Volumen II 1938-1939 Número 4

REVISTA

DE LA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

MIEMBROS FUNDADORES DE LA U. M. A.:

José Babini (Santa Fe). — Francisco Berdiales (Córdoba). — Juan Blaquier (Buenos Aires). — Clotilde Bula (Rosario). — Enrique Butty (Buenos Aires). — Carlos Dieulefait (Rosario). — Facultad de Química Industrial (Santa Fe). — Facultad de Ciencias Matemáticas (Rosario). — Fernando L. Gaspar (Rosario). — José Giannone (Rosario). — Alberto González Domínguez (Buenos Aires). — José González Galé (Buenos Aires). — Manuel Guitarte (Buenos Aires). — Walter S. Hill (Montevideo). — Ludovico Ivanissevich (Buenos Aires). — Carlos Isella (Rosario). — Francisco la Menza (Buenos Aires). — Hilario Magliano (La Plata). — Juan Olguín (Rosario). — Elba Raimondi (Buenos Aires). — Julio Rey Pastor (Buenos Aires). — José Sortheix (Tucumán). — Esteban Terradas (La Plata).

BUENOS AIRES
1938

JUNTA DIRECTIVA

PRESIDENTE	Prof. Ing. Manuel Guitarte
VICE PRESIDENTES	Prof. Dr. Julio Rey Pastor
	Prof. Ing. José Babini
SECRETARIO	Prof. Dr. Fernando L. Gaspar
PRO SECRETARIAS	Srta. Raquel Simonetti
	Srta. Esther Ferrari
TESORERA	Dra. Clotilde A. Bula
PRO TESORERA	Sra. Janny Frenkel
VOCALES	Prof. Ing. José Sortheix
	Prof. Ing. Cortés Plá
	Prof. Dr. Esteban Terradas
	Prof. Juan Olguín
	Sr. Alberto González Domínguez

DIRECTORES DE LA REVISTA DE LA U. M. A. Y DEL SUPLEMENTO

Prof. Dr. Julio Rey Pastor y Prof. Ing. José Babini.

DELEGADOS DE LA U. M. A.:

en Tucumán	Prof. Ing. José Sortheix
en Córdoba	Prof. Ing. Fernando Sánchez Sarmiento
en Santa Fe	Prof. Ing. José Babini
en Rosario	Prof. Dr. Fernando L. Gaspar
en Montevideo (R. O.)	Prof. Arq. Manuel Pereyra

SOBRE LAS SERIES DE FUNCIONES DE HERMITE (*)

por ALBERTO GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ

Llamaremos serie de Hermite a toda serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n (x), \tag{1}$$

siendo las $\psi_n (x)$ las funciones de Hermite:

$$\psi_n (x) = \frac{(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2}}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}} \tag{2}$$

Como es bien sabido, estas funciones constituyen un sistema ortonormal en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Llamaremos *desarrollo* de Hermite de una función $f(t)$, perteneciente a una cierta categoría, a toda serie de la forma (1), cuyos coeficientes a_n tengan la forma (**)

$$a_n = \int f(t) \psi_n (t) \, d\, t. \tag{3}$$

El desarrollo se llamará de Hermite-Stieltjes, si los coeficientes a_n vienen dados por las fórmulas

$$a_n = \int \psi_n (t) \, d\, \alpha (t), \tag{4}$$

siendo $\alpha (t)$ una función de variación acotada en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

(*) Este trabajo ha sido realizado en el Seminario de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, que dirige el Prof. Julio Rey Pastor, y es para nosotros un agradable deber expresarle aquí nuestro agradecimiento.

(**) Las integrales que no llevan indicación de extremo se entienden extendidas entre $-\infty$ y $+\infty$; y las sumatorias, de 0 a ∞.

Para las series de Hermite valen, como es bien sabido, los teoremas de *Parseval* y de *Riesz-Fischer*.

Teorema de Parseval.—Dada una función $f(x) \varepsilon L^2$, cuyos coeficientes vengan dados por las fórmulas (3), se verifica:

$$(4') \qquad \Sigma a_n^2 = \int \left[f(x) \right]^2 dx \ .$$

Teorema de Fischer-Riesz.—Dados números $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n \ldots\ldots$, tales que la serie Σa_n^2 sea convergente, existe una función $f(x)$, perteneciente a L^2, tal que se verifican las fórmulas (3).

La validez de los teoremas de Parseval y Riesz-Fischer, permite enunciar inmediatamente la siguiente proposición: Condición necesaria y suficiente para que una serie de Hermite sea un desarrollo de Hermite, de una función de L^2, es que los coeficientes cumplan la condición

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty .$$

El teorema anterior resuelve completamente, para las funciones de L^2, el problema de saber *cuándo un desarrollo es una serie*. En el presente trabajo abordamos el mismo problema para otras categorías de funciones: sumables, acotadas, de variación acotada, de variación acotada y contínuas, y monótonas no decrecientes acotadas. Damos, finalmente, una expresión del *salto* de una función, dada por su desarrollo de Hermite-Stieltjes.

Los resultados originales de este trabajo están constituídos por los teoremas 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7, la fórmula 10', y el teorema cuyas hipótesis son las fórmulas 46.

I.—Antepondremos algunos teoremas que utilizaremos a menudo en lo que sigue.

Teorema A[1].—Para $|t| < 1$ se verifica

$$(5) \qquad K(x,r,t) = \Sigma r^n \psi_n(x) \psi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-r^2)}} \exp\left\{ \frac{x^2-t^2}{2} - \frac{(x-rt)^2}{1-r^2} \right\}.$$

La función $K(x, t, r)$ es evidentemente simétrica respecto a x y a t; es además positiva, y goza de las propiedades siguientes, que hacen de ella un *núcleo positivo de una integral singular*.

$$(6) \qquad \int K(x,t,r)\,dt = \sqrt{\frac{2}{1+r^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{1-r^2}{1+r^2} x^2 \right) \to 1 \text{ para } r \to 1$$

(1) Ver Wiener, (1), pág. 64 y 65; ver también Watson, 1. Ver asimismo Titchmarsh, (1), pág. 28.

Análogamente

$$(7)\quad \int K(x,t,r)\,dx = \sqrt{\frac{2}{1+r^2}}\; exp\left(-\frac{1}{2}\;\frac{1-r^2}{1+r^2}\;t^2\right).$$

$$(8)\quad \lim_{r\to 1} K(x,t,r) = 0,$$

uniformemente para todo x y todo t tal que $|x-t| > \varepsilon$.

Se verifica también, para $r \to 1$;

$$(9)\quad \lim \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} K(x,t,r)\,dt = 0 \quad ,$$

$$(10)\quad \lim \int_{x+\varepsilon}^{\infty} K(x,t,r)\,dt = 0 \quad .$$

Sea $f(t)$ una funión perteneciente a L^1. Se verifica, para $r \to 1$,

$$(10')\quad \lim \int K(r,x,t)\,f(t)\,dt = f(x)$$

en todo punto en el que se verifique

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t) - f(x)|\,dt = 0.$$

Estos resultados nos serán muy útiles, sobre todo para la demostración del teorema 7.

Otro resultado que utilizaremos repetidamente en lo que sigue es el siguiente:

TEOREMA 1.—*Los coeficientes de una serie de Hermite o de Hermite-Stieltjes, tienden a cero para* $n\to\infty$.

La demostración es inmediata; tomemos el caso de una función de L^1:

$$(10'')\quad a_n = \int \psi_n(x)\,f(x)\,dx$$

Utilizando la conocida acotación

$$H_n(x) = O\left[e^{\frac{x^2}{2}}\sqrt{2^n n!}\,n^{-\frac{1}{4}}\right]$$

(2) Kogbetlianz, p. 153.

indicada en la Introducción (fórmula 7), obtenemos de (21)

$$(22) \qquad \int |\sigma(r, x)\, d\, x \leqq c \int |d\, \alpha(t), \qquad (0 \leqq r < 1),$$

con lo que queda demostrada la necesidad de la condición.

La condición es *suficiente*. Consideremos, en efecto, la función

$$(23) \qquad F(r, x) = \int_{-\infty}^{x} \sigma(r, x)\, d\, x \ .$$

Las funciones $F_r(x)$ son, en virtud de la hipótesis, de variación uniformemente acotada con respecto a r, y por lo tanto constituyen, en virtud de un conocido teorema de Helly [3], un conjunto *compacto*; es decir, que existe una sucesión parcial $F_{r_j}(x)$, tal que

$$(24) \qquad \lim_{j \to \infty} F_{r_j}(x) = g(x),$$

donde $g(x)$ es una función de variación acotada, y la igualdad se verifica en todos los *puntos de continuidad* de $g(x)$.

Consideremos ahora las integrales

$$(25) \qquad \int \psi_m(x)\, d\, F_{r_j}(x) \qquad [j = 1, 2, ...] \ .$$

Aplicando un clásico teorema de Helly [4] sobre paso al límite bajo el signo de integral, resulta

$$(26) \qquad \lim_{j \to \infty} \int \varphi_m(x)\, d\, F_{r_j}(x) = \int \psi_m(x)\, d\, g(x) \ .$$

Por otra parte

$$(27) \qquad \int \psi_m(x)\, d\, F_{r_j}(x) = \int \psi_m(x) \sigma_{r_j}(x)\, d\, x,$$

en virtud de (23), y la segunda integral es igual a

$$(28) \qquad \int \psi_m(x) \left[\Sigma\ a_n\, \psi_n(x)\, r_j{}^n \right] d\, x \ .$$

---

(3) Helly, 1.

(4) Helly, 1.

Demostraremos que es lícito integrar esta expresión término a término, es decir, que es exacta la igualdad

$$(29)\quad \int \psi_m(x)\left[\Sigma\, a_n\, \psi_n(x)\, r_j{}^n\right]dx = \Sigma\left[a_n r_j{}^n \int \psi_m(x)\psi_n(x)dx\right].$$

Para ello es condición suficiente, en virtud de un clásico teorema, que converja la serie de *módulos*, es decir, que se verifique

$$(30)\quad \Sigma\,(|\,a_n\,|\,r_j{}^n \int |\,\psi_m(x)\,|\,|\psi_n(x)\,|\,dx) < \infty.$$

Acotemos la integral que figura dentro del signo Σ.

Aplicando la acotación de Kogbetlianz [5], consignada en la introducción, o aun la menos precisa de Cramer [6]:

$$(31)\quad |\,H_n(x)\,| < K\sqrt{n!}\,2^{\frac{n}{2}} e^{\frac{x^2}{2}},$$

o lo que es lo mismo

$$(32)\quad |\,\psi_n(x)\,| < \frac{K}{\sqrt[4]{\pi}} \quad (K = 1{,}086435, \text{ ver Charlier } [7]),$$

resulta

$$(33)\quad \int |\,\psi_m(x)\,|\,|\,\psi_n(x)\,|\,dx < K\pi^{-\frac{1}{4}} \cdot \int |\,\psi_m(x)\,|\,dx = C.$$

En la segunda integral, m es fija, y la integral es por lo tanto convergente, dado que ψ_m es el producto de un polinomio por el factor $e^{-\frac{x^2}{2}}$

Resulta pues,

$$(34)\quad \Sigma\,(|\,a_n\,|\,r_j{}^n \int |\,\psi_m(x)\,|\,|\,\psi_n(x)\,|\,dx) < C\,\Sigma\,|\,a_n\,|\,r_j{}^n$$

Como por hipótesis los coeficientes $|\,a_n\,|$ tienden a cero, y $r_j < 1$, también por hipótesis, la serie de potencias del segundo miembro es convergente, y por lo tanto también es convergente la serie del primer miembro, con lo que queda demostrada nuestra aserción, y por consiguiente la exactitud de la fórmula (29). Volvamos a considerar esta misma fórmula. En el segundo miembro de la misma figura la integral

$$(35)\quad \int \psi_m(x)\,\psi_n(x)\,dx,$$

(5) Kogbetlianz, 1, p. 153.
(6) Cramer, 1. — Ver Charlier, pp. 52 y 57.
(7) Charlier, 1, pp. 52 y 57.

que, en virtud de la ortogonalidad y normalidad de las funciones de Hermite, es igual a *cero* para $m \neq n$, y a *uno* para $m = n$. La fórmula (29) nos da, pues

$$(36)\quad \int \psi_m(x)\,[\,\Sigma\, a_n \psi_n(x) r_j{}^n] = \Sigma\,(a_n r_j{}^n \int \psi_m(x)\psi_n(x)dx = a_m r_j{}^m.$$

Substituyendo este valor en la fórmula (26), obtendremos:

$$(37)\quad \lim_{j\to\infty} \int \psi_m(x)\,dF^{r}{}_{j}\ (x) = \lim_{j\to\infty} a_m r_j{}^m = a_m = \int \psi_m(x)\,dg(x),$$

$$(38)\quad a_m = \int \psi_m\,(x)\ d\ g\ (x),$$

con lo que queda demostrada la segunda parte de nuestro teorema.

TEOREMA 3.—*Condición necesaria y suficiente para que un desarrollo de Hermite cuyos coeficientes tienden a cero, sea la serie de Hermite-Stieltjes de una función monótona no decreciente y acotada en* $(-\infty, \infty)$, *es que se verifique*

$$(39)\quad \begin{aligned} &\sigma\,(r, x) \geqq 0 \qquad\qquad 0 \leqq r < 1, \\ &\int \sigma\,(r, x)\,|\,d\,x < M \quad [0 \leqq r < 1]\ . \end{aligned}$$

Este teorema es fácil corolario del anterior.

Las condiciones son necesarias. En efecto, si

$$(40)\quad \Sigma\, a_n\, \varphi_n\,(x)$$

es una serie de Hermite-Stieltjes de una función acotada no decreciente, se verifica

$$(41)\quad \sigma\,(r, x) = \int K\,(r, x, t)\ d\,\alpha\,(t)\ .$$

Siendo $K\,(r, x, t)$ *positivo*, y la función $\alpha\,(x)$ *no decreciente*, el integrando es positivo, y obtenemos

$$(42)\quad \sigma\,(r, x) \geqq 0.$$

La segunda condición se verifica también, en virtud del teorema anterior, pues $\alpha\,(x)$, monótona no decreciente, y acotada, es de variación acotada.

Las condiciones son suficientes. En efecto, todos los razona-

mientos que hemos hecho para demostrar el teorema anterior subsisten. Pero, en el caso actual, las funciones

$$F(r, x) = \int_{-\infty}^{x} \sigma(r, x)\, d\, x, \tag{43}$$

dado que el integrando es positivo, son, no sólo de variación uniformemente acotada, sino también *no decrecientes, y uniformemente acotadas*. La función límite $g(x)$, que en el teorema anterior resultaba de variación acotada, es en este caso *no decreciente y acotada*. Repitiendo todos los pasos del razonamiento anterior, se demuestra finalmente que

$$a_m = \int \psi_m(x)\, d\, g(x) \tag{44}$$

con $g(x)$ acotada no decreciente, con lo que queda demostrada la segunda parte del teorema.

TEOREMA 4.—*Condición necesaria y suficiente para que un desarrollo de Hermite cuyos coeficientes tienden a cero sea la serie de Hermite-Stieltjes de una función contínua de variación acotada,* es que se verifique

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \int |\sigma(r, x)|\, d\, x < M \qquad 0 \leq r < 1 \\ &\text{b)} \quad \lim \pi^{1/2} (1 - r^2)^{1/2}\, \sigma(r, x) = 0 \quad (r \to 1) \end{aligned} \tag{45}$$

Este teorema es fácil corolario del teorema (3). En efecto, la condición (a) nos dice que la serie dada es el desarrollo de Hermite-Stieltjes de una función de variación acotada. Veremos que la condición b, determina que esa función de variación acotada, es contínua. Para ello, nos valdremos del siguiente teorema, muy anólogo a un teorema de Khintchine [8].

Sea una función $S(x, r, t)$, que satisfaga a las condiciones

$$\begin{aligned} &1) \quad |S(x, r, t)| < M \\ &2) \quad \lim_{r \to 1} S(x, r, t) = 0, \text{ para todo } x \text{ tal que } |x - t| > \delta \\ &3) \quad \lim_{r \to 1} S(x, r, t) = 1 \quad \text{para} \quad x = t. \end{aligned} \tag{46}$$

(8) Khintchine, 1.

Se verificará, entonces, para $r \to 1$:

$$lim \int S(r, x, t)\, d\alpha(t) = \alpha(x + 0) - \alpha(x - 0)$$

siendo $\alpha(t)$ de variación acotada en $(-\infty, \infty)$.

Comprobemos que la expresión

$$(47) \qquad \pi^{1/2} (1 - r^2)^{1/2} K(r, x, t)$$

satisface a las condiciones del teorema anterior.

La condición 1) se satisface evidentemente, en virtud de la fórmula (5). También está satisfecha la condición 2), pues pues

$$(48) \qquad \pi^{1/2}(1-r^2)^{1/2} K(r,x,t) = exp\left(\frac{x^2 - t^2}{2} - \frac{(x - r\,t)^2}{1-r^2}\right)$$

Para $|x - t| > \delta$, el exponente tiende a $-\infty$, para $r \to 1$, y por lo tanto,

$$(49) \qquad \lim_{r \to 1} \pi^{1/2} (1 - r^2)^{1/2} K(r, x, t) = 0, \text{ para } |x - t| > \delta.$$

Para $x = t$, la expresión (48) se reduce a

$$(50) \qquad \pi^{1/2} (1 - r^2)^{1/2} K(r, x, x) = exp\left(-\frac{x^2 (1 - r)^2}{1 - r^2}\right) =$$

$$= exp\left(-\frac{x^2 (1 - r)(1 - r)}{(1 - r)(1 + r)}\right) \to 1.$$

Se verificará, pues, en virtud del teorema recién enunciado:

$$(51) \quad lim\, \pi^{1/2} (1-r^2)^{1/2} \int K(r,x,t)\, d\alpha(t) = \lim_{r \to 1} \pi^{1/2} (1-r^2)^{1/2} \sigma(r,x) =$$

$$= \alpha(x + 0) - \alpha(x - 0).$$

Si en todo punto x se verifica que $\alpha(x + 0) - \alpha(x - 0) = 0$, quiere decir que la función $\alpha(x)$ es *continua*, ya que su salto es nulo para todo x.

La validez de la condición a) de 45, nos aseguraba que la función $\alpha(t)$ es de variación acotada. Acabamos de ver que el verificarse de la condición b), de (45), es necesario y suficiente

para que la función $\alpha\ (t)$, de variación acotada, sea continua. El teorema 5 queda así completamente demostrado.

TEOREMA 5.—*Condición necesaria y suficiente para que una serie de Hermite cuyos coeficientes tienden a cero, sea el desarrollo de Hermite de una función de* L^{p}, $(p \geqq 2)$, *es que se verifique*

$$\int |\sigma\ (r, x)|^{p} d\,x < M \quad (0 \leqq r < 1) \tag{52}$$

La condición es necesaria. En efecto, si la serie

$$\Sigma\, a_n\, \psi_n\ (x) \tag{53}$$

es el desarrollo de Hermite de una función $f\ (t)\ \varepsilon\ L^{p}$, se verificará:

$$a_n = \int \psi_n\ (t)\ f\ (t)\ d\,t\ , \tag{54}$$

$$\sigma\ (r, x) = \int K\ (r, x, t)\ f\ (t)\ d\,t \tag{55}$$

siendo $K\ (r, x, t)$ el varias veces mencionado núcleo de Hermite.

Aplicando la clásica desigualdad de Hölder a la fórmula (55), obtenemos:

$$|\sigma(r, x)| \leqq \left[\int |K\ (r, x, t)|\ |f(t)|^{p} d\,t\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int K(r, x, t) dt\right]^{\frac{1}{p'}}, \tag{56}$$

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)\ .$$

Elevemos ambos miembros a la potencia p e integremos:

$$\int |\sigma(r, x)|^{p} d\,x \leqq \int d\,x \left[\left\{\int K(r, x, t)|\, f(t)\,|^{p} d\,t\right\} \times \left\{\int K(r, x, t)\ d\,t\right\}^{\frac{p}{p'}}\right]\ . \tag{57}$$

Pero

$$\left(\int K\ (r, x, t)\ d\,t\right)^{\frac{p}{p'}} < A^{\frac{p}{p'}} \quad (0 \leqq r < 1)\ , \tag{58}$$

en virtud de la fórmula (10) varias veces citada de la introducción. De (57) y (58) deducimos

$$\int |\sigma\ (r, x)|\ d\,x \leqq A^{p/p'} \int d\,x \int K\ (r, x, t)\ |\, f\ (t)\,|^{p} d\,t \tag{59}$$

La integral doble del segundo miembro (de integrando positivo), cumple las condiciones del clásico teorema de Fubini, y por

lo tanto es lícito invertir el orden de integración, con lo que obtenemos:

$$(60) \qquad \int dx \int K(r,x,t)|f(t)|^P dt = \int |f(t)|^P dt \int K(r,x,t)dx \leqq$$

$$(61) \qquad \leqq A \int |f(t)|^P dt.$$

Substituyendo este resultado en la fórmula (59), obtenemos en definitiva:

$$(61) \qquad \int |\sigma(r,x,t)|^P dx \leqq A^{\left(\frac{P}{P'}+1\right)} \int |f(t)|^P dt = BA^{\frac{P}{P'}+1} = M,$$

con lo que queda demostrada la primera parte del teorema.

La condición es *suficiente*. Supongamos, en efecto, que se cumpla la hipótesis, esto es

$$(62) \qquad \int |\sigma(r,x)|^P dx < M \qquad (0 \leqq r < 1).$$

Entonces, en virtud de un clásico teorema de Riesz [9], el conjunto de funciones $\sigma_r(x)$ contiene una sucesión parcial débilmente convergente $\sigma(r_j, x)$; es decir, tal que para toda función $g(t) \in L^{P'}$ $\left(1/_P + 1/_{P'} = 1\right)$, se verifica:

$$(63) \qquad \lim_{j\to\infty} \int \sigma(r_j,x)\, g(t)\, dt = \int f(t)\, g(t)\, dt,$$

siendo $f(t)$ una función de L^P. Ahora bien, las funciones $\psi_n(x)$ son acotadas e integrables en $(-\infty, \infty)$, y por lo tanto pertenecen a la categoría L^P, cualquiera que sea $p \geqq 1$. Por lo tanto

$$(64) \qquad \lim_{j\to\infty} \int \psi_m(x)\sigma(r_j,x)dx = \int \psi_m(x)f(x)dx$$

Una vez en posesión de este resultado, el resto es fácil. En efecto, sólo queda por demostrar que la integral del primer miembro de la igualdad anterior es igual a $a_m r_j^m$. Pero los razonamientos que hemos hecho para demostrar idéntico resultado en el teorema (3), siguen siendo válidos sin modificación alguna en el caso actual. Nos queda, pues

$$(65) \qquad \lim_{j\to\infty} \int \psi_m(x)\, \sigma(r_j, x)\, dx = \lim_{j\to\infty} a_m r_j^m = a_m =$$

$$= \int \psi_m(x)\, f(x)\, dx$$

con lo que queda demostrada la 2ª parte del teorema.

(9) Riesz, 1.

TEOREMA 6.—*Condición necesaria y suficiente para que una serie de Hermite*

$$a_n \Sigma \psi_n (x) \tag{66}$$

cuyos coeficientes tienden a cero, sea el desarrollo de Hermite de una función acotada e integrable en $(-\infty, \infty)$, *es que se verifique*

$$| \sigma (r, x) | < M \qquad 0 \leqq r < 1 \tag{67}$$

La condición es necesaria. En efecto, razonando como en los teoremas anteriores, resulta que si el desarrollo (66) es la serie de Hermite de una función acotada, se verifica

$$\sigma (r, x) = \int K (r, x, t) f (t) d t \tag{68}$$

Ahora bien, como por hipótesis, $| f (t) < K_1$, se verificará

$$| \sigma (r, x) | < M \int K (r, x, t) d t < M \ A , \tag{69}$$

en virtud de la propiedad fundamental del núcleo de Hermite, que tantas veces hemos utilizado. La necesidad de la condición queda así demostrada.

La condición es *suficiente*. El razonamiento es idéntico que en los teoremas anteriores. En el caso actual, la hipótesis

$$| \sigma (r, x) | < M, \tag{70}$$

nos permite asegurar, en virtud de otro conocido teorema de Riesz [10], que el conjunto de funciones $\sigma_r (x)$ contiene una sucesión parcial débilmente convergente.

Una vez asegurado este punto fundamental de la demostración, la parte restante es idéntica a la de los teoremas anteriores.

TEOREMA 7.—*Condición necesaria y suficiente para que una serie de Hermite,*

$$\Sigma a_n \psi_n (x) \tag{71}$$

cuyos coeficientes tienden a cero, sea el desarrollo de Hermite de una función sumable, es que se verifique para $r \to 1$, $\varrho \to 1$:

$$lim \int | \sigma (r, x) - \sigma (\varrho, x) | d x = 0 \tag{72}$$

(10) Riesz, 1.

La condición es suficiente. En efecto, si la hipótesis se verifica, existe, en virtud del teorema fundamental sobre convergencia en promedio, debido a Riesz [12], una función $g(x)$ tal que para $j \to \infty$:

$$\lim \int | \sigma(r_j, x) - f(x) | \, dx = 0. \tag{73}$$

Pero, según es bien sabido, la convergencia fuerte lleva aparejada la convergencia débil [11]; por lo tanto se verificará para $j \to \infty$:

$$\lim \int g(x) \, \sigma(r_j, x) = \int g(x) \, f(x) \, dx \tag{74}$$

para toda función $g(x)$ sumable acotada, y, en particular

$$\lim_{j \to \infty} \int \psi_m(x) \, \sigma(r_j, x) \, dx = \int \psi_m(x) \, f(x) \, dx. \tag{75}$$

La demostración de la suficiencia sigue ahora idénticamente que en casos anteriores.

La condición es necesaria. En efecto, si la serie

$$\Sigma \, a_n \, \psi_n(x) \tag{76}$$

es el desarrollo de Hermite de una función sumable, se verifica

$$\sigma(r, x) = \int K(r, x, t) \, f(t) \, dt. \tag{77}$$

Recordando las propiedades 6, 7, 9, 10, y 10' del núcleo $K(x, t, r,)$, consignadas en la introducción, se comprueba que el mismo satisface a todas las condiciones del siguiente teorema de Hahn [12].

Sea $\varphi(\xi, x, n)$ medible en todo el plano ξ, x, para todo n. Sea $\varphi(\xi, x, n)$ integrable con respecto a ξ, en $(-\infty, \infty)$, para todo x, con excepción cuando más de un conjunto de medida nula; igualmente sea integrable con respecto a x en $(-\infty, \infty)$, para todo ξ, con excepción cuando más de un conjunto de medida nula; además satisfaga $\varphi(\xi, x, n)$ a las siguientes condiciones:

1) Existe un M tal que, para casi todo x y todo n, se verifica

$$\int | \varphi(\xi, x, n) | \, d\xi < M;$$

(11) Riesz, 1.

(12) Hahn, 1, pág. 667.

2) Existe un M tal que, para casi todo ξ y todo n se verifica

$$\int | \varphi (\xi, x, n) | \, d x < M ;$$

3) $$f (x) = lim \int \varphi (\xi, x, n) \, f (\xi) \, d \xi$$

para $n \to \infty$, en todo punto donde se verifique para $h \to 0$:

$$lim \frac{1}{h} \int_0^h | f (x + t) - f (x) | \, d t = 0.$$

4) Para todo $h > 0$ y todo ξ se verifica

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\xi - h} | \varphi (\xi, x, n) | \, d x = 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\xi + h}^{\infty} | \varphi (\xi, x, n) | \, d x = 0.$$

Entonces se verifica, para toda función $f (x)$ sumable en $(-\infty, \infty)$, la relación

$$\lim_{n \to \infty} \int | f (x) - \int \varphi (\xi, x, n) \, f (\xi) \, d \xi | \, d x = 0.$$

Del anterior teorema de Hahn, aplicado a nuestro caso, se deduce:

(78) $$\lim_{r \to 1} \int | f (x) - \sigma (r, x) | \, d x = 0.$$

es decir, que la función $\sigma (r, x)$ converge en promedio de primer orden, hacia $f (x)$. En virtud del teorema fundamental sobre convergencia en promedio, se verificará también, en virtud de la relación anterior:

(79) $$lim \int | \sigma (\varrho, x) - \sigma (r, x) | \, d x = 0$$

para $r \to 1$, $\varrho \to 1$.

Nuestro teorema queda así finalmente demostrado.

SEMINARIO DE MATEMÁTICAS
(Original recibido en Abril de 1938)

BIBLIOGRAFIA

1) *Charlier C. V. L.*—Les aplications de la théorie des probabilités aux sciences mathématiques et aux sciences physiques; application de la théorie des probabilités á l'astronomie. - Paris, 1930; pp. 52 y 57.

2) *Cramer H.*—Valeurs Maxima des Polynomes d'Hermite. (Ver Charlier, pp. 50-53).

3) *Hahn H.*—Über die Darstellung gegebener Funktionen durch singuläre Integrale. Denkschriften der Kais. Akad. der Wissenschaften, Math. Naturwissenchaftliche Klasse. Tomo 93. - Viena, 1916.

4) *Helly E.*—Über lineare Funktionaloperationen. Wiener Berichte, 121, (1912), pp. 265-297.

5) *Khintchine A.*—The Method of sepectral reduction in classical dynamics. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 19, pp. 567-573, (1933).

6) *Kogbetlianz E.*—Recherches sur la sommabilité des series d'Hermite. Annales de l'École Normale Supérieure, 49, (1932), pp. 136-221.

7) *Riesz F.*—Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen. Math. Ann. 69, (1910), pp. 449-497.

8) *Titchmarsh, E. C.*—Introduction to the Theory of Fourier integrals.—Oxford, 1937.

9) *Watson, G. N.*—Notes on generating functions of polynomials. II, Hermite polynomials. - Journal of the London Math. Soc., 8, 194-199, (1933).

10) *Wiener, N.*—The Fourier Integral and some of its applications. - Cambridge, 1933.

REMARQUES ARITHMETIQUES SUS UNE EQUATION DIFFERENTIELLE DU PREMIER ORDRE

por MICHEL PETROVICH (BEOGRAD)

1. L'objet de la présente Note est l'équation différentielle du premier ordre

$$(1) \qquad y' = f(x, y)$$

ou f est polynome en x, y à coefficients nombres entiers (positifs ou négatifs).

Considerons le point M_k sur l'axe des y, ayant pour l'ordonnée un nombre entier k (positif ou négatif).

L'intégrale y *de* (1), *passant par un point* M_k, *est développable en série convergente au voisinage de* $x=0$:

$$(2) \qquad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots ,$$

dont le coefficient de x^n *est multiple entier du coefficient de* x^n *dans le développement taylorien de* e^x ; *le rapport de ces deux coefficients est un entier ne croissant pas, en valeur absolue, plus vite que* n^n.

En effet, le second membre de (1) étant holomorphe au voisinage de $x = 0$, $y = k$, l'intégrale y passant par le point M_k est développable en série (2) ou $a_0 = k$ et

$$(3) \qquad a_n = \frac{1}{n!}[f_{n-1}]$$

les f_i étant les termes de la suite indéfinie de fonctions de x, y

$$(4) \qquad f_1, f_2, f_3, \dots$$

définies par la relation de recurrence

$$(5) \qquad f_i = \frac{\partial f_{i-1}}{\partial x} + f \frac{\partial y}{\partial f_{i-1}}$$

avec

$$f_0 = f(x, y) \qquad\qquad i = 1, 2, 3, \dots$$

où, d'une manière générale, $[\varphi(x, y)]$ désigne le nombre obtenu en faisant $x = 0$, $y = k$, dans $\varphi(x, y)$.

Les fonctions (4) défines de cette manière sont des polynomes en x, y à coefficients nombres entiers. Les nombres (f_i) sont des entiers, de sorte que

$$(6) \qquad A_n = \frac{\mu_n}{n!} .$$

D'autre part, le rayon de convergence de la série (2) étant différent de zéro, la lim. sup. de $\sqrt[n]{|a_n|}$ pour n augmentant indéfiniment est finie, ce qui montre que $\sqrt[n]{|\mu_n|}$, n'augmente pas plus vite que $\sqrt[n]{n!}$ c'est à dire que n. Il s'en suit que la valeur absolue de μ_n n'augmente pas plus vite que n^n, comme il fallait montrer.

La formule (6) met également en évidence le fait suivant:

Réduit à sa plus simple expression, le coefficient taylorien a_n *de l'intégrale y est un nombre rationnel dont le dénominateur n'a pour diviseur aucun nombre premier supérieur à* n.

Une série taylorienne, dont un ou plusieurs coefficients sont des nombres irrationnels, ou bien rationnels, mais dont le dénominateur est divisible par un nombre premier supérieur au rang du coefficient, ne peut, pour aucune équation différentielle (1), représenter le courbe intégrale passant par un point M_k.

On peut aussi remarquer que *dans le cas ou* y *est une fonction entière de* x, l'entier μ_n ou bien n'augmente pas, où bien augmente moins vite que n^n. Car dans ce cas $\sqrt[n]{|a_n|}$ tend vers zèro lorsque x augmente indéfiniment.

2. Envisageons le cas où l'intégrale y est fonction *algébrique* de x. L'entier μ_n jouit alors de la propriété arithmétique suivante:

Il existe un nombre entier fixe λ *rattaché à l'équation* (1), *tel que l'entier* μ_n *sera divisible par le produit de tous les entiers ne surpassant pas* n *et ne coincidant avec une puissance d'aucun diviseur premier de* λ.

Pour le faire voir, rappellons que, y étant fonction algébrique à coefficients a_n commensurables, il existe un entier fixe λ (l'entier d'Eisenstein) tel que le produit

$$(7) \qquad a_n \lambda^n = \frac{\mu_n \lambda^n}{n!}$$

soit un nombre entier pour tout indice $n = 1, 2, 3 \ldots$

Or, λ^n n'est jamais divisible par $n!$, car dans cette factorielle il y a toujours au moins un facteur nombre premier qui n'y entre qu' une seule fois, tandis que dans λ^n il figurerait n fois. Mais λ^n peut avoir des diviseurs communs avec $n!$ La fraction (7) devant se réduire à un nombre entier, μ_n doit être divisible par le produit de tous les entiers figurant comme facteurs dans $n!$, après y avoir suprimé ces diviseurs communs, ce qui démontre l'assertion précédente.

Le théorème d'Eisenstein conduit également à la conclusion suivante:

Le coefficient de x^n *de l'intégrale* y, *pour* $n = 1, 2, 3 \ldots$ *est multiple entier du coefficient de* x^n *dans le développement de la fonction*

$$\frac{x}{\alpha - x}$$

α étant un entier convenablement déterminé; le rapport de ces deux coefficients est un entier ne croissant pas, en valeur absolue, plus vite que la n*-ième puissance d'un nombre fixe.*

Car le produit $a_n \lambda^n$ étant un nombre entier h_n on a

$$a_n = \frac{\lambda^n}{h_n}$$

h_n étant le coefficient de x^n de la fonction $\frac{x}{\lambda - x}$. D'autre part, le rayon de convergence de y au voisinage de $x = 0$ étant différent de zèro, l'expression

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\lambda} \sqrt[n]{|h_n|}$$

et par suite aussi la lim. sup de $\sqrt[n]{|h_n|}$ est finie, ce qui montre que h_n ne croit pas, en valeur absolue, plus vite que la n-ième puissance d'un nombre fixe.

On en conclut, d'après un théorème que j'ai démontré dans un travail antérieur [1] que *l'intégrale* y *appartient à la classe de fonctions qui se laisse déterminer sans ambiguité par la seule valeur numérique d'une certaine intégrale définie rattachée à la fonction, la valeur de cette intégrale étant un nombre absolu.*

3. Considérons maintenant la valeur inverse $\frac{1}{y}$ de l'intégrale y de l'équation (1), passant par un point M_k. En posant

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

$$\frac{1}{y} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$$

on a la suite connue de relations déterminant les b_n au moyen des a_n.

Pour le point M_1 le coefficient a_0 est égal à 1 et l'on a

(1) M. Petrovitch: *Théoréme sur les fonctions algébriques a coefficients tayloriens commensurables* (Revue mathématique de l'union interbalcanique t. I. fasc. 1, 1936.)

$$b_0 = 1$$

$$b_1 = -a_1$$

$$b_2 = -a_2 + a_1^2$$

$$(8)\quad b_3 = -a_3 + 2\,a_2\,a_1 - a_1^3$$

$$b_4 = -a_4 + 2\,a_3\,a_1 + a_2^2 - 3\,a_2\,a_1^2 + a_1^4$$

$$b_5 = -a_5 + 2\,a_4\,a_1 + 2\,a_3\,a_2 - 3\,a_3\,a_1^2 - 3\,a_2^2\,a_1 + 4\,a_2\,a_1^3 - a_1^5$$

où l'on a les lois suivantes de formation:

1º b_n se compose de tous les termes de poids n que l'on peut former avec les a_i jusqu'à a_n inclusivement;

2º ces termes sont positifs ou négatifs selon que le nombre de leurs facteurs est pair ou impair;

3º le coefficient de chaque terme est le coefficient polynomial que ce terme aurait en égard au nombre des facteurs qu'il contient et à leurs exposants.

Pour un point quelconque M_k on ramène le cas à celui du point M_1 en remplaçant a_n par $\frac{a_n}{k}$ et divisant par $a_0 = k$ le resultat obtenu. Donc:

Le premier coefficient b_0 étant égal à $\frac{1}{K}$, le coefficient b_n s'obtient en formant la même expression pour ce coefficient que dans le cas du point M_1, en la rendant de degré n à l'aide du facteur $a_0 = k$ et en la divisant ensuite par $a_0^{n+1} = k^{n+1}$. Par exemple on aura

$$b_5 = \frac{1}{K^6}(-a_5k^4 + 2a_4a_1k^3 + 2a_3a_2k^3 - 3a_3a_1^2k^2 - 3a_2^2a_1k^2 + 4a_2a_1^3k - a_1^5)$$

Si l'on y remplace a_i par son expression (6), on obtient le coefficient b_n sous la forme d'une fraction rationnelle dont le dénominateur est le produit de k^{n+1} par diverses factorielles

$$1!, 2!, 3!, \ldots n!$$

ayant comme exposants des nombres entiers ne surpassant pas n. Il s'en suit que:

Réduit à sa plus simple expression, le coefficient de x^n *de l'inverse* $\frac{1}{y}$ *de l'intégrale* y *de* (1), *passant par un point* M_k, *est un nombre rationnel dont le dénominateur n'a pour diviseur aucun nombre premier plus grand que* n *ne coincidant pas avec un diviseur de* k.

Ou voit également que le dénominateur de chaque terme composant b_n, avant la réduction de la fraction rationnelle à sa plus simple expression, est le produit de puissances de diverses factorielles

$$i!, j!, h!, \ldots$$

des entiers $i, j, h, \ldots$ égaux aux indices des a_k dont provient ce terme, chacune de ces factorielles figurant avec un exposant égal à celui de a_k correspondant. De plus,

1º la puissance d'une factorielle étant comptée comme facteur autant de fois que l'indique son exposant, le nombre de ces facteurs est égal à n;

2º la somme $i + j + k + \ldots$ d'entiers dont les factorielles figurent dans ce dénominateur est également égale à n.

Il s'en suit qu'une factorielle $m!$ ne peut figurer au dénominateur de b_n plus de fois qu'il y a d'unités dans la partie entière du nombre $\frac{n}{m}$. Ceci permet d'assigner une limite supérieure au nombre indiquant combien de fois un nombre premier peut figurer comme diviseur dans ce dénominateur.

Je terminerai en faisant remarquer que l'équation de Riccati (avec ses dégénérescences) est la seule équation (1) qui par le changement $y = \frac{1}{z}$ se transforme en une équation (1). Pour l'intégrale y d'une telle équation, passant par le point M_1, le coefficient de x^n du développement non seulement de l'intégrale elle-même, mais aussi du celui de son inverse $\frac{1}{y}$, est un nombre rationnel dont le dénominateur, réduit à sa plus simple expression, n'a pour diviseur aucun nombre premier supérieur à n; son numérateur est un entier qui ne croit pas plus vite que n^n. On en tire aussi des conclusions analogues aux précedentes pour le cas des intégrales algébriques d'une telle équation différentielle.

Beograd, Université, 25. dec. 1937.

(Original recibido en Enero de 1938).

SOBRE LOS PUNTOS SINGULARES DE LAS FUNCIONES ANALITICAS (*)

por CARLOS BIGGERI (Buenos Aires)

El teorema demostrado en mi nota "Sobre los puntos singulares de las funciones analíticas" (R. U. M. A.; Nº 1, Vol. 1 pág. 5) se puede generalizar a las funciones analíticas definidas por series generales de Dirichlet, a saber: $\Sigma\, a_n\, e^{-\lambda_n}$

Teorema I. *Si se verifican las condiciones siguientes:*

1º) *La parte real del coeficiente* a_n *de la serie de Dirichlet no es negativa (desde un valor de* n *en adelante)*;

2º) *El valor principal* φ_n *del argumento de* a_n *(para los valores de* n *tales que* a_n *no es nulo, es tal que* $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\cos \varphi_n} = 1$,

entonces, el punto real de la recta de convergencia de la serie es singular para la función analítica que define dicha serie.

Este teorema generaliza los teoremas de Fekete (C. R. t. 150, 1910 y t. 151, 1910) y de Landau (Math. Ann., t. 61, 1905).

La condición [2] es susceptible de una pequeña ampliación.

El lema enunciado en mi nota anterior puede servir para generalizar algunos teoremas ya clásicos. Una generalización interesante es la que hemos logrado del teorema enunciado por Lecornu (C. R., t. 104, 1887, p. 349-352) y demostrado por Fabry (Annales scientifiques de l'Ecole Normale Superieure, 3.e série, t. XIII, 1896). En efecto: si llamamos ϱ_n y φ_n al módulo y al argumento, respectivamente, del coeficiente a_n de la serie: $\Sigma\, a_n . z^n$ y R al radio de convergencia de dicha serie, el teorema de Lecornu-Fabry asegura que si se verifica:

a). *existe límite ordinario, para* $n \to \infty$, del cociente $\varrho_n / \varrho_{n+1}$.

b). *existe límite ordinario, para* $n \to \infty$, *de la diferencia* $\varphi_n - \varphi_{n+1}$; *entonces el punto* $z = R$ *es singular para* $f(z)$.

Ahora bien, mediante el lema hemos conseguido ver que:

Teorema II. *Para la validez de la conclusión del teorema de Lecornu-Fabry, no es necesaria la hipótesis* a), *es suficiente* b).

Estos dos teoremas así como la generalización del II a las series de Dirichlet, los demostraremos en notas próximas.

(*) Algunas observaciones críticas sobre esta nota y la anterior del mismo autor aparecerán en otro número. (N. de la Red.).

SOBRE LA INVERSION DE INTEGRALES DE LAPLACE ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES

por A. González Domínguez

Sean las integrales de Laplace y de Laplace-Stieltjes respectivamente:

$$(1) \quad F(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f(t)\, dt \qquad (f(t) \in L^p,\ 1 \leqq p < \infty),$$

$$(2) \quad F(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\, d\alpha(t) \qquad \left(\int_0^\infty |\, d\alpha(t)\,| < \infty\right),$$

y consideremos la función

$$(3) \qquad g(r, x) = \sum a_n \varphi_n(x)\, r^n,$$

en la cual $\varphi_n(x)$ es la función de Laguerre de orden n, y a_n tiene el valor:

$$a_n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{k}{n} {}^1/_{k!}\, D^k F(1/2)\,.$$

En esta nota enunciamos algunos teoremas acerca de las integrales (1), y (2), cuya demostración daremos en un trabajo de próxima publicación.

Teorema 1.—Dada una integral de Laplace (1), con $f(t)$ sumable, se verifica, para $r \to 1$:

$$\lim g(r, x) = f(x),$$

$$\lim g'(r, x) = f'(x)$$

en casi todos los puntos de $(0, \infty)$.

Teorema 2.—En las mismas hipótesis del teorema anterior se verifica, para $r \to 1$:

$$\lim \int_0^\infty |\, g(r, x) - f(x)\,|\, dx = 0,$$

de lo cual se deduce inmediatamente, en virtud de una propiedad conocida de la convergencia en promedio:

$$\lim \int g\,(r, x)\,d\,x = \int_0^x f\,(x)\,d\,x,$$

$$\lim \int_0 |\,g\,(r, x)\,d\,x = \int |\,f\,(x)\,|\,d\,x.$$

Teorema 3.—Dada una integral de Laplace (1), con $f\,(t)$ perteneciente a la categoría $\overset{p}{L}$, $(1 < p < \infty)$, se verifica para $r \to 1$:

$$\lim \int_0^\infty |\,g\,(r, x) - f\,(x)\,|\,d\,x = 0.$$

Los teoremas siguientes se refieren a integrales de Laplace-Stieltjes de la forma (2), con $\alpha\,(t)$ de variación acotada en $(0, \infty)$, y tal que $\alpha\,(0) = 0$, $\alpha\,(t) = \frac{1}{2}\,(\alpha\,(t + 0) + \alpha\,(t - 0))$.

Teorema 4.—Para $r \to 1$ se verifica

$$\lim \int_0^x g\,(r, t)\,d\,t = \alpha\,(x)$$

Teorema 5.—Para $r \to 1$ se verifica

$$\lim\, g\,(r, x) = \alpha'\,(x)$$

en casi todos los puntos del intervalo $(0, \infty)$.

Teorema 6.—Para $r \to 1$ se verifica:

$$\lim \int_0^\infty |\,g\,(r, x)\,|\,d\,x = \int |\,d\,\alpha\,(t)\,|.$$

Teorema 7.—Para $r \to 1$ se verifica

$$\lim\, 2\,(\pi\,x)^{\frac{1}{2}}\,(1 - r)^{\frac{1}{2}}\,g\,(r, x) = \alpha\,(x + 0) - \alpha\,(x - 0).$$

Expondremos en pocas palabras el método que nos ha conducido a estos resultados, y su relación con las fórmulas de inversión conocidas. La mayoría de éstas se han establecido formando, a partir de la determinante, una integral singular en la que aparece, dentro del signo integral, precisamente la función generatriz incógnita. Esta se obtiene entonces como límite de esta integral singular. Así, la fórmula de inversión de Riemann

(o de Mellin), expresa la función generatriz como límite de una integral singular de Dirichlet, y Widder llega, por derivaciones sucesivas de la determinante, a una integral singular de núcleo positivo; lo cual le permite, no sólo obtener las fórmulas de inversión más generales conocidas hasta la fecha, sino también "clasificar" las funciones determinantes, esto es, formular condiciones características para que una función sea determinante con generatriz perteneciente a una categoría dada.

Nuestro método ha consistido en formar, por medio de una combinación lineal de las derivadas sucesivas de la determinante en el punto $\frac{1}{2}$, una integral singular que no es otra que la resultante de aplicar el método de sumación de Abel-Poisson a la serie de Laguerre de la función generatriz. El estudio sistemático del núcleo de esta integral singular nos ha permitido comprobar que le son aplicables muchos de los teoremas generales de Lebesgue y de Hahn y otros nuevos, y así hemos podido establecer los teoremas enunciados. Cabe observar que nuestro método permite también, como el de Widder, clasificar las funciones determinantes, según hemos establecido en nuestra nota aparecida en los *Comptes Rendus de l' Academie des Sciences*, T. 205, p. 1035, 1937.

Damos a continuación un teorema de este último tipo:

Teorema 8.—Sea $F(s)$ $[s = x + iy]$, una función analítica acotada en el semiplano de la derecha que toma valores reales para s real. La condición necesaria y suficiente para que $F(s)$ sea una integral de Laplace-Stieltjes:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, d\,\alpha(t)$$

con $\int_0^\infty |\, d\,\alpha(t)\,| \leqq 1$, es que, para todo conjunto finito de números μ_n se verifique:

$$|\sum_1^r \mu_n F(n)\,| \leqq \max\,|\sum_1^r \mu_n e^{-nx}\,|$$

para $0 \leqq x < \infty$.

El anterior teorema es consecuencia fácil de ciertos teoremas generales de F. Riesz, sobre cálculo funcional, convenientemente generalizados para intervalo infinito. En un trabajo próximo

volveremos sobre este tema, es decir, la aplicación sistemática de los teoremas del cálculo funcional, a la teoría de las integrales de Laplace. Ello permite obtener con facilidad interesantes resultados, lo cual no es sino natural, pues el problema de la representabilidad de una función por medio de una integral de Laplace es el correlativo del problema de los momentos, en intervalo finito; y de este último ha dado F. Riesz, valiéndose precisamente de clásicos teoremas, a él mismo debidos, sobre representabilidad de funcionales lineales, solución completa para extensas categorías de funciones.

La demostración detallada de los teoremas contenidos en esta nota aparecerá en un trabajo de próxima publicación.

Buenos Aires, Seminario de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, julio de 1938.

SOBRE LAS SERIES DE POTENCIAS DESORDENADAS Y LA HIPERCONVERGENCIA DE UNA CLASE DE SERIES DE DIRICHLET

por SIXTO RIOS (MADRID)

1.—El problema fundamental de la teoría de la hiperconvergencia de las series de Dirichlet, consistente en la caracterización de las series que poseen sucesiones hiperconvergentes, puede abordarse limitando previamente el tipo de sucesiones de exponentes, con lo que es posible obtener soluciones completas o casi completas, que al ampliar los tipos de sucesiones cabe esperar que conduzcan a la solución del problema general.

Este es el camino iniciado por W. Bernstein (1) quien ha hecho un profundo estudio de la hiperconvergencia de las series de Dirichlet, limitándose a aquellas cuyas sucesiones de exponentes poseen densidad máxima finita, aunque sin llegar a la solución completa del problema para dichas series.

En el § 3 de esta nota resolvemos completamente el citado problema para una clase de sucesiones de exponentes que, como veremos, contiene sucesiones de densidad máxima infinita, pero sin comprender totalmente la clase estudiada por Bernstein, con la cual está en relación de imbricación.

Para llegar a dicha solución hemos utilizado las que llamamos series de potencias desordenadas, cuyas primeras propiedades se exponen en el § 2 de esta nota.

Este estudio me ha sido sugerido por mi querido maestro Sr. Rey Pastor (2).

2.—Llamamos series de potencias desordenadas a las del tipo

$$\Sigma\, a_n\, z^{\lambda_n} \qquad [1]$$

en que (λ_n) es una sucesión de números enteros positivos. Pueden considerarse tres tipos: A) la sucesión (λ_n) tiene como punto límite el infinito, y solo éste; p. ej.:

$$2, 2, 1, 4, 4, 3, \ldots, 2n, 2n, 2n-1, \ldots$$

B) la sucesión (λ_n) es acotada; C) la sucesión (λ_n) tiene como puntos de acumulación el infinito y otros.

Como vamos a ver, las series de potencias desordenadas

tienen propiedades muy análogas a las series de Dirichlet y vienen a ser un paso intermedio entre éstas y las series de Taylor (3).

Nos referimos en lo que sigue a las series del tipo *A)* que son las que utilizamos en el § 3.

He aquí las propiedades primeras de estas series:

I. *Si la serie* [1] *converge en el punto* z_0 *converge para todo* z, *tal que* $|z| < |z_0|$.

No vale aquí el razonamiento que corrientemente se emplea para las series potenciales ordinarias, ya que utiliza la convergencia de la serie Σz^{λ_n} cuyos exponentes son los mismos de la [1] y los coeficientes iguales a la unidad, cosa que aquí falla La demostración se hace fácilmente mediante el lema de Abel con un camino paralelo al seguido corrientemente en las series de Dirichlet (4).

De aquí, por un razonamiento conocido, resulta que puede ocurrir:

a) *la serie converge para todo valor de* z; b) *la serie no converge para ningún valor de* z; c) *existe un número R, tal que la serie converge para* $|z| < R$ *y no para* $|z| > R$.

Para las series de tipo *B)* se demuestra directamente que solo se presentan los casos a) y b): tienen radio infinito o nulo.

II. Análogamente se definen los *radios de convergencia absoluta, de convergencia uniforme, de hiperconvergencia, etc.*

Directamente es fácil demostrar en general para los tipos *A)*, *B)* y *C)* la existencia de un círculo de convergencia absoluta, y en particular para el tipo *B)* que, o tienen radio infinito o radio nulo.

III. *Si la serie* [1] *converge para* $z = z_0$, *converge uniformemente en todo círculo* $|z| \leqq \alpha$, *siendo* $\alpha < |z_0|$.

La demostración es análoga a la que se sigue para las series de Dirichlet y de esta propiedad resulta inmediatamente que *la serie* [1] *define una función holomorfa en su círculo de convergencia y la serie se puede derivar término a término.*

IV. Radio de convergencia:

Si la serie Σa_n *es divergente, es:*

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \sum_1^n a_n \right|^{1/\lambda_n}$$

Si la serie Σa_n *es convergente, es:*

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \sum_{n+1}^{\infty} a_n \right|^{1/\lambda_n}$$

Análogas fórmulas valen para la convergencia absoluta sustituyendo la serie Σa_n por la de sus valores absolutos.

V. *El radio de holomorfía* se define como el límite superior H de los números h tales que $f(z)$ es holomorfa en el interior del círculo de radio h.

Por camino análogo al expuesto en mi tesis (5) para la obtención de la abscisa de holomorfía en las series de Dirichlet e integrales *(LS)* se llega aquí a la fórmula:

$$H = e^{-k}\, e^{l}$$

donde k es un número positivo cualquiera y

$$l = lim.\ inf.\left[k : \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{K} \right] (-\infty < t < \infty)$$

$$K = \Sigma \left(\frac{\lambda_m\, k\, e}{n} \right)^{n} a_m\, 2^{-\lambda_m\,(k+it)}$$

extendida desde $n\,(1-\mu'_n) : k$ hasta $n\,(1-\mu''_n) : k$, siendo

$$0 < \mu \leq \mu_n' < 1\,,\ 0 < \mu \leqq \mu_n''\,,$$

(μ es un número arbitrariamente pequeño pero fijo).

Con un ejemplo vamos a ver que en estas series de potencias desordenadas (tipo A) pueden ser diferentes los radios de convergencia ordinaria, absoluta y de holomorfía, lo que pone de manifiesto gran analogía con las series de Dirichlet.

La serie de potencias desordenada:

$$z - z + z + (3/2 + e^{-1})\, z - 3/2\, z + \ldots\ldots + (-1)^{n+1} z^n + \\ + (-1)^n z^n + \ldots\ldots \pm z^n + (3^n/2^n + e^{-n}) z^n - 3^n/2^n\ z^n + \ldots\ldots$$

tiene distintos radios de convergencia ordinaria y absoluta, y además, no tiene ningún punto singular la función definida por la serie sobre la circunferencia de convergencia ordinaria de ésta. En efecto, utilizando las fórmulas precedentes, o mejor mediante artificios fáciles, se comprueba que el radio de convergencia absoluta de la serie es $1/2$, el de convergencia ordinaria $3/2$ y el punto singular más próximo es el $z = -1$.

Hasta aquí hemos visto que las series consideradas tienen propiedades más próximas a las series de Dirichlet que a las de Taylor. Vamos a ver ahora algunas propiedades en que difieren de las series de Dirichlet.

Yo he demostrado ([6]) la existencia de series de Dirichlet cuyas abscisas de holomorfía e hiperconvergencia no coinciden. Pues bien, según se demuestra más adelante *para las series de potencias desordenadas las circunferencias de holomorfía e hiperconvergencia coinciden necesariamente.*

Aronszajn ([7]) ha construído series de Dirichlet que no tienen ningún punto singular sobre la recta de holomorfía. Por el contrario, se demuestra que la función definida por *una serie de potencias desordenadas del tipo A) tiene un punto singular, al menos, sobre la circunferencia de holomorfía.*

En lo que sigue nos limitamos a considerar dentro del tipo *(A)* las sucesiones que llamaremos del tipo *(A')* que son las sucesiones monótonas no decrecientes del tipo *(A)*; p. ej.:

$$1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, ...$$

En una serie del tipo *(A')* no coinciden necesariamente los círculos de convergencia e hiperconvergencia, lo que constituye una diferencia esencial con las series de Taylor y una analogía con las series de Dirichlet. Ejemplo de esto es la siguiente serie:

$$1 + z - 2z + 2z + z^2 - 4z^2 + 4z^2 +$$

$$..... + z^n - 2^n z^n + 2^n z^n + ...$$

cuyo radio de convergencia es $\frac{1}{2}$ y, agrupando los conjuntos de términos de igual exponente se ve que el radio de hiperconvergencia es 1.

El problema de la caracterización de las series con sucesiones hiperconvergentes, resuelto por Ostrowski ([8]) para las series de Taylor, se resuelve en las series de potencias desordenadas del tipo (A') mediante el siguiente teorema:

VI. a) *Si en una serie de potencias desordenadas del tipo (A'):* $f(z) = \Sigma a_n z^{\lambda_n}$, *de radio de convergencia* 1, *los círculos de hiperconvergencia y holomorfía no se confunden, la corona comprendida entre ellos es un dominio de hiperconvergencia.*

b) *Si una sucesión parcial es hiperconvergente en el entorno de un punto regular de la circunferencia de holomorfía es*

$f(z) = g(z) + h(z)$ *donde* $g(z)$ *tiene radio de holomorfía mayor y* $h(z)$ *tiene lagunas de longitud relativa inferiormente acotada.*

Se comienza probando que a cada serie desordenada corresponde una serie ordenada que representa la misma función analítica y tal que el círculo de holomorfía de la primera coincide con el de convergencia de la segunda, y entonces se aplican los teoremas de Ostrowski citados.

3.—Pasamos ahora a la parte principal de esta nota relativa al estudio de la hiperconvergencia de una clase de series de Dirichlet.

La clase (9) que consideramos se caracteriza porque las sucesiones de exponentes (λ_{nk}) son tales que:

$$\lim_{\lambda_{n_k} \to \infty} \frac{1}{n} \log | \gamma + \beta n - \lambda_{n_k} | = - \infty ; \qquad [2]$$

$$n = 1, 2, \ldots . \text{ ad. inf} ; \; k = 1, 2, \ldots, k(n).$$

Desde luego existen sucesiones de densidad máxima infinita dentro de la clase considerada como se comprueba en la sucesión:

$$1, 1 + e^{-1}, 2, 2 + e^{-2}, \ldots . , n, n + e^{-n^n}, n + e^{-n^{(n-1)}}, n + e^{-n^{(n-2)}}, \ldots . ,$$

$$n + e^{-n^2}, n + e^{-n}, n + 1, \ldots .$$

Por esto tiene gran interés la clase estudiada.

Es inmediato ver también que no todas las sucesiones de densidad máxima finita pertenecen a esta clase.

El problema de la caracterización de las series hiperconvergentes dentro de esta clase lo resuelve completamente el siguiente teorema:

VII. a) *Si para una serie de Dirichlet* $f(s) = a_{n_k} e^{-\lambda_{n_k} s}$ *de abcisa de convergencia nula cuya sucesión de exponentes verifica la condición* [2], *las rectas de hiperconvergencia y holomorfía no se confunden, la banda vertical comprendida entre ellas es un dominio de hiperconvergencia.*

b) *La serie de polinomios exponenciales obtenida agrupando los conjuntos de términos cuyos exponentes pertenecen al entorno de cada número* $\gamma + \beta n$ *converge uniformemente en cada dominio acotado interior al semiplano de holomorfía.*

c) *Si una sucesión parcial es hiperconvergente en el entorno de un punto de la recta de holomorfía es* $f(s) = g(s) + h(s)$

donde g(s) *tiene abscisa de holomorfía menor y* h(s) *lagunas de longitud relativa inferiormente acotada.*

El método de demostración consiste en asociar a la serie de Dirichlet dada la serie de iguales coeficientes cuyos exponentes son $-(\gamma + \beta_n)s$; esta nueva serie define una función $\varphi(s)$ que difiere de $f(s)$ en una función entera (10). El estudio de la hiperconvergencia de la serie dada queda así reducido al de la nueva serie, el cual se reduce a su vez al de la serie de potencias con iguales coeficientes, hecho ya en el teorema VI del § 2.

Se observa la diferencia esencial con los resultados de Bernstein relativos a las series de Dirichlet de densidad máxima finita ya que aunque las partes *a)* y *b)* han sido demostradas para éstas, no se sabe si es cierta en general para las series de Dirichlet de densidad máxima finita la parte recíproca *c)*.

---

(1) Leçons sur les progrés récents de la theorie des séries de Dirichlet (Colec. Borel, París, 1933).

(2) Rey Pastor. - Series e integrales D. (Curso dictado en la Universidad de Madrid, 1932-33) - Madrid 1933.

(3) Análogamente se pueden definir y estudiar las series de Dirichlet desordenadas en que los números λ forman cualquier sucesión de números reales positivos, distinguiéndose los mismos tres casos A), B), C) que para las series de potencias desordenadas las mismas propiedades I a V expuestas en esta nota para las series de tipo (A). Podríamos haber hecho la exposición en esta forma más general, pero como nuestro objeto es la aplicación hecha en el § 3, hemos prescindido de ello.

(4) Rey Pastor. - Series e integrales D - Madrid - Buenos Aires, 1926.

(5) Problemas de hiperconvergencia (Rev. Acad. Cienc., t. 33, p. 59).

(6) Sobre la hiperconvergencia de las series de Dirichlet de densidad máxima infinita (Rev. de la Unión Matemática Argentina, vol. I, pág.

(7) Une remarque sur les singularités des séries de Dirichlet (C. R. t. 1930, 1931).

(8) Ueber eine Eingenschaft gewisser Potenzreihen (Sitz. der. Preuss. Akad. 1921, p. 597). Ueber Potenzreihen, die ueberkonvergente Abschnittfolgen besitzen (Id. 1923, p. 185).

(9) Esta clase comprende desde luego a la considerada en mi tesis para la que se resolvió allí el problema de la hiperconvergencia lagunar (Capítulo II).

(10) La demostración es análoga a la dada en mi tesis (Cap. II) para el problema de la hiperconvergencia lagunar.

(Original recibido en Enero de 1938).

Para ingresar como miembro de la Unión Matemática Argentina, es necesaria la presentación del solicitante por dos socios fundadores, la admisión por la Junta, y el pago de una cuota de $ 5 m|n. mensuales.

La cuota a la REVISTA DE LA U. M. A., incluído el Suplemento, es de $ 10 m|n. anuales, cuyo envío deberá efectuarse por cheque, giro u otro medio libre de gastos, a la orden de la Tesorera, señorita Clotilde Bula, Perú 222, Buenos Aires.

Los señores suscritores, domiciliados en la Ciudad de Buenos Aires podrán, si lo prefieren, efectuar su pago en doce cuotas mensuales de $ 1.00 m|n. cada una, que serán cobradas a domicilio.

Los trabajos originales enviados para su publicación en la REVISTA DE LA U. M. A., serán previamente analizados por un ponente, quien emitirá dictamen acerca de la novedad y corrección de sus resultados.

La impresión de las tiradas aparte, y las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

Abonnement annuel à l'etranger: 4.00 dollars (Etats-Unis).

Prière d'adresser toute la correspondance scientifique et administrative à l'adresse ci-dessous:

Señor Secretario de la UNION MATEMATICA ARGENTINA

Prof. Fernando Gaspar

Perú 222, Buenos Aires (Rep. Argentina)

SUMARIO

Pág.

A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ.—Sobre las series de funciones de Hermite 1

M. PETROVICH.—Remarques arithmetiques sur une'équation différentielle du premier ordre 17

C. BIGGERI.—Sobre los puntos singulares de las funciones analíticas 22

A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ.—Sobre la inversión de integrales de Laplace absolutamente convergentes 23

S. RÍOS.—Sobre las series de potencias desordenadas y la hiperconvergencia de una clase de series de Dirichlet 27