Volumen XIX Número 5

REVISTA

DE LA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

(Miembro del patronato de la Mathematical Reviews)

Y DE LA

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

SUMARIO

BUENOS AIRES
1962

UNION MATEMATICA ARGENTINA

La U. M. A. reconoce cuatro categorías de miembros: honorarios, protectores, titulares y adherentes. El miembro protector paga una cuota anual de \$ 2000, por lo menos; el titular una cuota anual de \$ 300 y el adherente (estudiante solamente) una cuota anual de \$ 150. Los pagos deberán efectuarse por cheque, giro u otro medio de gastos, a la orden de UNION MATEMATICA ARGENTINA, Casilla de Correo 3588, Buenos Aires.

Por ser la U. M. A. miembro del patronato de la Mathematical Reviews (sponsoring member), los socios de la U. M. A. tienen derecho a suscribirse a esa importante revista de bibliografía y crítica con 50 % de rebaja sobre el precio de suscripción que es de 50 dólares por año. Los socios de la U. M. A. pagarán por tanto sólo 25 dólares por año.

Los autores de trabajos reciben gratuitamente una tirada aparte de 50 ejemplares. Las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

JUNTA DIRECTIVA

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

La A. F. A., asociación privada de investigadores, profesores y estudiantes de física y de astronomía, tiene por objeto fomentar el progreso de la investigación y de la enseñanza de dichas materias por medio de reuniones científicas periódicas y de la publicación de trabajos originales.

Podrán ingresar como socios activos quienes hayan efectuado investigaciones originales; pueden ser socios adherentes los profesores que no cumplan este requisito; y socios estudiantes los que hayan aprobado el primer año de estudios de física o de astronomía.

Las solicitudes de ingreso, que deberán llevar la firma de dos socios activos o adherentes, habrán de dirigirse al secretario local que corresponda. Los socios activos abonarán una cuota anual de \$ 400, los adherentes de \$ 300 y los estudiantes de \$ 200, pudiendo hacerlo en dos cuotas semestrales. En estas cuotas están incluídas las suscripciones a la "Revista de la U.M.A. y de la A.F.A." y a "Ciencia e Investigación".

La correspondencia relacionada con las colaboraciones (artículos originales, informes y reseñas bibliográficas) deben dirigirse al Dr. Mario Bunge, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Perú 222, Buenos Aires.

Se solicita a las instituciones a que pertenecen los autores contribuyan con una cuota de \$ 500 por página impresa, la que les dará derecho a recibir 100 apartados libres de cargo.

COMISION DIRECTIVA (1960-62)

Abonnement à l'etranger (comprenant un volume complet): 7,50 dollars (Etats-Unis).

Prière d'adresser toute la correspondance scientifique, administrative et les échanges à l'adresse ci-dessous:

REVISTA DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA
Casilla de Correo 3588
Buenos Aires (Argentina)

EFFECT OF TEMPERATURE GRADIENTS ON THE DIFFUSION OF THERMAL NEUTRONS

por M. E. FOGLIO
(Instituto de Física, S. C. de Bariloche - Argentina)

SUMMARY

The efect of thermal gradients on the diffusion of thermal neutrons in solid media has been obtained, assuming i) classical scattering of neutrons by nuclei ii) particular distribution function for the velocity of nuclei. A correction, linear in grad T, is obtained. Quantum effects have not been taken into account. Thus the better the agreement of the used scattering law with the actual one, the better the obtained results will hold.

1. INTRODUCTION

The aim of this paper is the theoretical derivation of the offects of temperature gradients on the diffusion of thermal neutrons in non-absorbing scattering media.

As a first approximation the Lorentz theory of electrons in metals can be used (1). In order to solve the problem, it is necesary to assume zero electric charge, and resort to maxwellian statistics instead of Fermi's, due to the usually low density of neutrons. Under these conditions one obtains:

$$J = -(v_l/3)\,[\operatorname{grad} n_2 + \frac{1}{2}\,(n_2/T)\ \operatorname{grad} T]$$

where

$v = \sqrt{8\,k\,T/\pi\,m_2}$ is the maxwellian average for the absolute value of neutrons velocity, and

$l = 1/n_1\,\pi\,s^2$ the mean free path of neutrons in the scattering media.

In the following we shall use subscripts 1 and 2 for nuclei and neutrons respectively, m_1 and m_2 being their masses, n_1 and n_2 their number densities, and s the diameter of the nuclei.

By introducing the scalar flux of neutrons:

$$\phi = n_2 \bar{v}$$

the vector flux

$$J = -(l/3)\ \text{grad}\,\phi$$

is obtaiend.

This equation is identical with the common diffusion law, usually derived from the elementary diffusion theory (2).

However, the fundamental formulae that have been used in this application imply assumptions that do not hold in the case of neutrons in solids, namely: there is no energy exchange between nuclei and neutrons, and the nuclei are at rest.

From a classical point of view, these assumptions are not valid in the case of neutrons since the mass cannot be neglected when compared with those of nuclei.

In order to introduce the velocity of nuclei it should be necessary to resort to the velocity distribution function f_1. The difficulty arises from the fact that f_1 cannot be determined from a transport equation, as would be the case in a gaseous binary mixture. This difficulty can be obviated by assuming a convenient model for the solid in the absence of neutrons; such a distribution function f_1 is assumed not to be appreciably influenced by neutrons, as long as their number density is sufficiently low, this requirement —$n_2 \ll n_1$— being fulfilled n the usual cases.

One may then obtain an integro-differential equation involving the corresponding function f_2 for neutrons, which is equivalent to the Boltzmann transport equation for one component of a gaseous binary mixture. It should be noted that collisions between neutrons are negligible, because $n_2 \ll n_1$.

If f_2 expanded as a series of functions, and the fore-mentioned integro-differential equation is adequately separated in a sequence of integral equations, the solutions of these equations are the functions of the series in which f_2 was expanded.

Just as in the case of Enskog method, a special solution of the transport equation, valid only for nearly thermal neutrons, is obtained in this way. The only necesary values for the determination of f_2 are: n_2 and the temperature distribution throughout the scattering medium.

On the basis of the first two functions of the f_2 series, the diffusion law corrected for the temperature effect has been obtained.

J_+ and J_- have been defined in the usual neutrons diffusion theory way (2), their expressions having been calculated on the basis of the said approximation. With them, boundary conditions for two cases, namely: the interface between two scattering media and between a scattering medium and a vacuum, have been established.

A few examples with and without absorption have also been calculated.

2. DISTRIBUTION FUNCTION FOR NUCLEI

It has already been seen that, on the basis of a conveniently modified Lorentz theory of electrons in metals, the usual law of diffusion is obtained. This is mainly due to the type of f_2 expansion used for solving the problem of electrons in metals.

This treatment fits well in the latter case since the ion-electron energy exchange in negligible, the electron mass being small wiht respect to the ionic one. This assumption, however, does not hold for neutrons and light nuclei; thus it is necessary to take into account the velocities of nuclei.

It should now be necessary to introduce f_1, but it has already been pointed in § 1 that there is no transport equation for nuclei. Consequently it is necessary to obtain it previously to the resolution of the transport equation; in order to that it shall be assumed the following model for nuclei in a solid: they behave like classical harmonic and isotropic oscillators, with a unique frequency, that can be obtained, e.g. from Einstein theory of specific heats. In so far as this frequency does not appear in f_1, its actual value does not affect the obtained distribution function, but, the ratio of frequency to temperature determines the validity of this classical derivation, when the diffaction effect of the lattice is disregarded.

A macroscopically small volume dr is considered. The number of oscillators within this volume is: $n_1\ dr$. If maxwellian statistics is used, the number of oscillators in dr which have their phase space representative points in a cell of energy E, are given by: $(n_1\ dr) \exp(-\beta E)/Z$ where Z is the partition function for an oscillator of frequency ν:

$$Z = (kT/h\nu)^3 \text{ and } \beta = 1/kT.$$

The classical expression for E is $E = (p_1^2/2m_1) + \frac{1}{2}K^2 q_1^2$ where

$p_1 = (p_{1x}, p_{1y}, p_{1z})$	is the momentum,
$q_1 = (q_{1x}, q_{1y}, q_{1z})$	is the coordinate, and
$K^2 = 4\pi^2 m_l \nu^2$	the oscillator force constant.

The distribution function $f_1(r, c_1, t)$ is then obtained by adding up $(n_1\, dr)$ exp—$(\beta E)/Z$ over all the phase space cells for an oscillator whose velocities lie between $c_1 = p_1/m_1$ and $c_1 + dc_1 = (p_1 + dp_1)/m_1$.

A good approach to the summation is obtained by integrating

$$\int_v (n_1\, dr)\, [\exp(-\beta E)/Zh^3]\, dp_1\, dq_1 =$$

$$= \int_v [(n_1\, dr)/(kT/h\nu)^3]\, h^3 \exp\left[-\beta\left(\frac{1}{2}\, p_1^2/m_1 + \frac{1}{2}\, k^2 q_1^2\right)\right] dp_1\, dq_1$$

over the volume $v = dr$. The result is then:

$$f_1(r, c_1, t) =$$

$$= (n_1 m_1^3/h^3)\, (h\nu/kT)^3 \exp(-m_1 c_1^2/2kT) \int_v \exp(-K^2 q_1^2/2kT)\, dq_1 \qquad 2.2$$

It should be noted that the integration must be extended over a volume, although macroscopically small, sufficiently great as to assure the condition $K^2 q_1^2/2kT$ » *all* over the volume surface. This condition is obviously satisfied if the volume contains a sufficiently high number of nuclei, and in this case the integration can be extended to infinity without introducing any appreciable error. The expression for f_1 comes to be

$$f_1(r, c_1, t) = n_1 (m_1/2\pi kT)^{3/2} \exp(-m_1 c_1^2/2kT) \qquad 2.3$$

It is easily seen that it appears to be the same as that for a perfect monoatomic gas.

Had we considered quantum oscillators, the distribution function would be the same as 2.3 if the medium temperature were high enough so that the oscillators stayed in high quantum number states. The fulfillment of the last condition would justify the classical treatment of the neutrons-nuclei collisions if the difraction with the lattice were not taken into account.

The scattering law obtained from the assumption done, that neutrons make independent collisions with each one of nuclei, must then be replaced by the sum of the Bragg scattering plus the incoherent scattering.

Bragg scattering is higly anisotropic, but for a nearly isotropic distribution of neutron velocities, the number of neutrons scattered from a given volume of a polycristalline medium is independent of the direction in a first approximation and proportional to the scalar neutrons flux. This follows from the fact that the number of neutrons of a given speed scattered by each of the Bragg reflections in a given direction is proportional to the number of incoming neutrons with velocities making the corresponding Bragg angle with the outgoing velocity. This number being in a first approsach independent of the direction of the scattered neutrons, due to the assumed isotropy of the neutron velocity distribution, the integration over all the speeds and Bragg angles is again direction-independent. The isotropic scattering proportional to the neutrons scalar flux leads to the usual diffusion law.

The corrections due to thermal gradients must be obtained from the temperature dependence of the scattering law, arising from the neutrons-phonon scattering, included in the incoherent scattering. Therefore, the classical model assumed for the scattering of neutrons must be taken only as a particular scattering law.

The results obtained will hold if the assumed scattering law is a good approximation to the actual one.

3. THE EQUATION

The neutrons transport equation is formally the same as that for one component of a binary mixture of gases, the nuclei playing the role of the other component (3).

In the following the notation of Chapman and Cowling shall be used.

The fact that $n_2 \ll n$, makes it possible to 1) neglect neutron-

neutron collisions, and 2) assume that f_1 will not be modified by the presence of neutrons. In such a case:

$$\frac{\partial f_2}{\partial t}+c_2\cdot\frac{\partial f_2}{\partial r}+F\cdot\frac{\partial f_2}{\partial c_2}=\iint[f_1' f_2'-f_1 f_2]\,g_{21}\,b\,db\,d\epsilon\,dc_1 \qquad 3.1$$

It is sometimes advisable to make the following variable transformation (see (3) 3.45 and 3.5).

$$g_{21}\,b\,db\,d\epsilon=k_{21}\,dk$$

It is necessary to introduce the integral operators $L(f_2)$ and $I_{21}(\phi_2)$ defined by

$$L(f_2)=\iint(f_1' f_2'-f_1 f_2)\,g_{21}\,b\,db\,d\epsilon\,dc_1=\iint(f_1' f_2'-f_1 f_2)\,k_{21}\,dk\,dc_1 \qquad 3.3$$

$$I_{21}(\phi_2)=-L(f_2^0\phi_2)/n_1 n_2 \qquad 3.4$$

where

$$f_2^0=n_2\,(m_2/2\pi kT)\exp(-m_2 c_2^2/2kT) \qquad 3.5$$

4. STUDY OF THE HOMOGENEOUS INTEGRAL EQUATION AND ITS KERNEL

The solution of the integral equation:

$$I_{21}(\phi_2)=0 \qquad 4.1$$

is $\Phi_2=$ constant, It is obtained by methods only slightly different from those used in (3) Chapter IV (4).

The non-homogeneous integral equation, associated with 4.1 can be written

$$I_{21}(\phi_2)=f(c_2) \qquad 4.2$$

In order to resort to well-known theorems dealing with integral equation, it is advisable to write 4.2 as a Fredholm equation. Following Chapman and Cowling (3) the equivalence

$$I_{21}(\phi_2)=K_0(c_2)\,\phi_2(c_2)-\int K(c_2,c)\,\phi_2(c)\,dc \qquad 4.3$$

can be shown, where

$$K_0(c) = \exp(-m_2 c^2/2kT).(-4\pi s^2 A/b^2).$$

$$.\{(1+bc^2)[\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,Erf(\sqrt{b/2}\,c)/\sqrt{b/2}\,c] - \exp(-m_1 c^2/2kT)\} \qquad 4.4$$

being $A = -(m_1 m_2)^{3/2}/(2kT)^3$; $b = m_1/kT$ and $K(c_2,c)$ a symetrical kermel.

Equation 4.2 has a solution if, and only if

$$\int f(c_2)\,\psi_i(c_2)\,dc_2 = 0 \qquad 4.5$$

where the $\Psi_i(c_2)$ are the linearly independent solutions of 4.1. Since the unique solution of 4.1 is $\Phi_2 = \alpha(r, t)$, the condition for 4.2 to be solved is

$$\int f(c_2)\,dc_2 = 0 \qquad 4.6$$

It should be remarked that the only solution of 4.1 is $\phi_2 = \alpha$. This is a consequence of two related facts; i) f_1 was obtained independently of the transport equation, and ii) f_2 was the only unknown in the equation. This imposes at the same time, that the only conservation equation that can be directly derived from the transport equation is that for the number of neutrons.

5. METHOD FOR THE SOLUTION OF THE TRANSPORT EQUATION

It is advisable to define D as in

$$D f_2 = \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial r}.c_2 + F.\frac{\partial f_2}{\partial c_2} \qquad 5.1$$

Resorting to 3.3, equation 3.1 can be rewritten as follows:

$$\mathrm{D} f_2 = L(f_2) \qquad 5.2$$

On setting

$$f_2 = \sum_{r=0}^{\infty} f_2^{(r)} \qquad 5.3$$

and introducing 5.3 in 5.2

$$D f_2 = L\left(\sum_{r=0}^{\infty} f_2^{(r)}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} L\left(f_2^{(r)}\right) \qquad 5.4$$

is obtained.

The first member of 5.2 can be expanded according to

$$D f_2 = -n_1 n_2 \sum_{r=0}^{\infty} D^{(r)} \qquad 5.5$$

where $D^{(r)}$ are functions obtained operating on f_2 with some differential operators that will be defined in §7. From 5.4, 5.5 and 3.4 it follows:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \{I_{21}(\Phi_2^{(r)}) - D^{(r)}\} = 0 \qquad 5.6$$

The new unknowns $\Phi_2^{(r)}$ are defined according to $f_2^{(r)} = f^0_2 \Phi_2^{(r)}$ where f^0_2 has been defined in 3.5. It should be emphasised that f^0_2 can be made identical with $f_2^{(o)}$, provided $D^{(o)}$ is conveniently chosen, as will be shown in §6.

Equation 5.3 is a solution of 5.2 if the equations

$$I_{21}(\Phi_2^{(r)}) = D^{(r)} \qquad 5.7$$

are satisfied for all values of r.

If $D^{(s)}$ is defined in such a way that the only $f_2^{(r)}$ appearing are those for $r = 0,1,\ldots s-1$, the second member of 5.7 will be known after having solved all equations for $r<s$.

The general solution for 5.7 is

$$\Phi_2^{(r)} = X_2^{(r)} + \Psi_2^{(r)} \qquad 5.8$$

where $X_2^{(r)}$ is a particular solution for 5.7 and $\Psi_2^{(r)}$ is the general solution for 4.1.

The only solution for 4.1, as it has already been seen in §4, is $\alpha\ (r,t)$. The condition 4.6 for solving 5.7 then reads:

$$\int D^{(r)}\, dc_2 = 0 \qquad 5.9$$

One should demostrate that $D^{(r)}/\sqrt{K_0(c_2)}$ is integrable and of integrable square for each r.

Two problems arise: i) to separate 5.5 conveniently and ii) to determine $\Phi_2^{(r)} = \alpha^{(r)}(r,t)$ for each value of r.

6. FIRST ORDER APROXIMATION

In order to obtain the first approximation, $D^{(o)}$ will be defined by:

$$D^{(0)} = 0 \qquad 6.1$$

or according to 5.7

$$I_{21}(\Phi_2^{(0)}) = 0 \qquad 6.2$$

for which the only solution is $\Phi_2^{(o)} = \alpha$. Consequently the first approximation will be

$$f_2^{(0)} = \alpha^{(0)} f_2^{(0)} \qquad 6.3$$

Setting $\alpha^{(o)} = 1$, the so—obtained first approximation is that of the maxwellian distribution for the each—point temperature of the scattering media, and for a number density of particles equal to the number density of neutrons at each point.

The setting of $\alpha^{(0)}$ makes it posible to obtain the remaining $\alpha^{(r)}$. Then

$$\int f_2 \, dc_2 = \sum_{r=0}^{\infty} \int f_2^{(r)} \, dc_2 = n_2$$

and consequently

$$\sum_{r=1}^{\infty} \int f_2^{(r)} \, dc_2 = 0$$

This equation is satisfied when

$$\int f_2^{(r)} \, dc_2 = \int f_2^0 X_2^{(r)} \, dc_2 + \alpha^{(r)} n_2 = 0 \qquad 6.4$$

Equation 6.4 will be taken as the condition determining the values of $\alpha^{(r)}$.

7. SEPARATION OF THE TRANSPORT EQUATION

In the case of gaseous mixtures, five differential equations are obtained from the transport equation without resolving it explicitely, namely, the equations that state the conservation of mass, momentum and kinetic energy (3).

From these equations, the time derivatives of the density of particles, mean velocity and temperature, are obtained. These equations must then be introduced in Df_2 in order to perform the separation 5.5 (3).

It has been seen n §4 that, according to this, only one continuity equation can be derived: the one which refers to the number of neutrons:

$$\frac{\partial n_2}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r}\cdot n_2\overline{c_2}=0 \qquad 7.1$$

The equation for the mean velocity:

$$n_2\overline{c_2}=\int f_2 c_2 dc_2 \qquad 7.2$$

is just the required one, as the vectorial flux of neutrons can be expressed:

$$J_2=n_2\overline{c_2} \qquad 7.3$$

The mean velocity will be obtained from the second approximation since the first one is maxvellian and, being isotropic, does not contribute to $\overline{c_2}$.

As long as the transport equation only determines the neutrons distribution function, it cannot lead to a differential equation for the conservation of kinetic energy, as the involved integrals do not vanish. It should be noted that this limitation does not lead into troubles since, neutrons being approximately thermal, the temperature that appears in $f_2^{(o)}$ is the one of the scattering medium. Therefore, the time derivative of temperature follows from the medium properties.

It is now posible to write the separation 5.5 explicitly. It is posible to write:

$$-n_1 n_2 D^{(r)}=\frac{\partial_0 f^{(r-1)}}{\partial t}+\ldots+\frac{\partial_{r-1} f^{(0)}}{\partial t}+c_2.\frac{\partial f^{(r-1)}}{\partial r}+F.\frac{\partial f^{(r-1)}}{\partial c_2} \qquad 7.4$$

for $r\neq 0$, where

$$\frac{\partial_s f_2^{(r)}}{\partial t}=\frac{\partial f_2^{(r)}}{\partial n_2}\cdot\frac{\partial_s n_2}{\partial t}+\frac{\partial f_2^{(r)}}{\partial T}\cdot\frac{\partial_s T}{\partial t} \qquad 7.5$$

being

$$\frac{\partial_s n_2}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r} \cdot [n_2 \overline{c_2^{(s)}}] \qquad 7.6$$

$$n_2 \overline{c_2^{(s)}} = \int f_2^{(s)} c_2 dc_2 \qquad 7.7$$

The symbol $\delta_s T / \delta t$ is an arbitrary function in t and r satisfying

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\partial_s T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} \qquad 7.8$$

As it is seen in 7.4 the only $f^{(k)}$ that appear in $D^{(r)}$ are those for k between 0 and r-1. Otherwise, it is not difficult to show (4) that 7.4 satisfies 5.5 and 5.9; consequently, the integral equations 5.7 admit a solution for every r. Each one of them could be solved once the solutions for every foregoing equations where known.

It remains still to be shown for every case that $D^{(r)}/\sqrt{K_0(c_2)}$ is integrable and of integrable square.

8. SECOND ORDER APPROXIMATION

From 5.7 the equation

$$I_{21}(\phi_2^{(1)}) = D^{(1)} \qquad 8.1$$

is obtained for $r = 1$.

The external forces acting upon neutrons are in general negligible, and then $F = O$. Also: $\partial_0 T / \partial t = O$ which is equivalent to considering this effect being of higher order with respect to the second order approximation. With this simplification, it follows

$$-n_1 n_2 D^{(1)} = \left\{ (c_2/n_2) \cdot \frac{\partial n_2}{\partial r} + [(m_2 c_2^2/2kT) - 3/2] (c_2/T) \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right\} f_2^0 \qquad 8.2$$

It is necesary to find a particular solution for 8.1, called $X_2^{(1)}$ in § 5; it has already been seen in § 6 that $\acute{a}(^1)$ is entirely determined by 6.4. The expression:

$$X_2^{(1)} = A. \frac{\partial \ln n_2}{\partial r} + \frac{\partial \ln T}{\partial r} . B \qquad 8.3$$

is tried as a particular solution, in which A and B appear to be the new unknowns. Resorting to 8.1 and 8.2 the following equation is obtained

$$\frac{\partial \ln n_2}{\partial r} . I_{21}(A) + \frac{\partial \ln T}{\partial r} . I_{21}(B) =$$

$$= -(f_2^0/n_1 n_2)\left\{(c_2/n_2).\frac{\partial n_2}{\partial r} + [(m_2 c_2^2/2kT) - 3/2](c_2/T).\frac{\partial T}{\partial r}\right\}$$

8.4

Equation 8.3 is a solution if A and B are themselves solutions for the following integral equations

$$-n_1 n_2 I_{21}(A) = c_2 f_2^0 \qquad 8.5$$

$$-n_1 n_2 I_{21}(B) = [(m_2 c_2^2/2kT) - 3/2] c_2 f_2^0 \qquad 8.6$$

As it has been shown in § 5 these equations can be solved when

$$\int c_2 f_2^0 \, dc_2 = 0 \qquad 8.7$$

and

$$\int [(m_2 c_2^2/2kT) - 3/2] c_2 f_2^0 \, dc_2 = 0 \qquad 8.8$$

respectively. It can be shown, considering the symetry of the integrands that these conditions are satisfied; therefore, 8.5 and 8.6 admit a solution.

A and B only depend *on* c, $n(r,t)$ *and* $T(r,t)$; as they are the only variables that appear in 8.5 and 8.6, these variables determine vectors according to: $A = A(c_2) \, . \, c_2$ and $B = B(c_2) \, . \, c_2$, where $A(c_2)$ and $B(c_2)$ are functions of c_2, $n(r,t)$ and $T(r,t)$.

Although it is not necessary to obtain $A(c_2)$ and $B(c_2)$ explicitly, it will be necessary to calculate some coefficients that depend on these functions.

It can be shown that $a^{(1)} = O$, from which

$$f_2^{(1)} = f_2^{(0)}\left[A(c_2)\, c_2 . \frac{\partial \ln n_2}{\partial r} + B(c_2)\, c_2 . \frac{\partial \ln T}{\partial r}\right] \qquad 8.9$$

9. DIFFUSION LAW

The diffusion law can now be derived from the vector flux of neutrons estimated to a second orden approximation, the flux being

$$J = n_2 \overline{c_2^{(1)}} = \int f_2^{(1)} c_2 dc_2 \qquad 9.1$$

As the operator $I_{21}(\Phi_2)$ has been defined according to Chapman and Cowling (3), the functional:

$$[G_2; K_2]_{12} = \int G_2(c_2) I_{21}[K_2(c_2)] dc_2 \qquad 9.2$$

in the same as that of (3) 4.4.9

It follows (4)

$$J = -(1/3 n_1 n_2) \left\{ [A; A]_{12} \cdot \frac{\partial \ln n_2}{\partial r} + [A; B]_{12} \cdot \frac{\partial \ln T}{\partial r} \right\} \qquad 9.3$$

which is the diffusion law. It should be noted that the term on $\partial \ln T / \partial r$ is the one from which the correction to the usual diffusion law if obtained. Coefficients $[A ; A]_{12}$ *and* $[A ; B]_{12}$ will be computed following Chapman and Cowling.

10. ESTIMATION OF J_+ and J_-

It is useful to introduce magnitudes similar to those used in the theory of neutron diffusion (2).

If dS is a surface element and n its normal unit vector, J_+ is defined in an equivalent manner. It can be shown (4) that

$$J_+ = (1/4)\, n_2 \overline{c_2^{(0)}} + (1/6)\left\{-(n_1 n_2) \frac{\partial \ln n_2}{\partial r} \cdot [A; A]_{12} + \frac{\partial \ln T_2}{\partial r} \cdot [A; B]_{12}\right\} \cdot n \qquad 10.1$$

$$J_- = (1/4)\, n_2 c_2^{(0)} - (1/6)\left\{-(n_1 n_2) \frac{\partial \ln n_2}{\partial r} \cdot [A; A]_{12} + \frac{\partial \ln T}{\partial r} \cdot [A; B]_{12}\right\} \cdot n \qquad 10.2$$

On comparing with 9.3 it follows

$$J_+ = (1/4)\, n_2\, \overline{c_2^{(0)}} + \frac{1}{2} J \,.\, n \qquad 10.3$$

$$J_- = (1/4)\, n_2\, \overline{c_2^{(0)}} - \frac{1}{2} J \,.\, n \qquad 10.4$$

These are the formulae 5.17.1 and 5.17.2 from (2), corrected for the influence of temperature gradients.

11. ESTIMATION OF $[A\,;A]_{12}$ AND $[A\,;B]_{12}$

These coefficients are approximately obtained following Chapman and Cowling (3). On defining (5)

$$a^{(r)} = S_{3/2}{}^{(r)}\,(m_2 c_2^2/2\,kT)\, c_2 \qquad 11.1$$

$$a_{rs} = [a^{(r)}\,;\, a^{(s)}]_{12} \qquad 11.2$$

$$\alpha_s = [A\,;\, a^{(s)}]_{12} = -\,(1/n_1 n_2) \int f_2{}^0\, c_2 .\, a^{(s)}\, dc_2 \qquad 11.4$$

$$\beta_s = [B\,;\, a^{(s)}]_{12} = -\,(1/n_1 n_2) \int f_2{}^0\, [(m_2 c_2^2/2\,kT) - 3/2]\, c_2 .\, a^{(s)}\, dc_2 \qquad 11.3$$

$$A_r^{(r)} = \begin{vmatrix} a_{0,0} & \cdots & a_{r,0} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{0,r-1} & \cdots & a_{r,r-1} \\ 0 & \cdots & r \end{vmatrix} \qquad 11.5$$

$$B_r^{(r)} = \begin{vmatrix} a_{0,0} & \cdots & a_{r,0} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{0,r-1} & \cdots & a_{r,r-1} \\ 0 & \cdots & r \end{vmatrix} \qquad 11.6$$

$$A^{(r)} = \begin{vmatrix} a_{0,0} & \cdots & a_{r,0} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{0,r} & \cdots & a_{r,r} \end{vmatrix} \qquad 11.7$$

It follows (4) according to Chapman and Cowling that

$$[A;A]_{12} = \frac{\alpha_0^2}{a_{0,0}} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{[A_r^{(r)}]^2}{A^{(r)} A^{(r-1)}} \qquad 11.8$$

$$[A;B]_{12} = \frac{\alpha_0 \beta_0}{a_{0,0}} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{A_r^{(r)} B_r^{(r)}}{A^{(r)} A^{(r-1)}} \qquad 11.9$$

The values of $[A\ ;A]_{12}$ and $[A\ ;B]_{12}$ can be obtained with as many terms as wished provided a sufficient number of coefficients α_r, β_r, and a_{rs} are known.

The values of α_r and β_r are (4)

$$\alpha_r = -(3/2n_1)\ \sqrt{(2kT/m_2)}\ \delta_{r0} \qquad 11.10$$

$$\beta_r = \alpha_0 [\delta_{r0} - (5/2)\ \delta_{r1}] \qquad 11.11$$

where $_{kr}$ is the Kronecker's simbol.

Introducing these values into 11.8 and 11.9 the following expressions are obtained

$$[A;A]_{12} = (\alpha_0^2/a_{00}) \left\{ 1 + \frac{[A_{01}^{(1)}]^2}{A^{(1)} A^{(0)}} a_{00} + \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{[A_{0m}^{(m)}]^2}{A^{(m)} A^{(m-1)}} a_{00} + \dots + \right\} \qquad 11.12$$

$$[A;B]_{12} - [A;A]_{12} = -(5\,\alpha_0^2/2\,a_{00}) \left\{ \frac{A_{01}^{(1)} A_{11}^{(1)}}{A^{(1)} A^{(0)}} a_{00} + \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{A_{0m}^{(m)} A_{1m}^{(m)}}{A^{(m)} A^{(m-1)}} a_{00} + \dots + \right\} \qquad 11.13$$

where $A_{rs}^{(m)}$ is a_{rs} cofactor in $A^{(m)}$.

The coeficients a_{00}, a_{01}, a_{11}, a_{02}, a_{12} and a_{22} are known (6).

The first three terms for $[A\,;A]_{12}$ and $[A\,;B]_{12}$ have been calculated on the assumption that both nuclei and neutrons behave like rigid spheres.

Calling

$$P_m(M_2)/Q_m(M_2) = a_{00}\,[A_{cm}{}^{(m)}]^2/A^{(m)}\,A^{(m-1)} \qquad 11.14$$

$$R_m(M_2)/Q_m(M_2) = \frac{5}{2}a_{00}\,A_{cm}{}^{(m)}\,A_{1m}{}^{(m)}/A^{(m)}\,A^{(m-1)} \qquad 11.15$$

where $M_2 = m_2/m_2 + m_1$, it follows

$$\alpha_0{}^2/a_{00} = (9\,\pi\,\sqrt{1 - M_2}/32\,n_1)\,\overline{c_2{}^{(0)}}/n_1\,\sigma_{12}{}^2\,\pi \qquad 11.16$$

$$P_1(x) = (1 - x)^2$$

$$P_2(x) = 73728\ \ (1 - x)^4\ \ (18 - 24\,x + 110x^2 - 68x^3 + 194x^4)$$

$$Q_1(x) = 12 - 8x + 6x^2$$

$$Q_2(x) = 4098\ \ (13824 - 36864x + 84264x^2 - 206104x^3 + \\ + 295662x^4 - 166633x^6 - 61152x^7 + 13482x^8)$$

$$R_1(x) = 5(1 - x)$$

$$R_2(x) = 122880\ \ (1 - x)^3\ \ (36 - 48x + 232x^2 - 144x^3 + 323x^4)$$

By σ_{12} it is meant, as usual, the average diameter of nucleus and neutron; this magnitude having been introduced through coeficients a_{rs}. Quantity $n_1\,\sigma^2{}_{12}\,\pi$ represents the macroscopic geometrical cross section Σ_s . $\overline{c_2{}^{(0)}}$ is the maxwellian mean value for the velocities.

Table I shows several numerical values of

$$\gamma = (n_1\,\Sigma_s/\overline{c_2{}^{(0)}})\,[A;\,A]_{12},\ \ \gamma' = (n_1\,\Sigma_s/\overline{c_2{}^{(0)}})\,[A;\,B]_{12},$$

$\alpha^T = [A\,;B]_{12} / [A\,;A]_{12}$ and $\beta_T = \alpha_T - ½$ within the M_2 variation range, namely: from 0.0 to 0.5.

TABLE I

M_a	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
γ	0.97791	0.91379	0.84960	0.78465	0.71823	0.64971
γ'	0.54073	0.52209	0.50285	0.48218	0.45831	0.42579
α_t	0.55294	0.57135	0.59187	0.61451	0.63811	0.65536
β_t	0.05294	0.07136	0.09187	0.11451	0.13811	0.15536

12. BOUNDARY CONDITIONS

It is advisable to express the diffusion law as a function of the scalar flux of neutrons Φ:

$$\phi = n_2 \overline{c_2^{(0)}} \qquad 12.1$$

It is then obtained

$$J = -(\gamma/3\,\Sigma_s)\,[(\partial\,\phi/\partial\,r) + (\beta_T\,\phi/T)\,(\partial\,T/\partial\,r)] \qquad 12.2$$

where γ and β_T have been defined in § 11.

The boundary conditions in the separation of two scattering media are taken to be the continuity of J_+ and J_- in the forementioned separation surface, letting n (see § 10) coincide with its normal. It follows from 12.1, 10.3 and 10.4

$$J_+ = (1/4)\,\phi + \frac{1}{2}\,J.\,n \qquad 12.3$$

$$J_- = (1/4)\,\phi - \frac{1}{2}\,J.\,n \qquad 12.4$$

The continuity of Φ and the component of J normal to the separation surface are boundary conditions equivalent to 12.3 and 12.4.

In the separation of a scattering medium and vacuum, the boundary condition is chosen to be

$$J_- = 0 \qquad 12.5$$

taking n directed into vacuum.

APPLICATIONS

13. UNIDIMENSIONAL STEADY-STATE PROBLEM

A planar symetry medium without production or absorption of neutrons is considered. The direction of the maximum variability of medium properties is taked as the x-axis. For the steady state it holds $J_x = J_o =$ constant and $J_y \equiv J_z = O$. Resorting to 12.2 it follows:

$$-(\gamma/3\,\Sigma_s)\left\{\frac{\partial\phi}{\partial x} + \beta_T\,(\phi/T)\frac{\partial T}{\partial x}\right\} = J_0 \qquad 13.1$$

for wich the general solution is given by

$$\phi(x) = (3\,\Sigma_s/\gamma)\,J_0\,[T(x)]^{-\beta_T}\int_0^x [T(x)]^{-\beta_T}\,dx + B\,[T(x)]^{-\beta_T} \qquad 13.2$$

where $T(x)$ is the temperature as a function of x, and B is an integration constant.

An experiment only slightly differing from the conditions assumed above could be performed in the following way: a slab of with $2l$ and equal values for ϕ and T in both sides. Resorting to 12.3 follows:

$$\phi(-l) = (3\,\Sigma_s/\gamma)\,J_0\,[T(-l)]^{-\beta_T}\int_{-l}^{0} [T(x)]^{\beta_T}\,dx + B\,[T(-l)]^{-\beta_T}$$

$$\phi(+l) = (3\,\Sigma_s/\gamma)\,J_0\,[T(+l)]^{-\beta_T}\int_0^{+l} [T(x)]^{\beta_T}\,dx + B\,[T(+l)]^{\beta_T}$$

where $x \equiv +l$ and $x = -l$ are the coordinates of both sides of the slab. In order to satisfy the imposed conditions to Φ and T, J_o must vanish, therefore

$$\phi(x)/\phi(l) = [T(x)/T(l)]^{-\beta_T} \qquad 13.3$$

Placing $\beta_T = O$ the ordinary diffusion law is obtained. Then it holds

$$\phi(x)/\phi(l) = 1 \qquad 13.4$$

In order to exemplify the foregoing results, the values $T(O) = 600°K$ and $T(+l) = 300°K$ can be chosen: from 12.2 it follows $0.964 \leq \phi(0)/\phi(l) \leq 0.899$ when β_T varies between 0.05294 and 0.15536, and $\phi(0)/\phi(l) \equiv 1$ when the ordinary law of diffusion is used.

It is seen that the variation recorded for $\Phi(0)/\Phi(e)$ extends from 3.6 % up to 10.1 % as M_2 varies from 0.0 up to 0.5 according to whether the ordinary law of diffusion or the corrected one is used.

14. UNIDIMENSIONAL DIFFUSION EQUATION WITH ABSORPTION

It shall be assumed that the diffusion law 12.2 is still valid even with small absorption of neutrons. Applying the continuity equation for the number of neutrons with absorption, the diffusion equation:

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r} . J - \Sigma_a \phi \qquad 14.1$$

is obtained where Σ_a is the macroscopical absorption cross-section. In the unidimensional case, equation 14.1 leads to

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = (\gamma/3\,\Sigma_s)\left[\frac{d^2\phi}{dx^2} + \beta_T \frac{d\phi}{dx}\,\frac{d\ln T}{dx} + \phi\,\beta_T\,\frac{d^2 \ln T}{dx^2}\right] - \Sigma_a\,\phi \qquad 14.2$$

and for the steady state

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \beta_T \frac{d\ln T}{dx}\,\frac{d\phi}{dx} + \left[\beta_T \frac{d^2 \ln T}{dx^2} - (3\,\Sigma_a\,\Sigma_s/\gamma)\right]\phi = 0 \qquad 14.3$$

A slab of with $2l$ is assumed. One side of the slab limits with vacuum and other side has a fixed neutron flux J_x.

A temperature distribution is given in the slab. Both values of the scalar flux Φ at the side where J_x is fixed shall be calculated, assuming that the ordinary or the corrected diffusion law holds.

Chosing

$$l n T = -2 a x + b \tag{14.4}$$

a simple equation is obtained, since from 14.1 it follows

$$\frac{d^2 \phi}{d x^2} - 2 a \beta_T \frac{d \phi}{d x} - (3 \Sigma_a \Sigma_s / \gamma) \phi = 0$$

the general solution of which is given by

$$\phi = \exp (\alpha x) [A \exp (\beta x) + B \exp (-\beta x)] \tag{14.5}$$

where $\alpha = a \beta_T$ and $\beta = \sqrt{a^2 \beta_T^2 + (3 \Sigma_a \Sigma_s / \gamma)}$

Using the ordinary law of diffusion, — or taking $\beta_T = O$, which is equivalent — it follows: $\alpha = \alpha^o \equiv O$ and

$$\beta = \beta_0 = \sqrt{(3 \Sigma_a \Sigma_s / \gamma)}.$$

Calling $x = O$ the coordinate of the first side and $x \equiv l$ the coordinate of the other one the boundary conditions are $J_x (O) \equiv = J_o$ and $J_- (l) \equiv O$. Bringing these conditions into 14.5 the following equation holds:

$$\phi (x) = 2 J_0 \exp (\alpha x) \frac{[\alpha - (3 \Sigma_s / 2 \gamma)] S h \beta (l - x) - \beta C h \beta (l - x)}{[(2 \gamma / 3 \Sigma_s) (\alpha^2 - \beta^2) - \alpha] S h \beta l - \beta C h \beta l} \tag{14.6}$$

It is easy to identify the expression $\gamma / 3 \Sigma_s$ appearing in 12.2 with the coefficient D appearing in the common law of diffusion: $J = - D \operatorname{grad} \phi$

If graphite is taken as scattering medium, it holds $D \equiv 0.92$ cm.

Taking $T = 450^o K$ at $x \equiv O$ and $T = 300^o K$ at $x = l$, it follows from 14.4 that

$$l a = 0.20 \tag{14.7}$$

For graphite $\Sigma_a \simeq 3.7 \ 10^{-4}$ cm^{-1}; hence $\beta_o = 2.01 \ 10^{-2}$ cm^{-1}.

From Table I and equation 14.7 it follows $a^2 \beta_T^2 < 10^{-3}/l$ whence for $l > 10$ cm,

$$\beta = \beta_0 (1 + \delta) \qquad 14.8$$

$$\text{where } \delta = \frac{1}{2} a^2 \beta_T^2/\beta_0^2 = 0.02 \, \beta_T^2/\beta_0^2 \, l^2.$$

Introducing 14.8 into 14.6 and neglecting δ and α with respect to α/β_o, it follows

$$\phi(0) = J_0 \frac{T h \beta_0 l + (2\gamma \beta_0/3 \Sigma_s)}{(\beta_0 \gamma/3 \Sigma_s)} [1 - (2\gamma/3 \Sigma_s) \beta_0 T h \beta_0 l][1 - (\alpha/\beta_0)]$$

If the value of $\phi(O)$ obtained resorting to the ordinary diffusion law when applied to the same problem, is called $\phi^0(O)$ the relation

$$\phi(0)/\phi^0(0) = 1 - \alpha/\beta_0$$

is obtained.

If $l = 30$ cm, then $\alpha / \beta_o = 0.022$, which is a 2.2 % difference it the values of $\phi(O)$ according to whether the corrected diffusion law ot the ordinary one is used.

15. FINAL REMARKS

It has been shown that the Boltzmann transport equation in the case of a very dilute binary mixture can be solved by a method similar to the one of Enskog, if the velocity distribution function for the more abundant component is previously given as maxwellian and time independent. In such a case there is only one parameter to be given, namely: the number density of the less abundant component at each point at a given time.

These results have been applied to the diffusion of thermal neutrons in a scattering medium. The distribution function for the scattering nuclei has been obtained by assumming that they behave like classical harmonic isotropic oscillators. The frequency of these oscillators does not appear in the so obtained distribution function.

A better model is to assume quantum oscillators instead of the classical ones. For a temperature of the medium such that the oscillators are in high quantum number states, they may be taken as classical, and also the neutrons have enough energy to make the nuclei change their quantum state by collisions. If diffraction effects with the lattice are not considered, the applicability of the model is to be tested by the ratio medium temperature-vs-Deybe temperature, as the latter corresponds to the maximum frequency of the oscillations of the solid.

With the classical oscillators model a diffusion law corrected for the effect of thermal gradients has been obtained. This latter effect appears in the same natural way as thermal diffusion does in gases.

The scattering law assumed for neutron nuclei collisions is that of rigid spheres, which is isotropic in the center of mass system. This law is assumed only for numerical calculation of the diffusion law coeficients and the derivation of some properties of the equations. Other scattering laws could possibly be assumed without changing the analytical form of the obtained diffusion law.

If neutron difraction with the lattice is taken into account, collisions with phonons and Bragg scattering rather than independent collisions with each one of the nuclei must be considered. The transport equation in this case contains the corresponding scattering law and must lead, in a first approximation to the usual diffusion law, if the velocity distribution for neutrons is not far from isotropic (see 2). The temperature corrections to the diffusion law arise from the temperature dependence of the scattering law. The classical model chosen is then equivalent to assume a particular (and easy to menage) scattering law. Therefore, the obtained temperature correction for the diffusion law is valid insofar as the scattering law represents a good approximation.

A few problems representing possible experimental conditions have been calculated, leading to variations of the scalar neutron flux of a few unities per cent, according to whether the ordinary law of diffusion or the corrected one were used.

En estas condiciones, que son las habituales para estudiar transformaciones de Lorentz en tres dimensiones, la velocidad $\vec{V}'_2$ con que se mueve un punto en el sistema S', se expresa en función de valores del sistema S

$$\vec{V}'_2 = \frac{1}{\beta v_1}\left(1 - \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{c^2}\right)^{-1}\left\{\vec{V}_2 - \vec{V}_1\left[\frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{V_1^2}(1 - \beta v_1) + \beta v_1\right]\right\} \tag{1}$$

lo que constituye el «teorema de adición de velocidades» en el espacio; aquí $\vec{V}_2$ es la velocidad con que el punto se mueve visto desde el sistema S, y

$$\beta v_1 = (1 - V_1^2/C^2)^{-1/2}. \tag{2}$$

Si suponemos ahora que el punto móvil q_2 tiene asignado un impulso que vale $\vec{p}'_2$ en el sistema S', la fuerza actuante sobre q_2 será por definición

$$\vec{F}_2' = \frac{d\vec{p}_2'}{dt'} \tag{3}$$

la cual se transforma, como es bien sabido, en

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{\beta v_1}\left(1 + \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2'}{c^2}\right)^{-1}\left\{\vec{F}_2' + \vec{V}_1\left[\frac{\vec{F}_2' \cdot \vec{V}_1}{V_1^2}(\beta v_1 - 1) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \beta v_1 \frac{\vec{F}_2' \cdot \vec{V}_2'}{c^2}\right]\right\}. \tag{4}$$

Esta expresión, que da el valor de $d\vec{p}_2/dt$ en el sistema S en el punto x, y, z en el instante t, correspondiente al x', y', z', t' en que se conoce $d\vec{p}_2'/dt'$, ha recibido poca atención. Recordemos que se la puede deducir de manera puramente mecánica, y que no contiene otros postulados que los que conducen a la cinemática relativista, más la ley de transformación del impulso.

Llamando ahora $\vec{r}$ al vector del sistema S

$$\vec{r} = \overrightarrow{Q_2 0} - \overrightarrow{0' 0}$$

que vincula el punto móvil q_2 con el punto fuente $0'$, tendremos, usando la ley de transformación de Lorentz usual y recordando que $0'$ sigue una recta que pasa por 0,

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}_1 \left[\frac{\vec{R} \cdot \vec{V}_1}{V_1^2} (1 - \beta v_1) + \beta v_1 t \right] - \vec{V}_1 t$$

o sea

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}_1 \frac{\vec{r} \cdot \vec{V}_1}{V_1^2} (1 - \beta v_1) \tag{7}$$

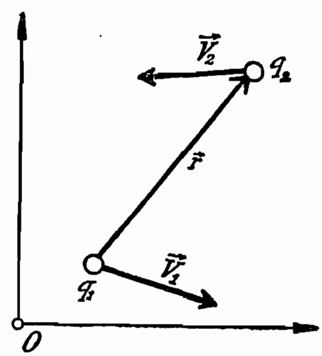
y

$$r'^2 = r^2 + \beta v_1^2 \frac{(\vec{r} \cdot \vec{V}_1)^2}{c^2}. \tag{8}$$

Ya podemos llevar a la (5) los valores obtenidos en (6) y (7), para encontrar por fin

$$\vec{F}_2 = \beta v_1 f(r') \left\{ \vec{r} + \frac{\vec{V}_2}{c^2} \times (\vec{V}_1 \times \vec{r}) \right\} \tag{9}$$

en donde todo está en función de valores del sistema S, pues r' es función de r, dada por (8).



El significado de la (9) es obvio: Si q_1 es un centro de fuerzas situado en O', y tal que en su sistema inercial propio S' define fuerzas centrales de tipo (6) sobre el ente pasivo q_2, entonces en otro sistema inercial tal como el S las fuerzas no aparecen como puramente centrales, sino que tienen una pequeña componente transversal. Esta componente transversal no refleja un nuevo fenómeno; es solamente una corrección relativista.

3. *Aplicación a la Ley de Coulomb*

Si ponemos en lugar de los entes abstractos q_1, q_2 un par de cargas eléctricas Q_1, Q_2, en el sistema S' en que Q_1 está en reposo la fuerza que sufre Q_2 vale

$$\vec{F}_2{}' = (+ Q_1 Q_2 / r'^3) \vec{r}' \tag{10}$$

de modo que, comparando con (6), es aquí $f(r') = + \dfrac{Q_1 Q_2}{r'^3}$, y la (9) da de inmediato

$$\vec{F}_2 = + \frac{\beta v_1 Q_1 Q_2}{\left[r^2 + (\beta v_1)^2 \frac{(\vec{r} \cdot \vec{V}_1)^2}{c^2} \right]^{3/2}} \left\{ \vec{r} + \frac{\vec{V}_2}{c^2} \times (\vec{V}_1 \times \vec{r}) \right\}. \tag{11}$$

que es la conocida expresión de la fuerza total que una carga en movimiento uniforme ejerce sobre otra carga en movimiento también uniforme. (4)

Como todas nuestras expresiones son covariantes, la fuerza eléctrica $\vec{F}_1$ que la carga Q_2 ejerce sobre la Q_1 en el mismo

---

(4) Para el caso particular $\vec{V}_2 = O$, C. F. Gauss halló en 1835 la expresión

$$\vec{F}_2 = + \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} \left[v_1^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] \right\}$$

que es una aproximación notable a la del texto. No publicó nunca este resultado. Ver C. F. Gauss, *Werke*, *5*, 616; 1867.

instante t, se calcula, teniendo en cuenta la equivalencia entre cargas activas y pasivas, sin más que cambiar entre sí los índices 1 y 2.

$$\vec{F}_1 = \frac{-\beta_{V_2} Q_1 Q_2}{\left[r^2 + (\beta_{V_2})^2 \frac{(\vec{r}\cdot\vec{V}_1)^2}{c^2}\right]^{3/2}} \left\{\vec{r} + \frac{\vec{V}_1}{c^2} \times (\vec{V}_2 \times \vec{r})\right\} \qquad (12)$$

La comparación con (11) muestra que ambas fuerzas no son iguales en módulo ni tienen la misma dirección, por lo que no es válido el principio de «acción y reacción»; esto es por otra parte habitual en relatividad siempre que se comparan fuerzas aplicadas en puntos distantes, y no conduce a mayores dificultades.

Menos conocida es la observación de que la fuerza que una carga eléctrica eléctrica en movimiento ejerce sobre otra, no depende solamente del movimiento relativo de ambas cargas: en efecto, haciendo en la (11) $V_2 = 0$, la fuerza depende, por la presencia del coeficiente β_{V_1}, de la velocidad de Q_1 en el espacio, y no solamente de su componente según $\vec{r}$, como debiera suceder si solo el movimiento relativo fuera fundamental.

Finalmente, es claro que las expresiones (11) y (12) contienen toda la información necesaria para calcular acciones ponderomotrices entre conductores o imanes, sin más que adoptar modelos adecuados basados en la constitución eléctrica de la materia; todas las leyes y expresiones que la electrodinámica emplea como su fundamento empírico, resultan así consecuencias especiales de «ley de Coulomb generalizada» que Gauss intuyó.

La presentación detallada de la electrodinámica clásica como consecuencia de (11) y (12) constituye el tema de la nota siguiente (5). Esta aplicación es muy valiosa para poner de manifiesto los términos en c^{-2}, debido a que la existencia de cargas positivas y negativas en iguales cantidades en la materia neutro suele anular los primeros sumandos de (11) y (12).

Si en la ecuación (10) se cambia el signo, expresa la ley de atracción de Newton; de este modo, también las (11) y (12)

(5) F. ALSINA, *La electrodinámica como consecuencia relativista* (en prensa).

son aplicables a las acciones gravitatorias. Pero como la materia no es «gravitatoriamente neutra», los términos independientes de c subsisten, y enmascaran las correcciones relatas.

4. *Funciones de campo*

Volvamos a la expresión general de $\vec{F}_2$ dada por la (9), en la que si $V_1 = 0$, $f(r)\vec{r}$ representa la fuerza que sufre un ente puntual q_2 por efecto de un fenómeno que lo vincula al punto q_1.

En conjunto, la fórmula expresa cuánto vale esta fuerza si q_1 tiene una velocidad —uniforme— $\vec{V}_1 \neq 0$, y se ve que ello implica correcciones que a lo sumo son de orden $(V_1/c)^2$.

En estas condiciones, una conveniente especificación de f permite aplicar la misma fórmula a fuerzas de origen tan diverso como la ley de Hooke, fuerzas de Van der Waals, de Yukawa, etc. Ningún papel juega aquí la naturaleza física de los fenómenos que se describen, mientras sean aplicables las transformaciones de Lorentz y la definición de fuerza; inversamente, tampoco puede una expresión vacía como la (9) dar información sobre propiedades físicas de la materia o del espacio como no sean los muy generales postulados relativistas al respecto.

Ello no obstante, es posible usar la (9) para definir «funciones de campo» y hallar relaciones entre ellas. Para hacerlo, debemos empezar por distinguir entre el ente q_2 puntual, y su posición geométrica en el sistema de coordenadas S; el ente q_2 pasa a ser un «cuerpo de prueba» al que se supone ubicado en el mismo instante t del entorno que se desea estudiar, y decimos que *en el instante* t, la fuerza $\vec{F}_2$ que sufra q_2 es una función solamente de sus coordenadas.

En otras palabras, hemos introducido el concepto de «campo».

Si q_1 —la «fuente» del campo— fuera inmóvil en el sisttema S, tendríamos un campo estático; pero si $\vec{V}_1 \neq 0$ tenemos que decir que nuestro campo, para un punto cualquiera de S en el que imaginamos ubicado el «cuerpo de prueba», es una función del tiempo.

Dicho esto, llamemos $\vec{E}$ a la «intensidad de campo», es decir, a la fuerza que sufre q_2 cuando está *fija* en un punto del sistema S. Resulta, de la (9)

$$\vec{E} = \beta_{V_1} f(r') \vec{r} \qquad (13)$$

donde, según (8), hay que poner

$$r' = \left[r^2 + (\beta_{V_1})^2 \frac{(\vec{r} \cdot \vec{V}_1)^2}{c^2} \right]^{1/2}.$$

Pero, como es obvio, si el ente q_2 *no* se encuentra fijo a un determinado punto de S, sino que cruza por él con velocidad $\vec{V}_2$, aparece una nueva «función de campo», que definiremos

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \vec{V}_1 \times \vec{E} \qquad (14)$$

y que solo es útil si el cuerpo de prueba es móvil. Con estas definiciones,

$$\vec{F}_2 = \vec{E} + \frac{1}{c} (\vec{V}_2 \times \vec{H}) \qquad (15)$$

y nos encontramos con la expresión que Lorentz postuló para la fuerza total que obra sobre una carga eléctrica. No podía ser de otro modo, según el párrafo 3; pero la validez de la (15) es general.

Las funciones $\vec{E}$ y $\vec{H}$ tienen interpretención muy distinta, ya que si bien $\vec{E}$ es una «intensidad de campo» —definida con un cuerpo de prueba— $\vec{H}$ es nada más que una corrección a dicha fuerza cuando el cuerpo de prueba se mueve, y es ilusorio pensar en definirla como intensidad de campo medida con un cuerpo de prueba adhoc.

En el caso eléctrico, por ejemplo, ninguna de estas expresiones autoriza a creer en la existencia de una «masa magnética» como cuerpo de prueba sensible a $\vec{H}$. Desde luego que tampoco puede servir la (14) (ni ninguna otra fórmula, naturalmente) para deducir que *no* exista polo magnético libre, pero *de existir* nos encontraríamos con un ente que no resuelve ninguna dificultad, sino que las introduce, pues según la (9) los dos sumandos de $\vec{F}_2$ yacen en el plano $\vec{V}_1$, $\vec{r}$, y la «masa magnética» sentiría sin embargo una fuerza a 90° de dicho plano.

5. *Relaciones diferenciales*

Tomando $\vec{E}$ y $\vec{H}$ como funciones de punto del sistema S, podemos hablar, para un punto *fijo* cualquiera, de $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z, \partial t$ aplicables a $\vec{E}$ y $\vec{H}$. El último operador dará la variación de las funciones de campo debidas a que el campo mismo es función del tiempo; en otras palabras, el punto campo sigue siendo fijo, y lo que varía es la posición del punto fuente con el tiempo.

En estas condiciones resultan de inmediato las identidades

$$\left\{\begin{array}{ll} \operatorname{rot} \vec{E} \equiv -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} & (16) \\[2ex] \operatorname{rot} \vec{H} \equiv \dfrac{\vec{V}_2}{c}\operatorname{div} \vec{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (17) \\[2ex] \operatorname{div} \vec{E} \equiv \beta v_1 [r' \dfrac{df}{dr'} + 3f] & (18) \\[2ex] \operatorname{div} \vec{H} \equiv 0 & (19) \end{array}\right.$$

Cada una de estas identidades —y de las muchas restantes que pueden escribirse y es innecesario detallar aquí— es expresable en función de f y de $\vec{r}'$, como indicamos a modo de ejemplo en la (18). Recordemos que, por (8), $\vec{r}'$ es función solamente de magnitudes del sistema S.

Comentemos ahora brevemente las identidades escritas:

La (16) constituye la ley que Faraday halló para el caso particular de efectos eléctricos, que es en verdad aplicable a cualquier tipo de fuerzas centrales.

La (17), que también apareció en la electrodinámica como postulado, contiene en segundo miembro el término llamado «corriente de desplazamiento», cuya significación queda así aclarada como simple identidad; en verdad, no solamente la (17) carece de significado eléctrico especial, sino que ni siquiera lo tiene físico: es independiente de c, como puede verificarse con la definición de $\vec{H}$; y se puede demostrar que es válida para una clase de funciones mucho mas amplia que las f.

La (18) permite hallar las «fuentes» de $\vec{E}$, a partir de f. Puede comprobarse que en las zonas de S en que se tenga $\operatorname{div} \vec{E} =$ constante, $\vec{E}$ satisface la ecuación de propagación de ondas.

La (19) finalmente, indica que $\vec{H}$ es una función libre de fuentes (que satisface la ecuación $\square \vec{H} = 0$).

De este modo, hemos encontrado, a partir de una ley de fuerzas centrales y transformaciones de Lorentz, las mismas ecuaciones que Maxwell postuló para el caso especial de las leyes eléctricas. Está claro que tienen la misma validez en el caso de acciones gravitatorias, o en cualquier otro caso de fuerzas centrales.

La escritura de estas identidades en la forma que les diera Maxwell, o en la que les diera Lorentz, es un ejercicio inmediato usando la (10) y suponiendo las cargas puntuales como límite de cargas extensas; no es necesario detallarlo aquí.

Nuestro tratamiento presente es válido para movimientos rectos y uniformes del ente q_1 (carga «activa», o «fuente») pues hemos pasado de su sistema propio S' al sistema S, mediante transformaciones de Lorentz. El tomar en cuenta una posible aceleración en el movimiento de q_2 nos llevaría a consideraciones de naturaleza muy distinta que, para el caso eléctrico por lo menos, figuran en la nota anunciada.

UN MODELO OPTICO SEMICLASICO PARA LA DISPERSION DE NEUTRONES DE ALTA ENERGIA POR NUCLEOS (*)

por CARLOS ALBERTO HERAS (**)

(Comisión Nacional de Energía Atómica, Buenos Aires)

ABSTRACT. – An exact expression for the elastic scattering cross-section is derived under the assumptions of the "black" nucleus model and the validity of the Fraunhofer diffraction formulae which approximate that expressión is discussed. A semiclassical correction is introduced to take into account the partial transparency of the nucleus and it is seen that allows a better agreement with experimental data on the scattering of 84-MeV neutrons *by Al, Cu* and *Pb*. It also allows the determination of the optical parameters of the nucleus which coincide with those determined with the (quantum) nuclear óptical model.

INTRODUCCION

El éxito reciente del modelo óptico nuclear (1) muestra que se pueden usar conseptos ópticos clásicos para describir la dispersión de partículas por núcleos. La idea fundamental de los modelos ópticos es considerar que el proyectil, una vez en el núcleo, atraviesa un medio con índice de refracción complejo (medio absorbente y refrigente). La aplicación de esta idea a la solución cuántica del problema de dispersión requiere la integración numérica de las ecuaciones con computadoras electrónicas. Además para poder reproducir los datos experimentales dentro de un rango relativamente grande de energía de bombardeo y de masa del blanco, es necesario introducir parámetros cuyo

---

(*) Recibido el 25 de mayo de 1961.

(**) Este trabajo fue realizado en parte durante la estadía del autor en el Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (Río de Janeiro) con una beca del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.

número trae aparejado un cierto oscurecimiento de la visión física del problema. Por esta razón se han usado descripciones clásicas y semiclásicas (2) que permiten obtener resultados cualitativos (y a veces cuantitativos) con un mínimo de trabajo computacional y pueden servir para decidir cómo variar los parámetros del modelo óptico nuclear para mejorar el acuerdo con la experiencia.

En la presente nota discutiremos los límites de validez de las fórmulas de difracción tipo Fraunhofer y derivaremos una corrección al modelo de difracción por un núcleo «negro» para tener en cuenta semiclásicamente la transparencia parcial del núcleo.

1. LA DISPERSION POR DIFRACCION

Para fijar ideas supondremos dispersión de neutrones con energía $E = (\hbar^2/2\,m)\,k^2$ y no tendremos en cuenta el espín. Los resultados que se obtengan serán válidos para protones en los casos en que la barrera de Coulomb del núcleo tiene efectos despreciables. La amplitud de probalidad para dispersión está dada exactamente por

$$f(\Theta) = \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (1 - \eta_l)\,(2\,l + 1)\,P_l(\cos\Theta) \tag{1.1}$$

donde η_l, la amplitud relativa de la l-sima onda parcial saliente, está relacionada con el respectivo corrimiento de fase δ_l por

$$\eta_l = \exp(2\,i\,\delta_l) \tag{1.2}$$

Es sabido que en la suma de la ec. (1.1) sólo tienen contribución importante los términos con $l \leqq k\,a$, donde a es el radio del núcleo; por otra parte los corrimientos de fase son en general complejos con una parte imaginaria positiva que es muy grande para energías de bombardeo altas (mayores de 60 MeV, digamos). Para estas energías podemos, desde un punto de vista clásico, considerar que todas las ondas parciales con $l \leq L \sim k\,a$ son absorbidas completamente y aquéllas con $l > L$ pasan sin ser afectadas. Esta es la hipótisis fundamental del modelo del núcleo «negro», es decir, perfectamente absorbente; se expresa matemáticamente por

$$\eta_l = \begin{cases} 0 \text{ para } l \leq L \\ 1 \text{ para } l > L \end{cases} \tag{1.3}$$

Con esta expresión la suma en la ec. (1. 1) se hace finita y puede realizarse mediante la fórmula de Christoffel-Darboux los polinomios de Legendre (3); el resultado es

$$f_d(\Theta) = \frac{i}{2k} \frac{L+1}{1-\cos\Theta} [P_L(\cos\Theta) - P_{L+1}(\cos\Theta)] \tag{1.4}$$

Greider y Glassgold (4) han dado una expresión exacta equivalente a ésta. Sin embargo, a pesar de su simplicidad, no ha sido usada en la representación de datos experimentales. En cambio, se usan fórmulas aproximadas cuya validez no se establece en forma precisa. Como ejemplo del tipo de aproximaciones que se hacen, derivaremos a continuación la fórmula de dispersión por difracción de Fraunhofer dada por Placzek y Bethe (5).

Para altas energías de bombardeo ($L \gg 1$) puede usarse para los polinomios de Legendre la forma asintótica debida a Hilb (3)

$$P_L(\cos\Theta) = (\Theta/\mathrm{sen}\,\Theta)^{1/2} J_0\left[\left(L+\frac{1}{2}\right)\Theta\right] + 0\,(L^{-3/2}) \tag{1.5}$$

donde J_0 es la función de Bessel de orden cero. Esta expresión es válida uniformente para $0 \leqq \Theta \leqq \pi - \varepsilon\ (\varepsilon > 0)$. Poniendo $z = \left(L+\frac{1}{2}\right)\Theta$ podemos entonces escribir

$$P_L - P_{L\pm1} = -\,(\Theta/\mathrm{sen}\,\Theta)^{1/2}[J_0(z+\Theta) - J_0(z)] =$$

$$= (\Theta/\mathrm{sen}\,\Theta)^{1/2}\,\Theta\left[J_1(z) + \frac{\Theta}{2} J_1'(z) + \frac{\Theta^2}{3\,!} J_1''(z) + \ldots\right] \tag{1.6}$$

En esta serie hay que considerar hasta el término que dé un error del mismo orden (o mayor) que el que tiene la expresión (1.5). Puede verse, expresando las derivadas de J_1 en función de J_1 y J_0, que los términos a partir del último mostrado no tienen sentido. Por otra parte si Θ no es suficientemente pequeño la serie puede convergir lentamente restando toda utilidad a la aproximación. No vale la pena discutir el punto de la convergencia puesto que se trata de una aproximación a un resultado de un modelo que es a su vez aproximado.

Para energías muy altas se pueden despreciar términos de orden $1/L$; además con el aumento de la energía, los neutrones dispersados elásticamente se concentran cada vez más en ángulos pequeños alrededor de la dirección de incidencia (el cono de sombra de la óptica ondulatoria tiende al cilindro de sombra de la óptica geométrica). Teniendo en cuenta esto y poniendo $L = k\,a$, se obtiene la fórmula de Placzek-Bethe para la sección eficaz

$$\sigma(\Theta) = k^2 a^4 J_1(z)/z \qquad (1.7)$$

$$z = k\,a\,\Theta \qquad (1.8)$$

que es idéntica a la difracción de Fraunhofer por un disco opaco. Se ve que z es la transferencia de impulso $2k \operatorname{sen} \Theta/2$ (en unidades de $\hbar$) multiplicada por el radio del núcleo y tomada para ángulos pequeños.

Por las aproximaciones hechas en su deducción, se ve que la expresión (1.7) es válida sólo para energías muy altas y para ángulos menores que el correspondiente al primer cero de la función de Bessel.

Se usa frecuentemente en la literatura una expresión similar a la (1.7) que puede ser deducida del desarrollo de Macdonal de los polinomios de Legendre en funciones de Bessel (6). En esta expresión se toma el valor exacto $2k \operatorname{sen} \Theta/2$ de la transferencia de impulso y se reemplaza el radio del núcleo por $a + \lambda$ ($\lambda = 1/k$). Estas correcciones son un lujo innecesario pues el rango angular de validez de la expresión es el mismo que que antes y en ese rango coincide con (1.7). Sin embargo, como en el factor que multiplica a la función de Bessel el radio aparece elevado a la cuarta potencia es conveniente corregirlo; de esta manera la expresión aproximada y la exacta tienen el mismo valor en $\Theta \neq 0$.

Para finalizar esta sección daremos una estimación del error con que se determina el radio nuclear a partir de la posición angular del del primer mínimo de difracción.

Supongamos que el primer mínimo de difracción es observado en el ángulo Θ_0; éste debe corresponder al primer cero $z_0 = 3,83$ de la función de Bessel en la fórmula de difracción de Fraunhofer. Podemos usar en el argumento de la función de Bessel $z_1 = L_1 \Theta$ o $z_2 = 2(L_2 + 1) \operatorname{sen} \Theta/2$ determinar L_i $(i = 1, 2)$ por la condición $z_i = z_0$ y tomar

$$\frac{\Delta a}{a} \backsimeq \frac{L_2 - L_1}{L_1} = \frac{\Theta_0}{3,83} + \frac{1}{3,83}\left(1 - \frac{\Theta_0/2}{\operatorname{sen} \Theta_0/2}\right)$$

como medida de la imprecisión en la determinación del radio nuclear. Como el paréntesis del segundo miembro puede considerarse nulo (es menor que $0,05$ para $\Theta < 60°$), se tiene

$$\frac{\Delta a}{a} \sim \frac{\Theta_0}{3,83}$$

que en los casos de interés da un error porcentual $< 10\,\%$.

2. CORRECCION SEMICLASICA POR REFLEXION Y REFRACCION

La expresión exacta (1.4) del modelo de difracción por un núcleo negro tampoco es válida para ángulos relativamente grandes pues siendo una función de Dirichlet (*) tiene para esos ángulos oscilaciones fuertes que los datos experimentales no muestran. Por otra parte, aún a pequeños ángulos hay otros procesos que contribuyen a la dispersión además de la difracción pues el núcleo no es negro sino traslúcido. La razón del fracaso del modelo del núcleo negro a partir de las cercanías del primer

(*) O función incompleta en el sentido que $\lim_{L \to \infty} \sum_{l=0}^{L} (2l + 1)\, Pl\, (\cos \Theta) = 4\pi\delta(\cos\Theta - 1)$

mínimo de difracción se debe a que en realidad las η_l (desde el punto de vista clásico) suben gradualmente de un valor pequeño para $l = 0$ a uno para $l \sim k a$ porque cerca del borde del núcleo las partículas incidentes recorren caminos cada vez más cortos a traves del medio absorbente (**). Es sabido que en la óptica electromagnética esta variación gradual de la absorción de la onda incidente trae aparejada la desaparición de los máximos de difracción excepto el principal (*).

Vamos a tomar ahora en cuenta la transparencia parcial (y variable) del núcleo para las partículas incidentes. Suponemos como antes que $\eta_l = 1$ para $l > L \sim k a$. La amplitud para dispersión elástica es

$$f(\Theta) = f_d(\Theta) - (i/2k) \sum_{l=0}^{L} \eta_l (2l+1) P_l(\cos\Theta) \qquad (2.1)$$

donde f_d (dada por la ec. (1.4)) da cuenta de la difracción y el segundo término da cuenta de los procesos debidos a la absorción incompleta dentro del núcleo: reflexión y refracción. Representando la interacción neutrón-núcleo con un potencial complejo podemos aproximar el segundo término con la suma de amplitudes semiclásicas para reflexión y refracción

$$f_c(\Theta) = R \sqrt{\sigma_R} + T A \sqrt{\sigma_T} \qquad (2.2)$$

donde σ_R es la sección eficaz clásica para reflexión por una esfera rígida; σ_T es la sección eficaz clásica para refracción en un pozo de potencial; R y T son coeficientes de reflexión y trasmisión para el pozo, y A es un factor que mide la absorción a lo largo de la trayectoria clásica de la partícula dentro del pozo.

Las secciones eficaces clásicas se definen por (7)

$$\sigma(\Theta) = \frac{s(\Theta)}{\operatorname{sen}\Theta} \left| \frac{d\,s(\Theta)}{d\Theta} \right| \qquad (2.3)$$

(**) El mismo efecto tiene una superficie difusa; podemos considerar este caso incluído en nuestras consideraciones hablando de un camino efectivo dentro del medio absorbente.

(*) Un ejemplo simple es la difracción de la luz por una gota de tinta en un vidrio de reloj.

donde s es el parámetro de choque y Θ el ángulo clásico de deflección. Usando un pozo cuadrado de potencial

$$V(\mathrm{r}) = \begin{cases} -(V + iW) & r > a \\ 0 & r \leq a \end{cases} \tag{2.4}$$

se obtiene para las secciones eficaces

$$\sigma_R = a^2/4$$

$$\sigma_T = \frac{a^2}{4} \frac{n^2}{x} \frac{(n - x)(n x - 1)}{(1 + n 2 - 2 n x)^2} \tag{2.5}$$

donde

$$x = \cos \Theta/2 \tag{2.6}$$

y

$$n^2 = 1 + V/E \tag{2.7}$$

es el índice de refracción.

En el cálculo de σ_T no hemos considerado efectos de la parte imaginaria del potencial que son muy pequeños excepto en el entorno del ángulo correspondiente a incidencia rasante.

Los coeficientes R, T, y A han sido calculados en la forma usual por las condiciones de contorno que satisface una onda plana incidente sobre un potencial en dos dimensiones de la forma (2.4) («zanja» de potencial). Esta aproximación es equivalente a reemplazar la superficie esférica del núcleo por su plano tangente y es válida para altas energías (mayores de ~ 40 Me V) y no muy cerca de la incidencia rasante. Las fases de los coeficientes de reflexión y de trasmisión se ajustan luego para dar la diferencia de camino de los rayos en la esfera que representa al núcleo. Despreciando frente a la unidad pequeños efectos de la parte imaginaria del potencial, se tiene

$$R(\Theta) = -\frac{(n^2 - x^2)^{1/2} - \operatorname{sen} \Theta/2}{(n^2 - x^2)^{1/2} + \operatorname{sen} \Theta/2} \, e^{-2 i k a \operatorname{sen} \Theta/2} \tag{2.8}$$

$$T(\Theta) = \frac{4n}{(n^2-1)^2}(nx-1)(n-x)e^{-2ika(1+n^2-2nx)^{1/2}} \qquad (2.9)$$

$$A = \exp - ka \frac{W}{nE} \frac{n-x}{(1+n^2-2nx)^{1/2}} \qquad (2.10)$$

donde n y x están dados por las ecs. (2. 6 y 7).

La sección eficaz para dispersión elástica es entonces

$$\sigma(\Theta) = |f_d|^2 + |f_c|^2 + \text{ términos de interferencia.} \qquad (2.11)$$

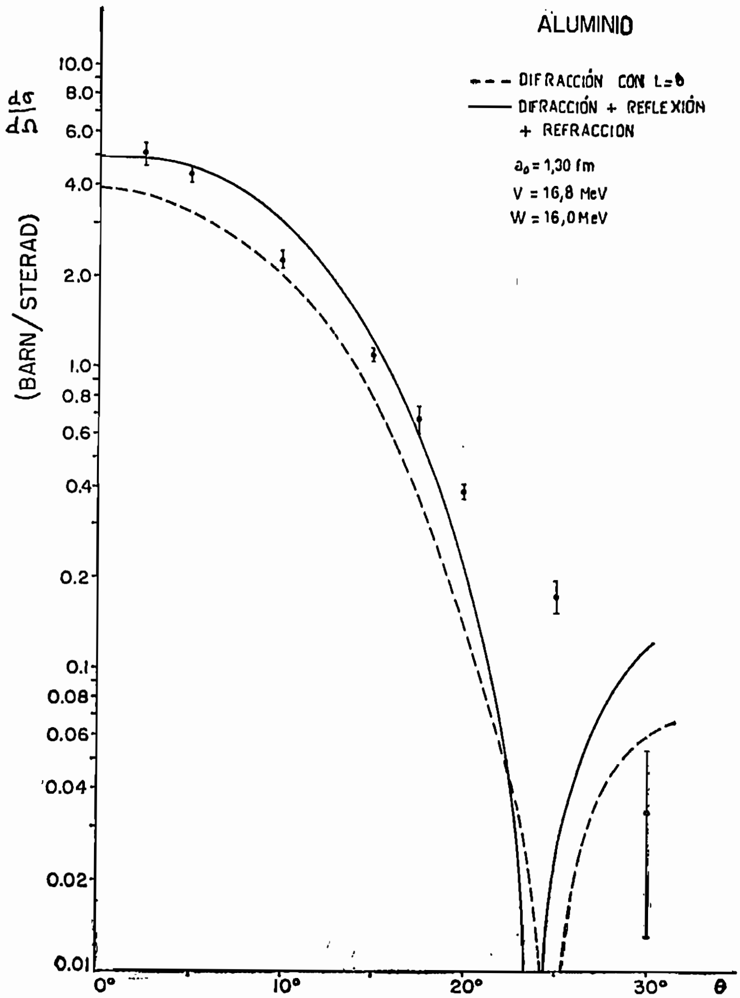


Fig. 1

El cómputo ha sido hecho para ajustar los datos experimentales de Bratenahl et al. (8) sobre dispersión elástica de neutrones de 84 MeV por Al, Cu y Pb. Expresando el radio nuclear en la forma $a = a_0 A^{1/3}$ se tiene tres parámetros para ajustar: a_0, V y W. Para determinar el rango de variación de a_0 se calculó

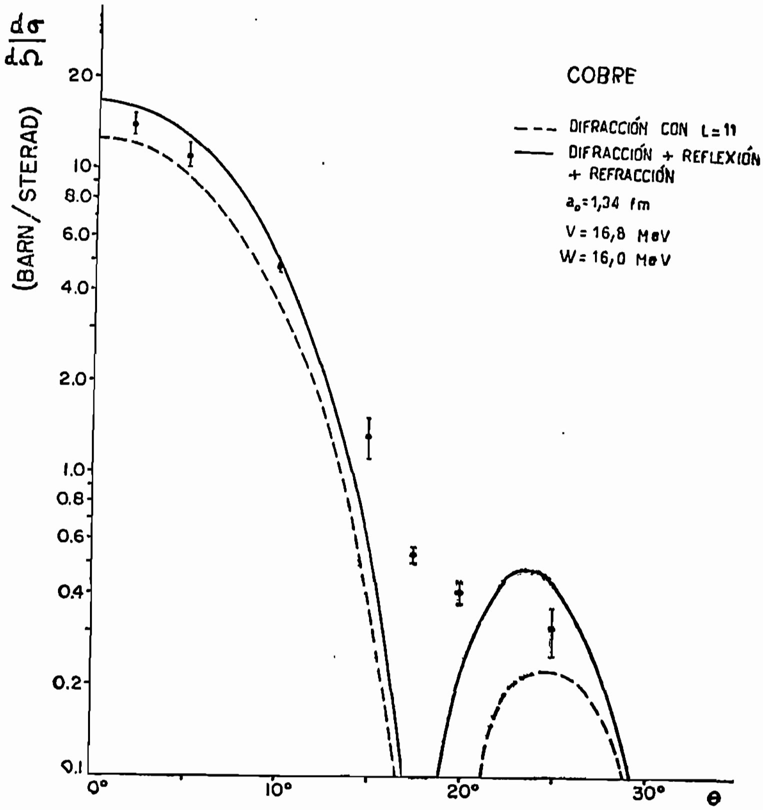


Fig. 2

primeramente la sección eficaz de difracción f_d; poniendo $L = ka$ los datos experimentales quedaron incluidos entre las curvas teóricas para $a_0 = 1,30\, fm$ (*) y $a_0 = 1,46\, fm$ con variaciones de núcleo a núcleo menores que 3 %. Para los mayores valores

(*) De acuerdo con la recomendación de la Unión Internacional de Física pura y aplicada, Ottawa, 1960 (Nuclear Physics *23* (1961) 697) $1\, fm = 1$ femtómetro $= 10^{-13}$ cm.

de a_0 no fue posible encontrar un juego de valores de V y W único para los tres núcleos y además era necesario usar valores de W muy pequeños en contradicción con las propiedades empíricas conocidas de la materia nuclear. Para los menores valores de

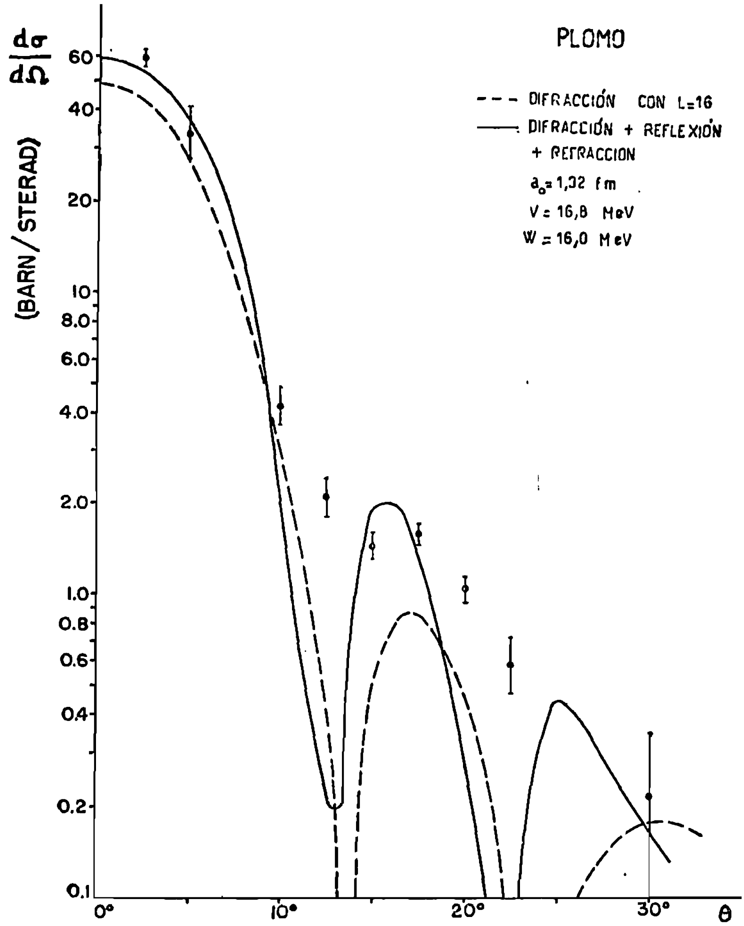


Fig. 3

a_0, $V = 16,8$ MeV y $W = 16$ MeV representan razonablemente los datos experimentales de los tres núcleos considerados. Estos valores son prácticamente los mismos que los determinados con el modelo óptico nuclear (*). Los resultados se muestran en las

(*) Ver por ejemplo el artículo de Bjorklund en la segunda cita de referencia (1).

figuras 1, 2 y 3 junto con los datos experimentales y las curvas correspondientes a difracción. Debe notarse que las curvas teóricas no han sido normalizadas.

Se ve que la corrección semiclásica no es capaz de «lavar» las oscilaciones fuertes de la difracción. Para pequeños ángulos la corrección permite no sólo un mejor ajuste de los datos experimentales sino también la determinaciión de los parámetros ópticos del núcleo. No se ha intentado un acuerdo mejor entre teoría y experiencia considerado que el modelo no es lo suficientemente refinado como para justificar el trabajo.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. Feshbach, *Ann. Rev. Nuclear Sci. 8* (1958) 49.

—— *Proc. Int. Conf. on the Nuclear Optical Model*, The Florida State Univ., Tallahassee, 1959.

—— *Proc. Int. Conf. on Nuclear Structure*, Kingston, Univ. of Toronto Press, 1960.

[2] L. F. Schiff, *Phy. Rev. 103* (1956) 443.

—— R. M. Eisberg, I. E. McCarthy y R. A. Spurrier, *Nuclear Physics 10* (1959) 583.

—— I. E. McCarthy, *Nuclear Physics 11* (1959) 574.

—— K. W. Ford y J. A. Wheeler, *Annals of Physics* 7 (1959) 259.

[3] A. Erdelyi et al., *Higher Trascendental Functions*, McGraw-Hill, Nue-Yoork, 1953, cap. 10.

[4] K. R. Greider y A. E. Glassgold, *Annals of Physics 10* (1960) 100.

[5] G. Placzek y H. A. Bethe, *Phys. Rev. 57* (1940) 1075.

[6] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge, 1944, p. 158.

[7] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison Wesley, 1950, cap. 3.

[8] A. Bratenahl, S. Fernbach, R. H. Hildebrand, C. E. Leith y B. J. Moyer, *Phys, Rev. 77* (1950) 597.

RELACIONES ENTRE DERIVADAS GENERALIZADAS

por V. PEREYRA [1]

SUMMARY:

We define Riemann derivatives in Cèsaro means of a measurable function and we prove that the existence of finite Riemann-Cèsaro derivative in a measurable set E implies the existence of ordinary Riemann derivative, almost everywhere in E.

An interesting consequence is a generalization of a Khintchine theorem which says that the existence of Schwartz derivative of the indefinite integral of a function $f(x)$ implies the existence of Borel simmetric derivative of $f(x)$.

Marcinkiewicz y Zygmund han probado el siguiente teorema [1]:

Sea $f(x)$ una función de una variable real, definida y medible en un intervalo (a, b), E un conjunto de medida positiva contenido en (a, b) y k un número natural.

Si para cada punto x perteneciente a E:

$$\frac{{}^{(s)}\Delta_h{}^k f(x)}{h^k} = 0(1) \quad (h \to 0)$$

entonces existe pp en E la derivada de Peano de orden k de la función $f(x)$.

Será útil recordar algunas definiciones [2].

La diferencia simétrica de orden k de la función $f(x)$ es:

$${}^{(s)}\Delta_h{}^k f(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} f\left(x + \left(i - \frac{k}{2}\right) h\right)$$

[1] Este tema fue sugerido por el Prof. A. Zygmund en su estadía en Bs. As. como experto de la Unesco en el Centro Regional de Matemática para América Latina.

Definición 1:

Cuando existe el límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{{}^{(s)}\Delta_h{}^k f(x)}{h^k} = R^k f(x)$$ se le llama derivada de Riemann de orden k de la función $f(x)$. Para $k=1$ coincide con la derivada simétrica y para $k=2$ con la de Schwartz.

Definición 2:

Si existe el límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{k\,!}{h^k} \left[f(x+h) - f(x) - f_1(x)\,h - \ldots - f_{(k-1)}(x) \frac{h^{(k-1)}}{(k-1)\,!} \right] = f_{(k)}(x)$$

se le llama derivada de Peano de orden k de la función $f(x)$.

Las funciones $f_{(i)}(x)$ $(i=1,2,\ldots,k-1)$ son arbitrarias, a priori, pero quedan unívocamente definidas por $f_{(k)}(x)$.

Definición 1':

Sea $f(x)$ una función medible. Si existe el límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{r}{h^r} \int_0^h (h-u)^{r-1} \frac{{}^{(s)}\Delta_u{}^k f(x)}{u^k} du = R^{(k)}\, C^{(r)} f(x) \qquad (r \text{ natural})$$

se le llama derivada de Riemann de orden k en media Cèsaro-r, o abreviadamente: Riemann-Cèsaro-r de orden k.

Se trata aquí de probar el siguiente:

Teorema 1:

Sea $f(x)$ una función medible y k, r dos números naturales. Supongamos que $\dfrac{{}^{(s)}\Delta_u{}^k f(x)}{u^k}$ es integrable en un entorno de $u=0$.

En casi todo punto en que existe derivada de Riemann-Césaro-r de orden k y es finita, existe derivada ordinaria de Riemann de orden k de $f(x)$ y ambas coinciden; es decir:

$$R^{(k)} C^{(r)} f(x) = R^{(k)} f(x) \qquad (p\,p)$$

Lema 1:

Si $A_p = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} (k-2j)^p$ k natural, p natural

entonces:

$$A_p = 0 \quad \text{para} \quad p < k$$

$$A_k = (-1)^k 2^k k!$$

Demostración:

$$x^{-k} (1-x^2)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} x^{k-2j}$$

Derivando p veces y multiplicando cada vez por x:

$$(x D)^p [x^{-k} (1-x^2)^k] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (k-2j)^p (-1)^{k-j} x^{k-2j}$$

y de aquí se obtiene el resultado con $x = 1$.

Lema 2:

Sea $f(u)$ una función medible y k, r dos números naturales. Si $g(u) = \dfrac{f(u)}{u^k}$ es integrable en un entorno de $u = 0$ valen las identidades:

$$(1) \quad \int_0^h (h-u)^{r-1} g(u)\, du = (r-1)! \left[\frac{F^{(r)}(h)}{h^k} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{r-1} \binom{r}{i} \binom{k+i-1}{k-1} i \int_0^h (h-u)^{i-1} \frac{F^{(r)}(u)}{u^{k+1}}\, du \right]$$

$$(2)\quad \int_0^h (h-u)^{r-1} f(u)\,du = (r-1)!\left[G^{(r)}(h)\,h^k + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} \binom{k}{i}\, i \int_0^h (h-u)^{i-1} G^{(r)}(u)\, u^{k-i}\, du \right]$$

donde $F^{(r)}(h) = \dfrac{1}{(r-1)!} \displaystyle\int_0^h (h-u)^{r-1} f(u)\, du$ y $G^{(r)}$ similarmente.

Demostración:

Basta integrar repetidas veces por partes usando la identidad

$$\int_0^h (h-u)^{r-1} f(u)\, du =$$

$$= (r-1)! \int_0^h (\ldots (\int_0^{x_1} f(u)\, du)\, d x_1) \ldots d x_{r-1})$$

Lema 3:

$$(3)\qquad \lim_{h \to 0} \frac{r}{h^r} \int_0^h (h-u)^{r-1} \frac{f(u)}{u^k}\, du$$

$$(4)\qquad \lim_{h \to 0} \frac{r \binom{k+r}{r}}{h^{k+r}} \int_0^h (h-u)^{r-1} f(u)\, du$$

Con las mismas hipótesis del Lema 2, la existencia de uno qualquiera de estos límites implica la existencia del otro y ambos son iguales.

Demostración:

Es suficiente considerar el caso en que el límite es cero. Supongamos entonces que el límite (4) es cero. Usando la fórmula (1) del Lema 2 y la hipótesis, se tiene que:

$$\frac{1}{h^r}\int_0^h (h-u)^{r-1}\, g(u)\, du \underset{h\to 0}{\to 0}$$

La recíproca resulta de la fórmula (2).

Con estos elementos se puede pasar a la demostración del Teorema 1. Por hipótesis existe:

$$R^{(k)}\, C^{(r)} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{r}{h^r}\int_0^h (h-u)^{r-1} \frac{{}^{(s)}\Delta_u{}^k f(x)}{u^k}\, du$$

y por el Lema 3:

$$R^{(k)}\, C^{(r)} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{r\binom{k+r}{r}}{h^{k+r}}\int_0^h (h-u)^{r-1}\, {}^{(s)}\Delta_u{}^k f(x)\, du$$

Llamando $\delta(h)$ a la expresión bajo el signo de lím y operando:

$$\delta(h) = \frac{r\,!\binom{k+r}{r}}{h^{k+r}} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \left[\left(i-\frac{k}{2}\right)^{-r} F^{(r)}\left(x+\left(i-\frac{k}{2}\right)h\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{r} \left(i-\frac{k}{2}\right)^{-j} F^{(j)}(x) \frac{h^{r-j}}{\overline{r-j}\,!}\right]$$

De aquí en adelante se supone que k es impar (²).

A partir de la expresión de $\delta(h)$ construiremos por cambios en la variable h, $(k+r+1)$ fórmulas iguales en el límite.

Reemplazando entonces h por $-\frac{2}{k}\left[s-\frac{k+r}{2}\right]h$ para $s=0, 1 \ldots k+r$, se tiene:

$$\delta_s(h) = \frac{(k+r)\,!}{k\,!\left[\frac{h}{k}(k+r-2s)\right]^{k+r}} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} (A-B)$$

(²) El caso par tiene un tratamiento similar.

donde:

$$A=\left(i-\frac{k}{2}\right)^{-r}F^{(r)}\left[x+\left(s-\frac{k+r}{2}\right)\left(1-\frac{2i}{k}\right)h\right]$$

$$B=\sum_{j=1}^{r}\left(i-\frac{k}{2}\right)^{-j}\frac{\left[\frac{1}{k}(k+r-2s)h\right]^{r-j}}{(r-j)!}F^{(j)}(x)$$

Lo que se desea conseguir es una cierta combinación lineal de los $\delta_s(h)$ que converja a un múltiplo de $R^{(k+r)}F^{(r)}(x)$.

Esta combinación lineal es:

$$N(h)=\sum_{j=0}^{k+r}\frac{(-1)^s k!\left[\frac{1}{k}(k+r-2s)\right]^{k+s}(k/2)^r}{s!(k+r-s)!}\delta_s(h) \tag{5}$$

Invirtiendo el orden de las sumas:

$$N(h)=\frac{(-1)^k\left(-\frac{k}{2}\right)^r}{h^{k+r}}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}\sum_{s=0}^{k+r}$$

$$\binom{k+r}{s}(-1)^{k+r-s}\left(A-\left(i-\frac{k}{2}\right)^r B\right)$$

pero por el Lema 1:

$$\sum_{s=0}^{k+r}\binom{k+r}{s}(-1)^{k+r-s}\left(i-\frac{k}{2}\right)^r B=\sum_{j=1}^{r}\frac{F^{(j)}(x)\left[\left(i-\frac{k}{2}\right)h\right]^{r-j}}{(r-j)!\,k^{r-j}}$$

$$\sum_{s=0}^{k+r}\binom{k+r}{s}(-1)^{k+r-s}(k+r-2s)^{r-j}=0$$

para cada $0\leqq i\leqq k$.

Por lo tanto:

$$N(h)=(-1)^k\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}\left(1-\frac{2i}{k}\right)^k\sum_{s=0}^{k+r}\binom{k+r}{s}$$

$$(-1)^{k+r-s}\frac{F^{(r)}\left[x+\left(s-\frac{k+r}{2}\right)\left(1-\frac{2i}{k}\right)h\right]}{\left[\left(1-\frac{2i}{k}\right)h\right]^{k+r}}$$

Como se ve, la segunda suma tiene como límite para h tendiendo a cero y cualquiera sea $0 \leqq i \leqq k$: $R^{(k+r)} F^{(r)}$ en el punto x. De otra manera:

$$N(h) \underset{h \to 0}{\to} (-1)^k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \left(1 - \frac{2i}{k}\right)^k (R^{(k+r)} F^{(r)}(x))$$

Pero por (5) también:

$$N(h) \underset{h \to 0}{\to} \frac{k!\,(-1)^{k+r}}{(k+r)!\,2^r k^k} \sum_{s=0}^{k+r} (k+r-2s)^{k+r} \binom{k+r}{s}$$

$$(-1)^{k+r-s} (R^{(k)} C^{(r)} f(x))$$

El Lema 1 afirma que los coeficientes de estas expresiones son iguales, de donde se deduce que existe derivada ordinaria de Riemann de orden $(k+r)$ de la r-ésima integral indefinida de $f(x)$.

Esto implica por el teorema de Marcinkiewicz y Zygmund que existe la derivada de Peano correspondiente, pero por el teorema de derivación de Lebesgue $F^{(r)}(x)$ es r veces derivable y se tiene:

$$D^r (F^{(r)}(x)) = f(x) \quad (pp \text{ en } E)$$

por lo tanto:

$$R^{(k+r)} F^{(r)}(x) = P_{(k+r)} F^{(r)}(x) = f_{(k)}(x) \quad (pp \text{ en } E)$$

y como la existencia de derivada de Peano implica la existencia de derivada de Riemann, esto completa la demostración del Teorema 1.

Teorema 2:

Sea $f(x)$ una función integrable en (a, b). Si existe la derivada de Riemann de orden $(k+r)$ de $F^{(r)}(x)$ en un conjunto E de medida positiva, entonces pp en E existe la derivada de Riemann-Cèsaro-r de orden k de $f(x)$.

Demostración:

Está contenida esencialmente en la del Teorema precedente. Este Teorema generaliza uno de Khintchine [3] que dice lo mismo para el caso $k = 1$, $r = 1$.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. ZYGMUND, *Trigonometrics Series.* Cambridge at Univ. Press, 2 Ed. Vol. 2.

[2] J. MARCINKIEWICZ y A. ZYGMUND, *On the differentiability of functions and summability of trigonometrical series.* Fundamenta Mathematicae, 26 (1936).

[3] A. KHINTCHINE, *Recherches sur la structure des functions mesurables.* Fundamenta Mathematicae, 9 (1927).

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CRONICA

ASAMBLEA DE LOS SOCIOS DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

El día 22 de setiembre de 1961, siendo las 15 horas y 30 minutos, se reunieron en el Aula nº 5 de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, Perú 222, los siguientes socios de la Unión Matemática Argentina, constituidos en Asamblea General ordinaria: R. Carranza, A. González Domínguez, M. Cotlar, J. Babini, R. Luccioni, C. Ballester, E. Quastler, H. Porta, N. Riviere, H. Fattorini, N. Karanowich, L. A. Santaló, E. Machado, C. Ratto de Sadosky, C. Sadosky, C. Loiseau, P. Baldaccini, D. M. Dragone, G. Klimovsky, E. Oklander, M. Gutiérrez Burzaco, O. Villamayor, G. Oliver, A. Korn, E. Zarantonello, A. Monteiro, B. Margolis, N. Fava, F. Toranzos (h.), L. Iglesias, O. Capri, W. Keller.

Abierta la sesión el Presidente Ing. J. Babini presentó un panorama de las actividades más sobresalientes de la sociedad durante el último período, a saber:

a) Revista. La Revista de la Unión Matemática Argentina, y de la Asociación Física Argentina, ha podido ir saliendo gracias a la ayuda del Consejo Nacional de Investigaciones y de la Facultad, pues el elevado precio de impresión no puede solventarse con las solas entradas de los socios. El volumen actualmente en prensa corresponde a las reuniones matemáticas realizadas el año anterior con motivo del Sesquicentenario de la revolución de Mayo y se financia por la subvención acordada a la Unión Matemática Argentina por la Comisión de Homenaje a dicho Sesquicentenario.

b) Se ha establecido un acuerdo de reciprocidad con la American Mathematical Society, en el sentido de que los socios de cualquiera de estas instituciones podrán serlo al mismo tiempo de la otra abonando la mitad de la cuota establecida para los socios.

c) Se colaboró en la edición del World Directory de matemáticos y la U.M.A. se ofrece para adquirir varios ejemplares de la nueva edición, al precio de 1,50 U$A, a los socios a quienes interese.

d) Se ha estado preparando la Conferencia de Bogotá (Diciembre de 1961) que tratarán los problemas de la enseñanza de la Matemática. En ella intervendrán de la Argentina el Ing. J. Babini, miembro del Comité organizador, el Dr. A. González Domínguez y el Ing. A. Valeiras.

Informe de la Tesorera. La Sra. C. Ballester de Pereyra da cuenta del balance de la Sociedad según el cual, durante el período 1959-1961, ingresaron $ 156.339,06 por concepto de subsidios varios y $ 71.984,34 por cuotas de socios y suscripciones, mientras que en el mismo período se invirtieron $ 152.181,— en la impresión de la Revista y $ 55.980,55 en gastos varios. Si se considera que el ejercicio se inició con un saldo anterior favorable de $ 47.063,61, el saldo también favorable que pasa al ejercicio próximo es de $ 67.225,46; suma que se considera insuficiente para atender la impresión de la Revista en lo que va del año en curso.

Teniendo en cuenta el elevado aumento de precio para la impresión de la Revista y para el franqueo en la distribución de la misma, se propone actualizar el monto de la cuota de los socios. Después de un cambio de impresiones se decide fijar la cuota para los Socios ordinarios en 300 $ m.n. anuales; para los estudiantes 150 $ m.n. y para la suscripción de la revista el precio de 7,50 dólares por volumen.

Tanto el informe del Sr. Presidente como de la Tesorera son recibidos con aplausos y aprobados por la Asamblea.

Miembros honorarios. El Dr. A. González Domínguez propone que en vista de sus méritos intrínsecos como matemáticos de primera fila y considerando su actuación en la Argentina donde actualmente se encuentran desarrollando una utilísima labor, sean nombrados miembros honorarios de la U.M.A. los profesores J. Dieudonné del Instituto de Altos Estudios de París y A. Ostrowski, de la Universidad de Basilea. Así se aprueba por unanimidad.

Elección de autoridades. Debiendo tener lugar la elección de autoridades por haber terminado el período de 2 años por que fueron elegidas, se pone la cuestión a consideración de la Asamblea. El Dr. Santaló, propone que en vista del éxito con que se ha desempeñado la Junta Directiva anterior, gracias a la cual la U.M.A. ha podido ir superando todas las dificultades de su funcionamiento y subsistencia y la dedicación con que sus componentes han actuado, se elija la misma Junta por un nuevo período de dos años. Así se aprueba por aclamación. Queda por consiguiente nombrada la misma Junta y los mismos secretarios locales que actualmente se desempeñaban, con la excepción del Secretario local de La Plata, vacante por fallecimiento del Dr. A. Sagastume Berra, y que se decide autorizar a la Junta directiva para nombrar reemplazante, y del Secretario Local de San Carlos de Bariloche que se deja vacante por ausencia del Dr. Balanzat que lo desempeñaba.

SESION DE COMUNICACIONES CIENTIFICAS DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

En Buenos Aires, durante los días 21 a 23 de setiembre, se realizó la Reunión anual de comunicaciones científicas de la UMA, asistiendo a la misma numerosos socios y los siguientes representantes designados especialmente:

Universidad de la República (Montevideo): L. Laguardia y J. J. Schäffer.

Universidad N. de Córdoba: E. Gutiérrez de Rodríguez Pardina, D. M. Dragone, P. L. Cecchi, M. Spevak, P. Baldaccini, N. White, S. Mauer y A. A. M. Machado.

Universidad N. La Plata: M. L. Bruschi, J. E. Bosch y M. Zisman.

Universidad N. del Litoral: E. Gaspar, V. Rein, S. R. Bruno, E. Rofman, E. P. Cattaneo, P. J. Aranda y A. J. Bastanzo.

Universidad N. de Cuyo: W. L. Damköhler, E. Zarantonello, C. Loiseau y E. Marchi.

Universidad N. del Sur: D. Brignole de Martin, L. Iturrioz, M. L. Gastaminza, S. Gastaminza, J. M. Arango, O. Villamayor y A. A. Suárez.

Universidad N. del Noreste: A. R. Méndez, R. H. Martínez, M. R. Marangunic y H. Acevedo.

Al iniciarse las sesiones, los concurrentes dedicaron un minuto de silencio en homenaje a la memoria del eminente matemático y miembro honorario de la UMA, Dr. Beppo Levi, fallecido en Rosario el 28 de agosto último.

A continuación se desarrollaron las sesiones de comunicaciones de acuerdo con el siguiente programa:

Jueves 21 a las 18

Facultad de Ciencias, Perú 222.

Comunicaciones científicas:

1. R. E. Luccioni (Instituto de Matemática, Tucumán). *Geometría integral en espacios proyectivos P_n.*

   Se considera la existencia o no de medida invariante bajo el grupo proyectivo para ciertos conjuntos de "elementos geométricos" (en particular subespacios lineales y cuádricas) de P_n.

2. F. Alfonso (Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias, Buenos Aires). *Sobre el movimiento del triedro de Frenet de una curva.*

   Mediante la representación por cuaterniones de los movimientos alrededor de un punto, a cada movimiento corresponde una curva del espacio elíptico S_3. En la presente comunicación se estudia el caso en que el movimiento es el inducido por el triedro de Frenet de una curva del espacio ordinario, dándose una caracterización de las correspondientes curvas de S_3.

3. L. A. SANTALÓ (Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias, Buenos Aires). *Sobre el volumen de poliedros en espacios de curvatura constante.*

   Se calcula, a partir de la fórmula de Gauss-Bonnet generalizada, el volumen de un poliedro de un espacio de curvatura constante de dimensión par, en función de los ángulos entre las caras del mismo. Resulta así, en particular, una fórmula de Knothe (Michigan Math. J., 1960, 251-255).

4. E. F. UBERTONE (Buenos Aires). *Interpretación geométrica generalizada de las funciones hiperbólicas.*

5. W. DAMKÖHLER (Facultad de Ciencias de la Educación, San Luis). *Acerca del problema isoperimétrico según la teoría de Tonelli.*

   Se trata de una nueva solución del problema isoperimétrico del cálculo de variaciones, basada en coordinar al mismo otro problema variacional libre, es decir no-isoperimétrico, en un espacio de tres dimensiones que aproxime en el máximo grado posible la estructura del problema isoperimétrico. El trabajo aparecerá publicado en los *Mathematische Annalen* a principios de 1962 .

Conferencia del profesor Alexandre Ostrowski sobre el tema:
Le problème du reste dans la formule de Moivre-Laplace.

Viernes 22, a las 9

Facultad de Ciencias.

Comunicaciones científicas:

1. R. LAGUARDIA (Instituto de Matemática y Estadística, Facultad de Ingeniería, Montevideo). *Indice de las funciones polarizadas y su relación con el comportamiento asintótico de sus transformadas de Laplace.*

   Se exponen algunos resultados de un trabajo sobre el comportamiento asintótico de las transformadas de Laplace y de Laplace-Stieltjes. En particular se introducen las nociones de índice y de función polarizada y se estudian las relaciones entre el índice y el comportamiento asintótico de la transformata para z tendiendo a infinito.

2. E. T. OKLANDER (Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias, Buenos Aires). *Sobre una condición necesaria y suficiente para que una matriz sea de estructura simple.*

   Se dice que una matriz cuadrada de orden n es de estructura simple si tiene n vectores linealmente independientes. Una c nsecuencia inmediata de la descomposición canónica de Jordan es que una matriz es de estructura simple si y sólo si su polinomio minimal tiene todas sus raíces simples. Se da una demostración de este teorema sin utilizar la descomposición de Jordan.

3. H. PORTA (Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias, Buenos Aires). *Sobre álgebras de Hilbert regulares.*

4. E. N. ALBINO DE CHIOSSONE (Facultad de Ingeniería, Buenos Aires). *Algunas aplicaciones de la teoría de grafes a la química orgánica e inorgánica.*

   En estas aplicaciones de la teoría de grafes se estudian los números fundamentales de la teoría (números ciclomático, cromático, de estabilidad interna y externa), núcleo de un grafe, matriz asociada a un grafe, etc.

5. M. C. DE CAMPI (Facultad de Ingeniería, Buenos Aires). *Programación cuadrática.*

   Se analizan comparativamente el método de gradiente y una extensión de método clásico de maximización. Se realizan las respectivas programaciones y codificaciones a los efectos de obtención de resultados en computadores digitales.

6. V. PEREYRA (Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias, Buenos Aires). *Generalización de un teorema de Marcinkiewicz y Zygmund.*

   Se definen las derivadas generalizadas de Riemann-Cesaro y se prueba que son iguales *p p* a las derivadas de Riemann ordinarias.

   Conferencia del profesor Mischa Cotlar sobre el tema:
   Representación de semigrupos y teoría dimensional de operadores

A las 18. Facultad de Ciencias.

Comunicaciones científicas:

1. G. KLIMOVSKY (Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias, Buenos Aires). *Modelos para sistemas axiomáticos que contienen al operador ε de Hilbert.*

   Se demuestra que en el sistema axiomático para la teoría de conjuntos de von Neumann, Bernays, Gödel, el siguiente enunciado: "Todo modelo de un sistema axiomático S cuya lógica subyacente es el cálculo funcional de orden uno general, es también modelo para el mismo sistema S, pero tomando como lógica subyacente el cálculo funcional de orden uno general ampliado con el operador ε de Hilbert y el primer axioma (esquema) de Hilbert para ese operador", es equivalente al axioma de elección.

2. A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ (Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias, Buenos Aires). *Una representación exponencial de las impedancias.*

   Consignamos una representación integral de toda función holomorfa f (p) en el semiplano de la derecha, real para x real, y de parte real no negativa en ese semiplano (que llamaremos impedancias). Los parámetros que figuran en la fórmula son una constante real y la fase de $f\ (p)$ en el eje imaginario. De esta fórmula (especialmente útil cuando se trata de *multiplicar* impedancias) deducimos entre otras cosas una representación de toda reactancia como producto infinito, y una generalización de la teoría de las funciones "Q" de Cauer.

3. J. J. SCHÄFFER (Instituto de Matemática y Estadística, Facultad de Ingeniería, Montevideo). *Dualidad en las ecuaciones diferenciales lineales.*

   Se consideran relaciones entre propiedades de determinadas parejas de espacios funcionales admisibles para una ecuación diferencial (vectorial) con las correspondientes para la ecuación adjunta en el espacio dual.

4. A. MONTEIRO (Instituto de Matemática, U. N. del Sur, Bahía Blanca). *Construcción de las álgebras de Nelson finitas.*

   Se indican las condiciones necesarias y suficientes que debe verificar el conjunto ordenado de los elementos irreductibles de un reticulado distributivo finito A, para que sobre A se pueda definir una estructura de álgebra de Nelson.

5. A. MONTEIRO y L. ITURRIOZ (Instituto de Matemática, U. N. del Sur, B. B.). *Representación de las álgebras de Tarski monádicas.*

   Se generalizan para las álgebras de Tarski monádicas los teoremas de representación que Halmos ha obtenido para las álgebras de Boole monádicas.

6. A. MONTEIRO y D. BRIGNOLE (Instituto de Matemática, U. N. del Sur, B. B.). *Caracterización de las álgebras de Nelson por igualdades.*

   Se caracterizan las álgebras de Nelson por medio de un conjunto de igualdades.

Conferencia del profesor Jean Dieudonnè sobre el tema:
La unidad de la matemática moderna.

Sábado 23, a las 9

Pabellón de Matemática, Núñez.

Visita a la computadora electrónica. Explicación de los trabajos realizados a cargo del Dr. M. Sadosky y de sus colaboradores; exponiéndose a continuación las siguientes comunicaciones:

P. S. ZADUNAISKY (Instituto de Cálculo, Facultad de Ciencias, Buenos Aires). *La órbita definitiva del cometa Halley.*

Se describen los aspectos esenciales de un proyecto de cálculo de la órbita del cometa Halley, para el cual se usarían observaciones de los dos últimos pasos ocurridos en 1835 y en 1910. El astrónomo argentino Jorge Bobone, del Observatorio de Córdoba, trabajó durante varios años en estos cálculos pero falleció sin haberlos podido terminar. El conocimiento preciso de los elementos de la órbita de este cometa, aparte de su importancia intrínseca, significará un aporte valioso para la verificación de ciertas teorías concernientes a la naturaleza física del núcleo de los cometas.

A. P. CALDERÓN (Universidad de Chicago). *Sobre problemas inversos de contorno.*

Sea R un recinto acotado de E_n de contorno regular y $\gamma\ (x)$ una función continua positiva en R. Dada una función φ en el contorno $\delta\ R$ de R que admite una extensión a R de integral de Dirichlet finita, la funcional de φ

$$Q\gamma\,(\varphi) = \int_R \gamma\,(x) \left| grad\ \theta \right|^2 dx$$

donde θ es la solución de la ecuación div γ grad $\theta = O$ que coincide con φ en δ R, está univocamente determinada por la función γ. El problema inverso de contorno, aun no resuelto, consiste en dada $Q\ \gamma\,(\,,)$ determinar la función $\gamma\,(x)$.

Si se reemplaza $Q\gamma$ por su aproximación lineal en γ, $\overline{Q}\gamma$, en torno a $\gamma\,(x) =$ constante, se obtiene

$$\overline{Q}\gamma\,(\varphi) = \int_R \gamma\,(x) \left| grad\ \psi \right|^2 dx$$

donde $\Delta\psi = O$ y $\psi = \varphi$ en $\delta\ R$. En este caso, en cambio, se puede demostrar que γ está determinada por $\overline{Q}\gamma$ y dar un procedimiento para calcularla.

Finalizada con la comunicación del Prof. Calderón la sesión de comunicaciones científicas, los asistentes se reunieron en un almuerzo criollo de camaradería ofrecido por la UMA en las proximidades del local del Pabellón de Matemática.

ACUERDO DE RECIPROCIDAD CON LA AUSTRALIAN MATHEMATICAL SOCIETY

La Unión Matemática Argentina ha convenido con la Australian Mathematical Society un acuerdo de reciprocidad similar al concertado con la American Mathematical Society, según se informó en el número anterior de esta Revista.

Los miembros de la UMA que adhieran al acuerdo recibirán el Journal of the Australian Mathematical Society y abonarán una cuota anual de L. 2.12.6 (australiada), debiendo dirigirse para ello a

Australian Mathematical Society
Departament of Mathematical Statistics
University of Sydney
Sydney, AUSTRALIA.

LA PRIMERA CONFERENCIA INTERAMERICANA SOBRE EDUCACION MATEMATICA

Entre el 4 y el 9 de diciembre pasado se celebró en Bogotá la Primera Conferencia Interamericana sobre educación matemática, que organizó un Comité especial designado por la Comisión Internacional de Enseñanza Matemática y contó con la ayuda de OEA, UNESCO, las Fundaciones Ford y Rockefeller, la National Science Foundation y la Asociación Colombiana de Universidades.

Intervinieron en la Conferencia, como participantes, observadores e invitados especiales, delegados de casi todos los países americanos, así como de algunos europeos.

La Conferencia se inauguró el 4 de diciembre en una de las salas del Capitolio Nacional con un discurso del ministro de Educación Nacional de Colombia, doctor Jaime Posadas, hablando a continuación el profesor Marshall H. Stone, presidente del Comité organizador de la Conferencia, y los representantes de OEA y de UNESCO, profesor Marcelo Alonso y profesor Oscar Dodero Luscher, respectivamente. A continuación el profesor Alberto González Domínguez (Argentina) pronunció una conferencia sobre: La matemática y nuestra sociedad tecnológica.

La sesión matutina del 5 de diciembre se dedicó a una exposición del profesor Enrique Cansado (Chile) sobre: Modernas aplicaciones de la matemática, y a una conferencia del profesor Howard Fehr (Estados Unidos) sobre: Reforma de la enseñanza de la geometría, mientras que la sesión vespertina fue dedicada al estudio y discusión del problema de la formación de los profesores de matemática sobre la base de los informes de A. Valeiras y L. A. Santaló (Argentina) y de Omar Catunda (Brasil).

En la sesión del 6 de diciembre se realizó una Mesa Redonda guiada por el profesor Rafael Laguardia (Uruguay) sobre la enseñanza de la matemática en América latina, teniendo en cuenta que todos los países participantes habían remitido a la Conferencia sendos informes acerca de esa enseñanza en sus respectivos países. Por la tarde hablaron el profesor Gustave Choquet (Francia) sobre: La matemática moderna y la enseñanza, y el profesor Marshall H. Stone (Estados Unidos) sobre: Algunas tendencias características de la matemática moderna.

La sesión del 7 de diciembre fue dedicada a las conferencias del profesor Guillermo Torres (México) sobre: Algunas ideas sobre la enseñanza de la matemática en la Universidad, y del profesor E. J. McShane sobre: Nuevas ideas acerca de la enseñanza universitaria en los Estados Unidos de América.

Las sesiones del 8 de diciembre se dedicaron a las conferencias del profesor Laurent Pauli (Suiza) sobre: Los programas de matemática en las escuelas suizas de enseñanza secundaria, del profesor Sven Bundgaard (Dinamarca) sobre: Los programas de matemática en Dinamarca, del profesor E. G. Begle (Estados Unidos) sobre: La reforma de la enseñanza matemática en los Estados Unidos de América, y del profesor Laurent Schwartz (Francia) sobre: El papel de la matemática en la física desde el punto de vista de la formación científica.

En la sesión de clausura del 9 de diciembre se resumieron las discusiones sostenidas durante la Conferencia, aprobándose la siguiente Recomendación:

LA PRIMERA CONFERENCIA INTERAMERICANA SOBRE
LA EDUCACION MATEMATICA

CONSIDERANDO:

a) Que en nuestra Sociedad Tecnológica la Matemática es una rama vital del conocimiento y un instrumento imprescindible para el progreso económico y social, particularmente a través de sus aplicaciones a la Biología, Economía, Estadística, Física, Química, Tecnología, etc.;
b) Que es alarmante la creciente escasez de profesores de matemática, lo que hace peligrar el desarrollo de esta ciencia y sus aplicaciones;
c) Que en consecuencia es urgente adoptar medidas para intensificar la formación de un número elevado de profesores calificados, principalmente en la etapa secundaria;
d) Que la enseñanza de la matemática en dicha etapa debe ser confiada exclusivamente a profesores que han recibido un entrenamiento profesional en matemática en Instituciones de nivel universitario;
e) Que, como una de las condiciones más importantes de su enseñanza, los profesores deben mantener actualizados sus conocimientos;

La Conferencia Interamericana sobre educación matemática, recomienda a los gobiernos y a las autoridades competentes

I. Sobre la formación de Profesores.

1) Que los centros de formación de profesores de matemática de enseñanza media ofrezcan becas y otras facilidades a quienes elijan esa carrera, y que se informe a los estudiantes de enseñanza secundaria, mediante conferencias y publicaciones, la existencia de las carreras de profesor e investigador, de su importancia social y de las facilidades otorgadas a quienes las sigan.

2) Que la formación de los profesores de enseñanza media,tienda a estar exclusivamente a cargo de la Universidad, y bajo la influencia de los matemáticos más competentes, a fin de evitar el divorcio entre la enseñanza de la matemática y los progresos de la ciencia y la tecnología; entre tanto, en los casos en que esté a cargo de Instituciones especiales, que los cursos de matemática sean de nivel universitario.

3) Que en la formación de Profesores de matemática de enseñanza media se modernicen los cursos y se limite a las debidas proporciones los de carácter pedagógico.

II. Sobre los profesores en ejercicio:

4) Que se regularicen los contactos entre los profesores de enseñanza secundaria y la Universidad, debiendo aquéllos concurrir regularmente a cursos de perfeccionamiento (regulares o especiales), para lo cual se deben incrementar los medios destinados a ese fin, tales como becas en el País y en el Extranjero.

5) Que se tomen medidas para elevar el nivel económico y social del profesor titulado de enseñanza media, como ser:

a) Garantizar su estabilidad;
b) Fijar salarios básicos iguales a los de otras profesiones de preparación académica semejante o equiparable;
c) Establecer un régimen de ascenso en el escalafón, con las implicaciones correspondientes (aumento de salario, disminución del horario, etc.), basado automáticamente en el número de años de servicio, considerando ventajas suplementarias y tomando en cuenta publicaciones y actividades de perfeccionamiento.
d) Establecer el año sabático;
e) Ofrecerle la posibilidad de acogerse a un régimen de dedicación exclusiva, en condiciones favorables para el progreso del profesor.

6) Que se proporcione el máximo de posibilidades (becas, compensaciones, etc.) para que los profesores de enseñanza media sin título, actualmente en ejercicio, puedan titularse y, por consiguiente, acogerse al régimen establecido en el artículo 5, sea completando los estudios universitarios, sea siguiendo cursos especiales estatuídos a ese fin.

III. Sobre el perfeccionamiento de la enseñanza.

7) Que se estimule la realización de cursos y la creación de Institutos de carácter experimental, para ensayar textos y métodos nuevos en la enseñanza de la matemática.

8) Que se sugiera a la Unión Internacional de Matemática, La UNESCO y la OEA que tomen en cuenta las siguientes iniciativas.

a) Intensificación de los programas destinados al perfeccionamiento de los profesores de matemática de enseñanza media;
b) Difusión de las actividades, proyectos y publicaciones que tengan que ver con el mejoramiento y modernización de la enseñanza de la matemática;
c) Publicación y distribución de informes, nuevos textos y traducciones destinados a los profesores de enseñanza media, para su ilustración y perfeccionamiento;
d) Fomento de la investigación, como motor del progreso científico y tecnológico y elemento inspirador de la enseñanza.
e) Creación de un centro internacional destinado a reunir y difundir las informaciones acerca de los experimentos y nuevas ideas en educación matemática.
f) Creación de una Comisión Interamericana de Educación Matemática, de carácter permanente, destinada a dar continuidad a los proyectos e ideas discutidos en esta Conferencia y a promover iniciativas tendientes a elevar el nivel y la eficiencia de las enseñanzas medias y universitaria de la matemática.

9) Que se promueva un amplio intercambio de informaciones acerca de las nuevas ideas sobre la enseñanza de la Matemática, en todos los países, mediante la realización de reuniones nacionales y la repetición de conferencias internacionales como la presente.

10) Que los Delegados Participantes entren y se mantengan en contacto con las Autoridades de sus respectivos Países, a fin de que se adopten medidas efectivas para poner en práctica estas recomendaciones.

Las palabras de clausura de la Conferencia estuvieron a cargo del profesor Pablo Casas (Colombia).

La delegación argentina estuvo integrada por el profesor José Babini, miembro del Comité organizador de la Conferencia, el señor Horacio Samuel Ballestrin, secretario de la Embajada argentina en Colombia, el profesor Alberto González Domínguez, el profesor Luis A. Santaló y el profesor Andrés Valeiras. Por motivos de salud el profesor Valeiras, que redactó el informe acerca de la enseñanza de la matemática en la Argentina y colaboró con el profesor Santaló en el trabajo sobre la formación del profesorado, no pudo asistir a la reunión.

BIBLIOGRAFIA

P. P. TEODORESCU, *Problemas planos en la teoría de la elasticidad,* vol. I, (en rumano), Edit. Acad. Rep. Pop. Rumana, Bucarest, 1961.

Este libro está dirigido al estudio de uno de los capítulos de la elasticidad lineal que ha sido analizado vastamente por numerosos investigadores, principalmente debido a su notable interés práctico, como así también, a causa de poder ser abordado matemáticamente mediante interesantes procedimientos de cálculo. La obra es en sí, una monografía extensa y exhaustiva de elasticidad plana, y presenta de manera cuidadosa y crítica los diferentes métodos de resolución aplicados a casos particulares. El libro comienza introduciendo al lector en la teoría de los medios continuos, deduciendo las conocidas ecuaciones de equilibrio y de deformación. Luego de definir lo que se entiende por estados planos de tensiones y de deformaciones, se define la denominada función de tensión asociada a un problema y se analizan sus propiedades. Seguidamente, se desarrollan en forma detallada los diversos métodos de cálculo de la ecuación biarmónica, a la que se arriba imponiendo a la función de tensión, responsable sólo de las condiciones estáticas, la imposición de la compatibilad de las deformaciones expresada en términos de tensiones. El libro analiza el empleo de polinomios biarmónicos, los métodos variacionales (mínimos cuadrados, Ritz, Galerkin, etc.), métodos basados en desarrollos de Fourier, utilización de variable compleja, diferencias finitas, etc. Gran parte del libro está dirigida a la resolución de vigas rectangulares de gran altura con distintas condiciones de sustentación y de carga. Se acompañan tablas y ábacos de resolución. La bibliografía al final de cada capítulo es amplia y revela una esmerada documentación bibliográfica. Se anuncia un segundo volumen que versará sobre chapas de contornos cualesquiera y sometidas a condiciones especiales de solicitación y aplicaciones al estudio de nudos de pórticos, tímpanos, etc.

Este libro del Profesor P. P. Teodorescu, autor de numerosos trabajos teórico-analíticos de elasticidad, representa un ponderable esfuerzo de recopilación y propia iniciativa, y es sin duda, un valioso aporte al mejor conocimiento del tema.

Horacio C. Reggini

NUCLEAR REACTOR THEORY, *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, vol. XI, American Mathematical Society, 1961.

La teoría de reactores nucleares presenta numerosos problemas interesantes por la dualidad de su interés estrictamente matemático y de su valiosa aplicación al diseño y construcción de reactores nucleares. ''Sin embargo —dicen los editores G. Birkhoff y E. P. Wigner en la presentación— hasta el presente muy pocos matemáticos han dedicado un esfuerzo serio a los problemas de la teoría de reactores nucleares. El presente volumen intenta aumentar el número de estos matemáticos, indicando la gran variedad de interesantes problemas matemáticos que aparecen en este atrayente campo. Como consecuencia, ello ayudaría a colocar el diseño de los futuros reactores nucleares sobre bases más científicas''.

El volumen contiene los trabajos presentados en el XI Simposio de Matemática Aplicada organizado por la American Mathematical Society que tuvo lugar en New York durante los días 23 a 25 de abril de 1959. He aquí su lista:

1. A. M. WEINBERG, *Reactor Types.*
2. M. S. NELKIN, *Neutron thermalization.*
3. U. FANO - M. J. BERGER, *Deep penetration of radiation.*
4. L. W. NORDHEIM, *The theory of resonance absortion.*
5. E. P. WIGNER, *Mathematical problems of nuclear reactor theory.*
6. J. ERNEST WILKINS, Jr., *Diffusion approximation to the transport equation.*
7. GARRETT BIRKHOFF, *Positivity and criticality.*
8. G. J. HARETLER - M. A. MARTINO, *Existence theorems and spectral theory for the multigroup diffusion model.*
9. M. WING, *Transport theory and spectral problems.*
10. R. EHRLICH, *One-dimensional multigroup calculations: estimation of group constants.*
11. RICHARD S. VARGA, *Numerical methods for solving multidimensional multigroup diffusion equations.*
12. R. D. RICHTMYER, *Monte Carlo methods.*
13. RICHAD BELLMAN - ROBERT KALABA, *Transport theory and invariant imbedding.*
14. BENGT CARLSON, *Numerical solution of neutron transport problems.*
15. HARRY SOODAK, *Problems of reactor kinetics.*
16. H. L. GARABEDIAN, *Core kinetics.*

17. HARVEY BROOKS, *Temperature coefficients and stability.*
18. T. A. WELTON, *System kinetics.*
19. W K. ERGEN, *Rerragement inequalities and non-linear stability criteria.*

Una visión genral de los principales problemas que aparecen en la teoría de reactores nucleares, sus dificultades y su importancia, se encuentra en el artículo de Wigner (nº 5). Los demás son más específicos y abarcan toda una gran variedad de tópicos, como resulta de la lista anterior. En conjunto constituyen una interesante puesta al día de este tipo de problemas.

L. A. Santaló

P. K. RASCHEWSKY, *Elementare Einführung in die Tensorrechnung,* Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlín, 1959. 80 págs., 6 figuras. Traducción de la edición rusa de 1953 por Wolfang Richter.

El objeto del libro es estudiar de manera elemental los llamados tensores cartesianos, es decir, definidos por sus componentes en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales. Dentro de éstos, además, el autor se limita al caso del espacio de tres dimensiones. El contenido resulta así elemental pero muy claro. Los tensores se definen como "objetos geométricos", es decir, por sus componentes más la ley de transformación de las mismas por cambios de coordenadas. Se hacen las aplicaciones usuales al tensor de inercia y a la elasticidad (tensor de tensiones y tensor elástico) hasta las ecuaciones de Lamé y Navier-Stokes. La limitación a tres dimensiones impide las aplicaciones a la relatividad especial.

El librito puede considerarse como un útil complemento a un curso ordinario de cálculo vectorial. Es muy recomendable, en este sentido, para los estudiantes de los primeros años de nuestras facultades, tanto de física como de ingeniería.

L. A. Santaló

P. S. ALEXANDROFF, *Einführung in die Gruppentheorie.* Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlín, 1960. Traducción de la segunda edición alemana por Lothar Uhlig, 118 páginas.

Dice el autor en el prólogo: "Todo alumno de los cursos superiores de la enseñanza media que se ocupe con gusto de la matemática, puede comprender la idea de grupo. Para ellos, principalmente, está escrito este libro, así como también para los profesores encargados de dichos cursos. Hemos procurado que cada idea nueva que se introduce vaya acompañada de ejemplos, en su mayor parte de tipo geométrico".

Atendiendo a este objetivo, se trata de un libro elemental pero extraordinariamente claro, sin duda de mucha utilidad para quien desee introducirse y alcanzar las ideas fundamentales de la teoría de grupos.

El índice de los capítulos es el siguiente: 1. Idea de grupo; 2. Grupos de permutaciones; 3. Isomorfismos (teorema de Cayley: todo grupo finito es isomorfo a un grupo de permutaciones); 4. Subgrupos cíclicos; 5. Grupos de movimientos (congruencias invariantes; 7. Homomorfismos; 8. Clases respecto de un subgrupo. Termina con un apéndice sobre conjuntos y representación de funciones.

L. A. Santaló

I. M. JAGLOM und W. G. BOLTJANSKI, *Konvexe Figuren*, Deutsche Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956. Traducción de la edición rusa de 1951 por Joachim Erlebach. 257 páginas, 318 figuras.

La teoría de las figuras y cuerpos convexos, cuya noble ascendencia se remonta a Arquímedes, estuvo estancada durante siglos por la limitación que la costumbre de la regla y el compás redujo a dos figuras especialees: el triángulo y la elipse. Las geometrías de la elipse y del triángulo fueron tratadas de manera exhaustiva, mientras el resto de las figuras convexas quedaba prácticamente olvidado. A principios de siglo, con Minkowsky, surge un renacimiento del interés por la convexidad, interés justificado por la teoría en sí, que presenta interesantes y atractivos problemas, y por sus aplicaciones a otras ramas de la matemática, principalmente a la teoría de números.

Desde entonces la teoría de las figuras convexas se ha desarrollado grandemente, gracias principalmente a la influencia de Blaschke y su escuela. El libro de Bonnesen-Fenchel *Theorie del konvexen Körper* (1934), reúne los resultados obtenidos hasta aquella fecha.

El libro actual de Jaglom-Boltjanski es mucho más elemental que el de Bonnesen-Fenchel, principalmente por su limitación casi exclusiva al caso del plano. La forma de presentación es también muy distinta. No tiene carácter enciclopédico y en vez de tratar "métodos" y luego casos particulares, el contenido está expuesto en forma de problemas, con la solución dada en la segunda parte del libro. De esta manera los métodos aparecen directamente al ser utilizados. A veces, de un mismo problema se dan varias soluciones para poner de manifiesto los distintos métodos.

Los problemas están agrupados en las siguientes secciones: 1. Propiedades generales de las figuras convexas; 2. Teorema de Helly y aplicaciones; 3. Una propiedad de las funciones continuas (ejemplos de problemas que se resuelven tan sólo con la aplicación del teorema según el cual una función continua toma todos los valores intermedios entre dos de ellos); 4. Adición de figuras convexas; 5. Problemas isoperimétricos; 6. Diversos máximos y mínimos; 7. Curvas de anchura constante; 8. Curvas que pueden girar dentro de un triángulo y análogas.

Las soluciones y explicaciones son claras y expuestas con todo detalle. Numerosas y claras figuras ayudan a la comprensión del texto. Se nota, sin embargo, la falta de referencias bibliográficas, pues muchas veces aún indicando el nombre del autor no está dada la fuente donde puede acudir el lector deseoso de consultar la exposición original.

Es un libro que puede ser muy útil en los primeros años universitarios para los alumnos con vocación hacia la geometría. Sus problemas, de tipo concreto e intuitivo, para cuya solución no hacen falta más que los conocimientos más elementales del Análisis, son muy adecuados para ejercitarse en ciertos tipos de razonamientos útiles en muchos capítulos de la geometría y aún de toda la matemática.

L. A. Santaló

E. B. Dynkin und W. A. Uspenski, *Mathematische Unterhaltungen*, Teil I (*Mehrfarben probleme*). Teil II (*Aufgaben aus der Zahlentheorie*). Teil III (*Irrfahrten* (*Markoffsche Ketten*)). Berlin, 1955, 1956 - 60, 130, 92 páginas.

I. P. Natanson, *Einfachste Maxima — und Minima — Aufgaben*, Berlin, 1960. 29 páginas.

J. S. Dubnow, *Fehler in geometrischen Beweisen*, Berlin, 1958. 64 páginas.

Estos cinco tomitos forman parte de la "pequeña serie" de libros que, bajo la dirección de Herbert Karl, edita la VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, como complemento de los textos de enseñanza secundaria.

Los tres textos de Dynkin y Uspenski contienen los temas tratados en un seminario elemental de la Universidad Lomonosow de Moscú en los años 1945/46 y 1946/47.

Aunque los autores son especialistas en teoría de las probabilidades, los libros cubren una variedad de temas interesantes y muy adecuados para seminarios elementales.

El primero trata el problema de los colores, exponiendo el teorema de Wolynsky sobre el problema de los cuatro colores y el de Euler sobre el de cinco, después de haberse ocupado previamente de problemas de dos y tres colores. Trae 56 problemas con sus soluciones.

El segundo, que es el más extenso de los cinco, se ocupa de algunos problemas de teoría de los números, en especial aplicaciones a la misma de la aritmética de las clases de residuos. Trae 129 problemas con su solución.

El tercero, de la serie de Dynkin y Uspenski, se dedica a algunos problemas de probabilidades, comenzando con una breve introducción para establecer las nociones fundamentales de la teoría, para tratar luego el paseo al azar sobre una recta infinita y las leyes de los grandes números. Los dos últimos capítulos exponen en forma general, aunque naturalmente muy sumaria, los problemas generales del paseo al azar con un número finito de estados y con un número infinito, respectivamente. Trae 28 problemas.

El librito de Natanson trata, en forma puramente algebraica, de los máximos y mínimos del trinomio de segundo grado con algunas aplicaciones. Como generalización de interés se demuestra, también con recursos elementales, la propiedad de ser la media geométrica de n números positivos no mayor que su media aritmética.

El librito de Dubnow expone quince ejemplos de falsas demostraciones geométricas, fundadas sobre consideraciones elementales o sobre el concepto de límite, entre los cuales son interesantes especialmente algunos ejemplos vinculados con el postulado de las paralelas. En capítulos aparte se comentan y analizan esos ejemplos.

INDICE DEL VOLUMEN XIX (1)

UNIÓN MATEMÁTICA ARGENTINA

ASOCIACION FISICA ARGENTINA

(1) Este volumen comprende: Nº 1, p. 1-52, aparecido en Marzo 1960; Nº 2, p. 53-104, aparecido en julio 1960; Nº 3, p. 105-244 (dedicado al Simposio de matemática de 1959), aparecido en enero 1961; Nº 4, p. 254-302, aparecido en diciembre 1961; y Nº 5, p. 303-372, aparecido en Mayo 1962.

CRÓNICA

BIBLIOGRAFIA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

MIEMBROS HONORARIOS

Tulio Levi-Civita (†); Beppo Levi (†); Alejandro Terracini; George D. Birkhoff (†); Marshall H. Stone; Georges Valiron (†); Antoni Zygmund; Godofredo García; Wilhelm Blaschke; Laurent Schwartz; Charles Ehresmann; Jean Dieudonné; Alexandre Ostrowski.

REPRESENTANTES EN EL EXTRANJERO

Ing. Rafael Laguardia (Uruguay). Ing. José Luis Massera (Uruguay) Dr. Godofredo García (Perú). Dr. Leopoldo Nachbin (Brasil). Dr. Roberto Frucht (Chile). Dr. Mario González (Cuba). Dr. Alfonso Nápoles Gandara (México). Alejandro Terracini(Italia).

Este número de la Revista de la Unión Matemática Argentina y de la Asociación Física Argentina se ha publicado con la contribución del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. Tal contribución no significa que el Consejo asuma responsabilidad alguna por el contenido del mismo.

PUBLICACIONES DE LA U. M. A.

Revista de la U. M. A. – Vol. I (1936-1937); Vol. II (1938-1939); Vol. III (1938-1939); Vol. IV (1939); Vol. V (1940); Vol. VI (1940-1941); Vol. VII (1940-1941); Vol. VIII (1942); Vol. IX (1943); Vol. X (1944-1945).

Revista de la U. M. A. y órgano de la A. F. A. – Vol. XI (1945-1946); Vol. XII (1946-1947); Vol. XIII (1948); Vol. XIV (1949-1950).

Revista de la U. M. A. y de la A. F. A. – Vol. XV (1951-1953); Vol. XVI (1954-1955); Vol. XVII (1955); Vol. XVIII (1959); Vol. XIX (1960-1962).

Los volúmenes III, IV, V y VI comprenden los siguientes fascículos separados:

Nº 1. GINO LORIA. *Le Matematiche in Ispagna e in Argentina.* — Nº 2. A GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre las series de funciones de Hermite.* — Nº 3. MICHEL PETROVICH. *Remarques arithmétiques sur une équation differentielle du premier ordre.* — Nº 4. A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Una nueva demostración del teorema límite del Cálculo de Probabilidades. Condiciones necesarias y suficientes para que una función sea integral de Laplace.* — Nº 5. NIKOLA OBRECHKOFF. *Sur la sommation absolue par la transformation d'Euler des séries divergentes.* — Nº 6. RICARDO SAN JUAN. *Derivación e integración de series asintóticas.* — Nº 7. Resolución adoptada por la U. M. A. en la cuestión promovida por el Sr. Carlos Biggeri. — Nº 8. F. AMODEO. *Origen y desarrollo de la Geometría Proyectiva.* — Nº 9 CLOTILDE A. BULA. *Teoría y cálculo de los momentos dobles.* — Nº 10. CLOTILDE A. BULA. *Cálculo de superficies de frecuencia.* — Nº 11. R. FRUCHT. *Zur Geometria auf einer Fläche mit indefiniter Metrik (Sobre la Geometría de una superficie con métrica indefinida).* — Nº 12. A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre una memoria del Prof. J. C. Vignaux.* — Nº 13. E. TORANZOS. *Sobre las singularidades de las curvas de Jordan.* — Nº 14. M. BALANZAT. *Fórmulas integrales de la intersección de conjuntos.* — Nº 15. G. KNIE. *El problema de varios electrones en la mecánica cuantista.* — Nº 16. A. TERRACINI. *Sobre la existencia de superficies cuyas líneas principales son dadas.* — Nº 17. L. A. SANTALÓ. *Valor medio del número de partes en que una figura convexa es dividida por n rectas arbitrarias.* — Nº 18. A. WINTNER. *On the iteration of distribution functions in the calculus of probability (Sobre la iteración de funciones de distribución en el cálculo de probabilidades).* — Nº 19. E. FERRARI. *Sobre la paradoja de Bertrand.* — Nº 20. J. BABINI. *Sobre algunas propiedades de las derivadas y ciertas primitivas de los polinomios de Legendre.* — Nº 21. R. SAN JUAN. *Un algoritmo de sumación de series divergentes.* — Nº 22. A. TERRACINI. *Sobre algunos lugares geométricos.* — Nº 23. V. y A. FRAILE y C. CRESPO. *El lugar geométrico y lugares de puntos áreas en el plano.* — Nº 24. R. FRUCHT. *Coronas de grupos y sus subgrupos, con una aplicación a los determinantes.* — Nº 25. E. R. RAIMONDI. *Un problema de probabilidades geométricas sobre los conjuntos de triángulos.*

En 1942 la U. M. A. ha iniciado la publicación de una nueva serie de "Memorias y monografías" de las que han aparecido hasta ahora las siguientes:

Vol. I; Nº 1. — GUILLERMO KNIE, *Mecánica ondulatoria en el espacio curvo.* Nº 2. — GUIDO BECK, *El espacio físico.* Nº 3. — JULIO REY PASTOR, *Integrales parciales de las funciones de dos variables en intervalo infinito.* Nº 4. — JULIO REY PASTOR, *Los últimos teoremas geométricos de Poincaré y sus aplicaciones.* Homenaje póstumo al Prof. G. D. BIRKHOFF.

Vol. II; Nº 1. — YANNY FRENKEL, *Criterios de bicompacidad y de H-completidad de un espacio topológico accesible de Frechet-Riesz.* Nº 2. — GEORGES VALIRON, *Fonctions entières.*

Vol. III; Nº 1. — E. S. BERTOMEU y C. A. MALLMANN, *Funcionamiento de un generador en cascadas de alta tensión.*

Además han aparecido tres cuadernos de *Miscelánea Matemática.*