ON ELECTROMAGNETIC FUNCTION THEORY

By MAKOTO ITOH

Summary

The purpose of this paper is to construct a formal mathematical system of the classical electromagnetic field theory which may be called the «Electromagnetic Function Theory». The ordinary complex function theory is, so to speak, a mathematical theory of the *two-dimensional statical* electromagnetic field and our electromagnetic function theory may be considered as its extension to the case of the *general three-dimensional dynamical* electromagnetic field.

In this paper it is shown that the Maxwell's two equations in a homogeneous isotropic medium can be unified into only one equation by the aid of Laplace transformation.

Based on this unified electromagnetic equation, we define formally the compound Hertzian L-vector and the vector and scalar L-potential together with Mawell's electromagnetic and Hertzian operators.

Next we prove the fundamental integral theorem about the electromagnetic F vector from which are deduced the fundamental integral representation formulas for the F vector. These formulas give the real physical meanings to the vector and scalar L-potential and also to the Hertzian L-vector. Really they represent the Laplace transformed «Huygen's Principle». These formulas correspond to the Cauchy's integral formula for an analytic function, while the unified electromagnetic equation is an extension of the Cauchy-Riemann equations.

This is a first part of my work on the «Electromagnetic Function Theory». I hope to be able to get another opportunity in near future to publish the continuation of this paper.

§ 1. *Unified Electromagnetic Vector and Unified Electromagnetic Equation.*

The Maxwell's electromagnetic equations in a homogeneous isotropic medium which has $(\varepsilon, \mu, \sigma)$ for its medium constants are written in the M. K. S. rational units as follows:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathcal{E} = -\mu \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} & (1.1) \\ \operatorname{rot} \mathcal{H} = \varepsilon \dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \sigma \mathcal{E} & (1.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathcal{E} = \rho_E/\varepsilon & (1.3) \\ \operatorname{div} \mathcal{H} = 0 & (1.4) \end{cases}$$

where the electric and magnetic vectors $(\mathcal{E}, \mathcal{H})$ and the spacial electric charge density ρ_E are functions of space coordinates and time.

If we denote by E and H the Laplace transforms of $\mathcal{E}$ and $\mathcal{H}$ with regard to t respectively, i. e.

$$\begin{cases} \mathrm{E} = L_t[\mathcal{E}] \overset{Df}{=} \displaystyle\int_0^\infty \mathcal{E}(t)\, e^{-pt}\, dt & (1.5) \\ \mathrm{H} = L_t[\mathcal{H}] \overset{Df}{=} \displaystyle\int_0^\infty \mathcal{H}(t)\, e^{-pt}\, dt, & (1.6) \end{cases}$$

then we get by operating L_t on both sides of (1.1) and (1.2) the following two equations:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathrm{E} = -\mu p \mathrm{H} + \mu \mathcal{H}_0 & (1.1') \\ \operatorname{rot} \mathrm{H} = (\varepsilon p + \sigma) \mathrm{E} - \varepsilon \mathcal{E}_0 & (1.2') \end{cases}$$

where $(\mathcal{E}_0, \mathcal{H}_0)$ represent the initial values of $\mathcal{E}$ and $\mathcal{H}$ at $t=0$.

By performing the operation $(1.1') + \eta \times (1.2')$, where η denotes an indeterminate constant for the moment, we get

$$\operatorname{rot}[\mathrm{E}+\eta\,\mathrm{H}]=\eta(\varepsilon\,p+\sigma)\left[\left\{\mathrm{E}-\frac{\mu p}{\varepsilon p+\sigma}\mathrm{H}\right\}+\right.$$
$$\left.+\left\{\frac{-\varepsilon}{\varepsilon p+\sigma}\mathcal{E}_0+\frac{\mu}{\eta(\varepsilon p+\sigma)}\mathcal{H}_0\right\}\right]. \qquad (1.7)$$

We determine now the constant η so that

$$\eta=-\frac{\mu p}{\eta(\varepsilon p+\sigma)}, \quad \text{i. e.} \quad \eta=\pm i\sqrt{\frac{\mu p}{\varepsilon p+\sigma}}. \qquad (1.8)$$

If we denote by $\mathring{\eta}$ and $\mathring{\varkappa}$ respectively

$$\begin{cases} \mathring{\eta} \underset{=}{Df} \sqrt{\dfrac{\mu p}{\varepsilon p+\sigma}}, \quad Re\,\mathring{\eta}>0 \quad \text{for} \quad Re\,p>0 & (1.9) \\ \mathring{\varkappa} \underset{=}{Df} \mathring{\eta}\,(\varepsilon\,p+\sigma)=\sqrt{\varepsilon\mu\,p^2+\mu\,\sigma\,p}, \quad Re\,\mathring{\varkappa}>0 \quad \text{for} \quad Re\,p>0 & \\ & (1.10) \end{cases}$$

and by j a parameter which takes one of the two values $\pm i$, i. e.

$$j=\pm i, \qquad (1.11)$$

then we can write

$$\begin{cases} \eta=j\,\mathring{\eta} \\ \varkappa=j\,\mathring{\eta}\,(\varepsilon\,p+\sigma)=j\,\mathring{\varkappa}. \;(*) \end{cases} \qquad (1.12)$$

Further if we introduce the following two complex vectors F and F_0 which depend on the parameter η:

$$\begin{cases} \mathrm{F} \underset{=}{Df} \mathrm{E}+\eta\,\mathrm{H}=\mathrm{E}+j\,\mathring{\eta}\,\mathrm{H} & (1.13) \\ \mathrm{F}_0 \underset{=}{Df} \dfrac{-\varepsilon}{\varepsilon p+\sigma}\mathcal{E}_0+\dfrac{\mu}{\varkappa}\mathcal{H}_0=\dfrac{-\varepsilon}{\varepsilon p+\sigma}\mathcal{E}_0-\eta\,\dfrac{1}{p}\mathcal{H}_0 & (1.14) \end{cases}$$

(*) In case $p = i\omega$, the quanties $\mathring{\eta}$ and $\mathring{\varkappa}$ become the so-called "intrinsic impedance" and "propagation constant" of the medium respectively.

then the equation (1.7) can be written as follows:

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathrm{F} = \varkappa [\mathrm{F} + \mathrm{F}_0]}\,. \tag{1.15}$$

This equation will be called the «*unified electromagnetic equation*» and the vectors F and F_0 defined by (1.13) the «*unified electromagnetis vector*» as well as the «*unified electromagnetic initial vector*» respectively.

We see from the equations (1,9) and (1.10) that the following relations hold:

$$\begin{cases} \eta \varkappa = -\mu p \\ \varkappa/\eta = \varepsilon p + \sigma. \end{cases} \tag{1.16}$$

These quantities $\eta \varkappa$ and $\varkappa/\eta$ are, therefore, invariant with respect to the sign of η.

In particular when both of the initial values of $\mathcal{E}$ and $\mathcal{H}$ are zero, i.e. $\mathcal{E}_0 = \mathcal{H}_0 = 0$, we have from (1.14) $\mathrm{F}_0 = 0$ and the equation (1.15) becomes

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathrm{F} = \varkappa \mathrm{F}} \tag{1.17}$$

which will be called the «homogeneous electromagnetic equation».

We shall now consider about the general solution of the equation (1.15). Let $\acute{\mathrm{F}}$ denote a particular solution of (1.15) and F any other solution. Then we have

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathrm{F} = \varkappa [\mathrm{F} + \mathrm{F}_0] \\ \operatorname{rot} \acute{\mathrm{F}} = \varkappa [\acute{\mathrm{F}} + \mathrm{F}_0]. \end{cases}$$

By subtracting both sides, we get from these two equations,

$$\operatorname{rot} [\mathrm{F} - \acute{\mathrm{F}}] = \varkappa [\mathrm{F} - \acute{\mathrm{F}}].$$

If we put now

$$\overset{\circ}{\mathrm{F}} \overset{Df}{=\!=} \mathrm{F} - \acute{\mathrm{F}}$$

then $\overset{\circ}{\mathrm{F}}$ satisfies (1.17), i.e.

$$\operatorname{rot} \overset{\circ}{\mathrm{F}} = \varkappa \overset{\circ}{\mathrm{F}}$$

and F can be written as follows:

$$\boxed{\mathrm{F} = \acute{\mathrm{F}} + \overset{\circ}{\mathrm{F}}}\, . \tag{1.18}$$

This shows us that any solution of the equation (1.15) may be considered as consists of a particular solution $\acute{\mathrm{F}}$ and another «complementary field vector $\overset{\circ}{\mathrm{F}}$» which satisfies (1.17) (*).

§ 2. *Compound Conjugate quantities with respect to* η.

To any quantity $X(\eta)$ which contains the parameter η we correspond another quantity $X(-\eta)$ and denote it by $\tilde{X}$, namely

$$\tilde{X} \overset{Df}{=\!=} X(-\eta) \tag{2.1}$$

X and $\tilde{X}$ will be called hereafter a «*compound*» and its «*conjugate compound*» quantity respectively.

According to this definition we have particularly

$$\tilde{\eta} = -\eta \quad \text{and} \quad \tilde{\varkappa} = -\varkappa \tag{2.2}$$

(*) We can prove that if $\overset{\circ}{\mathrm{F}}$ be *"sectionally regular"* in the whole space (this means that F and $\acute{\mathrm{F}}$ have the same singularties in the whole space) and satisties a certain regularity condition at infinity, i. e. "outward radiation condition" then $\overset{\circ}{\mathrm{F}}$ vanishes identically, hence $\mathrm{F} = \acute{\mathrm{F}}$ which shows the uniqueness of the solution of (1.15).

$$\begin{cases} \tilde{\mathrm{F}} = \mathrm{F}(-\eta) = \mathrm{E} - \eta\,\mathrm{H} \\ \tilde{\mathrm{F}}_0 = \mathrm{F}_0(-\eta) = \dfrac{-\varepsilon}{\varepsilon p+\sigma}\,\mathcal{E}_0 + \eta\,\dfrac{1}{p}\,\mathcal{H}_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

and to the equation (1.15) there corresponds a «conjugate compound unified electromagnetic equation»:

$$\boxed{\operatorname{rot}\tilde{\mathrm{F}} = -\varkappa\,[\tilde{\mathrm{F}} + \tilde{\mathrm{F}}_0]}\,. \tag{2.4}$$

Now if we define generally for a quantity $X(\eta)$,

$$\begin{cases} X_E \overset{Df}{=} \dfrac{1}{2}[X(\eta) + X(-\eta)] = \dfrac{1}{2}(X + \tilde{X}) \\ X_H \overset{Df}{=} \dfrac{1}{2\eta}[X(\eta) - X(-\eta)] = \dfrac{1}{2\eta}(X - \tilde{X}) \end{cases} \tag{2.5}$$

then we can write X and $\tilde{X}$ as follows:

$$\begin{cases} X = \dfrac{1}{2}(X + \tilde{X}) + \eta\,\dfrac{1}{2\eta}(X - \tilde{X}) = X_E + \eta\,X_H \\ \tilde{X} = \dfrac{1}{2}(X + \tilde{X}) - \eta\,\dfrac{1}{2\eta}(X - \tilde{X}) = X_E - \eta\,X_H. \end{cases} \tag{2.6}$$

The above quantities X_E and X_H are easily seen to be independent of the sign of η and will be called the «E-part» (or symmetric part) and «H-part» (or antisymmetric part) of X.

From the expressions (2.5) and (2.6) we obtain immediately the following two theorems:

Theorem [2.1]. If $X(\eta) = X_E + \eta\,X_H = 0$ irrespectively of the sign of η, then we have $X_E = X_H = 0$, and vice versa.

Theorem [2.2]. If $X_E + \eta\,X_H = Y_E + \eta\,Y_H$ holds irrespectively of the sign of η, then we have

$$X_E = Y_E \quad \text{and} \quad X_H = Y_H.$$

These theorems are similar to those of the complex number theory. Especially the above theorem [2. 2] will be used frequently under the name of «Separation with respect to η».

For example, we have from (1.13) and (1.14)

$$\begin{cases} F = F_E + \eta F_H = E + \eta H \\ F_0 = F_{0E} + \eta F_{0H} = \dfrac{-\varepsilon}{\varepsilon p + \sigma} \mathcal{E}_0 - \eta \dfrac{1}{p} \mathcal{H}_0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Hence by separation with respect to η, we get

$$\begin{cases} F_E = E \quad \text{and} \quad F_H = H, & (2.8_1) \\ F_{0E} = \dfrac{-\varepsilon}{\varepsilon p + \sigma} \mathcal{E}_0 \underline{\underline{Df}}\, E_0 \quad \text{and} \quad F_{0H} = \dfrac{-1}{p} \mathcal{H}_0 \underline{\underline{Df}}\, H_0. & (2.8_2) \end{cases}$$

As another example, we get from the equation (1.15),

$$\operatorname{rot} F_E + \eta \operatorname{rot} F_H = \eta\, \varkappa (F_H + F_{0H}) + \frac{\varkappa}{\eta} (F_E + F_{0E}),$$

hence by separating both sides with respect to η, we obtain

$$\begin{cases} \operatorname{rot} F_E = \eta\, \varkappa\, (F_H + F_{0H}) \\ \operatorname{rot} F_H = \dfrac{\varkappa}{\eta} (F_E + F_{0E}). \end{cases} \tag{2.9}$$

These equations are seen to be the same as (1. 1') and (1. 2'') by virtue of (2. 8) and (1. 16). This shows the equivalency of the equation (1. 15), with the original two equations (1. 1') and (1. 2').

Lastly we consider about the electric spacial charge density. Taking the divergence of both sides of (1. 15), we get

$$\boxed{\operatorname{div} F = -\operatorname{div} F_0}. \tag{2.10}$$

Now making use of the equations (1. 3) and (1. 4), we obtain

$$\operatorname{div} F = \operatorname{div} E + \eta \operatorname{div} H = \rho_E(p)/\varepsilon. \tag{2.11}$$

On the other hand, we have from (1. 14):

$$\operatorname{div} F_0 = \frac{-\varepsilon}{\varepsilon p+\sigma} \operatorname{div} \mathcal{E}_0 - \eta \frac{1}{p} \operatorname{div} \mathcal{H}_0 = \frac{-1}{\varepsilon p+\sigma} \rho_E(0) \qquad (2.12)$$

where $\rho_E(0)$ represents the initial value of $\rho_E(t)$.

Substituting from (2. 11) and (2. 12) into (2. 10) we get

$$\rho_E(p) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon p+\sigma} \rho_E(0) \qquad (2.13)$$

and hence

$$\rho_E(t) = \rho_E(0) \,.\, e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t} \qquad (2.14)$$

This result may be also obtained by taking directly the divergence of both sides of (1. 2) and intergrating it after the substitution of (1. 3) as is shown in ordinary text books.

§ 3. *Electromagnetic Operator and Hertzian Operator.*

If we put

$$F' \overset{Df}{=\!=} F + F_0, \quad \text{i. e} \quad F = F' - F_0 \qquad (3.1)$$

then the fundamental equation (1. 15) reduces to

$$\operatorname{rot} [F' - F_0] = \varkappa F'$$

whence

$$\boxed{(\operatorname{rot} - \varkappa)\, F' = \operatorname{rot} F_0} \,. \qquad (3.2)$$

Similarly we get from (2. 4)

$$\boxed{(\operatorname{rot} - \varkappa)\, \tilde{F}' = \operatorname{rot} \tilde{F}_0} \,. \qquad (3.3)$$

Taking the divergence of both sides of (3. 2) and (3. 2′) we obtain

$$\operatorname{div} F' = \operatorname{div} \tilde{F}' = 0. \qquad (3.4)$$

The above vectors F' and $\tilde{F}'$ will be called the «reduced electromagnetic» and the «reduced conjugate electromagnetic» vector respectively.

Now we shall introduce here two operators $\mathfrak{M}$ and $\tilde{\mathfrak{M}}$ defined by

$$\begin{cases} \mathfrak{M} \underset{=}{\overset{Df}{}} \operatorname{rot} - \varkappa & (3.4_1) \\ \tilde{\mathfrak{M}} \underset{=}{\overset{Df}{}} \operatorname{rot} + \varkappa & (3.4_2) \end{cases}$$

and call them resp. the «electromagnetic (Maxwell's) and «conjugate electromagnetic (Maxwell's) operator». With these operators the fundamental equations (1.15) and (2.4) can be written as

$$\begin{cases} \mathfrak{M}\, F = \varkappa\, F_0 & (3.5_1) \\ \tilde{\mathfrak{M}}\, \tilde{F} = -\varkappa\, \tilde{F}_0 & (3.5_2) \end{cases}$$

and also their equivalent equations (3.2) and (3.3) as

$$\begin{cases} \mathfrak{M}\, F' = \operatorname{rot} F_0. & (3.6_1) \\ \tilde{\mathfrak{M}}\, \tilde{F}' = \operatorname{rot} F_0 & (3.6_2) \end{cases}$$

Now we have from the definition (3.4),

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{M}} = \tilde{\mathfrak{M}}\mathfrak{M} &= \operatorname{rot}^2 - \varkappa^2 \\ &= \operatorname{grad}\operatorname{div} - (\Delta + \varkappa^2) \end{aligned} \qquad (3.7)$$

so that

$$\boxed{\Delta + \varkappa^2 = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{M}}}\,. \qquad (3.8)$$

From this relation it follows by (3.4) and (3.6″), that

$$\begin{aligned} (\Delta + \varkappa^2)\, F' &= \operatorname{grad}\operatorname{div} F' - \mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{M}}\, F' \\ &= \tilde{\mathfrak{M}} \operatorname{rot} F_0. \end{aligned} \qquad (3.9)$$

If we put further

$$H \underset{=}{\mathrm{Df}} \widetilde{\mathfrak{M}}\,\mathrm{rot} = \mathrm{rot}^2 + \varkappa\,\mathrm{rot} \tag{3.10}$$

then the above equation (3. 9) is written as

$$\boxed{(\Delta + \varkappa^2)\,\mathrm{F}' = H\,\mathrm{F}_0} \tag{3.9'}$$

which is an inhomogeneous Kirchhoff's vector equation.

We have also by applying (3. 8) on F,

$$\begin{aligned}(\Delta + \varkappa^2)\,\mathrm{F} &= \mathrm{grad\,div\,F} - \widetilde{\mathfrak{M}}\,\mathfrak{M}\,\mathrm{F} \\ &= -\,\mathrm{grad\,div\,F}_0 - \widetilde{\mathfrak{M}}\,[\varkappa\,\mathrm{F}_0] = \\ &= -\,(\mathrm{grad\,div} + \varkappa\,\mathrm{rot} + \varkappa^2)\,\mathrm{F}_0.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Next take any compound vector Π which satisfies the following inhomogeneous Kirchhoff's vector equation:

$$\boxed{(\Delta + \varkappa^2)\,\Pi = -\,\mathrm{F}_0}\,. \tag{3.12}$$

This can be written by (3. 8)

$$(\mathrm{grad\,div} - \mathfrak{M}\widetilde{\mathfrak{M}})\,\Pi = \mathrm{F}_0.$$

Taking rot of both sides we get

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{M}\,\widetilde{\mathfrak{M}}\,\Pi = \mathrm{rot}\,\mathrm{F}_0. \tag{3.13}$$

or by (3. 9)

$$\mathfrak{M}\,H\,\Pi = \mathrm{rot}\,\mathrm{F}_0. \tag{3.14}$$

Therefore we see that the vector defined by

$$\boxed{\mathrm{F}' = H\,\Pi} \tag{3.15}$$

satisfies the fundamental equation (3.6_1) so that the copound vector

$$\boxed{F = H\,\Pi - F_0} \tag{3.16}$$

represents an electromagnetic field with the initial vector F_0.

Hereafter we shall call the operator H as the «*compound Hertzian operator*» and the vector Π which satisfies (3.12) as the «*compound Hertzian vector*» associated with F_0.

The equation (3.13) may be written also as

$$\tilde{\mathfrak{M}}\tilde{H}\,\Pi = \operatorname{rot} F_0 \tag{3.17}$$

where $\tilde{H}$ denotes the conjugate compound Hertzian operator, i. e.

$$\tilde{H} \overset{Df}{=} \mathfrak{M}\operatorname{rot} = \operatorname{rot}^2 - \varkappa \operatorname{rot} \tag{3.18}$$

Putting

$$\tilde{F}_1' \overset{Df}{=} \tilde{H}\,\Pi$$

we get from (3.17)

$$\tilde{\mathfrak{M}}\tilde{F}_1' = \operatorname{rot} F_0 \tag{3.20}$$

which shows that F_1' is a reduced conjugate electromagnetic vector with the same initial vector as F', i. e.

$$\tilde{F}_{01}' = F_0.$$

Subtracting now (3.19) from (3.15) we obtain

$$F' - \tilde{F}_1' = H\,\Pi - \tilde{H}\,\Pi = 2\varkappa \operatorname{rot} \Pi. \tag{3.21}$$

On the other hand we have from (3. 14), (3. 20) and (3. 4),

$$\mathfrak{M}\,F' + \tilde{\mathfrak{M}}\,\tilde{F}_1' = \mathrm{rot}\,[F' + \tilde{F}_1'] - \varkappa\,[F_{0'} - \tilde{F}_{01}'] = 2\,\mathrm{rot}\,F_0,$$

whence

$$F' - \tilde{F}_1' = \frac{1}{\varkappa}\,\mathrm{rot}\,[F' + \tilde{F}_1' - 2\,F_0]. \tag{3. 22}$$

Comparing this with (3. 21) we get

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\Pi &= \frac{1}{2\varkappa^2}\,\mathrm{rot}\,[F' + \tilde{F}_1' - 2\,F_0] \\ &= \frac{1}{2\varkappa^2}\,\mathrm{rot}\,[F + \tilde{F}_1], \end{aligned}$$

so that Π must take the form

$$\Pi = \frac{1}{2\varkappa^2}\,[F + \tilde{F}_1] + \mathrm{grad}\,\varphi_0, \tag{3, 23}$$

where φ_0 represents some compound scalar function.

Now if we substitute this expression into (3. 12), it becomes by virtue of (3. 11) and its conjugate formula (*),

$$\begin{aligned} (\Delta + \varkappa^2)\,\Pi &= \frac{1}{2\varkappa^2}\,[(\Delta + \varkappa^2)\,F + (\Delta + \varkappa^2)\,\tilde{F}_1] + \mathrm{grad}\,(\Delta + \varkappa^2)\,\varphi_0 \\ &= \frac{-1}{\varkappa^2}\,(\mathrm{grad\,div} + \varkappa^2)\,F_0 + \mathrm{grad}(\Delta + \varkappa^2)\,\varphi_0 \\ &= \mathrm{grad}\left\{\frac{1}{\varkappa^2}\,\mathrm{div}\,F_0 + (\Delta + \varkappa^2)\,\varphi_0\right\} - F_0 \end{aligned}$$

We have, therefore, from (3. 12)

(*) $\tilde{F}_1$ satisfies the conjugate compound equation to (3,11), i. e.

$$(\Delta + \varkappa^2)\,\tilde{F}_1 = (\mathrm{grad\,div} + \varkappa^2 - \varkappa\,\mathrm{rot})\,F_0$$

$$\operatorname{grad}\left\{\frac{-1}{\varkappa^2}\operatorname{div}\mathbf{F}_0+(\Delta+\varkappa^2)\,\varphi_0\right\}=0,$$

whence φ_0 has to satisfy

$$(\Delta+\varkappa^2)\,\varphi_0-\frac{1}{\varkappa^2}\operatorname{div}\mathbf{F}_0=C\ \text{(const.)} \tag{3.24}$$

If we now put $\varphi_0=\frac{1}{\varkappa^2}(\varphi+C)$, then φ is seen to satisjy the inhomogenous Kirchhoff's equation:

$$(\Delta+\varkappa^2)\,\varphi=\operatorname{div}\mathbf{F}_0 \tag{3.25}$$

and (3.23) is written as

$$\boxed{\Pi=\frac{1}{2\varkappa^2}\left[\mathbf{F}+\widetilde{\mathbf{F}}_1+\operatorname{grad}\varphi\right]}. \tag{3.26}$$

Conversely every compound vector Π of this form can be easily verified to satisfy the equation (3.12).

The above results are summarized in the following two theorems:

Theorem (3.1) Let Π be a compound Hertzian vector which satisfies the equation:

$$(\Delta+\varkappa^2)\,\Pi=-\mathbf{F}_0.$$

When we operate the Hertzian operator $H=\operatorname{rot}^2+\varkappa\operatorname{rot}$ on Π, we get a reduced electromagnetic vector $\mathbf{F}'=H\,\Pi$ whose initial vector is $\mathbf{F}_0$.

Theorem [3.2]. Any compound vector Π which satisfies the inhomogenous Kirchhoff's vector equation (3.12) can be resolved into the form (3.26) where $\mathbf{F}$ and $\widetilde{\mathbf{F}}_1$ represent respectively an electromagnetic and conjugate electromagnetic field vector both of whose initial vectors are equal to $\mathbf{F}_0$ and φ being an arbitrary compound scalar function which satisfies

(3. 25). That is to say, the expression (3. 26) gives the inversion formula of (3. 15), i. e.

$$\Pi = H^{-1}\,F' = H^{-1}\,[F + F_0]$$
$$= \frac{1}{2\varkappa^2}[F + \tilde{F}_1] + \operatorname{grad}\varphi \qquad (3.\,26')$$

where $\tilde{F}_1$ denotes any conjugate electromagnetic vector whose initial vector $\tilde{F}_{01}$ is equal to F_0 and φ represents any scalar function which satisfies the inhomogeneous Kirchhoff's equation,

$$(\Delta + \varkappa^2)\,\varphi = \operatorname{div} F_0.$$

§ 4. *Compound Vector and Scalar L-Potential.*

The formula (3. 16) can be written as

$$F = H\,\Pi - F_0 = (\mathrm{rot}^2 + \varkappa\,\mathrm{rot})\,\Pi - F_0$$
$$= (\operatorname{grad}\operatorname{div} + \varkappa\,\mathrm{rot} + \varkappa^2)\,\Pi. \qquad (4.\,1)$$

If we put now in this formula

$$\begin{cases} A = \varkappa\,\Pi & (4.\,2_1) \\ \phi = -\operatorname{div}\Pi, & (4.\,2_2) \end{cases}$$

then we obtain another expression for F:

$$\boxed{F = -\operatorname{grad}\phi + \mathrm{rot}\,A + \varkappa\,A} \qquad (4.\,3)$$

Evidently we have from the above definition

$$\boxed{\operatorname{div} A + \varkappa\,\phi = 0} \qquad (4.\,4)$$

which may be called the «*compound Lorentz's relation*».

Next multiplying both sides of (3. 12) by $\varkappa$, we get

$$\boxed{(\Delta + \varkappa^2)\, \mathrm{A} = -\varkappa\, \mathrm{F}_0} \tag{4.5}$$

And if we take divergence of both sides of (3.12), we obtain from the definition $(4, 2)_2$

$$\boxed{(\Delta + \varkappa^2)\, \phi = \operatorname{div} \mathrm{F}_0}\,. \tag{4.6}$$

Conversely when we have a compound field vector A and a compound scalar ϕ wihich satisfy the equations (4.5) and (4.6) together with the Lorentz's relation (4.4), then the compound field vector defined by

$$\Pi = \frac{1}{\varkappa}\, \mathrm{A} \tag{4.7}$$

satisfies obviously the equation (3.12) and the expression (4.3) becomes:

$$\begin{aligned} \mathrm{F} &= -\operatorname{grad} \phi + \varkappa\, \mathrm{A} + \operatorname{rot} \mathrm{A} \\ &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi + \varkappa^2\, \Pi + \varkappa \operatorname{rot} \Pi \\ &= (\operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta)\, \Pi - \mathrm{F}_0 + \varkappa \operatorname{rot} \mathrm{II} \\ &= (\operatorname{rot}^2 + \varkappa \operatorname{rot})\, \Pi - \mathrm{F}_0 \\ &= H\, \Pi - \mathrm{F}_0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

We see, therefore, that the formula (6.3) represents an electromagnetic field with the initial vector F_0, its compound Hertzian vector being given by (4.7).
being given by (4.7).

If we now write

$$\left\{ \begin{aligned} \mathrm{A} &= \mathrm{A}_E + \eta\, \mathrm{A}_H \\ \phi &= \phi_E + \eta\, \phi_H \end{aligned} \right. \tag{4.9}$$

and separate the expression (4.3), we get

$$\left\{ \begin{aligned} \mathrm{E} &= -\operatorname{grad} \phi_E + \operatorname{rot} \mathrm{A}_E + \eta\, \varkappa\, \mathrm{A}_H && (4.10_1) \\ \mathrm{H} &= -\operatorname{grad} \phi_H + \operatorname{rot} \mathrm{A}_H + \frac{\varkappa}{\eta}\, \mathrm{A}_E. && (4.10_2) \end{aligned} \right.$$

Also the Lorentz's relation (4.4) separates into the following two relations

$$\begin{cases} \operatorname{div} A_E + \eta \varkappa \phi_H = \operatorname{div} A_E - \mu p \phi_H = 0 & (4.11_1) \\ \operatorname{div} A_H + \dfrac{\varkappa}{\eta} \phi_E = \operatorname{div} A_H + (\varepsilon p + \sigma) \phi_E = 0. & (4.11_2) \end{cases}$$

§ 5. *Fundamental Integral Theorem about the* F *vector.*

Let D be an open domain in the 3-dimensional space and S its boundary surface. We assume that the compound complex field vectors $(\mathrm{F}, \mathrm{F}_0)$ and a compound scalar function φ defined in $\overline{D} = D + S$ satisfy the following three conditions:

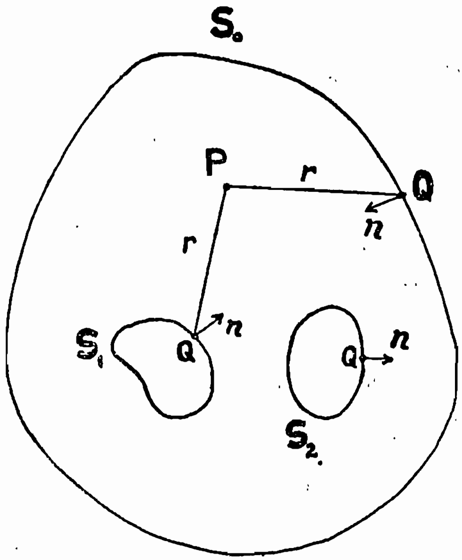
(i) the boundary surface S consist of finite smooth (having continuous tangential planes) closed Jordan surfaces $S_i\,(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$

(ii) Both the field vectors F and F_0 are continuous in D and have finite continuous partial derivatives in D which satisfy the unified electromagnetic equation

$$\operatorname{rot} \mathrm{F} = \varkappa (\mathrm{F} + \mathrm{F}_0)$$

(iii) φ is any regular complex function which satisfie the Kirchhoff's equation

$$\Delta \varphi + \varkappa^2 \varphi = 0$$



in a domain which contains $\overline{D}=D+S$ (φ is accordingly analytic in this domain).

Under these three conditions holds the following fundamental integral equality:

$$\int_S \{(\mathrm{n}\,.\,\mathrm{F})\, \nabla \varphi + [\mathrm{n}\times\mathrm{F}]\times \nabla\varphi + \varkappa\varphi\,[\mathrm{n}\times\mathrm{F}]\}_Q\, dS$$

$$+\int_{\overline{D}} \{-(\mathrm{div}\,\mathrm{F}_0)\, \nabla\varphi + \varkappa\,[\mathrm{F}_0\times \nabla\varphi] + \varkappa^2\varphi\,\mathrm{F}_0\}\, dV = 0, \tag{5.1}$$

where n denotes the inward unit normal vector at a current point Q on S. (Fig. 1).

This theorem corresponds to the fundamental Caúchy's integral theorem in the ordinary complex function theory. In the following we shall give its proof (*).

Let us denote by $\mathrm{u}(Q)$ the following vector on the surface S:

$$\mathrm{u}(Q) \overset{Df}{=} \{(\mathrm{n}\,.\,\mathrm{F})\, \nabla\varphi + [\mathrm{n}\times\mathrm{F}]\times \Delta\,\varphi + \varkappa\varphi\,[\mathrm{n}\times\mathrm{F}]\}_Q \tag{5.2}$$

and consider the scalar product

$$\mathrm{a}\,.\int_S \mathrm{u}(Q)\, dS = \int_S \mathrm{a}\,.\,\mathrm{u}(Q)\, dS \tag{5.3}$$

where a is an arbitrary constant vector. Then the integrand of the right-hand side can be transformed as follows:

$$\begin{aligned}\mathrm{a}\,.\,\mathrm{u} &= (\mathrm{n}\,.\,\mathrm{F})\,(\mathrm{a}\,.\,\nabla\varphi) + [[\mathrm{n}\times\mathrm{F}]\times\nabla\varphi]\,.\,\mathrm{a} + \varkappa\varphi\,[\mathrm{n}\times\mathrm{F}]\,.\,\mathrm{a}\\ &= (\mathrm{a}\,.\,\nabla\varphi)\,\mathrm{F}\,.\,\mathrm{n} + [\mathrm{n}\times\mathrm{F}]\,.\,[\nabla\varphi\times\mathrm{a}] + \varkappa\varphi\,[\mathrm{F}\times\mathrm{a}]\,.\,\mathrm{n}\\ &= \{(\mathrm{a}\,.\,\nabla\varphi)\,\mathrm{F} + \mathrm{F}\times[\nabla\varphi\times\mathrm{a}] + \varkappa\varphi\,[\mathrm{F}\times\mathrm{a}]\}\,.\,\mathrm{n}.\end{aligned} \tag{5.4}$$

Now the vector v defined by

$$\mathrm{v} \overset{Df}{=} (\mathrm{a}\,.\,\nabla\varphi)\,\mathrm{F} + \mathrm{F}\times[\nabla\varphi\times\mathrm{a}] + \varkappa\varphi\,[\mathrm{F}\times\mathrm{a}] \tag{5.5}$$

is continuous at $\overline{D}$ and has finite continuous partial derivatives in D under the conditions (ii) and (iii). Therefore, if S satisfies the condition (i), we have by the Gauss' divergence theorem:

$$\int_S (\mathrm{v}\,.\,\mathrm{n})\, dS = -\int_{\overline{D}} \mathrm{div}\ \mathrm{v}\ dV. \tag{5.6}$$

(*) This proof was first suggested to the auther by Prof. Ogasawara at the Hiroshima University in Japan.

Accordingly (5. 3) is transformed into

$$a \int_S u(Q)\, dS = \int_S v(Q) \,.\, n\, dS = -\int_D \operatorname{div}\ v\ dV. \tag{5. 7}$$

Now we shall calculate div v from (5. 5). First

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[(a \,.\, \nabla \varphi)\, F] &= F \,.\, \operatorname{grad}(a \,.\, \nabla \varphi) + (a \,.\, \nabla \varphi) \operatorname{div} F \\ &= F \,.\, \operatorname{grad}(a \,.\, \nabla \varphi) - (a \,.\, \nabla \varphi) \operatorname{div} F_0. \end{aligned} \tag{5. 8}$$

Secondly

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[F \times [\nabla \varphi \times a]] &= \operatorname{rot} F \,.\, [\nabla \varphi \times a] - F \,.\, \operatorname{rot}[\nabla \varphi \times a] \\ &= \varkappa [F + F_0] \,.\, [\nabla \varphi \times a] + F \,.\, \operatorname{rot}[a \times \nabla \varphi] \\ &= \varkappa F \,.\, [\nabla \varphi \times a] + F \,.\, \operatorname{rot}[a \times \nabla \varphi] \\ &\qquad + \varkappa F_0 \,.\, [\nabla \varphi \times a] \end{aligned} \tag{5. 9}$$

and thirdly

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[\varkappa \varphi [F \times a]] &= \varkappa \nabla \varphi [F \times a] + \varkappa \varphi \operatorname{div}[F \times a] \\ &= -\varkappa F \,.\, [\nabla \varphi \times a] + \varkappa \varphi (\operatorname{rot} F \,.\, a) \\ &= -\varkappa F \,.\, [\nabla \varphi \times a] + \varkappa^2 \varphi (F \,.\, a) + \varkappa^2 \varphi (F_0 \,.\, a). \end{aligned} \tag{5. 10}$$

By (5. 8) + (5. 9) + (5. 10), we get

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\ v &= F \,.\, \operatorname{grad}(a \,.\, \nabla \varphi) + F \,.\, \operatorname{rot}[a \times \nabla \varphi] + \varkappa^2 \varphi (F \,.\, a) \\ &\quad + (a \,.\, \nabla \varphi) \operatorname{div} F_0 - \varkappa F_0 \,.\, [\nabla \varphi \times a] - \varkappa^2 \varphi (F_0 \,.\, a) \\ &= F \,.\, [\operatorname{grad}(a \,.\, \nabla \varphi) + \operatorname{rot}[a \times \nabla \varphi] + \varkappa^2 \varphi\, a] \\ &\quad + a \,.\, [-(\operatorname{div}\ F_0) \nabla \varphi + \varkappa F_0 \times \nabla \varphi + \varkappa^2 \varphi F_0]. \end{aligned} \tag{5. 11}$$

On the other hand we have for any field vector X the following formula:

$$\operatorname{grad}(a \,.\, X) + \operatorname{rot}[a \times X] = [a \times \operatorname{rot} X] + a \operatorname{div} X. \tag{5. 12}$$

If we put here $X = \nabla \varphi$, then we obtain

$$\operatorname{grad}(a \,.\, \nabla \varphi) + \operatorname{rot}[a \times \nabla \varphi] = -\varkappa^2 \varphi\, a, \tag{5.13}$$

since

$$\operatorname{rot} \nabla \varphi = 0 \quad \text{and} \quad \operatorname{div} \nabla \varphi = \Delta \varphi = -\varkappa^2 \varphi.$$

The first term of (5. 11), therefore, vanishes and it becomes

$$\operatorname{div}\ \mathrm{v}=\mathrm{a}\,.\,[-(\operatorname{div}\mathrm{F}_0)\ \nabla\varphi-\varkappa\,\mathrm{F}_0\times\nabla\varphi+\varkappa^2\varphi\,\mathrm{F}_0]. \qquad (5.14)$$

Acoordingly we get from (5. 7)

$$\mathrm{a}\,.\int_S \mathrm{u}(Q)\,dS=\left[-\int_D\{-(\operatorname{div}\mathrm{F}_0)\ \nabla\varphi+\varkappa\,\mathrm{F}_0\times\nabla\varphi+\varkappa^2\varphi\,\mathrm{F}_0\}\,dV\right].\,\mathrm{a}.$$

As this equality holds for any constant vector a, we have necessarily

$$\int_S \mathrm{u}(Q)\,dS=-\int_D\{-(\operatorname{div}\mathrm{F}_0)\ \nabla\varphi+\varkappa\,[\mathrm{F}_0\times\nabla\varphi]+\varkappa^2\varphi\,\mathrm{F}_0\}\,dV$$

whence the equality (5. 1) follows. *Q. E. D*

§ 6. *Integral Representation of the electromagnetic vector* F.

From the basic integral theorem (5. 1) which was proved in the previous section we can deduce now a fundamental formula for the integral representation of the F vector which corresponds to the Cauchy's integral formula in the ordinary complex function theory.

Let $\overline{D}$ be a closed domain whose boundary surface S satisfies the condition (i) stated in § 5. We take as the scalar function φ an elementary solution ψ of the Kirchhoff's equation $\Delta\varphi+\varkappa^2\varphi=0$ at an arbitrary point P, i. e. its normalized solution which has a pole of the first order at P. Such a solution is given by

$$\psi(r)=A\,\psi^{(+)}(r)+B\,\psi^{(-)}(r) \qquad (6.1)$$

where $r=\overline{PQ}$ (Q represents a current point. See Fig. 1), and

$$\left\{\begin{array}{l} A+B=1 \\ \psi^{\pm}(r)=e^{\pm\mathring{\varkappa}r}/r \\ \mathring{\varkappa}\ \underline{\underline{Df}}\ \sqrt{\varepsilon\,\mu\,p^2+\mu\,\sigma\,p},\quad Re\,\mathring{\varkappa}>0\ \text{ for }\ Re\,\mathrm{p}>0. \end{array}\right. \qquad (6.2)$$

Then we have the following integral formulas with respect to F (*).

(*) The detailed proofs will be omitted here.

(1°) when P lies in the domain D:

$$\mathrm{F}(P)=\frac{1}{4\pi}\int_S \{(\mathrm{n}\,.\,\mathrm{F})_Q\,\nabla_Q\psi+[\mathrm{n}\times\mathrm{F}]\times\nabla_Q\psi+\varkappa\psi[\mathrm{n}\times\mathrm{F}]\}\,dS$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_D \{-(\mathrm{div}\,\mathrm{F}_0)_Q\,\nabla_Q\psi+\varkappa[\mathrm{F}_0(Q)\times\nabla_Q\psi]+\varkappa^2\psi\,\mathrm{F}_0(Q)\}\,dV. \tag{6.3}$$

(2°) when P lies on the boundary surface S:

$$\mathrm{F}(P)=\frac{1}{2\pi}\int_S^{*} \{(\mathrm{n}\,.\,\mathrm{F})_Q\,\nabla_Q\psi+[\mathrm{n}\times\mathrm{F}]_Q\times\nabla_Q\psi+\varkappa\psi[\mathrm{n}\times\mathrm{F}]_Q\}\,dS$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_D \{(\mathrm{div}\,\mathrm{F}_0)_Q\,\nabla_Q\psi+\varkappa[\mathrm{F}_0(Q)\times\nabla_Q\psi]+\varkappa^2\psi\,\mathrm{F}_0(Q)\}\,dV \tag{6.4}$$

where $\int_S^{*}$ denotes the Cauchy's principal value of the surface integral.

(3°) when P lies outside of $\overline{D}$:

$$\int_S \{\ \ {''}\ \ {''}\ \ \}\,dS+\int_D \{\ \ {''}\ \ {''}\ \ \}=0. \tag{6.5}$$

If we separate the above expression (6.3) and (6.4) with respect to η, we get the folllowing formulas:

(1°) when P is in the domain D:

$$\left\{\begin{aligned}
\mathrm{E}(P)&=\frac{1}{4\pi}\int_S \{(\mathrm{n}\,.\,\mathrm{E})_Q\,\nabla_Q\psi+[\mathrm{n}\times\mathrm{E}]_Q\times\nabla_Q\psi+\eta\varkappa\psi[\mathrm{n}\times\mathrm{H}]_Q\}\,dS\\
&+\frac{1}{4\pi}\int_{\underline{D}} \{-(\mathrm{div}\,\mathrm{E}_0)\,\nabla_Q\psi+\eta\varkappa[\mathrm{H}_0(Q)\times\nabla_Q\psi]+\varkappa^2\psi\,\mathrm{E}_0(Q)\}\,dV \quad (6.4_1)\\
\mathrm{H}(P)&=\frac{1}{4\pi}\int_S \{(\mathrm{n}\,.\,\mathrm{H})_Q\,\nabla_Q\psi+[\mathrm{n}\times\mathrm{H}]_Q\times\nabla_Q\psi+\frac{\varkappa}{\eta}\psi[\mathrm{n}\times\mathrm{E}]\}\,dS\\
&+\frac{1}{4\pi}\int_{\underline{D}} \{-(\mathrm{div}\,\mathrm{H}_0)_Q\,\nabla_Q\psi+\frac{\varkappa}{\eta}[\mathrm{E}_0\times\nabla_Q\psi]+\varkappa^2\psi\,\mathrm{H}_0(Q)\}\,dV \quad (6.4_2)
\end{aligned}\right.$$

(2°) when P is on the boundary surface S:

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{E}(P) &= \frac{1}{2\pi}\int_S^* \{(\mathrm{n}\,.\,\mathrm{E})_Q\,\nabla_Q\psi + [\mathrm{n}\times\mathrm{E}]_Q\times\nabla_Q\psi + \eta\,\varkappa\,\psi\,[\mathrm{n}\times\mathrm{H}]_Q\}\,dS \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_D \{-(\mathrm{div}\,\mathrm{E}_0)\,\nabla_Q\psi + \eta\,\varkappa\,[\mathrm{H}_0\times\nabla_Q\psi] + \varkappa^2\psi\,\mathrm{E}_0(Q)\}\,dV \qquad (6.5_1) \\ \mathrm{H}(P) &= \frac{1}{2\pi}\int_S^* \{(\mathrm{n}\,.\,\mathrm{H})_Q\,\nabla_Q\psi + [\mathrm{n}\times\mathrm{H}]_Q\times\nabla_Q\psi + \frac{\varkappa}{\eta}\,\psi\,[\mathrm{n}\times\mathrm{E}]_Q\}\,dS \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_D \{-(\mathrm{div}\,\mathrm{H}_0)_Q\,\nabla_Q\psi + \frac{\varkappa}{\eta}\,[\mathrm{E}_0\times\nabla_Q\psi] + \varkappa^2\psi\,\mathrm{H}_0(Q)\}\,dV \qquad (6.5_2) \end{aligned}\right.$$

The formulas (6.4_1), and (6.4_2) are similar to those of Stratton and Chu in the case of a simple oscillating electromagnetic field (*).

§ 7. *Integral Representation of Electromagnetic Vector and Scalar L-potential.*

We shall now transform the above expression (6.3) into other forms.

First we define on the boundary surface S:

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{J}(Q) \underline{\underline{Df}} [\mathrm{n}\times\mathrm{F}]_Q && (7.1_1) \\ &\tilde{\omega}(Q) \underline{\underline{Df}} (\mathrm{n}\,.\,\mathrm{F})_Q && (7.1_2) \end{aligned}\right.$$

and in D:

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{K}_0 \underline{\underline{Df}} \varkappa\,\mathrm{F}_0 = \mu\,\mathcal{H}_0 + \eta\,(-\varepsilon\,\mathcal{E}_0) && (7.2_1) \\ &\rho_0\,(p) \underline{\underline{Df}} -\varepsilon\,\mathrm{div}\,\mathrm{F}_0 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon p + \sigma}\,\rho_E(0). && (7.2_2) \end{aligned}\right.$$

Since we have the relation

$$\nabla_Q\psi(r) = -\nabla_P\psi(r), \qquad (7.3)$$

(*) Stratton and Chu: Diffraction theory of Electromagnetic Waves, Phys. Rev. vol. 56, p. 99 (1939).

we can write the terms in the integrand of (6.3) as follows

$$\begin{cases} (\mathrm{n}\,.\,\mathrm{F})_Q\,\nabla_Q\,\psi = -\,\tilde{\omega}(Q)\,\nabla_P\,\psi = -\,\nabla_P\,\tilde{\omega}(Q)\,\psi), \\ [\mathrm{n}\times\mathrm{F}]_Q\times\nabla_Q\,\psi = -[\mathrm{J}(Q)\times\nabla_P\,\psi] = \nabla_P\times[\mathrm{J}(Q)\,\psi], \\ -\,(\mathrm{div}\,\mathrm{F}_0)_Q\,\nabla_Q\,\psi = -\dfrac{\rho_0\,(Q,p)}{\varepsilon}\,\nabla_P\,\psi = -\dfrac{1}{\varepsilon}\,\nabla_P(\rho_0\,(Q,p)\,\psi), \\ \varkappa\,F_0(\mathrm{Q})\times\nabla_Q\,\psi = -\,\mathrm{K}_0\,(Q)\times\nabla_P\,\psi = \nabla_P\times[\mathrm{K}_0\,(Q)\,\psi]. \end{cases} \tag{7.4}$$

Accordingly the expression (6.3) becomes

$$\mathrm{F}(P) = -\,\nabla_P\left[\frac{1}{4\pi}\int_S \tilde{\omega}(Q)\,\psi\,dS\right] + \nabla_P\times\left[\frac{1}{4\pi}\int_S \mathrm{J}(Q)\,\psi\,dS\right] +$$

$$+\,\varkappa\left[\frac{1}{4\pi}\int_S \mathrm{J}(Q)\,\psi\,dS\right]$$

$$-\,\nabla_P\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_D \rho_0\,(Q,p)\,\psi\,dV\right] + \nabla_P\times\left[\frac{1}{4\pi}\int_D \mathrm{K}_0\,(Q)\,\psi\,dV\right] +$$

$$+\,\varkappa\left[\frac{1}{4\pi}\int_D \mathrm{K}_0\,(Q)\,\psi\,dV\right]. \tag{7.5}$$

If we put now

$$\begin{cases} \mathrm{A}(P;\,S) \overset{Df}{=} \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_S \mathrm{J}(Q)\,\psi\,dS & (7.6_1) \\ \Phi(P;\,S) \overset{Df}{=} \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_S \tilde{\omega}(Q)\,\psi\,dS & (7.6_2) \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} \mathrm{A}(P;\,D) \overset{Df}{=} \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_D \mathrm{K}_0\,(Q)\,\psi\,dV = +\dfrac{\varkappa}{4\pi}\displaystyle\int_D \mathrm{F}_0(Q)\,\psi\,dV & (7.7_1) \\ \Phi(P;\,D) \overset{Df}{=} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\displaystyle\int_D \rho_0\,(Q;\,p)\,\psi\,dV = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_D \dfrac{1}{\varepsilon p+\sigma}\,\rho_{0E}(Q)\,\psi\,dV, & (7.7_2) \end{cases}$$

then the above expression (7.5) can be written as follows:

$$\begin{aligned}F(P)=&-\nabla_P\Phi(P;S)+\nabla_P\times A(P;S)+A(P;S)\\&-\nabla_P\Phi(P;D)+\nabla_P\times A(P;D)+\varkappa A(P;D).\end{aligned}\tag{7.8}$$

Further if we write

$$\begin{cases}A(P;\overline{D})=A(P;S)+A(P;D)\\ \phi(P;\overline{D})=\phi(P;S)+\phi(P;D),\end{cases}\tag{7.9}$$

the obove expression (7.8) becomes

$$\boxed{F(P)=-\operatorname{grad}_p\phi(P;\overline{D})+\operatorname{rot}A(P;\overline{D})+\varkappa A(P;\overline{D})}.\tag{7.10}$$

The $A(P;S)$ and $\phi(P;S)$ above defined will be seen to represent the electromagnetic vector and scalar L-potential (*) due to the imaginary electromagnetic surface current density $\mathbf{J}$ and surface charge density $\tilde{\omega}$. Also the $A(P;D)$ and $\phi(P;D)$ represent those due to the spacial electromagnetic current and charge density K and ρ.

The $A(P;\overline{D})$ and $\phi(P;\overline{D})$ are, therefore, called the total electromagnetic vector and scalar L-potential.

Now if we assume that F is continuously derivable in $\overline{D}=D+S$ and denote by Div and Rot the two dimensional surface divergence and rotation on S respectively, then we obtain by Vector Analysis on surface the following relation:

$$\operatorname{Div}J=\operatorname{Div}[n\times F]=F_t\,.\,\operatorname{Rot}n-n\,.\,\operatorname{Rot}F_t$$

where F_t denotes the tangential component of F on S. Since $\operatorname{Rot}n=0$ and $n\,.\,\operatorname{Rot}F_t=n\,.\,\operatorname{rot}F$, we get the following relation between J and $\tilde{\omega}$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Div}_Q J&=-n.\operatorname{rot}F=-\varkappa n\,.\,[F+F_0]_Q\\&=-\varkappa(\tilde{\omega}(Q)+\tilde{\omega}_0(Q)),\end{aligned}$$

or

$$\boxed{\operatorname{Div}_Q J+\varkappa\tilde{\omega}(Q)=-\varkappa\tilde{\omega}_0(Q)}\tag{7.11}$$

(*) L- means "Laplace Transformed".

where

$$\tilde{\omega}_0(Q) \overset{Df}{=} \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}_0(Q). \tag{7.12}$$

By virtue of this relation, we have

$$\operatorname{div}_P \mathbf{A}(P;S) = \frac{1}{4\pi}\int_S \mathbf{J}(Q) \cdot \nabla_P \psi \, dS$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\int_S \operatorname{Div}_Q [\mathbf{J}(Q(\psi)] dS - \int_S \psi \operatorname{Div}_Q \mathbf{J}(Q) \, dS\right],$$

of which the first integral vanishes, so that it becomes,

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\varkappa \int_S -(\tilde{\omega} + \tilde{\omega}_0) \psi \, dS\right]$$

$$= -\frac{\varkappa}{4\pi}\int_S \tilde{\omega}(Q) \psi \, dS - \frac{\varkappa}{4\pi}\int_S \tilde{\omega}_0(Q) \psi \, dS$$

$$= -\varkappa \phi (P;S) - \varkappa \phi_0 (P;S),$$

where

$$\phi_0(P;S) \overset{Df}{=} \frac{1}{4\pi}\int_S \tilde{\omega}_0(Q) \psi \, dS. \tag{7.13}$$

Therefore we have the relation

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{A}(P;S) + \varkappa \phi (P;S) = -\varkappa \phi_0 (P;S),} \, . \tag{7.14}$$

This may be called the inhomogenous Lorentz's Condition. Next from the definitions of (7.2) we have immediately

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{K}_0 + \varkappa \frac{\rho_0}{\varepsilon} = 0} \tag{7.15}$$

so that

$$\operatorname{div}_P \mathrm{A}(P; D) = \frac{1}{4\pi} \nabla_P \left[\int_D \mathrm{K}_0(Q)\, \psi\, dV \right] = \frac{1}{4\pi} \int_D \mathrm{K}(Q)\, \nabla_P \psi\, dV$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int_D \mathrm{K}_0(Q)\, \nabla_Q \psi\, dV =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int_D \operatorname{div}_Q [\mathrm{K}_0(Q)\, \psi]\, dV + \frac{1}{4\pi} \int_D \psi \operatorname{div}_Q \mathrm{K}_0(Q)\, dV$$

$$= -\frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon} \int_D \rho_0(Q, p)\, \psi\, dV + \frac{1}{4\pi} \int_S (\mathrm{n} \,.\, \mathrm{K}_0(Q))\, \psi\, dS =$$

$$= -\varkappa\, \phi(P; D) + \varkappa\, \phi_0(P; S)$$

hence

$$\boxed{\operatorname{div}_P \mathrm{A}(P; D) + \varkappa\, \phi(P; D) = \varkappa\, \phi_0(P; S)} \tag{7.16}$$

(7.14) + (7.16) gives us, therefore,

$$\boxed{\operatorname{div} \mathrm{A}\, (P; \overline{D}) + \varkappa\, \phi\, (P; \overline{D}) = 0} \tag{7.17}$$

which svows that $\mathrm{A}\,(P; D)$ and $\phi\,(P; \overline{D})$ satisfy the Lorentz's relation (4.4).

On the other hand we have from (7.6_1) and (7.6_2)

$$\begin{cases} (\Delta_P + \varkappa^2)\, \mathrm{A}\,(P; S) = \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int_S \mathrm{J}(Q)\, (\Delta_P + \varkappa^2)\, \psi\, dS = 0 & (7.18_1) \\[2ex] (\Delta_P + \varkappa^2)\, \phi\,(P; S) = \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int_S \tilde{\omega}(Q)\, (\Delta_P + \varkappa^2)\, \psi\, dS = 0, & (7.18_2) \end{cases}$$

and from (7.7_1) and (7.7_2), (*)

$$\begin{cases} (\Delta_P + \varkappa^2)\, \mathrm{A}\,(P; D) = -\mathrm{K}_0(P), \text{ for } P \in D & (7.19_1) \\[2ex] (\Delta_P + \varkappa^2)\, \phi\,(P; D) = -\dfrac{1}{\varepsilon}\, \rho_0\,(P, p), \text{ for } P \in D. & (7.19_2) \end{cases}$$

(*) C. MÜLLER, *Grundprobleme des Elektromagnetischen Schwingungen*, p. 33. (Springer 1957).

By addition of (7. 18) and (7. 19) resp., we get

$$\begin{cases} (\Delta_P+\varkappa^2)\,\mathrm{A}\,(P;\,\overline{D})=-\mathrm{K}_0(P)=-\varkappa\,\mathrm{F}_0, \text{ for } P\in D & (7.20_1) \\ (\Delta_P+\varkappa^2)\,\phi\,(P;\,\overline{D})=-\dfrac{1}{\varepsilon}\rho_0(P,p)=\operatorname{div}\mathrm{F}_0 \text{ for } P\in D & (7.20_2) \end{cases}$$

which show that $\mathrm{A}(P;\,\overline{D})$ and $\phi(P;\,\overline{D})$ satisfy the conditions (4. 5) and (4. 6). Accordingly they represent the vector and scalar L-potential defined in § 4.

§ 8. *Integral Representation of Electromagnetic Hertzian Vector.*

In this section we shall further transform the expression (7. 8) into another form. By making use of the relation (7. 13) and (7. 16) the first part of (7. 8) can be written as

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(P;\,S) &\underset{=}{\overset{Df}{}}-\operatorname{grad}\phi(P;\,S)+\varkappa\,\mathrm{A}(P;\,S)+\operatorname{rot}\mathrm{A}(P;\,S) \\ &=\frac{1}{\varkappa}\,[\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathrm{A}(P;\,S)-\varkappa\operatorname{grad}\phi_0(P;\,S)+ \\ &\qquad +\varkappa^2\,\mathrm{A}(P;\,S)+\operatorname{rot}\mathrm{A}(P;\,S)] \\ &=\frac{1}{\varkappa}\,[(\operatorname{grad}\operatorname{div}-\Delta)\,\mathrm{A}(P;\,S)+\operatorname{rot}\mathrm{A}(P;\,S)]-\operatorname{grad}\phi_0 \\ &=\frac{1}{\varkappa}\,(\operatorname{rot}^2+\varkappa\operatorname{rot})\,\mathrm{A}(P;\,S)-\operatorname{grad}\phi_0. \end{aligned} \tag{8. 1}$$

Similarly the second part of (7. 8) becomes

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(P;\,D) &\underset{=}{\overset{Df}{}}-\operatorname{grad}\phi(P;\,D)+\varkappa\,\mathrm{A}(P;\,D)+\operatorname{rot}\mathrm{A}(P;\,D) \\ &=\frac{1}{\varkappa}\,[\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathrm{A}(P;\,D)+\varkappa\operatorname{grad}\phi_0(P;\,S)+ \\ &\qquad +\varkappa^2\,\mathrm{A}(P;\,D)+\varkappa\operatorname{rot}\mathrm{A}(P;\,D)] \\ &=\frac{1}{\varkappa}\,[(\operatorname{grad}\operatorname{div}-\Delta)\,\mathrm{A}(P;\,D)-\mathrm{K}(P)+ \\ &\qquad +\varkappa\operatorname{rot}\mathrm{A}(P;\,D)+\operatorname{grad}\phi_0(P;\,S)] \\ &=\frac{1}{\varkappa}\,(\operatorname{rot}^2+\varkappa\operatorname{rot})\,\mathrm{A}(P;\,D)-\mathrm{F}_0+\operatorname{grad}\phi_0(P;\,S). \end{aligned} \tag{8. 2}$$

Here Π_E is called the «*electric Hertzian L-vector*» and Π_H the «*magnetic Hertzian L-vector*» (or Fitzgerad's *L*-vector).
Since we have from (7.6), (7.7) and (2.8).

$$\begin{cases} A_E(P;S)=\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_S [n\times E]_Q\,\psi\,dS \\ A_H(P;S)=\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_S [n\times H]_Q\,\psi\,dS \end{cases} \tag{8.8}$$

$$\begin{cases} A_E(P;D)=\dfrac{\eta\varkappa}{4\pi}\displaystyle\int_D H_0(Q)\,\psi\,nV=\dfrac{\mu}{4\pi}\int_D \mathcal{H}_0\,\psi\,dV \\ A_H(P;D)=\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\varkappa}{\eta}\displaystyle\int_D E_0(Q)\,\psi\,dV=-\dfrac{\varepsilon}{4\pi}\int_D \mathcal{E}_0\,\psi\,dV \end{cases} \tag{8.9}$$

we obtain from (8.3_3) and (8.8),

$$\Pi_E(P;\overline{D})=\frac{\eta}{\varkappa}A_H(P;\overline{D})=\frac{1}{4\pi(\varepsilon p+\sigma)}\left[\int_S [n\times H]_Q\,\psi\,dS-\varepsilon\int_D \mathcal{E}_0(Q)\,\psi\,dV\right] \tag{8.10$_1$}$$

$$\Pi_H(P;\overline{D})=\frac{1}{\eta\varkappa}A_E(P;\overline{D})=-\frac{1}{4\pi\mu p}\left[\int_S [n\times E]_Q\,\psi\,dS+\mu\int_D \mathcal{H}_0(Q)\,\psi\,dV\right]. \tag{8.10$_2$}$$

If we substitute these expressions into (8.7), we get another form of the integral representation of both E and H.

UNIVERSIDAD DE TUCUMÁN.
(1959-10-5)

UNION MATEMATICA ARGENTINA

MIEMBROS HONORARIOS

Tulio Levi-Civita (†); Beppo Levi; Alejandro Terracini; George D. Birkhoff (†); Marshall H. Stone; Georges Valiron (†); Antoni Zygmund, Godofredo García, Wilhelm Blaschke, Laurent Schwartz, Charles Ehresmann.

REPRESENTANTES EN EL EXTRANJERO

Ing. Rafael Laguardia (Uruguay). Ing. José Luis Massera (Uruguay). Dr. Godofredo García (Perú). Dr. Leopoldo Nachbin (Brasil). Dr. Roberto Frucht (Chile). Dr. Mario González (Cuba). Dr. Alfonso Nápoles Gandara (México). Pedro Puig (España). Alejandro Terracini (Italia).

Este número de la Revista de la Unión Matemática Argentina y de la Asociación Física Argentina se ha publicado con la contribución del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. Tal contribución no significa que el Consejo asuma responsabilidad alguna por el contenido del mismo.

PUBLICACIONES DE LA U. M. A.

Revista de la U. M. A. – Vol. I (1936-1937); Vol. II (1938-1939); Vol. III (1938-1939); Vol. IV (1939); Vol. V (1940); Vol. VI (1940-1941); Vol. VII (1940-1941); Vol. VIII (1942); Vol. IX (1943); Vol. X (1944-1945).

Revista de la U. M. A. y órgano de la A. F. A. – Vol. XI (1945-1946); Vol. XII (1946-1947); Vol. XIII (1948); Vol. XIV (1949-1950).

Revista de la U. M. A. y de la A. F. A. – Vol. XV (1951-1953); Vol. XVI (1954-1955); Vol. XVII (1955); Vol. XVIII (1959).

Los volúmenes III, IV, V y VI comprenden los siguientes fascículos separados:

Nº 1. GINO LORIA. *Le Matematiche in Ispagna e in Argentina.* — Nº 2. A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre las series de funciones de Hermite.* — Nº 3. MICHEL PETROVICH. *Remarques arithmétiques sur une équation differentielle du premier ordre.* — Nº 4. A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Una nueva demostración del teorema límite del Cálculo de Probabilidades. Condiciones necesarias y suficientes para que una función sea integral de Laplace.* — Nº 5. NIKOLA OBRECHKOFF. *Sur la sommation absolue par la transformation d'Euler des séries divergentes.* — Nº 6. RICARDO SAN JUAN. *Derivación e integración de series asintóticas.* — Nº 7. Resolución adoptada por la U. M. A. en la cuestión promovida por el Sr. Carlos Biggeri. — Nº 8. F. AMODEO. *Origen y desarrollo de la Geometría Proyectiva.* — Nº 9 CLOTILDE A. BULA. *Teoría y cálculo de los momentos dobles.* — Nº 10. CLOTILDE A. BULA. *Cálculo de superficies de frecuencia.* — Nº 11. R. FRUCHT. *Zur Geometria auf einer Fläche mit indefiniter Metrik (Sobre la Geometría de una superficie con métrica indefinida).* — Nº 12. A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre una memoria del Prof. J. C. Vignaux.* — Nº 13. E. TORANZOS. *Sobre las singularidades de las curvas de Jordan.* — Nº 14. M. BALANZAT. *Fórmulas integrales de la intersección de conjuntos.* — Nº 15. G. KNIE. *El problema de varios electrones en la mecánica cuantista.* — Nº 16. A. TERRACINI. *Sobre la existencia de superficies cuyas líneas principales son dadas.* — Nº 17. L. A. SANTALÓ. *Valor medio del número de partes en que una figura convexa es dividida por n rectas arbitrarias.* — Nº 18. A. WINTNER. *On the iteration of distribution functions in the calculus of probability (Sobre la iteración de funciones de distribución en el cálculo de probabilidades).* — Nº 19. E. FERRARI. *Sobre la paradoja de Bertrand.* — Nº 20. J. BABINI. *Sobre algunas propiedades de las derivadas y ciertas primitivas de los polinomios de Legendre.* — Nº 21. R. SAN JUAN. *Un algoritmo de sumación de series divergentes.* — Nº 22. A. TERRACINI. *Sobre algunos lugares geométricos.* — Nº 23. V. y A. FRAILE y C. CRESPO. *El lugar geométrico y lugares de puntos áreas en el plano.* — Nº 24. R. FRUCHT. *Coronas de grupos y sus subgrupos, con una aplicación a los determinantes.* — Nº 25. E. R. RAIMONDI. *Un problema de probabilidades geométricas sobre los conjuntos de triángulos.*

En 1942 la U. M. A. ha iniciado la publicación de una nueva serie de 'Memorias y monografías'' de las que han aparecido hasta ahora las siguientes:

Vol. I; Nº 1. — GUILLERMO KNIE, *Mecánica ondulatoria en el espacio curvo.* Nº 2. — GUIDO BECK, *El espacio físico.* Nº 3. — JULIO REY PASTOR, *Integrales parciales de las funciones de dos variables en intervalo infinito.* Nº 4. — JULIO REY PASTOR, *Los últimos teoremas geométricos de Poincaré y sus aplicaciones.* Homenaje póstumo al Prof. G. D. BIRKHOFF.

Vol. II; Nº 1. — YANNY FRENKEL, *Criterios de bicompacidad y de H-completidad de un espacio topológico accesible de Frechet-Riesz.* Nº 2. — GEORGES VALIRON, *Fonctions entières.*

Vol. III; Nº 1. — E. S. BERTOMEU y C. A. MÁLLMANN, *Funcionamiento de un generador en cascadas de alta tensión.*

Además han aparecido tres cuadernos de *Miscelánea Matemática.*