Volumen II 1938-1939 Número 6

REVISTA

DE LA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

SUPLEMENTO

MIEMBROS FUNDADORES DE LA U. M. A.:

JOSÉ BABINI (Santa Fe). — JOSÉ BARRAL SOUTO (Buenos Aires). — CLOTILDE BULA (Rosario). — ENRIQUE BUTTY (Buenos Aires). — CARLOS DIEULEFAIT (Rosario). — FACULTAD DE QUÍMICA INDUSTRIAL (Santa Fe). — FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS (Rosario). — FERNANDO L. GASPAR (Rosario). — JOSÉ GIANNONE (Rosario). — ALBERTO GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ (Buenos Aires). — JOSÉ GONZÁLEZ GALÉ (Buenos Aires). — MANUEL GUITARTE (Buenos Aires). — WALTER S. HILL (Montevideo). — LUDOVICO IVANISSEVICH (Buenos Aires). — CARLOS ISELLA (Rosario). — FRANCISCO LA MENZA (Buenos Aires). — HILARIO MAGLIANO (La Plata). — JUAN OLGUÍN (Rosario). — ELBA RAIMONDI (Buenos Aires). — JULIO REY PASTOR (Buenos Aires). — LUIS A. SANTALÓ (Rosario). — JOSÉ SORTHEIX (Tucumán). — DITO T. A. SPELUZZI (La Plata). — ESTEBAN TERRADAS (La Plata).

BUENOS AIRES
1939

LA DUPLICACION DEL CUBO CON ESCUADRA Y COMPAS

Por YANNY FRENKEL (Buenos Aires)

Es sabido que un problema de tercer grado no puede resolverse con regla y compás; pero Bieberbach ha probado (*) que la solución geométrica es posible si se usa además una escuadra en las siguientes condiciones: un cateto pasa por un punto dado, el vértice pertenece a una recta determinada y el otro cateto debe permanecer tangente a una circunferencia de centro y radio conocido.

La escuadra puede desplazarse sin dejar de cumplir las condiciones enunciadas.

En su artículo citado resuelve Bieberbach el problema de la trisección del ángulo utilizando los métodos vectoriales expuestos en sus *Leitfaden*, e indica después cómo el problema de la duplicación del cubo puede reducirse al de la trisección.

Como este método indirecto resulta excesivamente complicado, nos proponemos en esta nota dar una solución directa del problema, extremadamente sencilla, que es aplicable con pequeña modificación a cualquier raíz cúbica, y por tanto puede utilizarse para resolver todo problema de tercer grado, incluso el de trisección del ángulo, con ventaja sobre la de Bieberbach.

Tomemos dos posiciones distintas de la escuadra y llamemos x al segmento que ha descrito el vértice sobre la recta a que pertenece al cambiar de posición.

Si ahora determinamos x en función de las coordenadas del punto, de la recta y del radio de la circunferencia antes fijados, resultará para x una ecuación de tercer grado, y eligiendo convenientemente las coordenadas podemos transformarla en la forma $x^3 = 2\,P$ donde P será una cierta constante que procuraremos hacer lo más sencilla posible.

Tendremos así la arista del cubo de volumen $2\,P$ y los demás casos se pueden reducir a él por una simple proporcionalidad.

Nuestro problema se reducirá, pues, a determinar las coordenadas que hemos de dar al punto, a la recta y a la circunferencia:

$$a_0,\ b_0,\ a,\ b,\ r$$

En la figura O es el origen de coordenadas y P el punto fijado.

Vamos a determinar la distancia r de A a las rectas $C\,D$ y $C'\,D'$; para esto determinaremos las ecuaciones de cada una de ellas.

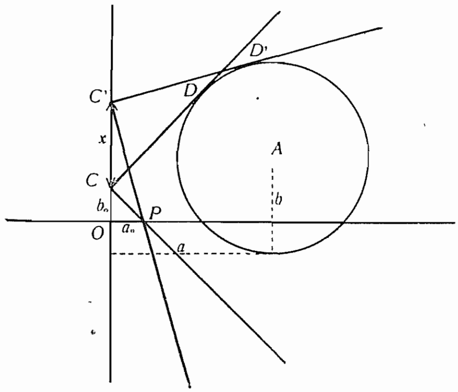
Ecuación de $C\,D$:

$$\frac{Y}{b_0} - \frac{X}{\dfrac{b_0^2}{a_0}} = 1$$

(*) *Zur Lehre der kubischen Konstruktionen.*—Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 167, 1931, pág. 142-146.

y aplicando la conocida fórmula que expresa la distancia de A a esta recta, resulta la ecuación

[1] $$b\, b_0 - a\, a_0 - b_0^2)^2 = r^2\, (a_0^2 + b_0^2)\,.$$



Análogamente, la ecuación de la recta $C'\, D'$ es

$$\frac{Y}{b_0 + x} - \frac{X}{\dfrac{(b_0 + x)^2}{a_0}} = 1$$

y siendo r la distancia entre A y $C'\, D'$, resulta:

[2] $$[b\,(b_0 + x) - a\, a_0 - (b_0 + x)^2]^2 = r^2 [a_0^2 + (b_0 + x)^2]\,,$$

haciendo las operaciones indicadas y ordenando, resulta:

$$\begin{gathered} x^4 + (4\, b_0 - 2\, b)\, x^3 + (b^2 + 6\, b_0^2 + 2\, a\, a_0 - 6\, b\, b_0 - r^2)\, x^2 + \\ + (4\, a\, a_0\, b_0 - 2\, a\, a_0\, b + 2\, b^2\, b_0 + 4\, b_0^3 - 6\, b\, b_0^2 - 2\, r^2\, b_0)\, x \\ + (-a\, a_0\, b_0\, b - b_0^2)^2 = r^2\, (a_0^2 + b_0^2) \end{gathered}$$

y teniendo en cuenta la [1] se reduce a ésta:

$$\begin{gathered} x^3 + (4\, b_0 - 2\, b)\, x^2 + (b^2 + 6\, b_0^2 + 2\, a\, a_0 - 6\, b\, b_0 - r^2)\, x + \\ + 2\, b^2\, b_0 + 4\, b_0^3 - 2\, a\, a_0\, b - 6\, b\, b_0^2 - 2\, r^2\, b_0 + 4\, a\, a_0\, b_0 = 0\,. \end{gathered}$$

Recordemos que nos proponíamos llevar la ecuación a la forma $x^3 = 2\,P$ y por tanto empezaremos por hacer desaparecer el término en x^2; esto lo podríamos haber hecho reemplazando $x = x' - k$, pero será mucho más breve hacer desaparecer directamente el coeficiente de x^2, fijando una relación entre b y b_0; por ejemplo $b = 2\, b_0$.

Nuestro problema tiene cinco indeterminadas y no hemos establecido más que dos ecuaciones; por tanto, para determinar el problema, habrá que dar otras tres condiciones; ya hemos fijado una y después daremos otras dos.

Copiando la ecuación anterior y haciendo $b = 2\, b_0$ queda

[3] $$x^3 - x\,(2\, b_0^2 - 2\, a\, a_0 + r^2) - 2\, r^2\, b_0 = 0.$$

ahora buscaremos condiciones para anular el coeficiente de x, es decir, para que sea:

$$2\, b_0^2 - 2\, a\, a_0 + r^2 = 0\,.$$

hagamos $a_0 = 1$, $b_0 = 1$, queda entonces $b = 2$; y el trinomio da:

[2'] $$2 - 2\, a + r^2 = 0\,.$$

Ahora debemos determinar a y r; habiendo fijado arbitrariamente $(a_0,\, b_0,\, b)$ nuestras dos ecuaciones nos permitirán encontrar los valores de a y r.

Reemplazando en [1] los valores arbitrariamente fijados, ésta se convierte en

[1'] $$a^2 - 2\, a + 1 = 2\, r^2\,.$$

Resolviendo el sistema [1'] [2'] obtenemos:

$$a^2 - 6\, a + 5 = 0, \quad a = 1, \quad a = 5\,.$$

Tomamos $a = 5$, pues para $a = 1$ resulta radio nulo; mientras que para $a = 5$ es $r = \sqrt{8}$.

En [3] hemos anulado el coeficiente de x y queda

$$x^3 = 16; \quad x = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2.8}\,.$$

Nos habíamos propuesto llevar la ecuación a la forma $x^3 = 2\, P$, y con los valores que hemos fijado resulta $P = 8$; procuraremos hallar valores de las indeterminadas que hagan $P = 1$ y se ve inmediatamente que basta tomar para ello las mitades de los valores antes fijados, es decir, ahora tomaremos $a_0 = 1/2$, $b_0 = 1/2$, $a = 5/2$, $b = 1$, $r = \sqrt{2}$, con esto la [3] ha quedado reducida a

$$x = \sqrt[3]{2}\,.$$

Obtenemos, en resumen, la sencillísima construcción siguiente:

Se construye la circunferencia de centro $(5/2,\, 1)$ *que pasa por el punto* $(3/2,\, 0)$; *colocando la escuadra tangente, de modo que su otro brazo pase por el punto* x $= 1/2$, *el vértice determina en el eje* y *el segmento* $\sqrt[3]{2}$.

(Instituto Matemático de la Universidad de Buenos Aires)

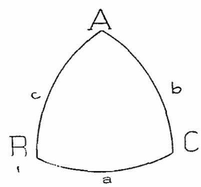
FORMULA DE LAS COTANGENTES

Reglas mnemotécnicas para su recordación

por J. A. DEL PERAL

Sea el grupo de las seis fórmulas derivadas del teorema de Vieta llamado "de las cotangentes" o "de los cuatro elementos seguidos".

$$\begin{cases} \operatorname{cotg} a \operatorname{sen} c = \cos B \cos c + \operatorname{sen} B \operatorname{cotg} A \\ \operatorname{cotg} a \operatorname{sen} b = \cos C \cos b + \operatorname{sen} C \operatorname{cotg} A \\ \operatorname{cotg} b \operatorname{sen} c = \cos A \cos c + \operatorname{sen} A \operatorname{cotg} B \\ \operatorname{cotg} b \operatorname{sen} a = \cos C \cos a + \operatorname{sen} C \operatorname{cotg} B \\ \operatorname{cotg} c \operatorname{sen} b = \cos A \cos b + \operatorname{sen} A \operatorname{cotg} C \\ \operatorname{cotg} c \operatorname{sen} a = \cos B \cos a + \operatorname{sen} B \operatorname{cotg} C \end{cases}$$



Pretender recordar una cualquiera de ella, sin más ayuda que la enunciación del teorema presenta dificultades que el lector ya conocerá. En algunos textos tales como: *Elementos de Trigonometría,* J. Cadrés, 1894; *Trigonometria sferica,* F. Porta, Torino, 1886; *Trigonometría,* M. Ortega y Sala, Madrid, 1902; *Trigonometria piana e sferica,* Giuseppe Pesci, 6ª ed. Livorno; *Trigonometría,* F. Böhnert. En estos textos digo, se proponen varias reglas mnemotécnicas para facilitar la recordación de la fórmula en cuestión. Al mismo efecto, proponemos al lector, quien decidirá sobre su conveniencia o inconveniencia, otra reglita que insertamos al final, después de haber expuesto las de los textos nombrados.

* * *

Tratado Elementare de Trigonometria.—G. PESCI.

Dice: Sea $\operatorname{cotg} a \operatorname{sen} b = \cos b \cos \gamma + \operatorname{sen} \gamma \operatorname{cotg} \alpha$; para recordar estas fórmulas es menester que cada una de ellas, por ejemplo la que contiene los elementos a, b, α, γ puede escribirse de la manera siguiente: Se comienza con escribir las seis funciones: cotg sen cos cos sen cotg de las cuales las tres últimas en orden inverso al de las tres primeras. Después se observa que las primeras tres letras son latinas y las tres últimas griegas; que la 1ª y la última son del mismo orden; que la 2ª y la 3ª son iguales a la letra latina que falta todavía y que la 4ª y la 5ª son iguales a la letra que resta.

Observamos: Donde se enuncian las seis funciones que intervienen es menester completar diciendo qué relación algebraica las liga, es decir, escribir:

$$\operatorname{cotg}\ldots \operatorname{sen} = \cos\ldots \cos\ldots + \operatorname{sen}\ldots \operatorname{cotg}\ldots$$

* * *

Trigonometría.—ORTEGA y SALA.

Se iguala el producto de las cotg de dos elementos opuestos al producto de las cotg de los otros dos; se convierte el segundo miembro en cosenos y se separa luego en el primer miembro las líneas de las letras minúsculas de las de las mayúsculas por medio del signo —.

Sea por ej.: Relación entre b, c, A, C. —

$$\text{cotg}\; c \;\text{cotg}\; C = \text{cotg}\; b \;\text{cotg}\; A\,. \quad (1)$$

$$\text{cotg}\; c \;\text{cotg}\; C.\; \text{sen}\; b \;\text{sen}\; A = \cos b \cos A \quad (2)$$

$\text{cotg}\; c \;\text{sen}\; b - \text{cotg}\; C \;\text{sen}\; A = \cos b \cos A$ (3) que es la fórmula buscada.

Observamos: 1º La igualdad (1) no es cierto lo que su autor aclara expresamente.

2º El pasaje de la (2) a la (3) tampoco es cierto.

3º Es menester agregar a la regla que en la separación de las líneas de las letras minúsculas y mayúsculas esta separación debe efectuarse en el orden enunciado, pues de no hacerlo así se obtendría también $\text{cotg}\; C \;\text{sen}\; A - \text{cotg}\; c \;\text{sen}\; b = \cos b \cos A$ que no es la fórmula correspondiente ni pertenece al grupo.

* * *

Trigonometría sferica.—F. PORTA.

Dice al respecto: En cada triángulo esférico, considerados cuatro elementos consecutivos, el producto de los cosenos de los dos elementos medios, es igual al determinante formado con los senos de los elementos medios y con las cotangentes de los elementos extremos tomados en orden inverso a aquel de los primeros.

Así sean cuatro elementos consecutivos, tendremos:

$$\cos b \cos C = \begin{vmatrix} \text{sen}\; b. & \text{cotg}\; A. \\ \text{sen}\; C. & \text{cotg}\; a \end{vmatrix} \quad \text{o sea}$$

$$\cos b \cos C = \text{sen}\; b \;\text{cotg}\; a - \text{sen}\; C \;\text{cotg}\; A\,. \quad (1)$$

Observamos que: Si nada se establece con respecto al orden en que se toman los elementos podríamos concluir observando la regla en que

$$\cos C \cos b = \begin{vmatrix} \text{sen}\; C. & \text{cotg}\; a \\ \text{sen}\; c. & \text{cotg}\; A. \end{vmatrix}$$

o sea $\cos C \cos b = \text{sen}\; C \;\text{cotg}\; A - \text{sen}\; c \;\text{cotg}\; a$

fórmula que no es la (1) ni responde al teorema.

* * *

Elementos de Trigonometría.—J. CADRÉS.

Dice refiriéndose al grupo de las seis fórmulas:

Para recordar estas relaciones debe tenerse en cuenta: 1º Que cada término tiene por 1er. factor la colínea del último factor del término anterior.

2º Que el último factor del 2º término es el coseno del ángulo comprendido.

3º Que el último factor del 3er. término es la cotangente del ángulo opuesto.

Observamos que: esta fórmula nos serviría más bien para verificar que para formar la fórmula, verificación que no alcanzaría al 1er. factor del 1er. miembro acerca del cual nada dice la regla.

* * *

Ebene und sphärische Trigonometrie.—F. BOHNERT.

Dice así: Estas fórmulas pueden ser fácilmente recordadas. Si se designan empezando de un lado cualquiera del triángulo cuatro elementos consecutivos en un sentido arbitrario con las cifras I II III IV es siempre:

$$\cos \mathrm{II} \cos \mathrm{III} = \operatorname{cotg} \mathrm{I} \operatorname{sen} \mathrm{III} - \operatorname{sen} \mathrm{II} \operatorname{cotg} \mathrm{IV}.$$

Para mayor comodidad se lee la sucesión de los elementos en el esquema:

$$a \; \gamma \; b. \quad \alpha \; c \; \beta \; a \; \gamma \; b.$$

* * *

La nueva reglita que proponemos y a la cual nos referimos al iniciar estas líneas, es la siguiente:

REGLA MNEMOTÉCNICA

cotg... sen = cos... cos... + sen... cotg (*Matriz*)

Regla: Se numeran cuatro elementos consecutivos a partir de un lado, y se llena la matriz sucesiva y ordenadamente con los elementos impares, intermedios y pares.

Observamos: En cuanto a la matriz bastará observar su estructura simétrica para recordarla con facilidad, pero si esto no bastase hágase este raciocinio lógico:

La fórmula se llama de las cotg *pero* $\operatorname{cotg} = \frac{\cos}{\operatorname{sen}}$ *de donde* cotg. sen = cos. (letras finales en orden alfabético) y así se habrá llegado a la mitad de la matriz. Repítase lo hallado en orden inverso y se tendrá:

$$\operatorname{cotg} \operatorname{sen} = \cos \cos = \operatorname{sen} \operatorname{cotg}.$$

Lo menos que el lector puede recordar es que se debe reemplazar por el signo + el segundo signo igual, y habremos llegado a la matriz propuesta arriba.

(Instituto Nacional del Profesorado Secundario).

CUESTIONES DIDACTICAS Y METODOLOGICAS

El "Suplemento de la Revista de la Unión Matemática Argentina", inicia bajo este título, la publicación de una sección dedicada especialmente a los profesores de matemática, pues en ella se tratarán exclusivamente cuestiones de carácter didáctico, metodológico e histórico.

A tal efecto la Dirección solicita de los lectores su colaboración, ya sea respondiendo a las cuestiones propuestas o proponiendo nuevas cuestiones, que se publicarán siempre que encuadren en los propósitos que persigue esta sección.

CUESTIÓN Nº 1—La regla para la supresión de paréntesis en la suma algebraica es generalmente la siguiente: "Se puede suprimir un paréntesis si está precedido por el signo +, en el caso en que esté precedido por el signo —, se puede suprimir con la condición de cambiar los signos de cada uno de los términos que contiene" (*Algébre*, de Borel y Montel, A. Colin 1914, Pág. 39). Esta regla, tomada literalmente, no es exacta, pues permite que una letra aparezca precedida por dos signos sucesivos.

Analizar la cuestión y enunciar una regla adecuada.

J. B.

CUESTIÓN Nº 2—En la excelente Historia de las Matemáticas, del Ing. Sanchez Sarmiento, figura el dato (quizás tomado de la Enciclopedia Espasa) de que los logaritmos llamados *neperianos* fueron ideados y calculados por primera vez por Juan Speidell, y la tabla correspondiente fué publicada en Londres en 1619.

No figurando esta noticia en los tratados más conocidos, sería interesante reunir antecedentes históricos sobre este importante punto, aportando datos que puedan conducir a su esclarecimiento.

J. R.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.—Estudiar la función
$$\begin{cases} x = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{k_i}{2^i} \\ y = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n} \sum\limits_{i=1}^{n} 2^{i-1} k_i \end{cases}$$

siendo k_i los números 0 ó 1, es decir las cifras "duales" del número real $0 \leqq x \leqq 1$.

J. B.

2.—Desarrollar en serie de potencias de z la función w definida por la ecuación $w = e^{hzw}$.

J. B.

LOS ESTUDIOS DE GEOMETRIA ALGEBRAICA EN ITALIA

por F. TORANZOS

Luigi Cremona, a mediados del siglo pasado, inicia en Italia los estudios de Geometría algebraica con una orientación original partiendo del estudio de las transformaciones que llevan su nombre, sentando así las bases de la que luego fué la escuela italiana de geómetras que con los trabajos de C. Segre, Veronese y Bertini llega a tomar mucha importancia dotando a la investigación en esta disciplina de un nuevo método que consiste en la aplicación de la teoría de los hiperespacios al estudio de la geometría sobre una curva algebraica (estudios que en parte ya fueron hechos por camino algebraico por Nœther, Riemann, Brill y otros). La importancia de los trabajos más que los resultados nuevos que aportan está en el método de índole puramente geométrica que años más tarde fué utilizado por Enriques, Castelnuovo, etc., para extender los resultados a la geometría sobre una superficie algebraica y sobre la riemanniana W_y correspondiente, paralelos a los trabajos que sobre el mismo asunto realizaron los franceses (Picard, Poincaré, etc.) por camino trascendente.

A principios de este siglo nuevas luces proporciona la escuela italiana a la geometría sobre una superficie algebraica. Me refiero a la 'teoría de la base" de F. Severi que simplifica los resultados que se conocían, reduciendo el estudio de una superficie al de un sistema de un número finito de curvas trazadas sobre la superficie. Este método permite no sólo simplificar lo ya estudiado sino dar solución a problemas fundamentales aún no resueltos como el estudio de las irregularidades y del género de las superficies irregulares. Pero un nuevo y fundamental progreso esperaba a la Geometría Algebraica, me refiero a la aplicación que a su estudio se hace de la Topología ejecutado por Lefschetz y el mismo Severi, quienes consiguen, con otras contribuciones de la escuela italiana (Albanesse, Chisini, B. Levi, etc.), independizar la teoría de la base de las integrales picardianas. Llegamos así a la época actual encontrando a la escuela italiana que prosigue con gran brillantez el acrecentamiento y sistematización dentro de un campo netamente geométrico de esta disciplina que por su esfuerzo ha llegado a ser uno de los capítulos más hermosos y fecundos de la matemática; Severi, Enriques, Castelnuovo en Roma, B. Segre y Beppo Levi en Bolonia, Albanesse en Palermo, Chisini en Milán son sus más destacados cultores de la actualidad. Las directivas de los estudios actuales los encontramos en las cinco principales memorias de Severi publicadas desde 1933 (tres en la Real Academia de Italia, memorias B, C, F); la memoria E; siete notas en la Academia de Lincei, una en Comptes Rendus de Paris (memoria D) y además una en Comm. Math. Helvetici, memoria A, (a las que deben agregarse las publicadas en la Acad. de Lincei hace cuatro meses) en que señala nuevos rumbos a la investigación de geometría sobre una hipersuperficie algebraica. La principal novedad de ellas está en que partiendo de las series de puntos sobre curvas reductibles estudia las superficies e hipersuperficies no por sistemas de curvas como la teoría de la base sino con conjuntos de puntos con los que forma las llamadas series de equivalencias, consigue así generalizar las nociones de involución de puntos, series canónicas, etc., estudiadas en la teoría de las curvas; llegando con la aplicación de la Topología (memoria F) a dar solución a importantes problemas como el de la generalización de los estudios de geometría sobre una superficie al estudio de la geometría sobre una V_k de un S_k. Severi anuncia estos trabajos como "un nuovo campo di ricerca nella geometria sopra una superficie e sopra una varietá algebraica".

Estos trabajos abren un campo muy interesante a los estudiosos pues preparan la solución de problemas de suma importancia como el anunciado por Albanesse de generalizar los resultados obtenidos para las superficies para una V_k de un S_k, y que solo ha sido resuelto cuando $i=K-1$.

EL CONGRESO MATEMATICO DE ROMA

La Real Academia de Italia celebrará durante el corriente año de 1939 el Congreso acordado con motivo del centenario de Volta. Desde entonces se han realizado varios, consagrados a diversas ciencias y por primera vez celebrará la Academia de Italia un congreso matemático, para el estudio y discusión de los últimos progresos de esta ciencia.

Estos congresos internacionales son de índole muy distinta a las asambleas públicas que vienen celebrándose en diversos países (la próxima será en U.S.A. el año próximo) y para dar idea exacta de su naturaleza, nada mejor que reproducir a continuación su reglamento.

Regolamento dei Convegni Volta

I Convegni Volta, che l'Accademia d'Italia convoca ogni anno per iniziativa, a turno, di una delle sue Classi, non sono congressi ai quali chiunque possa iscriversi e partecipare, ma assemblee di personalità scelte ed invitate dalla Reale Accademia d'Italia. Non intervengono, dunque, Delegazioni di paesi o Rappresentanze di istituti. Ciascuno partecipa a titolo personale, agisce per proprio conto e parla esclusivamente in nome proprio.

Ai Convegni si partecipa solo in seguito ad invito personale che, in virtù di disposizione regolamentari, comporta doveri di ospitalità da parte dell'Accademia. Non è ammessa eccezione di sorta a questo regolamento.

L'*argomento* del Convegno, prescelto dall'Accademia, viene suddiviso dalla Presidenza in vari *temi*, coordinati da un piano organico ed affidati a un numero limitato di relatori.

Non sono ammesse relazioni o comunicazioni all'infuori di quelle prestabilite; ma ogni partecipante è invitato a manifestare le proprie vedute, nel modo che crederà più efficace, in sede di discussione di ciascun tema.

Pertanto le relazioni, stampate, sono spedite ai partecipanti almeno quindici giorni prima dell'apertura del Convegno.

I Convegni escludono qualsiasi deliberazione o votazione. L'interesse dei lavori è fondato esclusivamente sull'alto valore della collaborazione, liberamente instituita, sui discorsi pronunciati e sulle discussioni.

Dopo il Convegno, i resoconti dei lavori, le relazioni e i discorsi pronunciati sono pubblicati in volume dalla Reale Accademia d'Italia e offerti in omaggio a tutti i partecipanti.

Tutte le spese di viaggio in Italia e di permanenza a Roma degli invitati sono a carico della Reale Accademia d'Italia.

I Participanti sono ospitati in uno dei principali alberghi di Roma.

L'ospitalità è interamente a carico dell'Accademia dal giorno precedente l'apertura del Convegno fino all'indomani della chiusura.

Alla Signora che eventualmente accompagnerà il Partecipante, l'Accademia si procurerà il piacere di offrire la stessa ospitalità.

PROGRAMA DEL CONGRESO DE 1939

Estará consagrado exclusivamente al *Análisis funcional* y a la moderna *Geometría* (algebraica, diferencial y Topología).

Los relatores nombrados por la Academia para el Análisis funcional son los siguientes:

Carathéodory — Teoria della misura.

Fantappiè — La teoria dei funzionali analitici.

Giorgi — Progressi e applicazioni del calcolo operatorio funzionale.

Julia — Alcune applicazioni funzionali della topologia.

Nevanlinna — Costruzione di funzioni analitiche sopra una superficie di Riemann.

Nörlund — Un'Equazione funzionale per la determinazione del peso delle incognite.

Rey Pastor — L'Analisi funzionale e la Teoria generale delle funzioni.

Tonelli — L'Analisi funzionale nel calcolo delle variazioni.

Estos trabajos se encuentran ya en prensa para su estudio por los miembros del Congreso, antes de reunirse éste; pero no serán publicados hasta después de la clausura de las sesiones. No conocemos todavía los relatores que se ocuparán de la Geometría.

PROFESORES ALEJANDRO TERRACINI Y LUIS SANTALO

El retraso con que aparece este número, nos permite dar la grata noticia de la llegada al país de dos destacados matemáticos: el profesor Dr. Alejandro Terracini que se incorpora a la Universidad de Tucumán y el profesor Dr. Luis A. Santaló quien lo hará al Instituto de la Facultad de Ciencias Matemáticas de Rosario.

Procede el Prof. Terracini de la Universidad de Torino y el Prof. Santaló de la de Madrid en cuya Facultad de Ciencias dictaba el II° curso de Análisis Matemático. Dada la jerarquía científica de ambos profesores, su incorporación a la Universidad argentina es un acontecimiento de importancia, pues indudablemente han de imprimir considerable impulso a los estudios matemáticos en los centros en que desarrollarán sus actividades.

En el próximo número publicaremos una reseña biográfica y bibliográfica de estos dos eminentes geómetras.

NUEVA PUBLICACION DEL PRIMER TOMO DE LA ENCICLOPEDIA DE LAS CIENCIAS MATEMATICAS

La casa Teubner, de Leipzig, acaba de anunciar la nueva publicación del tomo I de la gran enciclopedia de las ciencias matemáticas, editada por esa casa con la cooperación de las Academias de Berlin, Göttingen, Heidelberg, Leipzig, Munich y Viena y que surgiera, en 1894, por iniciativa de F. Klein.

Es de todos conocida esta importante y utilísima obra, cuyo primer tomo, en la publicación original, comprendía Aritmética y Algebra en un volumen de más de 1200 páginas. Pero, mientras los tomos II a VI (Análisis, Geometría, etc.) fueron mantenidos al día mediante suplementos y agregados, el primer tomo aparecido en 1904 no sufrió desde esa fecha modificación alguna.

La necesidad de modernizar, mediante los últimos progresos logrados en esos sectores, ese primer tomo, ha inducido a la casa editora a emprender una publicación totalmente nueva del mismo, que incluye, además de Aritmética y Algebra: Fundamentos, Teoría de los conjuntos y Teoría de los numeros, excluyendo, en cambio, la Matemática Aplicada que estaba representada por varios artículos en la publicación de 1904.

La lista de las materias contenidas en la nueva publicación, que se terminará aproximadamente en tres años, es la siguiente:

A. Fundamentos. Lógica matemática. Investigaciones sobre los fundamentos de la Matemática. Construcción de los sistemas de números. Representación de los números reales mediante procesos límites. Teoría general de los conjuntos. *B. Algebra.* Combinatoria. Algebra lineal. Ecuaciones algebraicas con coeficientes reales y complejos. Teoría general de los grupos. Teoría general de los cuerpos de números. Teoría general de los números ideales, anillos de números y módulos de números (Allgemeine Modul-, Ring-und Idealtheorie). Teoría de los polinomios ideales y teoría de la eliminación. Teoría de la conexión (Verlände). Algebra de los sistemas de números hipercomplejos. Teoría general de la representación. Teoría de los grupos de permutaciones y sustituciones. Generalidades sobre los invariantes. Invariantes de los grupos finitos de sustituciones lineales. *C. Teoría de los números.* Teoría de los números racionales. Teoría elemental aditiva de los números. Teoría general de los números algebraicos. (Bewertungstheorie) Aritmética de los sistemas de números hipercomplejos. Cuerpos de números de Abel y ley de reciprocidad. Los cuerpos de clase de la multiplicación compleja. Cuerpos de números especiales. Teoría aritmética de las formas. Teoría aritmética de los cuerpos de funciones algebraicas con cuerpos constantes finitos generales y especiales. Geometría de los números. *D. Teoría analítica de los números.* Series especiales de Dirichlet y sus aplicaciones. El método de Hardy-Littlewood en la teoría aditiva de los números. Aplicaciones de las funciones Theta. Ecuaciones y aproximaciones diofánticas. Congruencias diofánticas.

BIBLIOGRAFIA

CONFORTO F.—*Le Superficie Razionali.*—Bologna. N. Zanichelli, 1939.— Un volumen de 554 páginas.

En los últimos veinte años del siglo pasado y lo que va del presente, la escuela de geómetras italianos ha aportado contribuciones valiosas a la teoría de las superficies algebraicas, contribuciones que se encuentran en las memorias de Corrado Segre, Enriques, Castelnuovo, Bertini, Severi, etc., y se destacan no sólo por los descubrimientos que contienen, sino también por la nueva modalidad que ha logrado dar a esta rama de la geometría una perfección admirable. Sin embargo, falta la obra de sistematización y síntesis que la haga directamente accesible; papel que hacen las obras de Enriques-Chisini y de Severi en la teoría de las curvas. El libro de que nos ocupamos es una contribución con ese objetivo, presentándonos un estudio sistemático y completo de las superficies racionales.

La obra está dividida en dos libros. En el primero se estudian los distintos tipos de superficies racionales de 2º, 3º y 4º orden, de cada uno en particular. El primer capítulo trata de las cuádricas, el segundo y tercero de las cúbicas. El cuarto capítulo está dedicado al estudio detallado de las superficies de Steiner y Veronese que tienen una extraordinaria importancia, pues, sirven como tipo de comparación en el estudio de las superficies racionales. Los demás capítulos del libro están dedicados al estudio de las superficies de 4º orden en sus distintas clases: superficies de 4º orden con una cúbica doble, con una recta triple, con una cónica doble, con una recta doble y con un solo punto singular.

Inicia el autor el libro tratando la representación plana de una superficie: que constituye el procedimiento preferido por el autor para el estudio de las superficies, en las cuádricas la representación usada es la estereográfica, en las cúbicas la representación plana resulta de la generación proyectiva de Grassman-Steiner, en las superficies de Steiner y Veronese resulta de su generación mediante sistemas de cónicas del plano, etc. Este procedimiento simplifica notablemente el estudio.

Este libro es para la teoría de las superficies lo que el primero de la obra de Enriques-Chisini es para la teoría de las curvas algebraicas.

El libro segundo es diferente al primero en cuanto al método, pues, mientras en éste se estudian tipos particulares de superficies racionales, en el segundo el estudio es de carácter general, tratando de establecer criterios para determinar la racionalidad de las superficies. Sirven de base a este estudio los teoremas de Nœther, Picard y el de Castelnuovo, aplicables el primero a superficies con un haz de curvas racionales, el de Picard a superficies con secciones planas o hiperplanas racionales y el de Castelnuovo a superficies con secciones elípticas.

En los capítulos IV y VII trata la relación de la teoría con el estudio de la involución plana. En el V estudia el plano doble y en el VI trata casos particulares de superficies racionales, completando el estudio hecho en el libro primero.

Termina el 2º libro tratando de relacionar la teoría de las superficies racionales con la teoría general de las superficies.

El autor agrega al final de los capítulos una nota histórica, siguiendo así una vez más las normas de su maestro, Enriques. Resumiendo podemos decir, que el profesor Conforto nos ha dado un hermoso libro que ha de ser lectura obligada de todos los estudiosos de la geometría algebraica. Creemos que esta obra cumple dignamente el propósito de su autor: servir de introducción a la obra que el eminente profesor Enriques prepara sobre teoría de las superficies algebraicas.

F. Toranzos

SCHOUTEN J.A. - STRUIK D. J.—Einführung in die Neueren Methoden der Differentialgeometrie.—Dos volúmenes de 204 y 340 págs. 2ª ed. Noordhoff.—Groningen. Batavia, 1935 y 1938.

Esta segunda edición de la bien acreditada obra, que contiene la mejor exposición en lengua alemana de la moderna Geometría diferencial, constituye en realidad un nuevo tratado, muy distinto del primero, por haber sido modificado en puntos esenciales y enriquecido con nuevas aportaciones.

Mientras en la citada primera edición eran tratados los temas por el llamado Análisis directo y por el Cálculo absoluto, los autores, convencidos de la superioridad de esta genial creación de Ricci y Levi-Civita, la usan ahora sistemática y exclusivamente. Cada objeto está representado por una letra característica y la modificación del sistema de referencia se manifiesta mediante los índices. La elección de letras para éstos no es indiferente y los autores dedican gran atención a este punto, estableciendo en forma de cuadro sinóptico el convenio a que se mantienen fieles en toda la obra.

Otra novedad algorítmica consiste en distinguir el doble significado de la igualdad, según que se aplique a igualdades invariantes o no. Esta diversa significación se pone de manifiesto colocando un asterisco sobre el signo en el primer caso y una h en el segundo.

El primer volumen, aparecido en 1935, contiene la teoría algebraica, ilustrada con esquemas y figuras, y la teoría de las transformaciones, incluyendo no solamente los métodos clásicos de Levi-Civita, sino también el llamado simbolismo D de van der Wærden y Bortolotti, con aplicación a las formas geodésicas, curvatura y problemas extremales en general.

El segundo tomo de la obra, debido a Struik, mientras que el primero es de Schouten, contiene las aplicaciones geométricas de los métodos de cálculo expuestos en aquél. En esta segunda edición, no solamente se ha incluido todo el material de la primera edición, sino también otras cuestiones contenidas en la agotada obra de Struit sobre geometría diferencial de n dimensiones.

He aquí el contenido de este segundo tomo: teoría de curvas de E_3; curvas sobre variedades n-dimensionales, congruencias de curvas y *Bahnsysteme*, esto es, familias tales que cada par de puntos determinan una curva de ella. Teoría de hipersuperficies, variedades en general, teoría de la curvatura, deformaciones, transformaciones especiales (equilongas, conformes, de Hermite, etc.).

La aparición de este segundo volumen se ha demorado tres años, que han servido para su perfeccionamiento, permitiendo al autor tener en cuenta recientes progresos.

La obra es altamente recomendable, aun para los que no conozcan los métodos de la moderna geometría diferencial, pues procede gradualmente, facilitando el aprendizaje con multitud de ejercicios en cada capítulo, de los cuales da la solución al final; pero no escuetamente, sino con las necesarias indicaciones que guían al lector. De este modo altamente recomendable, se logra no solamente mayor eficacia didáctica, sino también aumentar el contenido de la obra con multitud de cuestiones de interés menor, sin recargar la exposición sistemática, que está ceñida a las líneas fundamentales de la teoría.

Cada volumen está enriquecido con una bibliografía cuidadosamente elaborada y con un minucioso índice alfabético, que facilita la búsqueda de las definiciones cuando el lector se encuentra perdido, por haber olvidado alguna. Todo ello avalora esta magnífica obra digna de todo encomio.

R. P.

REVISTA DE REVISTAS

La dirección publicará las críticas enviadas por los miembros de la U.M.A., que en su conjunto crea justificadas, sin hacerse solidaria de todas sus afirmaciones; cualquier juicio de los impresos en estas páginas que estuviera equivocado, merecerá inmediata rectificación si el autor aludido, o cualquier otro lector, lo solicita con fundamento.

La impresionante mole de las memorias matemáticas que desde hace algún tiempo ocupan número tras número las revistas científicas del país, desplazando a los fecundos experimentadores, que antes llenaban sus páginas, es un acontecimiento que merece atraer nuestra atención, reanudando la "Revista de revistas" que fué iniciada en el primer número de la nuestra.

Es probable que a pesar de la estricta objetividad que presidirá estos extractos (o quizás por causa de ella misma) el balance de tales análisis no resulte halagador para algunos autores; pero creemos hacer obra patriótica de depuración prosiguiendo la exposición minuciosa del contenido bueno o malo de los trabajos matemáticos argentinos, pues tras ella quedará trazada una clara línea divisoria: a un lado los trabajadores de buena fe que prefieren estudiar lo ya creado antes de inventar prematuramente, y se limitan a resolver algunos problemas bien planteados y seriamente estudiados, al alcance de sus conocimientos y dotes intelectuales; del otro lado quienes tan faltos de escrúpulos como de preparación y de talento, aprovechando la triple coyuntura que les ofrece la prudencia de los muy pocos lectores capacitados en el país, la dificultad de entender exactamente nuestra lengua para los competentes de otros países y la ingente cantidad de producción mundial que facilita el contrabando en las revistas extranjeras, cuando lleva el marchamo de un cargo universitario, fabrican memorias al por mayor, sin freno ni contralor interno ni exterior, sin preocuparse de la certeza o falsedad, de la novedad o repetición, recorriendo toda la escala de la deshonestidad científica: desde la trivialidad desfigurada con ampulosa terminología, que impresiona a los no versados, hasta el plagio más descarado, que solamente indigna a las conciencias rectas, mientras merece sonriente tolerancia por parte de los espíritus "comprensivos".

Divisoria paralela quedará automáticamente trazada entre los espectadores del lamentable espectáculo. Es seguro que muchos de ellos han de censurar acremente esta abierta persecución del fraude, rebuscando nobles razones que tienden quizás a justificar ante la propia conciencia su propensión al mismo; pues simpatía, en su sentido estricto, no es similitud de afectos sino comunidad de dolencias; y lógico es, por tanto, que cada cual simpatice con los pacientes del mismo mal, los defienda y les dispense solícita protección.

Preferimos suponer que estos casos singulares, por fortuna poco numerosos, son fenómenos de autosugestión, y que hay a favor de los pacientes la atenuante de la inconsciencia acerca del desprestigio colectivo que arrojan sobre el país entero, ante el desapasionado juicio del mundo culto, perjudicando gravemente a los trabajadores serios de su misma nacionalidad. Pero, aun mediando esta consideración, que atenúa la responsabilidad de sus autores, es preciso poner coto a tales desafueros. Callar un día más sería algo más innoble que la cobardía y más desdoroso que la incompetencia profesional; sería la complicidad plena con la inmoralidad que a todos envuelve y a todos mancha.

Justicia no es igualdad, sino adecuación de medidas; es benevolencia hacia el principiante que labora animoso con sus débiles fuerzas y se siente orgulloso de sus pequeños hallazgos; es rigor ante la petulancia, freno contra la especulación y castigo para el fraude.

La Dirección

SAGASTUME BERRA y DURAÑONA VEDIA.—*Fundamentación axiomática del cálculo vectorial.*—Anales Soc. Científica Argentina, T. CXXVII, páginas 268-270.

Contiene esta breve comunicación dos ideas muy sencillas, dignas de nota. Una modificación en los postulados corrientes de los espacios vectoriales y algunas indicaciones para demostrar su independencia.

La modificación introducida consiste en eludir el postulado de la multiplicación de cada vector por un número real, sustituyéndolo por el postulado de la bisección, es decir, se postula la existencia de un vector mitad de cualquier otro; y asegurada así la existencia de vectores deducidos de cualquier vector por división por una potencia de 2 y multiplicación por cualquier número natural, vectores que forman un conjunto denso, es claro que por paso al límite queda definido el producto por todo número real.

Esta modificación es admisible y tiene cierto interés proponiéndose, como lo hacen los autores, definir axiomáticamente el espacio vectorial elemental; pues claro es que para fundamentar los espacios vectoriales más generales, es preferible anteponer la linealidad a la continuidad.

Aunque habría costado poco esfuerzo a los autores deducir las fáciles consecuencias que resultan de los postulados, demostrando minuciosamente todos los teoremas bien conocidos del espacio vectorial, proficua y sencilla labor que les habría permitido llenar docenas de páginas, han tenido el buen gusto de no incurrir en tal trivialidad que solo deslumbra a los lectores más ineptos, y se han limitado, como es justo, a exponer en tres páginas las dos ideas de su trabajo. Desgraciadamente, son tales las costumbres de las publicaciones científicas de nuestro ambiente, que es preciso subrayar con elogio todo proceder correcto y razonable.

CARLOS BIGGERI.—*Sobre las abscisas de convergencia de las integrales de Laplace y de las series de Dirichlet.*—Anales de la Sociedad Científica Argentina. Tomo CXXVIII, agosto 1939, págs. 65-70.

"La publicación de esta nota —declara el autor— la originó el asombro que nos causó el hecho de que se haya atribuido a Doetsch la afirmación: "la abscisa de convergencia simple de la integral [2] es *menor* o igual que la abscisa de convergencia simple de la integral [1] cuando el exponente ω es igual a 1".

Las integrales que el señor Biggeri designa por [1] y [2] son éstas:

$$[1] \qquad \int_0^\infty \varphi(t)e^{-tz}\,dt\,; \qquad\qquad \int_0^\infty t^{\omega}\,\varphi(t)e^{-tz}\,dt\,. \qquad [2]$$

y la frase que cita entre comillas está sacada de la memoria del Dr. J. C. Vignaux titulada: "*Sobre algunas transformaciones funcionales lineales*", Anales de la Sociedad Científica Argentina, noviembre de 1938 y siguientes.

Conviene observar ante todo que de las tres veces que cita entre comillas la afirmación del Sr. Vignaux, en dos de ellas aparece desfigurada, pues éste se limita a escribir: «*como la abscisa de convergencia* λ' *de la integral* [4] *es* $\lambda' \leqq \lambda$»; y es muy posible que en el signo $\leqq$ haya una de tantas erratas tipográficas, que abundan en sus trabajos. No comprendemos, pues, el *asombro* del comentarista ante cuestión tan parva, cuando hay en las memorias de ambos copioso material para alimentar el asombro y hasta la indignación.

Por otra parte, tratándose de un hecho conocido, como es la igualdad $\lambda = \lambda'$, nada nos parece más natural (y así lo hace el Sr. Vignaux) que citar cualquier libro didáctico, como es el de Doetsch, sin atribuirle por ello la paternidad del descubrimiento.

Tomar tan insignificante *lapsus*, sea del autor o del tipógrafo, como materia para una extensa comunicación científica, parecerá sin duda excesivo rigor; y sobre todo cuando después de leida, el remedio propuesto resulta peor que la denunciada enfermedad.

Da, en efecto, el Dr. Biggeri, como aportación original, este teorema: "*Las abscisas de convergencia de las integrales de Laplace* [1] *y* [2] *siendo* ω *un número complejo fijado arbitrariamente, son siempre iguales*".

El lector menos ducho en cálculo de integrales se dará cuenta de la inexactitud de tamaña afirmación. Aun sin saber nada de exponentes complejos, basta elegir $\omega \leqq -1$ y tomar una función continua $\varphi(t)$ que no se anule en el origen; la integral [2] resultará divergente para todo valor atribuido a z (*). El autor se ha olvidado de que la integral tiene dos extremos y por tanto es preciso imponer a la función $\varphi(t)$ restricciones para que la segunda tenga sentido. Pero no es preciso tomarse tal trabajo; ni tampoco merecía la pena que se ha impuesto al llenar seis páginas de los Anales con este descubrimiento; pues *todo* el contenido de la comunicación (salvo la expresión de su *asombro* ante los *lapsus* ajenos y no ante los propios) lo podía haber reducido a estas cuatro líneas:

"La igualdad de las abscisas de convergencia de [1] y [2], suponiendo que existan ambas integrales en cada intervalo (o, t), así como también de las series [7] y [8], es corolario inmediato del teorema generalizado de Abel; como salta a la vista, sin cálculo ninguno".

Dicho sea en honor de la justicia, este pecado de trivialidad de la nota comentada resulta venial si se compara con los increibles errores cometidos por el mismo Dr. Biggeri en otras memorias (cuya crítica no ha tenido cabida en este número) en las cuales el resto de contenido no objetable es fruto de la apropiación de resultados ajenos.

(*) Apurando el argumento, hasta resulta así mucho más defendible que el teorema del crítico, la desigualdad $\lambda' \leqq \lambda$ del criticado, pues cabe que sea $\lambda = +\infty$, λ' finito. Tal sucede por ejemplo si es $\varphi(t) = 1/t$.

Para ingresar como miembro de la Unión Matemática Argentina, es necesaria la presentación del solicitante por dos socios fundadores, la admisión por la Junta, y el pago de una cuota de $ 5 m|n. mensuales.

La cuota a la REVISTA DE LA U. M. A., incluído el Suplemento, es de $ 10 m|n. anuales, cuyo envío deberá efectuarse por cheque, giro u otro medio libre de gastos, a la orden de la Tesorera, señorita Clotilde Bula, Perú 222, Buenos Aires.

Los señores suscritores, domiciliados en la Ciudad de Buenos Aires podrán, si lo prefieren, efectuar su pago en doce cuotas mensuales de $ 1.00 m|n. cada una, que serán cobradas a domicilio.

Los trabajos originales enviados para su publicación en la REVISTA DE LA U. M. A., serán previamente analizados por un ponente, quien emitirá dictamen acerca de la novedad y corrección de sus resultados.

La impresión de las tiradas aparte, y las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

Abonnement annuel à l'etranger: 4.00 dollars (Etats-Unis).

Prière d'adresser toute la correspondance scientifique et administrative à l'adresse ci-dessous:

Señor Secretario de la UNION MATEMATICA ARGENTINA

Prof. Fernando Gaspar

Perú 222, Buenos Aires (Rep. Argentina)

SUMARIO

BIBLIOGRAFIA