

## REVISTA

DE LA

## UNION MATEMATICA ARGENTINA

## SUPLEMENTO

## MIEMBROS DE LA U. M. A.:

J. ALLENDE POSSE (Buenos Aires). — JOSÉ BABINI (Santa Fe). — FRANCISCO BERDIALES (Córdoba). — JUAN BLAQUIER (Buenos Aires). — CARLOS BIGGERI (Buenos Aires). — CLOTILDE BULA (Rosario). — ENRIQUE BUTTY (Buenos Aires). — CARLOS DIEULEFAIT (Rosario). — ALEJANDRO ESTRADA (Buenos Aires). — FACULTAD DE QUÍMICA INDUSTRIAL (Santa Fe). — FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS (Rosario). — FERNANDO L. GASPAR (Rosario). — JOSÉ GIANNONE (Rosario). — ALBERTO GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ (Buenos Aires). — JOSÉ GONZÁLEZ GALÉ (Buenos Aires). — MANUEL GUITARTE (Buenos Aires). — WALTER S. HILL (Montevideo). — LUDOVICO IVANISSEVICH (Buenos Aires). — CARLOS ISELLA (Rosario). — FRANCISCO LA MENZA (Buenos Aires). — HILARIO MAGLIANO (La Plata). — OCTAVIO S. PICO (Buenos Aires). — JUAN OLGUÍN (Rosario). — ELBA RAIMONDI (Buenos Aires). — JULIO REX PASTOR (Buenos Aires). — JOSÉ SORTHEIX (Tucumán). — FAUSTO TORANZOS (La Plata).

BUENOS AIRES

1938



# EL PROBLEMA DE LA INTERPOLACION EN ESTADISTICA

POR CLOTILDE A. BULA

1. Dada una sucesión discreta de valores de una variable independiente en correspondencia con los de una función desconocida, el problema de la interpolación consiste en encontrar una función continua que tomando, para aquellos valores de la variable independiente, los valores conocidos, de la función, permita calcular valores intermedios.

La experiencia nos da, pues, correspondencias entre un número discreto de pares de valores  $(x_i, y_i)$ , pero como conocidos  $n$  puntos hay infinitas funciones que pasan por ellos, es necesario elegir una.

La elección, de dicha función, tiene por fundamento: 1º) facilitar los cálculos, 2º) simplificar la expresión analítica, 3º) su presumible coincidencia con la ley que rige el hecho experimental.

En los hechos estadísticos, sobre todo en los económicos y sociales, en que la experiencia no puede repetirse a voluntad, a diferencia de lo que ocurre en otros campos, por ej. en la Física teórica, con la expresión analítica se trata en general, de tener una simple fórmula descriptiva del fenómeno y en la elección de la función prevalece, entonces, el criterio que determinan las condiciones 1ª y 2ª: facilidad en los cálculos y simplicidad de la expresión

2. Obtenida la función de interpolación, ella permite no solo calcular valores intermedios, sino también extrapolarlos, es decir hallar valores para la función fuera del campo en que la observación se realizó.

¿Qué sentido tiene la extrapolación? Indudablemente envuelve una concepción determinista: cuando la variable es el tiempo, los hechos acaecidos, dan la ley a que obedecerán los hechos futuros y también la que obedecieron los hechos pasados. En otras palabras: admitir la validez de la extrapolación es admitir que hay herencia en el fenómeno.

Pero es conveniente limitar aquellas extensiones a valores de la variable independiente cercanos a los valores conocidos, puesto que, aunque se aceptara la validez de la extrapolación, posiblemente, el concluir que los hechos pasados y futuros dependen, exclusivamente, de los hechos presentes, de la misma naturaleza, llevaría con facilidad a conclusiones erróneas.

3. Si abandonando toda posición explicativa, de la génesis y dinámica del fenómeno, se trata de obtener una expresión analítica sencilla, se está conducido, naturalmente, a escoger el polinomio.

Dentro de esta concepción, el método llamado de las ecuaciones normales o de Gauss da una solución inmediata. Si se tiene el cuadro de las observaciones:

|          | $x$   | $y$   |
|----------|-------|-------|
|          | $x_0$ | $y_0$ |
|          | $x_1$ | $y_1$ |
|          | ,     | .     |
| $n + 1)$ | .     | .     |
|          | .     | .     |
|          | $x_n$ | $y_n$ |



donde el valor de la función, para una  $x$  cualquiera, está dado en función del primer valor conocido  $y_0$  y de las diferencias divididas sucesivas, en ese punto.

Las diferencias divididas se definen así:

$$D y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

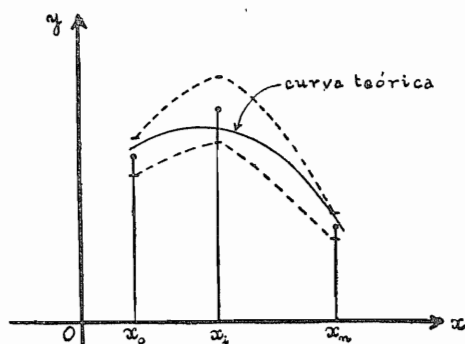
$$D y_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$$

y, en general, es

$$D^m y_n = \frac{D^{m-1} y_{n+1} - D^{m-1} y_n}{x_{m+n} - x_n}$$

4. Los hechos de la observación están afectados, en general, por errores (sistemáticos, por ej. instrumentos defectuosos; personales, por ej. defectos de percepción; accidentales, por ej. influencias atmosféricas). La función que interpola, es decir que pasa por los puntos conocidos, ¿puede decirse por eso que da el *verdadero valor*? Si se admite la existencia de errores —y hay que admitirla— es indudable que no.

Suficiente es, pues, que la función teórica pase por puntos próximos, en forma tal que llamando  $\delta_i$  a los desvíos será:  $\delta_i = f(x_i) - y_i$  y ellos deberán estar contenidos en un cierto entorno de los puntos conocidos, es decir, la curva teórica pasará dentro de una franja de tolerancia.



Esto permite simplificar los cálculos sin perder exactitud y el problema de la interpolación se convierte, de esta manera, en el del ajustamiento o perecuación como dicen los italianos.

5. Si en el problema del ajustamiento, abandonando todo propósito explicativo, nos proponemos dar la expresión analítica, más sencilla, del hecho experimental, nos encontramos, igual que en el caso de la interpolación, con que el polinomio es la función continua que satisface tal propósito.

Si las observaciones son en número de  $(n + 1)$ , con un polinomio de grado  $n$  se interpola y con uno de grado menor se ajusta. Otra vez, es de aplicación el método de las ecuaciones normales o de Gauss y, en este caso, los coeficientes del polinomio de ajustamiento, hacen mínimo el error complejo cuadrático.

Si el polinomio de ajustamiento fuera

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m \quad (m \leq n)$$

en que los coeficientes  $a_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, m$ ), han sido determinados mediante la solución de aquel sistema de ecuaciones, es

$$\sigma^2(a_j) = \sum_i [f(x_i) - y_i]^2 = \text{mínimo}$$

y como esta medida de la dispersión es función de aquellos coeficientes, si la condición de mínimo se cumple, es

$$\frac{\partial \sigma}{\partial a_0} = \frac{\partial \sigma}{\partial a_1} = \dots = \frac{\partial \sigma}{\partial a_m} = 0$$

como es fácil demostrarlo.

El cálculo se simplifica trasladando el origen a la media aritmética.

Tiene este método el inconveniente de que si la aproximación no se juzgase satisfactoria, para mejorarla, es decir, para aumentar el grado de la función de aproximación, hay que rehacer íntegramente los cálculos. Lo hecho no se aprovecha.

6. Para obviar aquellos inconvenientes se introducen, en Estadística, los desarrollos en serie de funciones ortogonales.

La ortogonalidad es propiedad de los sistemas de funciones ordenadas y un sistema se llama ortogonal, cuando la integral del producto de dos de ellas (la suma en el caso discontinuo) es nula si son de distinto rango y no lo es en el caso contrario. Entonces si un sistema  $[f_n(x_i)]$  de la variable discontinua  $x$ , es ortogonal, esta propiedad se suele indicar así:

$$\sum f_n(x_i) f_m(x_i) = E_{m|n}$$

Por lo tanto, con el símbolo  $E_{m|n}$  se expresa  $E_{m|n} = 0$ , si es  $m$  distinto de  $n$  y un número positivo si es  $m = n$ .

Las series trigonométricas proporcionan un primer ejemplo de tales funciones, pues es conocida la propiedad de ortogonalidad que, en el intervalo  $(0, 2\pi)$ , tienen los senos y cosenos múltiples (\*).

En Estadística, los polinomios trigonométricos se prestan admirablemente, para ajustar algunos fenómenos periódicos. Así, por ej., observadas durante 30 años las alturas del río Paraná, hechos los premios mensuales se tiene.

---

(\*) Euler en una memoria "Sur les inégalités du mouvement de Jupiter et de Saturne" (1748) utilizó, parece que por vez primera, desarrollos en serie de cosenos. También lo hizo Daniel Bernoulli en otra memoria, "Sur les cordes vibrantes" (1753), pero, como lo dice Riemann, (Oeuvres Mathématiques de Riemann-Trad. Laugel-pág. 233) fué Fourier (Théorie analytique de la Chaleur-1807) el primero que comprendió de una manera exacta y completa, la naturaleza de las series trigonométricas.

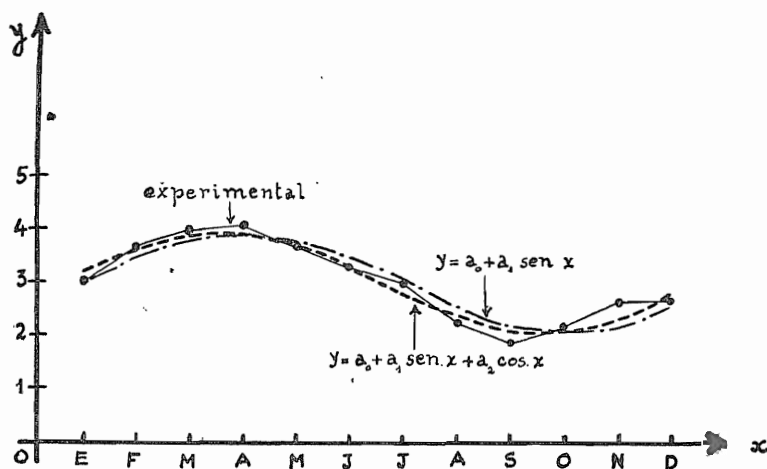
| MESES   | PROMEDIOS<br>MENSUALES | MESES  | PROMEDIOS<br>MENSUALES |
|---------|------------------------|--------|------------------------|
| Enero   | 2.98                   | Julio  | 2.94                   |
| Febrero | 3.63                   | Agosto | 2.20                   |
| Marzo   | 3.92                   | Sbre.  | 1.85                   |
| Abril   | 4.00                   | Obre.  | 2.16                   |
| Mayo    | 3.63                   | Nbre.  | 2.60                   |
| Junio   | 3.23                   | Dbre.  | 2.63                   |

Ajustando con funciones de las formas:

$$y = a_0 + a_1 \sin x$$

$$y = a_0 + a_1 \sin x + b_1 \cos x$$

resulta



que como se ve, interpretan muy bien el hecho experimental

Pero es con los polinomios ortogonales, como se aborda, con toda generalidad, el problema del ajustamiento, en Estadística, dentro de la concepción descriptiva, utilizando funciones sencillas.

Entonces, si  $[P_j(x_i)]$  es un sistema de polinomios ortogonales de la variable discontinua  $x$ , se verifica.

$$\sum P_j(x_i) P_k(x_i) = E_{m|n}$$

donde el subíndice indica el grado del polinomio, que, en el caso de una variable, coincide con su rango, siendo

$$P_k(x) = \alpha_{k|0} + \alpha_{k|1}x + \alpha_{k|2}x^2 + \dots + \alpha_{k|k}x^k$$

Para una aproximación de grado  $m$ , la función teórica adopta esta forma

$$f(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \dots + a_m P_m(x)$$

Debido a la propiedad de ortogonalidad, el cálculo de los coeficientes  $a_j$  se hace por el clásico procedimiento de Fourier, siendo

$$a_j = \frac{\sum_i f(x_i) P_j(x_i)}{\sum_i P_j^2(x_i)}$$

expresión que se simplifica normalizando el sistema, en cuyo caso el denominador vale la unidad.

Los coeficientes de tal manera calculados, hacen mínimo el error complejo cuadrático, es decir que

$$\sigma_m^2 = \sum_i [y_i - f(x_i)]^2 = \text{mínimo}$$

por lo cual es

$$\frac{\partial \sigma}{\partial a_0} = \frac{\partial \sigma}{\partial a_1} = \dots = \frac{\partial \sigma}{\partial a_m} = 0$$

como se demuestra fácilmente.

Si ahora la aproximación no fuera satisfactoria, se pueden agregar términos, pero todo lo hecho se conserva y el trabajo se reduce a calcular, sólo, los nuevos coeficientes.

A estos polinomios se los puede generar, siempre, por determinantes y si se impone la condición de que el coeficiente del término máximo sea la unidad positiva, es

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{\Delta_n} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \dots & \mu_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n-1} \end{vmatrix}$$

donde es

$$\mu_n = \sum_i x_i^n$$

y  $\Delta_n$  es el menor complementario de  $x^n$ .

Un método más breve, para generarlos, se tiene aplicando la fórmula de Gram-Romanovsky, que es la que se utiliza en las aplicaciones estadísticas.

Este procedimiento se basa en la propiedad que tienen los polinomios ortogonales de poder ser expresados como una combinación lineal de todos los anteriores más una potencia de la variable del grado que indica el subíndice del polinomio, es decir que

$$P_s(x) = \beta_{s+0} P_0(x) + \beta_{s+1} P_1(x) + \dots + x^s \quad [3]$$

El problema que se plantea ahora es el de determinar los coeficientes  $\beta$ ,



lo que se hace aprovechando la propiedad de ortogonalidad de dichos polinomios y resulta

$$\beta_{s|j} = \frac{\sum_i P_j x_i^s}{\sum_i P_j^2}$$

y reemplazando en [3] estos valores se tiene que

$$P_s(x) = \sum_{j=0}^{s-1} \frac{\sum_{i=0}^n P_j(\xi_i) \xi_i^s}{\sum_{i=0}^n P_j^2(\xi_i)} P_j(\xi_i) + x^s$$

donde se ha cambiado la variable de sumación interna para evitar confusiones.

7. En Estadística, cuando hablamos de frecuencias, nos referimos siempre a frecuencias relativas y si con  $\eta_i$  simbolizamos las que corresponden a  $x_i$ , se verifica que es

$$\eta_i > 0$$

$$\sum_i \eta_i = 1$$

La solución ideal de nuestro problema la daría una fórmula finita que respondiendo a un esquema de probabilidad, a la vez que describiera el hecho experimental lo explicara.

Es problema este que, no está resuelto, ni aún para este caso de una variable que es el más sencillo.

Pearson ha construido un utilísimo repertorio de funciones que definen las curvas que llevan su nombre y que se adaptan, admirablemente, para ajustar las observaciones experimentales.

El método se apoya en el esquema de las pruebas repetidas sin reposición que, como se sabe, define un polinomio hipergeométrico.

Partiendo de este esquema, se llega a plantear una ecuación, en diferencias finitas, dada en forma de función racional, con una expresión de primer grado en el numerador y otra de segundo en el denominador.

Como en el paso al límite, resulta una curva simétrica, la función pierde su característico contenido del esquema sin reposición que define curvas asimétricas. Pearson abandona el proceso analítico y utilizando la forma de la ecuación en diferencias finitas, plantea una ecuación diferencial de la misma forma, poniendo

$$\frac{y'}{y} = \frac{a - x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} \quad [4]$$

que resuelve por el llamado *método de los momentos*.

Se postula el anulamiento extremo, es decir que, si el intervalo es el  $(\alpha, \beta)$ , es

$$f(\alpha) = f(\beta) = 0 \quad [5]$$

De la [4] resulta

$$y'(b_0 + b_1 x + b_2 x^2) = y(a - x)$$

multiplicando ambos miembros por  $x^n$  e integrando en  $(\alpha, \beta)$

$$\int_{\alpha}^{\beta} (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) x^n y' dx = \int_{\beta}^{\alpha} (a - x) x^n y dx$$

Integrando por partes en el primer miembro, teniendo presente la condición [5] y poniendo

$$\mu' = \int_{\alpha}^{\beta} y x^n dx$$

que es lo que se llama un momento de orden  $n$  resulta

$$-n b_0 \mu'_{n-1} - (n+1) b_1 \mu'_n - (n+2) b_2 \mu'_{n+1} = a \mu'_n - \mu'_{n+1}$$

de donde, una sencilla fórmula de recurrencia que liga los momentos de tres órdenes consecutivos

$$[(n+2) b_2 + 1] \mu'_{n+1} = [a + (n+1) b_1] \mu'_n + n b_0 \mu'_{n-1}$$

Variando  $n$  se plantea un sistema de ecuaciones y obtiene Pearson el repertorio de funciones a que hemos hecho referencia antes. En [4]  $a$  es el punto de máximo de la función. Se trata de curvas campanulares, excepto los tipos especiales que denomina "J-shaped" y "U-shaped".

El método se encuentra expuesto en la obra del actuariólogo inglés W. P. Elderton "Frequency curves and Correlation", exposición, si se quiere, poco clara que, en un próximo trabajo, nos proponemos desarrollar en forma de hacerla accesible aún para los técnicos que, sin mayor bagaje matemático, deban efectuar aplicaciones.

## BIBLIOGRAFIA

- Bowley A.*—Elements of Statistics. London, 1296-5ª ed.  
*Darmois Georges.*—Statistique Mathématique. Paris, 1927.  
*Elderton W. Palin.*—Frequency curves and Correlation. London, 1927.  
*Jackson Dunham.*—The theory of approximation. (American Mathematical Society Colloquium Publications, Volume XI. New York, 1930).  
*Jordan Charles.*—Statistique Mathématique. Paris, 1927.  
*Rietz H. L.*—Handbook of Mathematical Statistics. New York, 1924.  
*Risser R. et Traynard C. E.*—Statistique Mathématique. Paris, 1933.

## TEMAS DE INVESTIGACION

Breve pero eficacísima para el progreso de la incipiente investigación matemática en la Argentina ha sido la actuación del profesor Levi-Civita, reseñada en la noticia que hemos publicado en el número 2 de la Miscelánea Matemática.

En las reuniones públicas celebradas en el Seminario Matemático, propuso a los concurrentes algunos temas de investigación que nos complacemos en publicar para orientación de los lectores que por ellos se interesen.

### FORMA CANÓNICA DE LAS FUNCIONES ANALÍTICAS

Consideriamo una trasformazione analitica, biunivoca e regolare, fra  $x$  e  $x_1$ , avente l'origine per punto unito:

$$(1) \quad x_1 = f(x)$$

Attera l'ipotesi che la trasformazione e invertibili nel campo delle funzioni analitiche regolari e che  $f(x)$  deve annullarsi per  $x = 0$ , si può attribuire a  $f(x)$  la forma

$$(2) \quad f(x) = \alpha x [1 + x P(x)],$$

dove  $\alpha$  designa una costante non nulla (reale o complessa) e  $P(x)$  una funzione di  $x$ , olomorfa nell'intorno dell'origine.

Per lo studio delle trasformazioni (1) é lecito supporre

$$(3) \quad |\alpha| \leq 1$$

perché, nell'eventualità opposta  $|\alpha| > 1$ , basta prendere in considerazione, anziché le (1), la trasformazione inversa, che fa passare da  $x_1$  ad  $x$ , la quale e della forma

$$x = \frac{1}{\alpha} x_1 [1 + x_1 Q(x_1)],$$

$Q$  essendo funzione olomorfe di  $x_1$ .

Riteniamo dunque valida la (3) e riferiamoci al caso generale in cui

$$(4) \quad |\alpha| < 1$$

In tal caso la (1) si può con uno (stesso) cambiamento delle variabili  $x$  e  $x_1$  (biunivoco e regolare nell'intorno dell'origine) ricondurre la (1) alla forma elementare omografica

$$y_1 = \alpha y$$

Anche per  $|\alpha| = 1$  la (1) deve potersi semplificare usufruendo di cambiamenti di variabili biunivoci e regolari nell'intorno dell'origine. Non é detto che si ottenga un'unica forma canonica. Potranno esistere più tipi, eventualmente in numero infinito. Si tratta di caratterizzarli.

Mi ci provai più di 30, anni or sono, riferendemi su particolare al campo reale per  $|\alpha| = 1$ . Non pervenni a conclusioni esaurienti e nemmeno, per quanto ricordo, a risultati parziali espressivi.

## BIBLIOGRAFIA

M. FRÉCHET.—*Méthode des Fonctions Arbitraires. Théorie des Evenements en Chaîne dans le cas d'un nombre fini d'états possibles*.—París, Gauthier Villars, 1938. Un vol. de 316 págs.

El desarrollo activísimo del Cálculo de Probabilidades, agregado al hecho de que muchas memorias importantes aparecen en publicaciones académicas de difícil acceso, y redactadas en idiomas menos accesibles todavía, (escuela rusa, escuela de Brno), le hacen hoy difícil, aun al profesional, orientarse en la espesa maraña probabilista. Llega, pues, muy a tiempo este excelente libro del ilustre profesor de la Sorbona, que contiene la primera exposición sistemática de la Teoría de Probabilidades en cadena.

Nacida del deseo consciente de Markhoff, de generalizar las propiedades de los sucesos y variables aleatorias independientes, de manera suficientemente amplia para que, por una parte, la teoría abarcara la mayor cantidad de casos que se presentan efectivamente en la Física y en la Técnica, y que, por otra, fuera posible extender la mayor cantidad posible de los teoremas clásicos, la teoría de las Probabilidades en cadena ha realizado en los últimos grandísimos progresos. Del caso de un número finito de casos posibles, y un número discreto de pruebas, con probabilidad de tránsito independiente del rango de la prueba (cadena constante), se pasó al de la cadena múltiple, al de la cadena variable (probabilidad de tránsito dependiente del rango de la prueba), luego al caso en que las pruebas forman un conjunto continuo, y por último al caso más general, en que tanto el número de pruebas como el número de estados forman un conjunto continuo. Razones de espacio y de tiempo han inclinado al Prof. Fréchet a no abordar sino el caso más sencillo, en que la teoría ha cristalizado en resultados más definitivos, a saber, el estudio de las cadenas simples y constantes. Pero lo ha hecho de manera tan completa y didáctica, que su exposición servirá seguramente de modelo a futuras generalizaciones, y es, desde ahora, punto de referencia indispensable para todo el que se ocupe de estas cuestiones.

Después de un primer capítulo donde estudia a manera de introducción —y con muy acertado criterio didáctico— algunos ejemplos clásicos (problema de las urnas, problema de la baraja) que le dan ocasión para establecer las conocidas fórmulas fundamentales de recurrencia en donde intervienen las probabilidades de tránsito, que aparecerán luego casi a cada página en el resto del libro, entra de lleno en materia, en el capítulo segundo, cuya sección primera está dedicada al estudio del comportamiento asintótico de las probabilidades cuando el número de pruebas es discreto. Aborda primero el problema por el procedimiento seguido por el creador de la teoría, y perfeccionado por numerosos investigadores que siguieron los rumbos por él marcados, completándolo en puntos importantes, por ejemplo, el que se refiere a las cadenas inversas, estudiadas recientemente por Bersntein, Hostinsky, Kolmogoroff y otros matemáticos. Aborda luego el mismo problema, pero siguiendo el método más poderoso introducido por Poincaré, que reduce la cuestión a la resolución de un sistema de ecuaciones en diferencias finitas. Aquí aparece la famosa ecuación secular, y el enlace de la teoría con las fundamentales investigaciones,

puramente algebraicas, de Frobenius. Abundan en este capítulo los aportes originales del autor, que ha completado y precisado en varios puntos importantes los resultados de Frobenius.

Expone a continuación el método directo de Hadamard, completado en puntos fundamentales por Kolmogoroff, que tiene la ventaja no pequeña, sobre el de Poincaré-Romanowsky, de prescindir del cálculo de matrices y del aparato algebraico de Frobenius.

La sección segunda está dedicada al estudio del caso en que permaneciendo siempre finito el número de estados posibles, las pruebas forman una sucesión continua. El planteo del problema conduce en este caso, como es bien sabido, a un sistema de ecuaciones funcionales, y no en diferencias finitas, como en el caso discreto. Se trata de resolver el sistema, y estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones, cuando la variable tiende a infinito. Expone el autor, completándolo, el clásico método de Kolmogoroff, consistente en reducir la solución del sistema de ecuaciones funcionales a la integración de un sistema canónico de ecuaciones diferenciales lineales, imponiéndole a las funciones que intervienen, ciertas restricciones "a priori" (continuidad y derivabilidad). Expone la demostración de Kolmogoroff, dilucidando algunos puntos delicados de la misma, y luego generaliza el método del gran probabilista ruso, a fin de obtener soluciones más generales (continuas y de variación acotada y absolutamente continuas). Se ocupa luego con detalle del método de Hostinsky, que tiene sobre el de Kolmogoroff la ventaja de que da la expresión explícita de la solución, y consiste en integrar las ecuaciones diferenciales planteadas por este último por el sistema de aproximaciones sucesivas. Este método permite obtener todas las soluciones continuas de derivada continua. El autor da una generalización del método Hostinsky, que le permite obtener la solución absolutamente continua más general, y también la solución más general continua y de variación acotada. Estos resultados son importantes, abstracción hecha de su transcendencia para el cálculo de probabilidades, porque son independientes de ese cálculo y pueden tener importantes aplicaciones a otras ramas de la Matemática. Expone por último —*last but not least*— el método desarrollado por el autor en su memoria de 1932 (Bull. de la Soc. Math. de France), que da una expresión mucho más simple de la solución.

El libro termina por cuatro apéndices donde están consignados los resultados matemáticos, no clásicos, utilizados en el mismo, y está enriquecido por una extensa bibliografía y un índice alfabético.

A. G. D.

GARCÍA, GODOFREDO.—*Lecciones de Mecánica Racional*. Un vol. de 300 páginas. Lima, 1938.

El ingeniero Godofredo García, benemérito decano de la Facultad de Ciencia de la Universidad Mayor de San Marcos de Lima, ha dado a publicidad un volumen de Mecánica Racional que comprende la teoría de vectores y la cinemática.

Un rápido examen de la obra ofrece de primer intento la impresión de un libro esencialmente didáctico y claro.

Después de una introducción de carácter general, en el capítulo primero

se ocupa de la teoría elemental de vectores libres y aplicados. El capítulo segundo lo dedica a las funciones vectoriales de una variable, terminándolo con la aplicación al estudio elemental de la geometría diferencial en lo que se relaciona con las curvas.

En el capítulo tercero estudia las funciones de punto, los operadores diferenciales y las principales fórmulas integrales relativas a campos vectoriales.

El capítulo cuarto se ocupa de la cinemática del punto móvil y del estudio de los principales casos particulares: movimiento periódico, armónico, vibratorio amortiguado, y helicoidal uniforme.

En el capítulo quinto da los elementos esenciales de la cinemática del cuerpo rígido y en el sexto trata la teoría del movimiento relativo. El capítulo séptimo está dedicado al estudio del movimiento del cuerpo rígido con un punto fijo y en particular a la precesión regular. El octavo y último capítulo trata el movimiento plano rígido.

El tomo termina con tres notas complementarias del capítulo referente al cálculo vectorial.

En resumen: el trabajo del señor Godofredo García constituye un excelente libro de consulta, en el que los problemas se presentan con fácil interpretación y en tal sentido representa para los alumnos un manual evidentemente útil.

E. C. M.

ABRAMESCU.—*Lectiuni de Geometrie Analitica*. Editura Universitatii din Cluj., 2ª ed., 1937. Un vol. de 654 págs.

La reedición de este excelente texto del profesor rumano ha permitido perfeccionarlo en diversos puntos y agregar nueva materia de estudio presentada en forma de ejercicios, que aumenta en 36 págs. la extensión del volumen.

El método seguido es métrico y no proyectivo, usando coordenadas cartesianas oblicuas y con ellas aborda los acostumbrados problemas de Geometría lineal y cuadrática. Novedad digna de nota es el capítulo de 80 págs. sobre Geometría no euclidiana, en el cual da todos los elementos necesarios para abordar la bibliografía superior sobre el tema. También en forma de apéndice expone la Geometría analítica vectorial, y nos parece encomiable tal criterio, pues tan perjudicial para la formación de los alumnos es la omisión de este aspecto de la geometría analítica, como el uso exclusivo del método vectorial para, cuestiones de rectas y cónicas en que no ofrece ventajas apreciables, a expensas del método cartesiano, que es instrumento indispensable para todas las disciplinas matemáticas. Otra cosa sucede en la Geometría diferencial, en la cual ofrece ventajas el método vectorial y también el sintético, como lo ha desarrollado el mismo autor en su original curso de Geometría infinitesimal, del cual hicimos oportunamente el análisis, señalando sus características.

Es de lamentar que en lengua castellana no existan adecuados textos de Geometría analítica para introducción en esta disciplina y para uso de los cultivadores de ciencias aplicadas, pues los excelentes de Cámara y Vegas son más convenientes para los aficionados a la Matemática pura por su método proyectivo. El desconocimiento de la lengua rumana, que no puede salvarse por analogías y semejanzas a pesar de su estirpe latina, dificultará la difusión entre nuestros estudiantes del texto que comentamos.

J. R. P.

FORADORI (E.).—*Grundlagen der Teiltheorie*.—Un vol. de 80 págs.—Hirzel, Leipzig, 1937. Pr. RM. 4,80.

El autor se propone edificar una teoría básica de la Matemática, que en cierto modo vendría a reemplazar a la de Cantor. En la teoría de los conjuntos la idea primaria es la de elemento y de ella deriva la de conjunto, es decir: «agregado de»; en cambio, la idea primaria en la nueva teoría es la de «parte de». Esta relación:  $a \mu b$  que significa  $a$  es parte de  $b$  está definida implícitamente por los siguientes axiomas:

I)  $a \mu a$       II) Si  $a \mu b$  y  $b \mu c$  es  $a \mu c$ .

De estas dos simplicísimas propiedades idéntica y transitiva deduce multitud de consecuencias no triviales.

Parece prematuro conjeturar cuál sea el porvenir reservado a este intento de reedificación de la Matemática entera; pero en todo caso aun cuando resultaran vanas las esperanzas de destronar los métodos actuales parece asegurado un puesto a esta disciplina en el campo de la ciencia actual, al lado de las teorías abstractas muy generales, situadas a la entrada del edificio, que si no suministran materia de especulación, al menos organizan sistemáticamente las ideas ya existentes y forman molde para otras ideas futuras.

Permitase al relator apuntar que la idea capital no es nueva y los elementos lógicos del método se encuentran en los viejos textos logísticos aunque parece original la forma de su desarrollo. En unos apuntes mimeográficos de viejas lecciones anda expuesto un intento de teoría de los *conjuntos ordenados*, con el más amplio sentido dada a esta palabra, esto es, con la sola condición I y II. El conjunto de particiones de un todo sería un conjunto de tal naturaleza, y justamente era este el modesto objeto de tales apuntes para servir de prolegómenos a la teoría de la integración y a la teoría de límites de Moore-Smith; también un todo y sus partes forman un conjunto ordenado, puesto que satisfacen a los mismos axiomas I y II y la teoría de las partes de Foradori quedaría por tanto englobada en ella o más bien le sería equivalente; pero la trascendencia de tales propedéuticas no debe buscarse en sus principios, sino en sus aplicaciones finales y las obtenidas en la obra que comentamos, ni autorizan todavía a forjarse excesivas ilusiones, ni tampoco a negarle un posible éxito en el porvenir, después de nuevas aportaciones de diversos investigadores.

J. R. P.

SAUER (R.).—*Projektive Liniengeometrie*.—Un vol. de 194 págs. Göschens Lehrbücherei. Walter de Gruyter & Co. Leipzig 1937. Pr. Enc. R.M. 9.

No pretende agotar el tema, sino despertar interés hacia él, mediante selección de las propiedades más sugestivas e interesantes de la Geometría reglada, que sin exigir complicado mecanismo analítico ofrecen más pleno contenido geométrico. Contiene el estudio proyectivo de los diversos sistemas de rectas, con sugestivas figuras que llenan ampliamente su misión.

He aquí el sumario del contenido de los dos primeros capítulos: coordenadas de la recta, representaciones proyectivas, complejos lineales y sus invariantes, haces de rectas y superficies desarrollables, haces hiperbóli-

cos y parabólicos, haces autoproyectivos, haces de tercer orden, cuárticas autoproyectivas de cuarto orden.

El tercer capítulo trata de los *sistemas* de rectas, llamando así a los haces doblemente infinitos o congruencias rectas; estudia sus invariantes y clasificación, curvas y superficies focales, curvas principales, envolventes de las tangentes principales, congruencias parabólicas con sus curvas o superficies focales, etc., terminando con el estudio de las superficies de curvatura negativa, y en especial de las curvas de Darboux y de las curvas de Segre.

El capítulo IV está dedicado a las congruencias especiales y muy especialmente a las autoproyectivas, es decir, que se transforman en sí mismas por las transformaciones de un grupo de colineaciones, distinguiendo sucesivamente el tipo hiperbólico y el parabólico. Después de considerar otros tipos especiales de congruencias, dedica especial atención a las congruencias que designa por la letra *W*, que son las de Weingarten, y termina con el estudio del caso en que aparecen los ciclos de Laplace.

La deformación infinitesimal de superficies es el objeto del capítulo siguiente, analizando sus relaciones con las congruencias de Weingarten, y diversos tipos especiales, sin olvidar el estudio de las tensiones producidas por la deformación de las membranas elásticas.

Por último trata de los complejos de rectas o sistemas triplemente infinitos; contactos, invariantes, complejos tetraedrales, en especial de segundo orden o segunda clase, etc.

Intima conexión hay entre esta obra y la ya analizada anteriormente de Salkowski sobre Geometría diferencial afine de curvas y superficies, cuya lectura previa es muy conveniente para sacar de ésta el máximo provecho. Digna de nota es la especial atención dedicada a las aplicaciones físicas, que sorprende por tratarse de problemas netamente métricos, los cuales conducen sin embargo al campo proyectivo en que se desarrolla la obra, sin necesidad de los especiales recursos introducidos por Study (complejos y vectores duales) para abordar tales cuestiones métricas.

El libro es, por tanto, igualmente recomendable para profesores y matemáticos; como también para los técnicos a quienes, para poder usar legítimamente ese título, debe interesar la teoría de la elasticidad en todos sus aspectos.

R. P.

SOBRINO ARANDA, LUIS.—*Estructuras hiperestáticas de Hormigón Armado*.—Un vol. de 270 págs., Córdoba, 1937.

Bajo este título el Prof. D. Luis Sobrino Aranda ha publicado recientemente un trabajo que constituye una valiosa contribución al estudio de los sistemas de múltiple indeterminación estática.

La principal dificultad para el cálculo de estas estructuras consiste en la variabilidad del momento de inercia a lo largo de las distintas piezas constitutivas, lo que no permite llegar a fórmulas de cálculo directo. Sin embargo el autor encara el mencionado problema y llega a fórmulas generales que permiten, mediante sucesivas aproximaciones, conocer su solución con considerable ahorro de tiempo y trabajo.

La primera parte de la obra la constituye un estudio de las propiedades del hormigón armado y de las deformaciones angulares en general. En



segundo término figura su aplicación a las vigas hiperestáticamente sustentadas y en particular a la viga continua con y sin cartelas.

Por último un estudio de pórticos de forma variable y en distintas condiciones de sustentación, completa el trabajo que constituye un esfuerzo muy encomiable del autor, cuyo ejemplo deberían seguir los estudiosos del país.

E. J.

PIAZZOLLA-BELOCH, M.—*Elementi di Fotogrammetria terrestre ed aerea.*—

Un vol. de 86 págs. y IX tablas con 56 figuras. — Cedam, 1934, XII, Padua. Precio: Liras 20.

En este breve tratado, la profesora Piazzolla-Beloch se ocupa de los fundamentos geométricos de la Fotogrametría. Algunas nuevas construcciones, soluciones y simplificaciones dan al libro un particular interés, resultando útil no sólo a los estudiantes de ingeniería, sino también a quienes tengan las nociones fundamentales de la geometría descriptiva y proyectiva y se interesen por la Fotogrametría.

Se divide la obra en dos partes. En la primera se halla expuesto en un primer capítulo, como base de los fundamentos teóricos de la Fotogrametría y de todas las cuestiones de orientación recíproca de las perspectivas de un mismo objeto, el teorema de los puntos nodales (de Hauck) y la construcción fundamental, con la cual se deduce a partir de dos perspectivas dadas (fotografías), la proyección de una figura desde un determinado centro sobre un plano dado. Sigue la consideración de varios casos particulares. Una vez agotado el caso de las perspectivas orientadas, se pasa al estudio teórico de las perspectivas no orientadas. Un segundo capítulo, bajo el título de *criterios prácticos de Fotogrametría*, contiene la aplicación de los criterios generales a la Fotogrametría terrestre, en el cual se consideran varios casos particulares de restitución.

La segunda parte trata de la Fotogrametría aérea.

En un primer capítulo se halla expuesto el método de Finsterwalder de reconstrucción de un objeto del cual se tiene dos fotografías. Trata luego el problema de la restitución con procedimientos rigurosos y aproximados para teoremas planos y ondulados, en estos últimos con el uso de los reticulados de Möbius. Un tercer capítulo trata de la determinación de ángulos horizontales y verticales. Siguen luego ciertos métodos para la determinación de la orientación externa en levantamientos topográficos de terrenos planos o de terrenos cualesquiera (problema del vértice de pirámide) y se exponen construcciones gráficas tanto para el caso general (dados tres puntos del terreno) como para el caso particular en el cual se tengan dos puntos del terreno y una dirección. La autora demuestra que, en este último caso, el problema se reduce al 2º grado y es resoluble con regla y compás. Hay algunas construcciones para restituir las imágenes de los puntos fotografiados, después de haber restablecido la orientación externa.

El libro tiene un breve apéndice en el cual se recuerdan algunas propiedades y construcciones de geometría proyectiva útiles para la comprensión del texto, entre las cuales hay algunas modificadas oportunamente a los fines de las aplicaciones prácticas.

Cierran el volumen breves datos históricos y una prolija bibliografía.

V.

## MISCELANEA

---

### Los matemáticos ante el matrimonio

Cuando se casó Lagrange le escribió esta carta su colega D'Alembert: "Se me dice que ha hecho Vd. lo que los filósofos llamamos el salto peligroso. Pienso que un gran matemático debe saber calcular su felicidad, y que tal cálculo tuvo por solución el matrimonio".

Lagrange, que a la sazón contaba 31 años, contestó: "Agradezco vuestras felicitaciones; no sé si he calculado bien o mal, mejor dicho, creo no haber calculado nada, pues podría sucederme como a Leibnitz que a fuerza de reflexionar jamás pudo decidirse. Me pareció una cuestión con la que no valía la pena entretener vuestra atención."

### Compañerismo entre grandes matemáticos

Lagrange era profesor en la Escuela de Artillería de Turin, donde su situación era bastante precaria, pues no recibía más que 250 escudos de pensión. En aquella época escribió a D'Alembert: "En Turin se mira a mi ciencia como completamente inútil y ridícula, se echa de menos el dinero que se da a un geómetra."

D'Alembert, influyente en Berlin, busca la primera ocasión para procurar a Lagrange una situación más holgada, en una carta fechada el 6 de Marzo de 1766 le escribe: "Se dice que M. Euler se va a San Petersburgo por algunos malentendidos que tuvo en Berlin. Le he escrito para disuadirlo. Si él se va y Vd. quiere reemplazarlo, no tiene más que escribirme. Haré todo lo que esté de mi parte, y si el rey de Prusia me cree, M. Euler tendrá un sucesor digno de él."

El rey de Prusia creyó a D'Alembert y más tarde le decía: "A vuestros cuidados debo el haber reemplazado un geómetra tuerto por uno que tiene sus dos ojos."

El pobre Euler partió casi ciego y Lagrange lo reemplazó con una pensión de 1500 escudos.

### Simpatías y antipatías

El deseo de ser útil a los hombres de mérito era insaciable en D'Alembert. Después de ayudar a Lagrange recomendó a Foncenet, a Lambert y se interesó especialmente por Laplace.

Pero si D'Alembert supo ser amigo sincero, fué implacable con los que le inspiraron antipatía, tales como Daniel Bernoulli, Fontaine, Friri, Bosovich y Lalande.

Tanto Lagrange como D'Alembert fueron muy injustos con Daniel Bernoulli. El primero escribía: "He leído el trabajo de Daniel Bernoulli sobre los tubos de órgano; no hace más que desarrollar en largas frases lo que yo dije en pocas fórmulas algebraicas".

En otra ocasión escribía D'Alembert a Lagrange: "Vd. prometió darle en los nudillos a Daniel Bernoulli y hará bien en hacerlo."

Para ingresar como miembro de la Unión Matemática Argentina, es necesaria la presentación del solicitante por dos socios fundadores, la admisión por la Junta, y el pago de una cuota de \$ 5 m/n. mensuales.

La cuota a la REVISTA DE LA U. M. A., incluido el Suplemento, es de \$ 10 m/n. anuales, cuyo envío deberá efectuarse por cheque, giro u otro medio libre de gastos, a la orden de la Tesorera, señorita Clotilde Bula, Perú 222, Buenos Aires.

Los señores suscriptores, domiciliados en la Ciudad de Buenos Aires podrán, si lo prefieren, efectuar su pago en doce cuotas mensuales de \$ 1.00 m/n. cada una, que serán cobradas a domicilio.

Los trabajos originales enviados para su publicación en la REVISTA DE LA U. M. A., serán previamente analizados por un ponente, quien emitirá dictamen acerca de la novedad y corrección de sus resultados.

La impresión de las tiradas aparte, y las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

---

Abonnement annuel à l'étranger: 4.00 dollars (Etats-Unis).

Prière d'adresser toute la correspondance scientifique et administrative à l'adresse ci-dessous:

**Señor Secretario de la UNION MATEMATICA ARGENTINA**

**Prof. Fernando Gaspar**

**Perú 222, Buenos Aires (Rep. Argentina)**

## SUMARIO

|                                                                        |   |
|------------------------------------------------------------------------|---|
| CLOTILDE A. BULÁ, El problema de la interpolación en estadística ..... | 1 |
| Temas de Investigación .....                                           | 9 |

## BIBLIOGRAFIA

|                                                                                                                                                                             |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| M. FRECHET, Methode des Fonccions. Théorie des Evenements en Chaine dans le cas d'un nombre fini d'états possibles.—Paris, Gauthier Villars 1938. Un vol. de 316 págs. .... | 10 |
| GARCÍA, GODOFREDO, Lecciones de Mecánica Racional. Un vol. de 300 páginas. Lima 1938 .....                                                                                  | 10 |
| ABRAMESCU, Lectiuni de Geometrie Analitica. Editura Universitatii din Cluj., 2ª ed. 1937. Un vol. de 654 págs. ....                                                         | 12 |
| FORADORI (E), Grudlagen der Teittheorie. Un vol. de 80 págs.—Hirzel, Leipzig, 1937. Pr. RM. 4,80 .....                                                                      | 13 |
| SAUER (R.), Projektive Liniengeometrie. Un vol. de 194 págs.—Goschens Lehrbucherei. Walter de Gruyter & Co. Leipzig 19387. Pr. Enc. R.M. 9 .....                            | 13 |
| SOBRINO ARANDA LUIS, Estructuras hiperestáticas de Hormigón Armado. Un vol. de 2870 págs. Córdoba, 1937 .....                                                               | 14 |
| PIAZZOLLA-BELOCH (M), Elementi di Fotogrammetria terestre ed aerea., Un vol. de 86 págs. y IX tablas con 56 figuras. Cedam, 1934, XII Padua .....                           | 15 |

## MISCELÁNEA

|                                                                                                              |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Los Matemáticos ante el matrimonio. — Compañerismo entre grandes matemáticos. — Simpatías y antipatías ..... | 16 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|