REVISTA DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

VOLUMEN 26, NUMERO 2
1972

BAHIA BLANCA
1972

UNION MATEMATICA ARGENTINA

La U.M.A. reconoce cuatro categorías de miembros: honorarios, protectores, titulares y adherentes. El miembro protector paga una cuota anual de $ 4000, por lo menos; el titular una cuota anual de $ 2000 y el adherente (estudiante solamente) una cuota anual de $ 1000. Los pagos deberán efectuarse por cheque, giro u otro medio de gastos, a la orden de UNION MATEMATICA ARGENTINA, Casilla de Correo 3588, Buenos Aires.

Los autores de trabajos reciben gratuitamente una tirada aparte de 50 ejemplares. Las correcciones extraordinarias de pruebas son por cuenta de los autores.

Foreign subscriptions: 12 U.S. dollars.

All administrative correspondence and subscriptions orders should be addressed to:

REVISTA DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

Casilla de Correo 3588

Buenos Aires. (Argentina)

REVISTA DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

VOLUMEN 26, NUMERO 2
1972

BAHIA BLANCA
1972

Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 26, 1972.

SOME ISOTHERMAL PROPERTIES OF CARTOGRAMS T AND DENSITY TRANSFORMATIONS T*

John DeCicco and Robert V. Anderson

1. ABSOLUTE DERIVATIVES AND NATURAL FAMILIES UNDER A CONFORMAL CARTOGRAM T.

Consider a conformal cartogram T between two Riemannian spaces V_n and $\overline{V}_n$, each of dimension $n \geqslant 2$, for which the scale $\rho = e^{\mu} = d\overline{s}/ds > 0$, where $\mu = \mu(x)$ is a point function. Under the conformal cartogram T two corresponding *unit* contravariant vectors λ^i and $\overline{\lambda}^i$ of V_n and $\overline{V}_n$ respectively transform according to the law

$$(1.1) \qquad \overline{\lambda}^i = e^{-\mu} \lambda^i .$$

Under T the arc length absolute derivative $\frac{\overline{D}\overline{\lambda}^i}{d\overline{s}}$ of a contravariant vector $\overline{\lambda}^i$ of $\overline{V}_n$ is expressed in terms of $\frac{D\overline{\lambda}^i}{ds}$ when it is considered as a vector of V_n, by the set of relations

$$(1.2) \qquad \frac{\overline{D}\overline{\lambda}^i}{d\overline{s}} = e^{-\mu} \frac{D\overline{\lambda}^i}{ds} + e^{-\mu} \left[\frac{d\mu}{ds} + \frac{\partial\mu}{\partial x^{\alpha}} \overline{\lambda}^{\alpha} \frac{dx^i}{ds} - (g_{jk}\overline{\lambda}^j \frac{dx^k}{ds})(g^{i\alpha} \frac{\partial\mu}{\partial x^{\alpha}})\right].$$

In particular if λ^i and $\overline{\lambda}^i$ are two corresponding *unit* contravariant vectors then

$$(1.3) \qquad \frac{D\overline{\lambda}^i}{d\overline{s}} = e^{-2\mu} \frac{D\lambda^i}{ds} + e^{-2\mu} \left[\frac{\partial\mu}{\partial x^{\alpha}} \lambda^{\alpha} \frac{dx^i}{ds} - (g_{jk} \lambda^j \frac{dx^k}{ds})(g^{i\alpha} \frac{\partial\mu}{\partial x^{\alpha}})\right].$$

Consider two curves $C: x^i = x^i(s)$ and $\overline{C}: \overline{x}^i = \overline{x}^i(\overline{s}) = x^i(\overline{s})$ which correspond under the conformal cartogram T between V_n and $\overline{V}_n$. Their two unit contravariant tangent vectors satisfy the relations $dx^i/d\overline{s} = e^{-\mu}(dx^i/ds)$ and the two corresponding contravariant geodesic curvature vectors K^i and $\overline{K}^i$ obey the law of transformation [1]

$$(1.4)\qquad \overline{K}^i = e^{-2\mu} K^i + e^{-2\mu} \left[\frac{d\mu}{ds}\frac{dx^i}{ds} - g^{i\alpha}\frac{\partial\mu}{\partial x^\alpha}\right].$$

A *natural family* Ω [2] of ∞^{2n-2} curves C of Riemannian space V_n is such that every curve C of Ω corresponds under a conformal cartogram T on V_n onto a Riemannian space $\overline{V}_n$ to a geodesic $\overline{C}$ of $\overline{V}_n$.

In particular, the set of ∞^{2n-2} geodesics C of a Riemannian space V_n is a natural family.

THEOREM 1.1. *A natural family* Ω *of a Riemannian space* V_n *is composed of all the* ∞^{2n-2} *integral solutions of the set of* n *second order ordinary differential equations*

$$(1.5)\qquad K^i = \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = g^{i\alpha}\frac{\partial\mu}{\partial x^\alpha} - \frac{d\mu}{ds}\frac{dx^i}{ds}\ .$$

This is obtained from (1.4) by setting $\overline{K}^i = 0$.

It is evident that under a conformal cartogram T that a natural family Ω of V_n corresponds to a natural family $\overline{\Omega}$ of $\overline{V}_n$.

2. THE SYMBOLS A^i_{jk} AND B_{jk} OF A CONFORMAL SPACE Γ_n.

Consider a Riemannian space V_n of dimension $n \geqslant 2$. The totality of all Riemannian spaces $\overline{V}_n$ such that there exists a conformal cartogram T between V_n and $\overline{V}_n$ is termed a *conformal space* Γ_n.

If V_n and $\overline{V}_n$ belong to the same conformal space Γ_n then their affine connections are related by the law

$$(2.1)\qquad \overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \delta^i_j\frac{\partial\mu}{\partial x^k} + \delta^i_k\frac{\partial\mu}{\partial x^j} - g_{jk}\,g^{i\alpha}\frac{\partial\mu}{\partial x^\alpha}\ ;$$

where μ is the scale of the conformal cartogram T relating V_n and $\overline{V}_n$.

It is an immediate consequence of these relations that

$$(2.2)\qquad \frac{\partial\mu}{\partial x^j} = \frac{1}{n}\left[\overline{\Gamma}^\alpha_{\alpha j} - \Gamma^\alpha_{\alpha j}\right] \qquad j = 1,2,\dots,n.$$

Consider a fixed Riemannian space V_n, for $n \geqslant 2$. The symbols A^i_{jk}

and B_{jk} are defined by the expressions

$$(2.3) \qquad A^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \frac{1}{n}(\delta^i_j \Gamma^\alpha_{\alpha k} - \delta^i_k \Gamma^\alpha_{\alpha j}) + \frac{1}{n} g_{jk} g^{i\beta} \Gamma^\alpha_{\alpha\beta} ,$$

$$(2.4) \qquad B_{jk} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\alpha j}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\alpha k}}{\partial x^j} .$$

THEOREM 2.1. *Two Riemannian spaces* V_n *and* $\overline{V}_n$, *for* $n \geqslant 2$, *are conformally equivalent if and only if the two sets of symbols* A^i_{jk} *and* B_{jk} *are the same in every admissible coordinate system* (x), *provided that the set of initial conditions* $\overline{g}_{ij}(x_0) = e^{2\mu(x_0)} g_{ij}(x_0)$ *is satisfied for* $i,j = 1,2,\ldots,n$ *at some fixed point* P_0, *where* $\mu(x_0)$ *is a fixed real constant.*

For, by means of (2.1) and (2.2) it is found that $\overline{A}^i_{jk} = A^i_{jk}$ and $\overline{B}_{jk} = B_{jk}$ for two conformally equivalent Riemannian spaces V_n and $\overline{V}_n$.

Conversely, suppose that $\overline{A}^i_{jk} = A^i_{jk}$ and $\overline{B}_{jk} = B_{jk}$ for two Riemannian spaces V_n and $\overline{V}_n$. The second set represent integrability conditions for the equations (2.2). Thus, let $\mu = \mu(x)$ represent a solution of (2.2). There exists one and only one solution satisfying the prescribed set of initial conditions at the fixed point P_0. By use of the conditions $\overline{A}^i_{jk} = A^i_{jk}$ the law of transformation (2.1) is found. It then is easily deduced that $\overline{g}_{ij} = e^{2\mu(x)} g_{ij}$ where $\mu = \mu(x)$ is the unique solution discussed above. Consequently V_n and $\overline{V}_n$ are conformally equivalent.

It is noted that the symbols A^i_{jk} are symmetric in the lower indices and that $A^i_{ik} = A^i_{ki} = 0$. However the A^i_{jk} do *not* form a tensor. The symbols B_{jk} are skew symmetric, that is $B_{jk} = -B_{kj}$, and form a skew symmetric covariant tensor of second order.

3. COVARIANT DIFFERENTIATION IN A CONFORMAL SPACE Γ_n.

In a Riemannian space V_n the covariant derivatives $\lambda^i_{,k}$ and $\lambda_{i,k}$ of a contravariant vector λ^i and a covariant vector λ_i may be given by

$$(3.1)\quad \begin{aligned} \lambda^i_{,k} &= \frac{\partial\lambda^i}{\partial x^k} + A^i_{ak}\,\lambda^a + \frac{1}{n}\,\lambda^i\,\Gamma^\alpha_{\alpha k} + \frac{1}{n}\,\delta^i_k\,\Gamma^\alpha_{\alpha a}\,\lambda^a - \\ &- \frac{1}{n}\,g^{ia}\,g_{kb}\,\Gamma^c_{ac}\,\lambda^b\,, \\ \lambda_{i,k} &= \frac{\partial\lambda_i}{\partial x^k} - A^a_{ik}\,\lambda_a - \frac{1}{n}\,\lambda_i\,\Gamma^\alpha_{\alpha k} - \frac{1}{n}\,\lambda_k\,\Gamma^\alpha_{\alpha i} + \\ &+ \frac{1}{n}\,g_{ik}\,g^{ab}\,\Gamma^c_{ac}\,\lambda_b\,. \end{aligned}$$

The two corresponding absolute differentials are $D\lambda^i = \lambda^i_{,k}\,dx^k$ and $D\lambda_i = \lambda_{i,k}\,dx^k$.

In a conformal space Γ_n, $n \geqslant 2$, with invariant symbols A^i_{jk} and B_{jk} the conformal covariant derivatives $\Delta_k\lambda^i$ and $\Delta_k\lambda_i$ of any contravariant vector λ^i and any covariant vector λ_i are defined by

$$(3.2)\quad \Delta_k\lambda^i = \frac{\partial\lambda^i}{\partial x^k} + A^i_{ka}\lambda^a\,, \qquad \Delta_k\lambda_i = \frac{\partial\lambda_i}{\partial x^k} - A^a_{ik}\lambda_a\,.$$

The corresponding conformal absolute differentials are $\Delta\lambda^i = \Delta_k\lambda^i dx^k$ and $\Delta\lambda_i = \Delta_k\lambda_i dx^k$.

THEOREM 3.1. *The four sets of quantities,* $\Delta_k\lambda^i$, $\Delta_k\lambda_i$, $\Delta\lambda^i$, $\Delta\lambda_i$ *are all invariant under the conformal group* G *of the conformal group* G *of* Γ_n. *If* V_n *is an element of* Γ_n *then the relationships between these conformal covariant derivatives and the covariant derivatives relative to* V_n *are found by substituting the relations* (3.2) *into the equations* (3.1).

It is observed that the differential $d(\phi,\psi)$ of the inner product $(\phi,\psi) = \phi^i\psi_i$ of any contravariant vector ϕ^i and any covariant vector ψ_i is

$$d(\phi,\psi) = D(\phi,\psi) = \phi^i D\psi_i + \psi_i D\phi^i = \phi^i \Delta\psi_i + \psi_i \Delta\phi^i = \tag{3.3}$$
$$= \Delta(\phi,\psi).$$

THEOREM 3.2. *If two Riemannian spaces* V_n *and* $\overline{V}_n$, *for* $n \geqslant 2$, *belong to the same conformal space* Γ_n *and correspond by a conformal cartogram* T *for which the scale is* $\rho = e^{\mu} = d\overline{s}/ds > 0$, *then for every geometric vector* $\lambda = \lambda^i = \lambda_i$ *with* $|\lambda| > 0$ *of* V_n *there exists a point function* $r = r(x)$ *depending on* λ *such that by* T *the images* $\overline{\lambda}^i$ *and* $\overline{\lambda}_i$ *of* λ^i *and* λ_i *in* V_n *are* $\overline{\lambda}^i = e^{r-\mu}\lambda^i$ *and* $\overline{\lambda}_i = e^{r+\mu}\lambda_i$. *The two covariant derivatives* $\lambda^i_{,k}$ *and* $\lambda_{i,k}$ *obey the laws of transformation*

$$\begin{aligned} \overline{\lambda}^i_{,k} &= e^{r-\mu}\, [\lambda^i_{,k} + \lambda^i \frac{\partial r}{\partial x^k} + \delta^i_k\, \lambda^a \frac{\partial \mu}{\partial x^a} - g^{ia}\, g_{kb} \frac{\partial \mu}{\partial x^a}\, \lambda^b], \\ \overline{\lambda}_{i,k} &= e^{r+\mu}\, [\lambda_{i,k} + \lambda_i \frac{\partial r}{\partial x^k} - \lambda_k \frac{\partial \mu}{\partial x^i} + g_{ik}\, g^{ab}\, \lambda_a \frac{\partial \mu}{\partial x^b}]. \end{aligned} \tag{3.4}$$

This result is a consequence of the previous discussion.
It is noted that when $r = 0$, we obtain the laws of transformation for unit vectors.

4. SOME CONFORMAL PROPERTIES OF THE LAME DIFFERENTIAL PARAMETERS $\Delta_1(U,V)$ AND $\Delta_2(V)$[3].

In a Riemannian space V_n, for $n \geqslant 2$, the *Lamé differential parameter* $\Delta_1(U,V)$ of order one, of two scalars $U = U(x)$ and $V = V(x)$ is the scalar

$$\Delta_1(U,V) = g^{jk} \frac{\partial U}{\partial x^j} \frac{\partial U}{\partial x^k} = (\text{grad } U, \text{ grad } V), \tag{4.1}$$

In particular, if $U = V$, then $\Delta_1(V) = \Delta_1(V,V) = |\text{grad } V|^2$.

The *Lamé differential parameter of second order* $\Delta_2(V) = \nabla^2(U)$ is the Laplacean and is defined by the scalar

$$(4.2)\qquad \Delta_2(V) = \nabla^2(V) = g^{jk}\, V_{,jk} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial}{\partial x^j}\left[\sqrt{g}\, g^{jk}\,\frac{\partial V}{\partial x^k}\right] \;;$$

where $g = |g_{ij}| > 0$.

If two Riemannian spaces correspond by a conformal cartogram T and if $V = V(x)$ is a scalar then

$$(4.3)\qquad \overline{V}_{,j} = V_{,j} \quad , \quad \overline{V}_{,jk} = V_{,jk} - V_{,j}\,\mu_{,k} + g_{jk}\,\Delta_1(\mu,V).$$

The three laws of transformation for the Lamé differential parameters are

$$(4.4)\qquad \begin{aligned} &\overline{\Delta_1(U,V)} = e^{-2\mu}\,\Delta_1(U,V) \quad , \quad \overline{\Delta_1(V)} = e^{-2\mu}\,\Delta_1(V) \\ &\overline{\Delta_2(V)} = e^{-2\mu}\,[\Delta_2(V) + (n-2)\,\Delta_1(\mu,V)]\,. \end{aligned}$$

These are obtained by means of Theorem 3.2, where the scalar $r = r(x)$ is replaced by $-\mu(x)$.

If a scalar $V = V(x)$ with $\Delta_1(V) > 0$, is a harmonic function in a Riemannian space V_n, then the equation $V = V(x)$ = constant defines an *isothermal family* of ∞^1 surfaces $\sum_{n-1}$, each of deficiency one, in V_n.

It may be proved that a simple family of ∞^1 surfaces $\sum_{n-1}$, each of deficiency one in a Riemannian space V_n, for $n \geqslant 2$, is an isothermal family $V = V(x) = C$ = constant if and only if $V = V(x)$ obeys a partial differential equation of second order of the form

$$(4.5)\qquad \frac{\Delta_2(V)}{\Delta_1(V)} = \frac{g^{jk}\,V_{,jk}}{g^{jk}\,V_{,j}V_{,k}} = F(V)\;,$$

where $F = F(V)$ is a scalar depending *only* on $V = V(x)$.

THEOREM 4.1.[4] *If two Riemannian spaces* V_n *and* $\overline{V}_n$, *for* $n \geqslant 2$, *correspond by a conformal cartogram* T *then every isothermal family in* V_n *is converted into an isothermal family in* $\overline{V}_n$ *if and only if either* $n = 2$ *or else if* $n \geqslant 3$, T *is a homothetic cartogram for which* μ *is a real constant.*

This proposition is established by means of the conditions (4.4) and (4.5).

5. DENSITY TRANSFORMATIONS BETWEEN TWO RIEMANNIAN SPACES V_n AND $\overline{V}_n$.

Let two Riemannian spaces V_n and $\overline{V}_n$, for $n \geqslant 2$, correspond by a cartogram T, conformal or not, for which the differential ds and $d\overline{s}$ of arc length along corresponding curves C and $\overline{C}$ of V_n and $\overline{V}_n$ are defined by $ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$ and $d\overline{s}^2 = \overline{g}_{ij}\, dx^i\, dx^j$.

A *density transformation* T* between V_n and $\overline{V}_n$ is such that their respective points correspond by a cartogram T, either conformal or not, and a scalar $V = V(x)$, which is evaluated at a point P of V_n is converted into the scalar

$$\overline{V} = \overline{V}(x) = F(V;x) \ , \tag{5.1}$$

for which $\frac{\partial \overline{V}}{\partial V} = \frac{\partial F}{\partial V} \neq 0$, whose value is associated with the corresponding point $\overline{P}$ of $\overline{V}_n$. A scalar $V = V(x)$ calculated at P in V_n is called a *density* V of P.

THEOREM 5.1. *Under a density transformation* T* *between two Riemannian spaces* V_n *and* $\overline{V}_n$, *for* $n \geqslant 2$, *the Lamé differential parameters* $\Delta_1(V)$ *and* $\Delta_2(V)$ *of a density transform according to the laws*

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta}_1(\overline{V}) &= \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)^2 \overline{\Delta}_1(V) + 2\,\frac{\partial F}{\partial V}\,\overline{\Delta}_1(V,F) + \overline{\Delta}_1(F) \ ,\\
\Delta_1(\overline{V}) &= \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)^2 \Delta_1(V) + 2\,\frac{\partial F}{\partial V}\,\Delta_1(V,F) + \Delta_1(F) \ ,\\
\overline{\Delta}_2(\overline{V}) &= \frac{\partial F}{\partial V}\,\overline{\Delta}_2(V) + \overline{\Delta}_2(F) + 2\,\overline{\Delta}_1\left(\frac{\partial F}{\partial V}\ ,\ V\right) + \frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\,\overline{\Delta}_1(V) \ ,\\
\Delta_2(\overline{V}) &= \frac{\partial F}{\partial V}\,\Delta_2(V) + \Delta_2(F) + 2\,\Delta_1\left(\frac{\partial F}{\partial V}\ ,\ V\right) + \frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\,\Delta_1(V).
\end{aligned} \tag{5.2}$$

A *conformal density transformation* T* is one for which the associated cartogram T is conformal. Under a conformal density transformation T* the preceding result yields

THEOREM 5.2. *Under a conformal density transformation* T* *for which the scale of the associated conformal cartogram* T *is* $\rho = e^{\mu} =$ $= d\overline{s}/ds > 0$, *the Lamé differential parameters transform according* *to the rules*

$$e^{2\mu}\,\bar{\Delta}_1(\bar{V}) = \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)^2 \Delta_1(V) + 2\,\frac{\partial F}{\partial V}\,\Delta_1(V,F) + \Delta_1(F)$$

$$(5.3)\qquad e^{2\mu}\,\bar{\Delta}_2(\bar{V}) = \frac{\partial F}{\partial V}\,\Delta_2(V) + \Delta_2(F) + 2\,\Delta_1\left(\frac{\partial F}{\partial V}\,,\,V\right) + \frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\,\Delta_1(V) + $$

$$+ (n-2)\left[\frac{\partial F}{\partial V}\,\Delta_1(V,\mu) + \Delta_1(F,\mu)\right].$$

This is established by means of equations (4.4) and Theorem 5.1. If a conformal density transformation T* between two Riemannian spaces is such that the scale of the associated cartogram T is $\rho = e^{\mu} = d\bar{s}/ds > 0$ and the law of change for the density V is

$$(5.4)\qquad G\,\bar{V} = G(x)\,\bar{V}(x) = V(x) = V$$

where $G = G(x)$ is a fixed positive scalar, then from Theorem 5.2 the Lamé differential parameters transform as follows

$$G^4 e^{2\mu}\,\bar{\Delta}_1(\bar{V}) = G^2\,\Delta_1(V) - 2\,G\,V\,\Delta_1(V,G) + V^2\,\Delta_1(G)\ ,$$

$$(5.5)\qquad G^2 e^{2\mu}\,\bar{\Delta}_2(\bar{V}) = [G\,\Delta_2(V) - V\,\Delta_2(G)] + (n-2)[G\,\Delta_1(V,\mu) -$$

$$- V\,\Delta_1(G,\mu)] + \frac{2}{G}\,[V\,\Delta_1(G) - G\,\Delta_1(V,G)]\,.$$

The following proposition is an extension to Riemannian space V_n, for $n \geqslant 2$, of the Kelvin transformation T*[5] of a Euclidean space E_n.

THEOREM 5.3. *The conformal density transformation* T* *whose density transforms according to the law* (5.4) *is such that the Lamé differential parameter of second order obeys*

$$(5.6)\qquad G^2 e^{2\mu}\,\bar{\Delta}_2(\bar{V}) = G\,\Delta_2(V) - V\,\Delta_2(G)$$

if and only if, except for a real positive multiplicative constant, the scale of the associated cartogram T *and the law for the change of density are*

$$(5.7)\qquad \rho = e^{\mu} = 1/R^2 = d\bar{s}/ds > 0\quad ,\quad \bar{V} = R^{n-2}\,V\ ,$$

where $R = R(x)$ *is a real positive scalar. The rules for the change* *of the Lamé differential parameters are*

$$\overline{\Delta}_1(\overline{V}) = R^{2n}\,[\Delta_1(V) - 2\,V\,R^{n-2}\,\Delta_1(V\,,\,1/R^{n-2}) +$$

$$(5.8) \qquad + V^2\,R^{2n-4}\,\Delta_1(1/R^{n-2})]\;,$$

$$\overline{\Delta}_2(\overline{V}) = R^{n+2}\,\Delta_2(V) - V\,R^{2n}\,\Delta_2(1/R^{n-2})\;.$$

For, the given conformal density transformation T* possesses the stated property if and only if

$$(5.9) \quad (n-2)[G\,\Delta_1(V,\mu) - V\,\Delta_1(G,\mu)] + \frac{2}{G}\,[V\,\Delta_1(G) - G\,\Delta_1(V,G)] = 0$$

is an identity. If $\rho = e^{\mu} = 1/R^2$, where $R = R(x)$ is a real positive scalar, then the preceding identity is valid if and only if $G = e^{\frac{1}{2}(n-2)\mu} = 1/R^{n-2}$, except for a real positive multiplicative constant. Upon substituting this value for G in equations (5.3) the result follows.

In terms of cartesian coordinates of a point P in a Euclidean space E_n, for $n \geqslant 2$, an inversion T with respect to a sphere $\sum_{n-1}$ of dimension $n-1 \geqslant 1$, with center at a fixed point P_0 given by $(x_0^i) = (x_0^1,\dots,x_0^n)$ and radius $a > 0$ is given by the set of n equations

$$(5.10) \qquad X^i - x_0^i = \frac{a^2}{R^2}\,(x^i - x_0^i)\;, \quad i = 1,2,\dots,n\;,$$

where $R^2 = \delta_{ij}(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) > 0$. The scale of this inversion T is $\rho = d\overline{s}/ds = a^2/R^2 > 0$.

Therefore, every such T is a conformal cartogram T of the Euclidean space E_n onto itself, except for the center (x_0^i) of the sphere $\sum_{n-1}$

Since $1/R^{n-2} > 0$, is a harmonic function in E_n it is found that

$$(5.11) \qquad \overline{V} = R^{n-2}\,V\;, \qquad \overline{\Delta}_2(\overline{V}) = R^{n+2}\,\Delta_2(V)\;.$$

The system of equations (5.10) and (5.11) forms the Kelvin transformation T* for the Euclidean space E_n. The importance of such a transformation is that it converts every isothermal family Ω of ∞^1 surfaces $\sum_{n-1}$ into another family $\overline{\Omega}$ of ∞^1 surfaces in E_n.

REFERENCES

[1] DeCICCO, J., *The Riemannian geometry of physical systems of curves*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, Bologna, Italy, 1962.

[2] KASNER, E., *Natural families of trajectories: conservative fields of force*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol.10, pp. 201-219, 1909.

[3] EISENHART, L.P., *Riemannian Geometry*, Princeton University Press, 1949.

[4] DeCICCO, J. and ANDERSON, R.V., *Some theorems on isothermal families in Riemannian space* V_n, Ricerche di Matematica, Naples, Italy, Vol. 16, 1967.

[5] KELLOGG, O.D. *Foundations of Potencial Theory*, Frederick Ungar Publishing Company, New York.

Illinois Institute of Technology
Université Du Québec à Montréal

Recibido en agosto de 1971.

Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 26, 1972.

CONVEX POLYTOPES IN RIEMANNIAN MANIFOLDS

by Su-shing Chen

1. INTRODUCTION.

Let M^n be a n-dimensional Riemannian manifold. By a m-dimensional convex polytope P^m embedded in M^n $(2 \leqslant m \leqslant n)$ we mean a convex Riemannian polyhedron (for definition, see [1]) embedded in M^n bounded by a finite number of totally geodesic submanifolds P_λ^{m-1} of dimension m-1 such that P_λ^{m-1} intersect at lower dimensional totally geodesic submanifolds P_μ^r $(0 \leqslant r \leqslant m-2)$.

Let various dimensional outer angles of P^m be given. One question is to find the volume $V(P^m)$ of P^m in terms of the given outer angles of P^m. When m is even (m = 2p) and M^n is of constant sectional curvature K ($\neq 0$), the Gauss-Bonnet formula of Allendoerfer, Chern, Fenchel and Weil ([1] and [2]) implies such a volume formula which might be interesting and seems not to have appeared in given classical literatures on convex polytopes.

2. GAUSS-BONNET FORMULA OF RIEMANNIAN POLYHEDRA IN RIEMANNIAN MANIFOLDS.

A Riemannian polyhedron P^m is a Riemannian manifold with a boundary consisting of polyhedra P_λ^r of lower dimensions for $0 \leqslant r \leqslant m-1$. We denote by $X'(P^m)$ the inner characteristic of P^m, that is, the Euler-Poincaré characteristic of the open complex consisting of all inner cells in an arbitrary simplicial or cellular subdivision of P^m.

From now on we shall assume m = 2p, that is, m is even.

Let $S(P^m)$ be the tangent sphere bundle over P^m that is the bundle of unit tangent vectors of P^m. Let $\sigma : S(P^m) \longrightarrow P^m$ be the projection. Let $\in_{i_1 \ldots i_k}$ be the Kronecker index which is equal to +1 or -1 according as $i_1 \ldots i_k$ constitute an even or odd permutation of 1,...,k. In [2], Chern constructed a (m-1)-form

$$\Phi = \frac{1}{\pi^p} \sum_{\lambda=0}^{p-1} (-1)^\lambda \frac{1}{1.3\ldots(2p-2\lambda-1)2^{p+\lambda}\ \lambda!} \Phi_\lambda$$

on $S(P^m)$, where for $\lambda = 0,1,\ldots,p-1$,

$$\Phi_\lambda = \sum \epsilon_{i_1\ldots i_{2p-1}} \Omega_{i_2}^{i_1} \wedge \Omega_{i_4}^{i_3} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_{2\lambda}}^{i_{2\lambda-1}} \wedge \omega_{2p}^{i_{2\lambda+1}} \wedge \ldots \wedge \omega_{2p}^{i_{2p-1}}.$$

There exists a unique closed m-form Ψ on P^m such that

$$\sigma^*(\Psi) = \frac{(-1)^p}{2^{2p}\pi^p\ p!} \sum \epsilon_{i_1\ldots i_{2p-1}} \Omega_{i_2}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_{2p}}^{i_{2p-1}}$$

Let $\Gamma(P^m)$ be a outer normal vector field on P^m in $S(P^m)$. Then the Gauss-Bonnet formula for Riemannian polyhedra P^m $(m = 2p)$ in Riemannian manifolds is given by ([1] and [2])

$$(1) \qquad \int_{P^m} \Psi = \int_{\gamma(P^m)} \sigma^*\Psi = \int_{\partial P^m} \int_{\Gamma(\partial P^m)} \Phi - \chi'(P^m)$$

where $\Gamma(\partial P^m)$ denotes the outer angle at an arbitrary point x of ∂P^m which is a spherical cell on the unit sphere S^{m-r-1} in the normal linear manifold to P_λ^r at x.

3. CONVEX POLYTOPES IN RIEMANNIAN MANIFOLDS OF CONSTANT CURVATURE K($\neq$0).

Let P^m be a convex polytope in a Riemannian manifold M^n of constant sectional curvature $K(\neq 0)$. We shall consider P^m as a convex polytope in a totally geodesic submanifold N^m of M^n. The curvature form $\Omega = (\Omega_j^i)$ in the principal bundle $O(N^m)$ satisfies

$$\Omega_j^i = K\,\theta^i \wedge \theta^j$$

where $\theta = (\theta^i)$ is the canonical form in $O(N^m)$.

Consequently,

$$\int_{P^m} \Psi = \frac{(-1)^p}{2^{2p}\pi^p\ p!} \int_{\gamma(P^m)} \sum \epsilon_{i_1\ldots i_{2p}} \Omega_{i_2}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_{2p}}^{i_{2p-1}} =$$

$$= \frac{(-1)^p}{2^{2p}\pi^p \;\; p!} \;\; [(2p)!] \;\; K^p \; V(P^m).$$

Since P^m is convex, $X'(P^m) = 1$. Hence (1) becomes

$$\int_{P^m} \Psi + 1 = \int_{\partial P^m} \int_{\Gamma(\partial P^m)} \Phi .$$

Let $\partial P^m = \bigcup_{r=0}^{m-1} \bigcup_{\mu} P_\mu^r$. Then we have

$$\int_{\partial P^m} \int_{\Gamma(\partial P^m)} \Phi = \sum_{\mu} \sum_{r=0}^{m-1} \int_{P_\mu^r} \int_{\Gamma(P_\mu^r)} \Phi .$$

Since P_μ^r are totally geodesic in N^m, we may choose a suitable frame $\{e_1,\ldots,e_r\}$ on a coordinate neighborhood U in P_μ^r such that $\{e_1,\ldots,e_r,e_{r+1},\ldots,e_m\}$ is a frame for N^m and the Christoffel symbol

$\Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} = 0 \qquad 1 \leqslant \alpha,\ \beta \leqslant r,\ r+1 \leqslant \delta \leqslant m.$ (see [3]).

We remark that under the spherical map η from $\Gamma(P_\mu^r)$ to S_μ^{m-r-1}, $\eta^*(d\sigma) = \omega_{2p}^{r+1} \wedge \ldots \wedge \omega_{2p}^{2p-1}$, where $d\sigma$ is the surface area element of S_μ^{m-r-1}.

It is not difficult to see that

$$(2) \quad \int_{P_\mu^r} \int_{\Gamma(P_\mu^r)} \Phi = \frac{(-1)^\lambda}{\pi^p} \; \frac{1}{1.3\ldots(2p-2\lambda-1)2^{p+\lambda}\lambda!} \int_{P_\mu^r} \int_{\Gamma(P_\mu^r)} \Phi_\lambda =$$

$$= \frac{(-1)^\lambda}{\pi^p} \; \frac{1}{1.3\ldots(2p-2\lambda-1)2^{p+\lambda}\lambda!} \, [(2\lambda)!(2p-2\lambda-1)!] K^\lambda V(P_\mu^{2\lambda}) \Gamma(P_\mu^{2\lambda})$$

when $r = 2\lambda$, otherwise

$$\int_{P_\mu^r} \int_{\Gamma(P_\mu^r)} \Phi = 0.$$

Consequently, we get from (1) and (2) the following

$$\frac{(-1)^p}{2^{2p}\pi^p \;\; p!} \, (2p)! \; K^p \; V(P^{2p}) + 1 =$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{p-1} \frac{(-1)^\lambda}{\pi^p} \frac{(2\lambda)!\ (2p-2\lambda-1)!\ K^\lambda}{1.3\ldots(2p-2\lambda-1)2^{p+\lambda}\ \lambda!} \sum_\mu V(P_\mu^{2\lambda})\ \Gamma(P_\mu^{2\lambda}).$$

Thus, we can express the volume $V(P^{2p})$ in terms of outer angles of P^{2p} and $P_\mu^{2\lambda}$, for $\lambda = 0,\ldots,p-1$. This will be achieved inductively. When $p = 1$, we get the usual Gauss formula for geodesic polygons.

REFERENCES

[1] C. ALLENDOERFER and A. WEIL, *The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra,* Trans. Amer. Math. Soc., 53, 101-129 (1943).

[2] S. CHERN, *On the Curvatura Integra in a Riemannian Manifold,* Ann. Math., 46 (4), 674-684 (1945).

[3] S. HELGASON, *Differential Geometry and Symmetric Spaces,* Academic Press, New York, (1962).

University of Florida
E.E.U.U.

Recibido en febrero de 1971.

Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 26, 1972.

ALGEBRAS DE OPERADORES TRANSITIVAS QUE CONTIENEN UNA SUBALGEBRA DE MULTIPLICIDAD ESTRICTA FINITA

por Domingo A. Herrero

Dedicado a la memoria de mis viejos.

1. INTRODUCCION. El problema de la existencia de subespacios invariantes para operadores en un espacio de Banach, en su forma más general, se plantea en los siguientes términos:

"Sea X un espacio de Banach sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos, sea $\mathcal{L}(X)$ el álgebra de todos los operadores de X y sea A una subálgebra *transitiva*; es decir, no existe ningún subespacio M((0) $\neq$ M $\neq$ X) que sea invariante bajo todos los operadores de A.

¿Se puede deducir de aquí que A = $\mathcal{L}(X)$, o existen subálgebras transitivas propiamente contenidas en $\mathcal{L}(X)$?.

Si la respuesta a la anterior cuestión es negativa, ¿qué condiciones adicionales sobre A implican que A = $\mathcal{L}(X)$?.

NOTA. Aquí, y en todo lo que sigue, X es un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$ de dimensión mayor que uno; *álgebra* significa *subálgebra fuertemente cerrada* de $\mathcal{L}(X)$, que *contiene al operador identidad* I; *operador y subespacio* deben entenderse como *aplicación lineal y continua* (de X en X) y *variedad lineal cerrada*, respectivamente.

A la fecha sólo se conocen respuestas parciales para la segunda cuestión, pero no hay contraejemplos para la primera. La literatura sobre el tema es amplia y el lector interesado encontrará abundante material en los artículos del volumen 20, número 10 (Abril/1971) de "Indiana University Mathematics Journal", y en los artículos allí citados.

Entre otras respuestas parciales, se tiene la siguiente (ver [6, *teor.(2.4.6)*] y [1,§1]).

TEOREMA 1. *Sea* A *un álgebra transitiva que satisface la condición (más fuerte que "transitividad"):*

(1) *No existe ninguna variedad lineal de* X *que sea invariante bajo* A*, excepto las triviales* (0) *y* X.

Entonces $A = \mathcal{L}(X)$.

Ahora bien, si A es transitiva y $M \neq (0)$ es una variedad lineal invariante bajo A, entonces $\overline{M}$ = clausura (M) es un subespacio invariante. Dado que A es transitiva, $\overline{M} = X$ y tenemos así que la condición (1) puede ser reemplazada por

(1') *No existe ninguna variedad lineal densa invariante bajo* A *y distinta de* X.

El principal resultado de esta nota (*lema 1*, más abajo) dice que ciertas hipótesis algebraicas sobre un álgebra B implican (1'), y de este resultado se deduce una interesante generalización del *teor. 1*.

La definición de "multiplicidad de un operador" dada en [7] sugiere la siguiente: si R es un subconjunto de X y A es un álgebra, indicaremos con $A(R)$ a la variedad lineal generada por $\{Ax: A \in A,\ x \in R\}$.

DEFINICION. $\bar{\mu}(A)$ = *multiplicidad estricta de* A = = *inf.* $\{$*cardinal* (R): $A(R) = X\}$.

2. EL RESULTADO PRINCIPAL.

TEOREMA 2. *Sea* A *un álgebra transitiva, y supongamos que* $A \supset B$, *donde* B *es cualquier subálgebra de* $\mathcal{L}(X)$ *tal que* $\bar{\mu}(B) < \infty$. *Entonces* $A = \mathcal{L}(X)$.

NOTA. Este teorema generaliza en varios sentidos un resultado de Alan Lambert ([5, *teor.4.5*]), a quien estamos sumamente agradecidos por haber llamado nuestra atención sobre las "álgebras estrictamente cíclicas" ($\bar{\mu}(A) = 1$, en nuestra notación).

De acuerdo a las observaciones hechas en la primera sección, para demostrar el *teor.2* basta probar que la única variedad lineal densa e invariante bajo A es X; pero esto se deduce en forma inmediata del siguiente resultado:

LEMA 1. *Sea* $B \subset \mathcal{L}(X)$ *un álgebra tal que, para cierto subconjunto finito* $\{x_1,\dots,x_n\}$ *de* X, *satisface*

$$(2) \qquad B(\{x_1,\dots,x_n\}) = X,$$

y sea M *una variedad lineal densa e invariante bajo* $\mathcal{B}$.

Entonces M = X.

Demostración: Sea $\mathcal{B}^{[n]} = \{(B_1,\ldots,B_n): B_j \in \mathcal{B},\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$.
$\mathcal{B}^{[n]}$ es una álgebra de Banach con unidad E = (I,...,I) y norma $\|(B_1,\ldots,B_n)\|_{[n]} = \text{máx.}\{\|B_j\|: 1 \leqslant j \leqslant n\}$ (las operaciones se definen, obviamente, "coordenada a coordenada").
Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}^{[n]} \arrow[rr, "S"] \arrow[d, "\pi"'] & & X \\ \mathcal{B}^{[n]}/\text{núc } S \arrow[urr, "\overline{S}"'] & & \end{tikzcd}$$

donde $S(B_1,\ldots,B_n) = B_1x_1 + \ldots + B_nx_n$ es una aplicación lineal, continua y (de acuerdo a (2)) *sobre*; π es la proyección canónica sobre el cociente ($\mathcal{B}^{[n]}$ es un módulo a izquierda sobre $\mathcal{B}$ y núc S = = núcleo de S, es un submódulo cerrado a izquierda de $\mathcal{B}^{[n]}$) y $\overline{S}$ es la aplicación cociente, que satisface $S = \overline{S} \circ \pi$. Está claro que (ver, p.ej., [3, pág.57]) si consideramos $\mathcal{B}^{[n]}/\text{núc } S$ con la "norma cociente", entonces $\overline{S}$ es un isomorfismo de espacios de Banach y π es una aplicación abierta. Así, si $y \in X$ y $\|x_1 - y\| <$ $< \|\overline{S}^{-1}\|^{-1}$, podemos encontrar operadores $A_1,\ldots,A_n$ en $\mathcal{B}$ tales que $y = A_1x_1 + \ldots + A_nx_n$, y

$$\text{máx.}\{\|I - A_1\|;\|A_j\|,\ j=2,3,\ldots,n\} < \|\overline{S}^{-1}\|/\|\overline{S}^{-1}\| = 1$$

(aquí estamos utilizando en forma explícita el hecho de que $x_1 = S(I,0,\ldots,0)$). Entonces

$$A_1^{-1} = [I - (I - A_1)]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - A_1)^k$$

pertenece a $\mathcal{B}$ e

$$y' = A_1^{-1}y = x_1 + A_1^{-1}A_2x_2 + \ldots + A_1^{-1}A_nx_n.$$

Dado que la variedad lineal M es densa e invariante bajo $\mathcal{B}$, el razonamiento anterior nos permite encontrar vectores $y_1,\ldots,y_n \in M$ tales que

$$y_j = A_{1j}x_1 + \ldots + A_{(j-1)j}x_{j-1} + x_j + A_{(j+1)j}x_{j+1} + \ldots + A_{nj}x_n\ ,$$

donde los operadores $A_{ij} \in \mathcal{B}$ satisfacen la desigualdad

$$\sum_{i,j=1;i\neq j}^{n} \|A_{ij}\| < (2n!)^{-2n!}$$

Por lo tanto, para $j = 2,3,\ldots,n$, $(I - A_{1j})^{-1} \in \mathcal{B}$ e

$$y'_j = (I - A_{1j})^{-1}(y_j - A_{1j}y_1) = 0 + (I - A_{1j})^{-1}(A_{2j} - A_{1j}A_{21})x_2 +$$

$$+\ldots+ (I - A_{1j})^{-1}(A_{(j-1)j} - A_{1j}A_{(j-1)1})x_{j-1} + x_j +$$

$$+ (I - A_{1j})^{-1}(A_{(j+1)j} - A_{1j}A_{(j+1)1})x_{j+1} +\ldots+$$

$$+ (I - A_{1j})^{-1}(A_{nj} - A_{1j}A_{n1})x_n$$

pertenece a M.

Por inducción se demuestra que $x_n \in M$ y mediante una repetición formal del mismo argumento,que $x_1,\ldots,x_n \in M$. De aquí y (2) se deduce que $M = X$.

q.e.d.

3. ALGEBRAS DE MULTIPLICIDAD ESTRICTA FINITA.

DEFINICION. *Se dice que una aplicación lineal* $T:D(T) \longrightarrow X$ *(donde* $D(T)$ = *dominio de* T *es una variedad lineal de* X*) conmuta con un subconjunto* $W \subset \mathcal{L}(X)$ *si, para todo* $L \in W$ *y para todo* $x \in D(T)$, *vale que*

$$LD(T) \subset D(T) \quad , \quad TLx = LTx.$$

PROPOSICION 2. *Sea* $\mathcal{B}$ *como en el lema 1 y sea* T *una aplicación lineal densamente definida que conmuta con* $\mathcal{B}$.
Entonces:

i) $D(T) = X$ *y* $T \in \mathcal{L}(X)$.

ii) *Si el rango de* T *es denso, entonces* ran T = X.

iii) *Si* T *no es invertible, ni cero, entonces al menos uno de los subespacios*

(3) $$M = \text{núc } T \quad , \quad N = \text{claus.}(\text{ran } T)$$

es no trivial.

Demostración: Observemos que $D(T)$, núc T y ran T, así como sus respectivas clausuras, son variedades lineales invariantes bajo $\mathcal{B}$. Por lo tanto, ii) y la primera parte de i) son corolarios inmediatos del *lema 1*; en particular, tenemos que $x_1,\ldots,x_n \in D(T)$.

Sean R_{ij} , $i,j = 1,\ldots,n$, operadores de $\mathcal{B}$ tales que

$$Tx_j = R_{1j}x_1 + \ldots + R_{nj}x_n \ , \ j = 1,\ldots,n.$$

Si $y = A_1x_1 + \ldots + A_nx_n$ $(A_1,\ldots,A_n \in \mathcal{B})$ es un elemento cualquiera de $D(T) = X$, entonces

$$(4) \quad Ty = T(A_1x_1 + \ldots + A_nx_n) = A_1Tx_1 + \ldots + A_nTx_n =$$

$$= \{\sum_{k=1}^{n} A_kR_{1k}\} x_1 + \ldots + \{\sum_{k=1}^{n} A_kR_{nk}\} x_n \ .$$

Sea $z \in X$ un elemento tal que $\|y - z\| < \varepsilon$. Utilizando los mismos argumentos que en la *demostración* del *lema 1*, podemos encontrar operadores $B_1,\ldots,B_n \in \mathcal{B}$ tales que

$$z = B_1x_1 + \ldots + B_nx_n,$$

y

$$\|A_j - B_j\| < \varepsilon \, \|\overline{S}^{\,-1}\| \ , \ j = 1,\ldots,n.$$

De aquí, y (4), se sigue que

$$\|Ty - Tz\| \leq \varepsilon \, \|\overline{S}^{\,-1}\| \{\sum_{i,j=1}^{n} \|R_{ij}\|\}\{\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|\} \ ,$$

de donde, finalmente, obtenemos que T es continua, es decir, $T \in \mathcal{L}(X)$.

iii) Observemos que $T \neq 0$ implica que $N \neq (0)$ y $M \neq X$. Ahora bien, si $N = X$, entonces (por *lema 1*) ran $T = X$ y T es sobre; si, además, $M = (0)$, entonces T es también 1-1 y por lo tanto invertible, lo cual contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto, o bien $M \neq (0)$, o bien $N \neq X$.

q.e.d.

En [2] y [8] se ha introducido la siguiente

DEFINICION. *Un subespacio* $M \subset X$ *se dice ultrainvariante para* $T \in \mathcal{L}(X)$ *si* $LM \subset M$, *para todo* $L \in \mathcal{L}(X)$ *que conmuta con* T.

Observemos que, para todo $z \in \mathbb{C}$, T y $(T - zI)$ tienen los mismos subespacios ultrainvariantes y, para todo $T \in \mathcal{L}(X)$, los subespacios M y N de (3) son ultrainvariantes para T (ver [2;4, § 5]). Entonces, de la *prop.* 2,iii) obtenemos

COROLARIO 3. *Si* $T \in \mathcal{L}(X)$ *no es un múltiplo de* I *y conmuta con algún álgebra* $\mathcal{B}$ *tal que* $\bar{\mu}(\mathcal{B}) < \infty$, *entonces* T *tiene un subespacio ultrainvariante no trivial.*

Demostración: Sea $z \in \mathbb{C}$ cualquier elemento del espectro de T. Entonces $(T - zI)$ es no invertible, distinto de cero y conmuta con $\mathcal{B}$. El resultado se sigue de la *prop.* 2,iii) y de las observaciones anteriores.

q.e.d.

4. ALGEBRAS DE CODIMENSION FINITA.

Otro corolario elemental del *teorema 1* es el siguiente

TEOREMA 3. *Si el espacio de Banach* X *tiene dimensión infinita, entonces toda subálgebra propia* $\mathcal{L}(X)$ *de* $\mathcal{L}(X)$ *tiene codimensión infinita en* $\mathcal{L}(X)$.

Demostración: Sea A una subálgebra de $\mathcal{L}(X)$ tal que

$$(4) \qquad \dim \mathcal{L}(X)/A = n < \infty$$

y sea $M \neq \{0\}$ un subespacio invariante de A.

Es evidente, por (4), que la codimensión de cualquier variedad lineal invariante bajo A debe ser menor o igual que n. Por lo tanto $\bar{\mu}(A) \leq n + 1$ y $\dim X/M \leq n$. Por consiguiente, M admite un subespacio complementario R ($\dim R \leq n$) y todo operador T en $X = M \oplus R$ puede escribirse como la matriz

$$T = \begin{Vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{Vmatrix} ,$$

donde $T_{11}:M \to M$, $T_{12}:R \to M$, $T_{21}:M \to R$ y $T_{22}:R \to R$ son aplicaciones lineales y continuas.

Ahora bien, la invariancia de M implica que $T_{21} = 0$, para todo $T \in A$. Por otra parte, si R contiene un vector $x_0 \neq 0$, a cada funcional lineal y continua f sobre M le podemos hacer corresponder la aplicación lineal y continua $T(f):M \longrightarrow R$ definida por $T(f)x = f(x)x_0$; así, si M^* es el dual topológico de M, se tiene que

$$\mathcal{L}(X) \supset A \oplus \left\{ \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ T(f) & 0 \end{Vmatrix} \; ; \; f \in M^* \right\} ,$$

y por lo tanto

$$\dim \mathcal{L}(X)/A \geqslant \dim M^* = \infty ,$$

contradiciendo nuestra hipótesis. En consecuencia, A debe ser un álgebra transitiva; dado que, además, A tiene multiplicidad estricta finita, se deduce del *teorema 1* que $A = \mathcal{L}(X)$.

q.e.d.

NOTA. Después de haber completado este trabajo, el autor recibió el artículo mimeografiado "Strictly cyclic operator algebras", de Mary R. Embry. En dicho artículo, la autora demuestra los mismos resultados aquí incluídos (excepto el *lema 1* y el *teorema 3*) partiendo de la hipótesis ligeramente más restrictiva $\bar{\mu}(\mathcal{B}) = 1$, en lugar de $\bar{\mu}(\mathcal{B}) < \infty$, y una línea de razonamiento similar a la utilizada en [5], razón por la cual sus demostraciones son esencialmente distintas a las dadas en el presente trabajo.

REFERENCIAS

[1] ARVESON, W.B., *A density theorem for transitive algebras*, Duke J. Math. 34 (1967), 635-647.

[2] DOUGLAS, R.G. y PEARCY, C., *On a topology for invariant subspaces*, J. of Func. Analysis 2(1968), 323-341.

[3] DUNFORD, N. y SCHWARTZ, J., *"Linear operators"*, Part I, 3ª ed., Interscience Publ. Inc., New York, 1966.

[4] HERRERO, D.A. y SALINAS, N., *Analytically invariant and bi-invariant subspaces*, (a publicarse).

[5] LAMBERT, A., *Strictly cyclic operator algebras*, Pac. J. Math. (a publicarse).

[6] RICKART, C.E., *"General theory of Banach algebras"*, D. Van Nostrand Co., Princeton, New Jersey, 1960.

[7] Sz.-NAGY, B. y FOIAS, C., *Modèle de Jordan pour une classe d'opérateurs de l'espace de Hilbert*, Acta Sci. Math. (Szeged) 31 (1970), 91-115.

[8] ------------------------, *"Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert"*, Masson et Cie., Akademiai Kiadó, Budapest, 1967.

State University of New York at Albany.

Recibido en agosto de 1971.
Versión final noviembre de 1971.

* Research supported by National Science Foundation Grant GU3171.

Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 26, 1972

A NOTE ON THE MAXIMALITY OF THE IDEAL OF COMPACT OPERATORS

by H. Porta

Let A,B be rings, and $\mathcal{L}$ and A-B-bimodule, i.e., $\mathcal{L}$ is a left A-module and a right B-module and moreover $s(tu) = (st)u$ for $s \in A$, $t \in \mathcal{L}$ and $u \in B$. A subset $C \subset \mathcal{L}$ is a sub-bimodule if it is an additive subgroup and satisfies $sku \in C$ whenever $k \in C$ and $s \in A$, $u \in B$. If E,F are Banach spaces, we shall denote the space of bounded linear operators $T:E \to F$ by $\mathcal{L}(E,F)$ (and by $\mathcal{L}(E)$ when $E = F$). Consider the following situation: $A = \mathcal{L}(\ell^q)$, $B = \mathcal{L}(\ell^p)$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\ell^p, \ell^q)$, where ℓ^r, $1 \leqslant r < +\infty$ denotes the (real or complex) Banach space of numerical r-summable sequences.
The bimodule structure is defined by composition
$\ell^p \xrightarrow{U} \ell^p \xrightarrow{T} \ell^q \xrightarrow{S} \ell^q$ (we will use capital letters for operators). It is clear that the set of compact operators $C = C(\ell^p, \ell^q)$ is a sub-bimodule of $\mathcal{L}$. We aim to make a few remarks on the following results:

a) *if* $1 < q < p < +\infty$, *then* $C = \mathcal{L}$;

b) *if* $1 < p = q < +\infty$, *then* C *is a maximal sub-bimodule (= two sided ideal) of* $\mathcal{L}$;

c) *if* $1 < p \leqslant q < +\infty$, *then all sub-bimodules* $S \subset \mathcal{L}$ *satisfying* $C \subset S$ *contain necessarily the identity operator* $J: \ell^p \to \ell^q$.

The statements a) and b) are known; a) goes back to Pitt [3] and is in fact a particular case of Th. A2 in [4], b) coincides with Th. 5.1 in [1] and c) seems to be new.
Our goal here is to observe that a modification of known proofs of b) actually yield c) of which b) is a particular case, and that a) is a corollary of b). This last remark would shorten the proof of Th. A2 in [4] and mildly confirms our suspicion that proving c) first has some methodological advantages. We believe (but have been unable to prove) the following:

CONJECTURE: *if* $1 < p \leqslant q < +\infty$, *then* C *is a maximal sub-bimodule,* from which c) follows trivially.

The proof of c) above is obtained by restating meanderingly the ingredients of the proofs of Lemma 5.1 in [1] and Lemmas 1 and 2 in [2]. We denote by $\|x\|_s$ the s-norm of $x = (x_1, x_2, \ldots)$, i.e.,

$$\|x\|_s = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^s \right)^{1/s}$$

LEMMA. *Let* $1 < s < +\infty$, $\varepsilon_n > 0$, $n = 1,2,\ldots$, $x^k \in \ell^s$, $k = 1,2,\ldots$ *and suppose that* $x^k \to 0$ *weakly and* $\inf \{\|x^k\|_s ; k = 1,2,\ldots\} = \delta > 0$. *Then there exists an increasing sequence of positive integers* $n_1 < n_2 < \ldots$ *and elements* $z^k \in \ell^s$, $k = 1,2,\ldots$ *such that:*

i) $\|x^{n_k} - z^k\|_s \leqslant \varepsilon_k$ *for* $k = 1,2,\ldots$;

ii) *the operator* $T_1 \in \mathcal{L}(\ell^s)$ *determined by* $T_1 e^k = \dfrac{z^k}{\|z^k\|_s}$

(where e^k *is the* k*th unit vector* $(0,0,\ldots,1,0,\ldots)$ *in* ℓ^s*) is an isometry and the image* $E = T_1(\ell^s)$ *of* T_1 *is a complemented subspace of* ℓ^s.

Proof. Define $\varepsilon'_n = \min(\varepsilon_n, \frac{1}{2}\delta)$. For $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell^s$ and n a positive integer denote by $P_n x$ the sequence $(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$. Let now n_1 be large enough for $\|x^1 - P_{n_1} x^1\|_s \leqslant \varepsilon'_1$ to be true and define $z^1 = P_{n_1} x^1$.

Since $x^n \longrightarrow 0$ weakly (i.e., coordinate wise) there is an integer n_2 such that $\|P_{n_1} x^{n_2}\|_s \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon'_2$. Choose N such that $\|x^{n_2} - P_N x^{n_2}\|_s \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon'_2$ and define $z^2 = P_N x^{n_2} - P_{n_1} x^{n_2}$. Clearly $\|x^{n_2} - z^2\|_s \leqslant \|x^{n_2} - P_N x^{n_2}\|_s + \|P_{n_1} x^{n_2}\|_s \leqslant \varepsilon'_2$. The procedure can be iterated in such a way that $\|x^{n_k} - z^k\|_s \leqslant \varepsilon'_k$ and the vectors z^k have disjoint support, i.e., for each n there is at most one k with $z^k_n \neq 0$.

Since we also have $\|z^k\|_s \geqslant \|x^{n_k}\|_s - \|x^{n_k} - z^k\|_s \geqslant \delta - \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}\delta > 0$, (i) and (ii) follow from Lemma 1 in [2].

Proof of c). Let p^* be the conjugate of p defined by $p^* = p/(p-1)$. First observe that if $T \in \mathcal{L}(\ell^p, \ell^q)$, $1 < p,q < +\infty$, and $\sum \|Te_k\|_q^{p^*} < +\infty$, then T is compact.

This is obvious because if $P_n \in \mathcal{L}(\ell^p)$ is the projector on the first n coordinates defined above, then for $x \in \ell^p$ we have $\|(T - TP_n)x\|_q =$

$$= \|(T - TP_n) \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \|_q = \| \sum_{k>n}^{\infty} x_k Te_k\|_q \leqslant \sum_{k>n}^{\infty} |x_k| \, \|Te_k\|_q \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k>n}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k>n}^{\infty} \|Te_k\|_q^{p^*} \right)^{1/p^*} \leqslant \|x\|_p \left(\sum_{k>n}^{\infty} \|Te_k\|_q^{p^*} \right)^{1/p^*}$$

and therefore $TP_n \longrightarrow T$ in the operator norm.

Assume now that S is a sub-bimodule of $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\ell^p, \ell^q)$, $1 < p \leqslant q < +\infty$ such that $C \subset S$ and $C \neq S$, or equivalently, such that all compact operators belong to S and there is a non-compact $T' \in S$. This means that for some sequence $x^1, x^2, \ldots$ weakly convergent to 0 in ℓ^p, we have $\|T'x^n\|_q \geqslant \delta_1 > 0$ for some δ_1 and all $n = 1,2,\ldots$; then also $\|x^n\|_p \geqslant \delta > 0$ for some δ and all $n = 1,2,\ldots$. For $\varepsilon > 0$, choose a sequence $\varepsilon_n > 0$ such that $\sum \varepsilon_n^{p^*} = \varepsilon^{p^*}$ and let $n_1 < n_2 < \ldots$ and $z^1, z^2, \ldots$ be as in the lemma above, corresponding to these ε_n. It is clear that $\frac{1}{2}\delta \leqslant \|z^k\|_p \leqslant \Delta$ for some Δ and all k and therefore the operator T_1 in the lemma can be modified by an invertible diagonal operator $D \in \mathcal{L}(\ell^p)$ in such a way that $S_1 = T_1 D : \ell^p \longrightarrow \ell^p$ satisfies $S_1 e^k = z^k$ for all $k = 1,2,\ldots$. Consider now, for $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ arbitrary scalars, the estimate

$$\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x^{n_j} \|_p \leqslant \| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (x^{n_j} - z^j)\|_p + \| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j z^j\|_p \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \, \|x^{n_j} - z^j\|_p + \| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j z^j\|_p \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \, \varepsilon_j + \|S_1(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e^j)\|_p \leqslant$$

$$\leqslant \| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e^j\|_p \left(\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^{p^*}\right)^{1/p^*} + \|S_1(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e^j)\|_p \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \, \| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e^j \|_p + \| S_1 (\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e^j) \|_p .$$

This clearly shows that there is a well defined bounded operator $S:\ell^p \longrightarrow \ell^p$ satisfying $Se^k = x^{n_k}$ for $k = 1,2,\dots$, and in fact $\|(S - S_1)e^k\|_p = \|x^{n_k} - z^k\|_p \leqslant \varepsilon_k$. Let now $T'' = T'S \in S$. Setting $y^k = T''e^k = Tx^{n_k} \in \ell^q$ we have $\|y^k\|_q \geqslant \delta > 0$ for $k = 1,2,\dots$ and since $e^k \longrightarrow 0$ weakly we also have $y^k \longrightarrow 0$ weakly in ℓ^q. Hence the lemma above applies again: let $\{y^{m_k}\}$ be a sub-sequence of $\{y^k\}$ and $\{w^k\}$ satisfy $\|y^{m_k} - w^k\|_q \leqslant \varepsilon^k$ with $\{w^k\}$ equivalent to the unit basis of ℓ^q. If $S' \in \mathcal{L}(\ell^p)$ is defined by $S'e^k = e^{m_k}$ we obviously have $T = T''S' \in S$ and $Te^k = y^{m_k}$. Let us denote by $U \in \mathcal{L}(\ell^q)$ the operator (corresponding to T_1 in the lemma) determined by $U\, e^k = w^k$ and by $J:\ell^p \longrightarrow \ell^q$ the identity map. We have $\| U\, Je^k - Te^k \|_q = \| w^k - Te^k \|_q \leqslant \varepsilon_k$ so that $U\, J - T \in \mathcal{L}$ is compact by the first part of this proof. Therefore $U\, J = (U\, J - T) + T \in S$. But the subspace generated by $\{w^k\}$ being complemented in ℓ^q (see lemma) and isomorphic to ℓ^q, there is a $U' \in \mathcal{L}(\ell^q)$ such that $U'\, U \in \mathcal{L}(\ell^q)$ is the identity operator. Then $J = (U'\, U)\, J = U'(U\, J) \in S$, as claimed.

Proof of a). First let us observe that b) implies that every operator $W \in \mathcal{L}(\ell^q)$ of the form $W = W_1 W_2$, $W_1 \in \mathcal{L}(\ell^p,\ell^q)$, $W_2 \in \mathcal{L}(\ell^q,\ell^p)$ for some $p \neq q$, must necessarily be compact. In fact, the family M of such operators is a two sided ideal in $\mathcal{L}(\ell^q)$ wich contains all operators of finite rank. Thus, the closure of M contains $C(\ell^q)$. But the closure of M is different from $\mathcal{L}(\ell^q)$ because the identity in $\mathcal{L}(\ell^q)$ is at distance one from any proper ideal such as M. But C being maximal by b), it follows that $M \subset$ closure $M = C$.

Assume now that $1 < q < p < +\infty$ and $T \in \mathcal{L}(\ell^p,\ell^q)$ is not compact. Then there is a sequence $\{x^n\}$ in ℓ^p such that $x^n \longrightarrow 0$ weakly and $\|Tx^n\|_q \geqslant \delta > 0$ for some δ. It follows that $\|x^n\|_p \geqslant \delta' > 0$ also for an appropiate δ'. Now we apply the lemma again to produce a sequence $\{z^k\}$ in ℓ^p such that: i) there is an operator $T_1 \in \mathcal{L}(\ell^p)$ satisfying $Te^k = z^k$ and ii) z^k is near x^{n_k}, so that also $\|Tz^k\|_q \geqslant$ $\geqslant \delta/2$ for all $k = 1,2,\ldots$. Consider now the operator $W = W_1W_2$ where $W_1 = T$ and $W_2 = T_1J$ for $J:\ell^q \longrightarrow \ell^p$ the identity. From the first remark, W must be compact, and in particular $\|We^k\|_q \longrightarrow 0$. But this contradicts $We^k = TT_1Je^k = TT_1e^k = Tz^k \not\longrightarrow 0$. Then T is compact, and the proof of a) is complete.

REFERENCES

[1] FELDMAN, I.A., I.C. GOHBERG and A.S. MARKUS, *Normally solvable operators, and ideals associated with them.* Izv. Moldavsk Fil. Akad. Nauk SSSR 10, no.76(1960) 51-69 (Russian). English translation in A.M.S. Transl., Ser.2,61(1967) 63-84.

[2] PELCZYŃSKI, A., *Projections in certain Banach spaces*, Studia Math. 19(1960) 209-228.

[3] PITT, H.R., *A note on bilinear forms*, J. Lond. Math. Soc. 11(1936) 174-180.

[4] ROSENTHAL, H.R., *On quasi-complemented Subspaces of Banach spaces, with an appendix on compactness of operators from* $L^p(\mu)$ *to* $L^r(\nu)$. J. Funct. Anal., 4(1969) 176-214.

University of Illinois at Urbana
Champaign. E.E.U.U.

Recibido en noviembre de 1971.

Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 26, 1972.

SOBRE UNA TEORIA DE PROBABILIDAD FUNCIONAL

Por Osvaldo Borghi

SUMARIO. Sobre la base de la idea introducida por Zadeh en [8] de los conjuntos difusos, es nuestro objetivo en este trabajo construir los fundamentos o bases de una teoría de probabilidad definida sobre estructuras convenientes, formadas por conjuntos difusos y que llamaremos σ-álgebras difusas (σ-reticulados pseudocomplementados). Esta teoría debe coincidir, en el caso de conjuntos habituales, con la teoría de probabilidad conocida.

Se comienza con la definición de la probabilidad funcional sobre los elementos de un álgebra difusa y se obtiene una serie de propiedades para ella.

Establecido luego el concepto del "espacio de probabilidad funcional", se procede a su completación y se demuestra la unicidad de la misma.

Se concluye con el "Teorema de Extensión" que afirma la posibilidad de prolongar de manera única cualquier probabilidad funcional definida sobre un álgebra difusa dada, a otra nueva probabilidad funcional que esté definida a lo largo de la σ-álgebra difusa generada por el álgebra difusa de partida.

1. Sea X un conjunto arbitrario de puntos x que nos sirve de "base" para "extraer" de él, o definir, sobre él, los conjuntos difusos según Zadeh [8].
Si consideramos un "conjunto difuso" A queremos decir con eso que existe una función

$$f_A : X \longrightarrow [0,1] \qquad (1)$$

con la propiedad de que para cada punto $x \in X$ define su "grado de pertenencia $f_A(x)$" al conjunto difuso A. Obsérvese bien que de esta manera *todos* los puntos x del conjunto básico X "pertenecen" en mayor o menor grado al conjunto difuso A, definido analíticamente por (1). Así que no es erróneo *identificar* directamente el "conjunto difuso A" *con* su función de pertenencia f_A, teniendo así a nuestra disposición dos lenguajes: el uno más geométrico y visual (pero menos adecuado por las características de los difusos), y el otro bien abstracto analítico, pero que refleja inequívocamente las propiedades que deducimos (y vinculamos) con nuestro concepto del "conjunto difuso" creado por primera vez por Zadeh [8]

Definimos luego las operaciones difusistas de *unión* ($\cup$), *intersección* ($\cap$) y *pseudo-complementación* (C) por las relaciones (definitorias) siguientes. Sean A y B dos difusos con sus respectivas funciones de pertenencia f_A y f_B. Entonces

Unión: $A \cup B$ por la exigencia $f_{A \cup B} = \text{máx}\,[f_A, f_B]$ (2)

Intersección: $A \cap B$ por $f_{A \cap B} = \text{mín}\,[f_A, f_B]$ (3)

Pseudo-complementación: CA por $f_{CA} = 1 - f_A$ (4)

Más generalmente, si $(A_i)_{i \in I}$ es una familia arbitraria de conjuntos difusos definimos la unión y la intersección de dicha familia por las expresiones:

$$f_{\underset{I}{\cup} A_i} = \sup_I f_{A_i} \quad (2a) \qquad ; \qquad f_{\underset{I}{\cap} A_i} = \inf_I f_{A_i} \quad (3a)$$

Una clase $\mathcal{B}$ de conjuntos difusos recibe el nombre de "*σ-álgebra difusa*" si es cerrada para la unión numerable y la pseudo-complementación. Si es cerrada para uniones finitas y pseudo-complementación se la denomina "*álgebra difusa*".
Decimos que el difuso A está contenido en otro difuso B si

$f_A(x) \leqslant f_B(x) \quad \forall\, x \in X$, y lo escribiremos $A \subset B$. (5)

Mencionamos además las relaciones

$$C(\underset{I}{\cup} A_i) = \underset{I}{\cap} CA_i \qquad y \qquad C(\underset{I}{\cap} A_i) = \underset{I}{\cup} CA_i \qquad (6)$$

que fácilmente pueden ser verificadas para un I arbitrario.

2. DEFINICION Y PROPIEDADES DE PROBABILIDAD FUNCIONAL.

a) DEFINICION.*Llamaremos probabilidad funcional a toda aplicación sobre el álgebra difusa* $\mathcal{B}$

$$P: \mathcal{B} \longrightarrow [0,1] \qquad \textit{tal que :}$$

D_1) $P(X) = 1$

D_2) P *es fuertemente aditiva, es decir, para todo par* $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ *se cumple* $P(B_1 \cup B_2) + P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) + P(B_2)$

D_3) *Para todo* $B \in \mathcal{B}$: $P(B) + P(CB) = 1$

D_4) *Dadas dos sucesiones en* $\mathcal{B}$, *tales que*

$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$ *y* $B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_n \supset \dots$ *y*

$\bigcup_n A_n \supset \bigcap_k B_k$, *entonces* $\lim \uparrow P(A_n) \geqslant \lim \downarrow P(B_k)$

COROLARIOS DE D_4.

a) Si $B_n \downarrow B$ (en $\mathcal{B}$), entonces $P(B_n) \downarrow P(B)$ con $n \to \infty$, donde $B_n \downarrow B$ indica convergencia puntual decreciente.

b) Si $B_n \uparrow B$ (en $\mathcal{B}$), entonces $P(B_n) \uparrow P(B)$ con $n \to \infty$, donde $B_n \uparrow B$ indica convergencia puntual creciente.

c) Si $A \supset B$, entonces $P(A) \geqslant P(B)$.

PROPIEDADES DE P.

a) $P(\phi) = 0$

b) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ luego $P(B_2 - B_1) \geqslant P(B_2) - P(B_1)$.

c) P es aditiva, es decir: Si $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ entonces $P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2)$.

d) Para todo $B \in \mathcal{B}$ se cumple que $P(B \cup CB) + P(B \cap CB) = 1$

e) Si $B_n \downarrow B$ (en $\mathcal{B}$), entonces $P(B_n - B) \downarrow P(B - B)$ con $n \to \infty$, *donde* $B_n - B \underset{d}{=} B_n \cap CB$. También

$B_n \downarrow \phi$ implica $P(B_n) \downarrow 0$; $B_n \uparrow X$ implica $P(B_n) \uparrow 1$;

$B_n \uparrow B$ (en $\mathcal{B}$) implica $P(B - B_n) \downarrow P(B - B)$.

f) *Para toda familia numerable* $(A_i, i \in I)$ en $\mathcal{B}$, *tal que* $\bigcup_I A_i \in \mathcal{B}$, *se tiene* $P(\bigcup_I A_i) \leqslant \sum_I P(A_i)$.

g) *Sean* $(A_m, m \geqslant 1)\uparrow$ *y* $(B_n, n \geqslant 1)\uparrow$ *en* $\mathcal{B}$ *tal que* $\bigcup_m A_m \subset \bigcup_n B_n$, *entonces* $\lim_m \uparrow P(A_m) \leqslant \lim_n \uparrow P(B_n)$.

Su demostración es sencilla.

h) P *es σ-aditiva.* Su demostración es la conocida en teoría de medida.

i) *Ejemplo de una probabilidad funcional.*

Sea (X,A,p) un espacio de probabilidad en el sentido habitual, y sea $\mathcal{A} = \{f:X \to [0,1]$ tal que f sea A-medible$\}$.

Si ponemos $P(f) = \int_X f\,dp$, entonces P es un ejemplo de una probabilidad funcional sobre la σ-álgebra difusa $\mathcal{A}$.

3. ESPACIOS DE PROBABILIDAD FUNCIONAL.

a. DEFINICION. *Es todo conjunto ordinario* X *en donde se ha distinguido una σ-álgebra difusa* $\mathcal{A}$ *en* $[0,1]^X = P_D(X)$ *y se ha definido una probabilidad funcional* P *sobre ella.*
Lo notaremos: $(X,\mathcal{A},P)$.

b. PROPOSICION. *Para toda sucesion* $(A_n,\ n \geq 1)$ *en* $\mathcal{A}$, *se cumple*
$P(\lim_n \inf A_n) \leq \lim_n \inf P(A_n) \leq \lim_n \sup P(A_n) \leq P(\lim_n \sup A_n)$.

Demostración. Es formalmente igual a la habitual en teoría de medida.

4. COMPLETACION DE UN ESPACIO DE PROBABILIDAD FUNCIONAL.

Sea $(X,\mathcal{A},P)$ un espacio de probabilidad funcional arbitrario.

a. DEFINICION. *Un conjunto difuso* $N \subset X$ *se dice* P-*despreciable si existe* $A \in \mathcal{A}$ *tal que* $N \subset A$ *y* $P(A) = 0$.

b. COROLARIOS DE LA DEFINICION.

i) *Si* $N \subset M$ *y* M *es* P-*despreciable, entonces* N *es* P-*despreciable.*

ii) *Si* $P(A) = 0$, *entonces* A *es* P-*despreciable.*

iii) *Sea* $(N_i, i \in I)$ *una familia numerable de conjuntos difusos* P-*despreciables. Entonces* $\bigcup_I N_i$ *es* P-*despreciable.*

iv) *Toda intersección numerable de conjuntos difusos que tenga, al menos, un intersecando* P-*despreciable, es* P-*despreciable.*

c. DEFINICION. *Un espacio de probabilidad funcional se dice completo si todo conjunto difuso P-despreciable del espacio es elemento de su σ-álgebra difusa* $\mathcal{A}$.

Definamos, a continuación, la clase

(1) $\overline{\mathcal{A}} = \{A \subset X : \exists\, A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ tal que $A_1 \subset A \subset A_2$ y $P(A_1) = P(A_2)\}$.

d. LEMA. $\overline{\mathcal{A}}$ *es una σ-álgebra difusa que contiene* $\mathcal{A}$.

Demostracion. Sea $A \in \overline{\mathcal{A}}$. Entonces, por definición, existen $A_1 \in \mathcal{A}$, $A_2 \in \mathcal{A}$ tal que $A_1 \subset A \subset A_2$ y $P(A_1) = P(A_2)$. Esto implica que $CA_1 \supset CA \supset CA_2$ y $1 - P(A_1) = 1 - P(A_2)$, es decir existen CA_1, $CA_2 \in \mathcal{A}$ tal que $CA_2 \subset CA \subset CA_1$ y $P(CA_2) = P(CA_1)$, esto es $CA \in \overline{\mathcal{A}}$.

Sean $A, B \in \overline{\mathcal{A}}$. Luego existen $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{A}$ tal que

$A_1 \subset A \subset A_2$; $B_1 \subset B \subset B_2$ y $P(A_1) = P(A_2)$; $P(B_1) = P(B_2)$.

Por ello $A_1 \cup B_1 \subset A \cup B \subset A_2 \cup B_2$; $A_1 \cap B_1 \subset A \cap B \subset A_2 \cap B_2$

y $P(A_1 \cup B_1) = P(A_1) + P(B_1) - P(A_1 \cap B_1) \geq P(A_2) + P(B_2) -$

$- P(A_2 \cap B_2) = P(A_2 \cup B_2)$, esto es $P(A_1 \cup B_1) = P(A_2 \cup B_2)$, lo que implica que $A \cup B \in \overline{\mathcal{A}}$.

Análogamente, $A \cap B \in \overline{\mathcal{A}}$.

De lo anterior se deduce que $\overline{\mathcal{A}}$ es un álgebra difusa. Además, que $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$ es trivial.

Nos falta ver que $\overline{\mathcal{A}}$ es una clase monótona difusa.

Sea $(A_n,\ n \geq 1)$ creciente en $\overline{\mathcal{A}}$. Entonces, para cada $\underline{n}$ existen A_n^1, $A_n^2 \in \mathcal{A}$ tal que $A_n^1 \subset A_n \subset A_n^2$ y $P(A_n^1) = P(A_n^2)$.

Pero, para todo $\underline{n}$: $\bigcup_{i \leq n} A_i^1 \subset \bigcup_{i \leq n} A_i \subset \bigcup_{i \leq n} A_i^2$ lo que implica

$P(\bigcup_{i \leq n} A_i^1) = P(\bigcup_{i \leq n} A_i^2)$, para cada $\underline{n}$.

Tomando límite: $\lim_n \uparrow P(\bigcup_{i \leq n} A_i^1) = \lim_n \uparrow P(\bigcup_{i \leq n} A_i^2)$

es decir $P(\bigcup_n A_n^1) = P(\bigcup_n A_n^2)$, lo que significa $\bigcup_n A_n \in \overline{\mathcal{A}}$.

La demostración es similar para $(A_n,\ n \geq 1)$ decreciente en $\overline{\mathcal{A}}$.

e. DEFINICION. *Sea la siguiente aplicación* $\overline{P}: \overline{\mathcal{A}} \longrightarrow [0,1]$ *tal que* $\overline{P}(A) = P(A_1)$.

Veamos previamente que $\overline{P}$ está bien definida.

Sea $A = B$ en $\overline{A}$, entonces existen $A_1, A_2, B_1, B_2 \in A$ tal que

$A_1 \subset A \subset A_2$; $B_1 \subset B \subset B_2$; $P(A_1) = P(A_2)$; $P(B_1) = P(B_2)$.

Dado que $A_1 \subset A = B \subset B_2$, por ello $P(A_1) \leqslant P(B_2) = P(B_1)$.

Como $B_1 \subset B = A \subset A_2$, se obtiene $P(B_1) \leqslant P(A_2) = P(A_1)$, es decir,

$P(A_1) = P(B_1)$.

f. LEMA. $\overline{P}$ *es una probabilidad funcional sobre* $\overline{A}$ *, la cual es extensión de* P.

Demostración. Es trivial que $P = \overline{P}$ (sobre A).

Veamos ahora los axiomas de la definición de probabilidad funcional.

D_1) $\overline{P}(X) = P(X) = 1$

D_2) Sean $A, B \in \overline{A}$. Por definición existen $A_1, A_2, B_1, B_2 \in A$ tal que

$A_1 \subset A \subset A_2$; $B_1 \subset B \subset B_2$; $P(A_1) = P(A_2)$; $P(B_1) = P(B_2)$.

Pero $\overline{P}(A \cup B) = P(A_1 \cup B_1)$; $\overline{P}(A \cap B) = P(A_1 \cap B_1)$;

$$\overline{P}(A) = P(A_1) \quad ; \quad \overline{P}(B) = P(B_1).$$

Por eso $\overline{P}(A \cup B) + \overline{P}(A \cap B) = \overline{P}(A) + \overline{P}(B)$.

D_3) Sea $A \in \overline{A}$, arbitrario.

Luego $\overline{P}(A) = P(A_1)$ y $\overline{P}(CA) = P(CA_1)$. Entonces $\overline{P}(A) + \overline{P}(CA) = 1$.

D_4) Sean $(A_n, n \geqslant 1) \uparrow$; $(B_k, k \geqslant 1) \downarrow$; $\bigcup\limits_n A_n \supset \bigcap\limits_k B_k$ (en $\overline{A}$).

Por definición, para todo $\underline{n}$, existen $A_n^1, A_n^2 \in A$, tal que

$$A_n^1 \subset A_n \subset A_n^2 \quad \text{y} \quad P(A_n^1) = P(A_n^2) = \overline{P}(A_n)$$

para todo k, existen $B_k^1, B_k^2 \in A$, tal que $B_k^1 \subset B_k \subset B_k^2$ y

$$P(B_k^1) = P(B_k^2) = \overline{P}(B_k).$$

Por otra parte $P(\bigcup\limits_n A_n^1) = P(\bigcup\limits_n A_n^2) = \overline{P}(\bigcup\limits_n A_n)$;

$$P(\bigcap_k B_k^1) = P(\bigcap_k B_k^2) = \overline{P}(\bigcap_k B_k).$$

Pero $A_n^1 \subset \bigcup\limits_{i \leq n} A_i^1 \subset A_n \subset A_n^2$ implica $P(A_n^1) = P(\bigcup\limits_{i \leq n} A_i^1)$ y

$$B_k^2 \supset \bigcap_{i\leq k} B_i^2 \supset B_k \supset B_k^1 \quad \text{implica} \quad P(B_k^2) = P(\bigcap_{i\leq k} B_i^2) .$$

Entonces $\lim\limits_n \uparrow P(\bigcup\limits_{i\leq n} A_i^1) = P(\bigcup\limits_n A_n^1)$; $\lim\limits_n \downarrow P(\bigcap\limits_{i\leq k} B_i^2) = P(\bigcap\limits_k B_k^2)$

es decir $\lim\limits_n \uparrow P(A_n^1) = P(\bigcup\limits_n A_n^1) = \overline{P}(\bigcup\limits_n A_n) = \lim\limits_n \uparrow \overline{P}(A_n)$

y $\lim\limits_k \downarrow P(B_k^2) = P(\bigcap\limits_k B_k^2) = \overline{P}(\bigcap\limits_k B_k) = \lim\limits_k \downarrow \overline{P}(B_k)$.

Pero $\bigcap\limits_k B_k^1 \subset \bigcap\limits_k B_k \subset \bigcup\limits_n A_n \subset \bigcup\limits_n A_n^2$ y $\lim\limits_k \downarrow P(\bigcap\limits_{i\leq k} B_i^1) \leqslant \lim\limits_n \uparrow P(\bigcup\limits_{i\leq n} A_i^2)$;

esto es, $\lim\limits_k \downarrow P(B_k^2) \leqslant \lim\limits_n \uparrow P(A_n^1)$; es decir

$$\lim_k \downarrow \overline{P}(B_k) \leqslant \lim_n \uparrow \overline{P}(A_n).$$

g. DEFINICION. *El espacio* $(X,\overline{A},\overline{P})$ *es un espacio de probabilidad funcional completado de* (X,A,P), *pues todo conjunto difuso* P-*despreciable es elemento de* $\overline{A}$, *y un difuso es* P-*despreciable si y solo si es* $\overline{P}$-*despreciable.*

h. TEOREMA. $\overline{P}$ *es la única probabilidad funcional sobre* $\overline{A}$, *la cual es extensión de la probabilidad funcional* P.

Demostración. Sea $\overline{\overline{P}}$ otra probabilidad funcional sobre $\overline{A}$ tal que, para todo $A \in A$ tenga el valor $\overline{\overline{P}}(A) = P(A)$.
Sea, ahora, $B \in \overline{A}$ arbitrario. En consecuencia existen $B_1, B_2 \in A$ tal que $B_1 \subset B \subset B_2$ y $P(B_1) = P(B_2) = \overline{P}(B)$.
Entonces $\overline{\overline{P}}(B_1) \leqslant \overline{\overline{P}}(B) \leqslant \overline{\overline{P}}(B_2)$; esto es $P(B_1) \leqslant \overline{\overline{P}}(B) \leqslant P(B_2)$, lo que en definitiva da $\overline{P}(B) = \overline{\overline{P}}(B)$.

5. PROBABILIDAD FUNCIONAL EXTERIOR E INTERIOR.

Sea (X,A,P) un espacio de probabilidad funcional arbitrario.

a. DEFINICION. *Llamaremos probabilidad funcional exterior a la aplicación*

$$P^*: P_D(X) \longrightarrow [0,1]$$
$$A \longrightarrow \inf_{A\subset B\in A} P(B)$$

Análogamente, la *probabilidad funcional interior* es

$$P_*: \mathcal{P}_D(X) \longrightarrow [0,1]$$
$$A \longrightarrow \sup_{A \supset B \in \mathcal{A}} P(B)$$

NOTA. P_* y P^* no son, en general, probabilidades funcionales.

b. PROPIEDADES.

1) Para todo $B \in \mathcal{A}$ se cumple que $P_*(B) = P^*(B) = P(B)$.
2) Para todo $A \in \mathcal{P}_D(X)$ vale que $P_*(A) \leqslant P^*(A)$.
3) Para todo $A \in \mathcal{P}_D(X)$ se tiene $P_*(A) = 1 - P^*(CA)$.
4) Para todo $A \in \mathcal{P}_D(X)$ se cumple que $P^*(A) = 1 - P_*(CA)$.

c. LEMA. *En las definiciones de P_* y P^* los extremos son alcanzados.*

Demostración. Veamos el caso de P_*. Para P^* se procede en forma análoga.
Sea $D \in \mathcal{P}_D(X)$, arbitrario. Entonces, para todo $n \geqslant 1$, existe

$A_n \in \mathcal{A}$ tal que $A_n \subset D$ y $P_*(D) \geqslant P(A_n) > P_*(D) - 1/n$.

Sea $A = \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$; $A \subset D$. Dado que, para todo $n \geqslant 1$, vale que

$A \supset A_n$, entonces $P(A) \geqslant P(A_n) > P_*(D) - 1/n$ para cada $n \geqslant 1$.

Por ello $P(A) \geqslant P_*(D)$. Por la definición de P_* se tiene

$$P(A) \leqslant P_*(D)$$

En consecuencia existe $A \in \mathcal{A}$; $A \subset D$ y $P(A) = P_*(D)$.

d. NOTA. P^* es sub-σ-aditiva, es decir, si $(D_i,\ i \in I) \subset \mathcal{P}_D(X)$,
con I numerable, entonces $P^*(\bigcup_I D_i) \leqslant \sum_I P^*(D_i)$

Demostración. Se aplica Lema c) y sub-aditividad de P.

e. LEMA. *Si* $\mathcal{D} = \{D \subset X: P_*(D) = P^*(D)\}$ *entonces* $\mathcal{D} = \overline{\mathcal{A}}$.

Demostración. Sea $D \in \overline{\mathcal{A}}$, entonces existen $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ tal que

$$A_1 \subset D \subset A_2 \quad \text{y} \quad P(A_1) = P(A_2).$$

Pero $A_1 \subset D$ implica que $P(A_1) \leqslant P_*(D)$ y $D \subset A_2$ implica que

$P(A_2) \geqslant P^*(D)$, es decir, $P^*(D) \leqslant P(A_2) = P(A_1) \leqslant P_*(D)$.

Por eso $P^*(D) = P_*(D)$.

Inversamente, sea $D \in \mathcal{D}$. Por lema c) existe $A_1 \subset D$, en $\mathcal{A}$, tal que $P(A_1) = P_*(D)$ y existe $A_2 \supset D$, en $\mathcal{A}$, tal que $P(A_2) = P^*(D)$, es decir, $D \in \overline{\mathcal{A}}$.

f. COROLARIO. $\overline{\mathcal{A}} = \{D \subset X\colon P^*(D) + P^*(CD) = 1\} =$

$= \{D \subset X\colon P^*(D) + P_*(CD) = 1\}$.

Demostración. Trivial.

g. COROLARIO. $P_* = P^* = \overline{P}$ (sobre $\overline{\mathcal{A}}$).

Demostración. Trivial.

h. PROPOSICION. *Las probabilidades funcionales exterior e interior definidas a partir del espacio* $(X,\mathcal{A},P)$ *coinciden, respectivamente, con las definidas a partir del espacio* $(X,\overline{\mathcal{A}},\overline{P})$.

Demostración. Tomemos el caso de la probabilidad funcional exterior. Tenemos que demostrar que para todo $D \subset X$, difuso, se cumple $P^*(D) = \overline{P}^*(D)$.

Como se tiene $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$, entonces

$$\{P(A)\colon D \subset A \in \mathcal{A}\} \subset \{\overline{P}(A')\colon D \subset A' \in \overline{\mathcal{A}}\}.$$

Luego $P^*(D) \geqslant \overline{P}^*(D)$.

Inversamente, por lema c) existe $A' \supset D$; $A' \in \overline{\mathcal{A}}$, tal que $\overline{P}^*(D) = \overline{P}(A')$.

Pero $A' \in \overline{\mathcal{A}}$ implican que existen $A_1', A_2' \in \mathcal{A}$ tal que $A_1' \subset A' \subset A_2'$ y $P(A_1') = P(A_2') = \overline{P}(A')$.

Entonces $P^*(D) = P(A_2')$ con $A_2' \supset D$, $A_2' \in \mathcal{A}$.

Es decir $P^*(D) \leqslant P(A_2') = \overline{P}^*(D)$.

6. TEOREMA DE EXTENSION DE UNA PROBABILIDAD FUNCIONAL.

El objetivo de este parágrafo es demostrar un teorema de extensión de una probabilidad funcional P definida sobre un álgebra difusa $\mathcal{B}$, a la σ-álgebra difusa $\mathcal{A}$ generada por ella.

Sea, como antes, un conjunto ordinario cualquiera X. Sea dada un álgebra difusa $\mathcal{B}$ de $P_D(X)$ y sobre ésta tengamos definida una probabilidad funcional P.

a. LEMA. *La clase de todas las uniones de familias numerables en* $\mathcal{B}$ *es idéntica a la clase de todas las uniones de sucesiones crecientes en* $\mathcal{B}$.

Demostración. Trivial.

b. DEFINICION. *Sea la clase* $\mathcal{G} = \{ \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n : B_n \in \mathcal{B},\ n = 1,2,\ldots\} \supset \mathcal{B}$.

Si $G = \bigcup_n B_n$ *donde* $B_n \in \mathcal{B}$ *y* $B_n \subset B_{n+1}$ $(n = 1,2,\ldots)$

definimos $\pi(G) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$

Esta está bien definida, en virtud de 2-g. Además cumple que, para todo $B \in \mathcal{B}$, $\pi(B) = P(B)$.

c. PROPOSICION. *Las principales propiedades de la clase* $\mathcal{G}$ *y de la aplicación* π *son las siguientes:*

1) *Si* $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$, *entonces* $G_1 \cup G_2 \in \mathcal{G}$; $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}$ *y*

$$\pi(G_1 \cup G_2) + \pi(G_1 \cap G_2) = \pi(G_1) + \pi(G_2).$$

2) *Si* $G_1 \subset G_2$, *en* $\mathcal{G}$, *entonces* $\pi(G_1) \leqslant \pi(G_2)$.

3) *Sea* $(G_n,\ n \geqslant 1)$ *una sucesión creciente en* $\mathcal{G}$ *tal que* $\lim_n \uparrow G_n = G$. *Entonces* $G \in \mathcal{G}$ *y* $\pi(G) = \lim_n \uparrow \pi(G_n)$.

4) $\mathcal{G}$ *es la mínima clase de* $P_D(X)$ *que contiene a* $\mathcal{B}$ *y que es cerrada para la intersección finita y la unión numerable.*

Demostración. 1) Sean $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$. Entonces existen sucesiones crecientes $(A_n,\ n \geqslant 1)$ y $(B_n,\ n \geqslant 1)$ en $\mathcal{B}$ tal que

$$G_1 = \bigcup_n A_n \quad \text{y} \quad G_2 = \bigcup_n B_n$$

Luego, $G_1 \cup G_2 = \bigcup_n (A_n \cup B_n) \in \mathcal{G}$ y $G_1 \cap G_2 = \bigcup_n (A_n \cap B_n) \in \mathcal{G}$.

Por otra parte, para cada n, se cumple:

$$P(A_n) + P(B_n) = P(A_n \cup B_n) + P(A_n \cap B_n).$$

Pasando al límite, con $n \to \infty$ se obtiene la relación buscada.

2) Si $G_1 \subset G_2$, entonces $\bigcup_n A_n \subset \bigcup_n B_n$. Pero, por 2-g :

$\lim_n \uparrow P(A_n) \leqslant \lim_n \uparrow P(B_n)$.

3) Sea $G_n \uparrow G$, con $G_n \in \mathcal{G}$ para todo n. Veamos que $G \in \mathcal{G}$.

Como $G_n \in \mathcal{G}$, entonces existe una sucesión creciente $(A_{m,n}, m \geqslant 1)$ en $\mathcal{B}$ tal que $\bigcup_m A_{m,n} = G_n$, para cada n.

Pero, para todo m y para todo $n \leqslant m$: $A_{m,n} \subset D_m = \bigcup_{n\leq m} A_{m,n} \subset G_m$ $(_*)$

Luego, $G_n \subset \bigcup_m D_m \subset G$, para todo n. Es decir, $G = \bigcup_m D_m$ y $D_m \in \mathcal{B}$, lo que nos dice que $G \in \mathcal{G}$.

Por otra parte, en $(_*)$: para todo m y para todo $n \leqslant m$ vale que

$$P(A_{m,n}) \leqslant P(D_m) \leqslant \pi(G_m).$$

Esto es, para todo n

$$\lim_m P(A_{m,n}) \leqslant \lim_m P(D_m) \leqslant \lim_m \pi(G_m),$$

es decir, para cada n: $\pi(G_n) \leqslant \lim_m P(D_m) \leqslant \lim_m \pi(G_m)$

y finalmente, $\lim_m \pi(G_m) = \pi(G)$.

4) Sea $\mathcal{G}'$ la mínima clase que contiene a $\mathcal{B}$, bajo las condiciones enunciadas.

Por eso $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$.

Pero $G = \bigcup_n A_n \in \mathcal{G}$ implica que, para todo n, $A_n \in \mathcal{B}$. De lo que se deduce que $\bigcup_n A_n = G \in \mathcal{G}'$.

d. LEMA. *Si* G *y* $CG \in \mathcal{G}$, *entonces* $\pi(G) + \pi(CG) = 1$.

Demostración. Sea $G = \bigcup_n A_n$. Luego $CG = \bigcap_n CA_n$.

Pero $CG \in \mathcal{G}$ implica que $CG = \bigcup_n B_n$ creciente. Esto es, $\bigcup_n B_n = \bigcap_n CA_n$.

Lo que significa, para todo n, que: $B_n \subset \bigcup_n B_n = \bigcap_n CA_n \subset CA_n$,

es decir, $P(B_n) \leqslant P(CA_n)$ para todo n. Pasando al límite,

$\lim_n P(B_n) \leqslant 1 - \lim_n P(A_n)$. Lo que da $\pi(CG) \leqslant 1 - \pi(G)$. Dado que

$\bigcup_n B_n \supset \bigcap_n CA_n$, por D_4) $\pi(CG) = \lim_n P(B_n) \geqslant \lim_n P(CA_n) = 1 - \pi(G)$

y, en síntesis: $\pi(G) + \pi(CG) = 1$.

e. DEFINICION. *Introduzcamos, ahora, la siguiente aplicación:*

$$\pi^*: P_D(X) \longrightarrow [0,1]$$
$$D \longrightarrow \inf_{D \subset G \in \mathcal{G}} \pi(G)$$

f. PROPOSICION. *La función* π^* *goza de las siguientes propiedades:*

1) $\pi^*(G) = \pi(G)$ *para todo* $G \in \mathcal{G}$, $0 \leqslant \pi^*(D) \leqslant 1$ *para todo* $D \subset X$.

2) *Para todo* $D_1, D_2 \in P_D(X)$:

$$\pi^*(D_1 \cup D_2) + \pi^*(D_1 \cap D_2) \leqslant \pi^*(D_1) + \pi^*(D_2).$$

3) *Si* $D_1 \subset D_2$, *en* $P_D(X)$, *entonces* $\pi^*(D_1) \leqslant \pi^*(D_2)$.

4) *Sea una sucesión creciente* $(D_n, n \geqslant 1)$ *en* $P_D(X)$ *tal que*

$\lim_n \uparrow D_n = D$, *entonces* $\lim_n \uparrow \pi^*(D_n) = \pi^*(D)$.

Demostración. Es formalmente similar a la que figura en la referencia [6].

g. LEMA. *Para todo* $D \in P_D(X)$ *se verifica que* $\pi^*(D) + \pi^*(CD) \geqslant 1$.

Demostración. Sea D arbitrario. Entonces, por definición:

$$\pi^*(D) = \inf_{D \subset G \in \mathcal{G}} \pi(G) \quad \text{y} \quad \pi^*(CD) = \inf_{CD \subset G' \in \mathcal{G}} \pi(G')$$

Dado $\varepsilon > 0$, existen $G \supset D$ y $G' \supset CD \supset CG$ tal que

$$\pi^*(D) + \pi^*(CD) \geqslant \pi(G) + \pi(G') - 2\varepsilon \qquad (*)$$

Pero $\pi(G) + \pi(G') \geqslant 1$. Puesto que si $G = \bigcup_n A_n$ y $G' = \bigcup_n B_n$,

entonces $CG = \bigcap_n CA_n \subset CD \subset G' = \bigcup_n B_n$.

Luego, por D_4): $1 - \pi(G) = \lim_n P(CA_n) \leqslant \lim_n P(B_n)$

esto es, $1 \leqslant \pi(G) + \pi(G')$.

Finalmente, en (*): $\pi^*(D) + \pi^*(CD) \geqslant 1$.

A continuación construyamos la clase

$$\mathcal{D} = \{D \in P_D(X) : \pi^*(D) + \pi^*(CD) = 1\}$$

h. LEMA. *$\mathcal{D}$ es una σ-álgebra difusa.*

Demostración. Dado que $\pi^* = \pi = P$ (sobre $\mathcal{B}$) entonces ϕ y $X \in \mathcal{D}$.

Sea $D \in \mathcal{D}$. Entonces $\pi^*(CD) + \pi^*(CCD) = 1$, es decir $CD \in \mathcal{D}$.

Sea $(D_n, n \geqslant 1)$ una sucesión creciente en $\mathcal{D}$.

Por ello, para cada n: $\pi^*(D_n) + \pi^*(CD_n) = 1$.

Luego, $\lim\limits_n \pi^*(D_n) + \lim\limits_n \pi^*(CD_n) = \pi^*(\bigcup\limits_n D_n) + \lim\limits_n \pi^*(CD_n) = 1$.

De aquí: $\lim\limits_n \pi^*(CD_n) = 1 - \pi^*(\bigcup\limits_n D_n) \leqslant \pi^*(C \bigcup\limits_n D_n) = \pi^*(\bigcap\limits_n CD_n)$.

Dado que $CD_n \supset \bigcap\limits_n CD_n$, por ello se cumple que

$\pi^*(CD_n) \geqslant \pi^*(\bigcap\limits_n CD_n)$, para todo n.

De aquí, se deduce que: $\lim\limits_n \pi^*(CD_n) \geqslant \pi^*(\bigcap\limits_n CD_n)$, es decir

$\lim\limits_n \pi^*(CD_n) = \pi^*(\bigcap\limits_n CD_n)$ lo que implica que $\bigcup\limits_n D_n \in \mathcal{D}$.

Para toda sucesión $(D_n, n \geqslant 1)$ decreciente en $\mathcal{D}$ la demostración es análoga.

Es nuestro propósito ahora demostrar que la clase $\mathcal{D}$ es cerrada para unión e intersección finitas.

Sean $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$. Dado que

$\pi^*(D_1 \cup D_2) + \pi^* C(D_1 \cup D_2) \geqslant 1$ y $\pi^*(D_1 \cap D_2) + \pi^* C(D_1 \cap D_2) \geqslant 1$

entonces $\pi^*(D_1 \cup D_2) + \pi^* C(D_1 \cup D_2) + \pi^*(D_1 \cap D_2) + \pi^* C(D_1 \cap D_2) \geqslant 2$.

Por otra parte,

$$\pi^*(D_1 \cup D_2) + \pi^*(D_1 \cap D_2) \leqslant \pi^*(D_1) + \pi^*(D_2)$$

y
$$\pi^* C(D_1 \cup D_2) + \pi^* C(D_1 \cap D_2) \leqslant \pi^*(CD_1) + \pi^*(CD_2).$$

De aquí se obtiene que:

$\pi^*(D_1 \cup D_2) + \pi^*(D_1 \cap D_2) + \pi^* C(D_1 \cup D_2) + \pi^* C(D_1 \cap D_2) \leqslant$

$\leqslant \pi^*(D_1) + \pi^*(CD_1) + \pi^*(D_2) + \pi^*(CD_2) = 2.$

De todo lo cual resulta:

$\pi^*(D_1 \cup D_2) + \pi^* C(D_1 \cup D_2) + \pi^*(D_1 \cap D_2) + \pi^* C(D_1 \cap D_2) = 2$

es decir, $D_1 \cup D_2 \in \mathcal{D}$ y $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{D}$.

Por todo ello, $\mathcal{D}$ es un álgebra difusa monótona, lo que significa que $\mathcal{D}$ es una σ-álgebra difusa.

i. COROLARIO. *$\mathcal{D} \supset \mathcal{B}$ y $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$, donde $\mathcal{A}$ es la σ-álgebra difusa generada por $\mathcal{B}$.*

Demostración. Es inmediata.

j. LEMA. *Si* $N \subset D \in \mathcal{D}$ *y* $\pi^*(D) = 0$, *entonces* $N \in \mathcal{D}$.

Demostración. Es trivial.

k. LEMA. *π^* es fuertemente aditiva sobre $\mathcal{D}$.*

Demostración. Sean $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$, arbitrarios. Anteriormente obtuvimos que:

$$\pi^*(D_1 \cup D_2) + \pi^*C(D_1 \cup D_2) + \pi^*(D_1 \cap D_2) + \pi^*\ (D_1 \cap D_2) =$$

$$= \pi^*(D_1) + \pi^*(CD_1) + \pi^*(D_2) + \pi^*(CD_2).$$

Además, siempre se cumple que:

$$\pi^*(D_1 \cup D_2) + \pi^*(D_1 \cap D_2) \leqslant \pi^*(D_1) + \pi^*(D_2)$$

y $\pi^*C(D_1 \cup D_2) + \pi^*C(D_1 \cap D_2) \leqslant \pi^*(CD_1) + \pi^*(CD_2)$

Finalmente:

$$\pi^*(D_1 \cup D_2) + \pi^*(D_1 \cap D_2) = \pi^*(D_1) + \pi^*(D_2).$$

l. LEMA. *π^* es una probabilidad funcional sobre $\mathcal{D}$.*

Demostración.

D_1) $\pi^*(X) = P(X) = 1$.

D_2) Por lema k.

D_3) Por definición de la clase $\mathcal{D}$.

D_4) Sean $D_1 \subset D_2 \subset \ldots\ldots \subset D_n \subset \ldots\ldots$ y $D'_1 \supset D'_2 \supset \ldots\supset D'_n \supset \ldots$, en $\mathcal{D}$ tal que $\bigcup\limits_n D_n \supset \bigcap\limits_n D'_n$.

Dado que $D_n \uparrow \bigcup\limits_n D_n$, entonces $\lim\limits_n \pi^*(D_n) = \pi^*(\bigcup\limits_n D_n)$.

Además $\bigcup\limits_n D_n \supset \bigcap\limits_n D'_n$ implica que $\pi^*(\bigcup\limits_n D_n) \geqslant \pi^*(\bigcap\limits_n D'_n)$, es decir, $\lim_n \pi^*(D_n) \geqslant \pi^*(\bigcap_n D'_n)$. (*)

Por otra parte $\bigcap_n D'_n \in \mathcal{D}$. Luego $C \bigcap_n D'_n = \bigcup_n CD'_n \uparrow \in \mathcal{D}$.

De aquí que $\pi^*(\bigcup_n CD'_n) = \lim_n \pi^*(CD'_n) = 1 - \lim_n \pi^*(D'_n)$.

Esto es $\lim_n \pi^*(D'_n) = 1 - \pi^*(\bigcup_n CD'_n) = \pi^*(\bigcap_n D'_n)$.

Finalmente, en (*): $\lim_n \pi^*(D_n) \geqslant \lim_n \pi^*(D'_n)$.

Además, en virtud de los Lemas j) y l), podemos afirmar que π^* es una probabilidad funcional completa sobre $\mathcal{D}$.

11. TEOREMA. *Sea $\mathcal{B}$ un álgebra difusa de $P_D(X)$ y sea dada una probabilidad funcional* P *sobre ella. Entonces existe una única extensión a una probabilidad funcional* P' *sobre la σ-álgebra difusa $\mathcal{A}$ generada por $\mathcal{B}$.*

Demostración. Hagamos notar previamente que $\pi^* = \pi = P$ (sobre $\mathcal{B}$) y que $\pi^* = \pi$ (sobre $\mathcal{G}$).

Además, $\mathcal{B} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{D} \subset P_D(X)$. Consideremos la aplicación:

$$P': \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$$
$$A \longrightarrow \pi^*(A)$$

Vimos que π^* es una probabilidad funcional sobre $\mathcal{D}$. Esto implica que P' es una probabilidad funcional sobre $\mathcal{A}$. Por otra parte, es evidente que es extensión de P.

Resta por demostrar la unicidad de tal extensión P'.

Supongamos que exista otra probabilidad funcional Q sobre $\mathcal{A}$ que sea extensión de P.

En virtud del tema central de la referencia[9], la clase monótona generada por un álgebra de conjuntos difusos es idéntica a la σ-álgebra difusa generada por dicha álgebra. Este resultado permite dar una demostración de la unicidad de la extensión. En efecto, la clase de todos los conjuntos difusos A de la σ-álgebra generada tales que Q(A) = P'(A) es una clase monótona que contiene a $\mathcal{B}$. Por ello, P' es la única extensión a una probabilidad funcional de la probabilidad funcional P definida sobre $\mathcal{B}$.

m. COROLARIO. $P'^* = \pi^*$.

Demostración. En efecto, sea $D \in P_D(X)$, arbitrario. Dado $\varepsilon > 0$,

existe $A' \supset D$, $A' \in \mathcal{A}$ tal que $P'(A') = \pi^*(A') < P'^*(D) + \varepsilon$.
Asimismo, existe $G \supset A'$, $G \in \mathcal{G}$, tal que
$\pi(G) < P'(A') + \varepsilon < P'^*(D) + 2\varepsilon$.
Pero $G \supset A' \supset D$ implica $\pi^*(D) \leqslant \pi(G)$. Por ello, $\pi^* \leqslant P'^*$.
La otra desigualdad es trivial, puesto que $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$.

n. COROLARIO. *El espacio de probabilidad funcional completo* $(X,\mathcal{D},\pi^*/\mathcal{D})$ *es el completado del espacio* $(X,\mathcal{A},P')$.

Demostración. Por corolario anterior y el Lema 5-e se tiene $\mathcal{D} = \overline{\mathcal{A}}^{P'}$.
Además, por Corolario 5-g y Teorema 4-h, unido con el Corolario anterior, se tiene $\overline{P}' = \pi^*/\mathcal{D}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BIRKHOFF, GARRET, *Lattice Theory*, New York, 1940.

[2] BREIMAN, LEO, *Probability*, Addison Wesley Publishing Co., 1968.

[3] HALMOS, PAUL R., *Measure Theory*, 2nd. ed., Van Nostrand Co., 1950.

[4] LOEVE, MICHEL, *Probability Theory*, 2nd. ed., Van Nostrand, 1960.

[5] MEYER, PAUL A., *Probability and Potentials*, Blaisdell Publishing Co., 1966.

[6] NEVEU, JACQUES, *Bases mathématiques du Calcul des Probabilités*, Paris, Masson et Cie., 1964.

[7] RANKIN, BAYARD, *Computable Probability Spaces*, Acta Mathematica, 103, 1960.

[8] ZADEH, LOFTI A., *Fuzzy Sets*, *Information and Control 8*, 1965.

[9] BORGHI, OSVALDO, *Estructuras de clases formadas por conjuntos difusos*, Matemática y Física Teórica, Serie A, Vol. XX, 1970, de U.N. de Tucumán.

[10] BORGHI, OSVALDO, *Semi-álgebra difusa de conjuntos difusos*, Matemática y Física Teórica, Serie A, Vol.XX, 1970, U.N.de Tucumán.

NOTA. Dejo expreso reconocimiento a los Doctores N. Fava y W. Damköhler por sus atinadas sugerencias para el desarrollo del presente trabajo.

Fac.de Ciencias Físico-Químico-Matemáticas
de la Universidad Nacional de Cuyo.
San Luis, Argentina.

Recibido en noviembre de 1971.
Versión final mayo de 1972.

Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 26, 1972.

SOBRE TEOREMAS DE COMPARACION DE JUEGOS DIFERENCIALES

Vera W. de Spinadel

RESUMEN. Recientemente, A.N.V. Rao ha obtenido notables resultados referentes a la comparación de juegos diferenciales. Para demostrar sus teoremas, Rao utiliza el concepto de estrategia dado por A. Friedman. La demostración no subsiste si se pretende utilizar estrategias clásicas de R. Isaacs, tipo "feedback". Sin embargo, agregando condiciones adicionales similares a las de L. Berkovitz, se mantiene la validez de las demostraciones.

1. INTRODUCCION. En una serie de trabajos, A.N.V. Rao [1] compara los valores de dos juegos diferenciales de duración prefijada. Dicha comparación es útil cuando se trata de aproximar un juego diferencial mediante otro más simple. En su tratamiento, Rao utiliza el concepto de juego diferencial tal como lo define Friedman [2], que se basa en el uso de transformaciones en espacios funcionales para aproximar y en el límite definir las estrategias.

Consideremos los siguientes dos juegos. El estado del primer juego está determinado por el sistema diferencial

$$\dot{x} = f_1(t,x,y_1,z_1) \qquad x(t_0) = x_0 \tag{1.1}$$

donde $f_1 \in C[[t_0,T] \times R^n \times Y \times Z, R^n]$ (la notación $f \in C[A_1,A_2]$ indica que f es una transformación continua de A_1 en A_2), Y y Z son subconjuntos compactos de R^p y R^q, respectivamente. La función "pago" asociada con (1.1) es una funcional real

$$P_1 = \mu_{t_o}(x) + \int_{t_o}^{T} h(s,x(s),y_1(s),z_1(s))\, ds \tag{1.2}$$

donde μ_{t_o} es una funcional real sobre las trayectorias x(t) de (1.1).

El estado u(t) del segundo juego está determinado por el sistema diferencial

$$\dot{u} = f_2(t,u,y_2,z_2) \qquad u(t_0) = u_0 \tag{1.3}$$

donde $f_2 \in C[[t_0,T] \times R^n \times Y \times Z, R^n]$. La función "pago" asociada con (1.3) es

$$P_2 = \mu_{t_o}(u) + \int_{t_o}^{T} h(s,u(s),y_2(s),z_2(s))\,ds \qquad (1.4)$$

Ambos juegos comienzan para $t = t_0$ y terminan para $t = T$.

Las funciones medibles $y_1(t), z_1(t), y_2(t)$ y $z_2(t)$, definidas sobre Y y Z, son las funciones "control". Los jugadores, que llamaremos por simplicidad, y_1 y z_1 en el primer juego, actúan así: y_1 trata de maximizar el pago P_1 mientras que z_1 trata de minimizarlo. Lo mismo para los jugadores y_2 y z_2 del segundo juego.

Diremos que $x(t)$, $(u(t))$ es una solución de (1.1) ((1.3)) si es absolutamente continua y satisface a (1.1) ((1.3)) en casi todo punto.

Sea $C[t_0,T]$ el espacio de Banach de funciones de variable compleja en $[t_0,T]$ con la norma del supremo. Sea $[C[t_0,T]^n]$ el producto de n espacios $C[t_0,T]$. Sea $X_{t_o,T}$ el subespacio de $[C[t_0,T]^n]$ que consiste de todas las trayectorias de (1.1). Análogamente se define $U_{t_o,T}$ con respecto a (1.3).

Supondremos además que valen las siguientes hipótesis para (1.1), (1.2):

(i) f_1 es continua en $(t,x,y_1,z_1) \in [t_0,T] \times R^n \times Y \times Z$;

(ii) para cada $t \in [t_0,T]$, $y_1 \in Y$, $z_1 \in Z$, x, $\bar{x} \in R^n$ con $|x|, |\bar{x}| < R$,

$$|f_1(t,x,y_1,z_1) - f_1(t,\bar{x},y_1,z_1)| \leqslant k_1(R)\,|x - \bar{x}|$$

donde R es un número real positivo y k_1 una constante que depende de R;

(iii) para cada $t \in [t_0,T]$, $y_1 \in Y$, $z_1 \in Z$, $x \in R^n$

$$|f_1(t,x,y_1,z_1)| \leqslant k_2|x| + k_3 \qquad (k_2,k_3 \text{ constantes})$$

(iv) $\mu_{t_o}(x)$ es una funcional uniformemente continua en $X_{t_o,T}$ y $h(t,x,y_1,z_1)$ es continua en $[t_0,T] \times R^n \times Y \times Z$.

Hipótesis análogas valen para (1.3) y (1.4).

2. TEOREMAS DE RAO.

A. Friedman define el juego diferencial mediante una doble sucesión de aproximaciones discretas, denominadas "juego-δ superior". y "juego-δ inferior". En el límite $\delta \to 0$, estos juegos determinan un "Valor superior" V^+ y un "Valor inferior" V^-. Si éstos coinciden, el valor común se denomina "Valor" V del juego y corresponde intuitivamente a la solución óptima para ambos jugadores.

Usando las hipótesis enunciadas previamente y la estrategia de Friedman, Rao demuestra teoremas de comparación como el que sigue:

TEOREMA DE RAO. *Sean los juegos* (1.1), (1.2) y (1.3), (1.4) *que satisfacen las condiciones* (i)-(iv). *Sea*

$$|f(t,x,y,z) - f(t,u,y,z)| \leqslant g(t,|x-u|)$$

para todo $y \in Y$; $z \in Z$, *donde* g *es continua en* $[t_0,T] \times R^+$. *Sea* r(t) *la solución máxima de la ecuación diferencial*

$$\dot{r} = g(t,r) \quad con \quad r(t_0) = x(t_0) - u(t_0).$$

Entonces es:

$$|V_1^+ - V_2^+| \leqslant \psi_1(r(T)) \quad , \quad |V_1^- - V_2^-| \leqslant \psi_2(r(T)),$$

donde $\psi_1(r)$ *y* $\psi_2(r) \to 0$ *cuando* $r \to 0$.

La demostración de este teorema, así como la de los teoremas que le siguen, no subsiste si se pretende utilizar estrategias clásicas de Isaacs [3], del tipo "feed-back". La razón es que en este caso, escribiendo los controles y y z como funciones del estado x(t), las ecuaciones de ambos juegos diferenciales resultan:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(t,x,y_1(t,x(t)),z_1(t,x(t))) \quad \text{con } x(t_0) = x_0 & (1.5) \\ \dot{u} = f_2(t,u,y_2(t,u(t)),z_2(t,u(t))) \quad \text{con } u(t_0) = u_0 & (1.6) \end{cases}$$

y los controles y_1, z_1 y los correspondientes y_2, z_2 varían con las trayectorias. Esto parece indicar que este tipo de estrategias es excesivamente general.

Sin embargo, es posible mantener las demostraciones de Rao, especificando las estrategias clásicas tal como lo ha hecho Berkovitz [4]. Para ello, supondremos que las funciones $y_1 = \overline{y}_1(t,x(t))$, $z_1 = \overline{z}_1(t,x(t))$, $y_2 = \overline{y}_2(t,u(t))$, $z_2 = \overline{z}_2(t,u(t))$ son continuamente diferenciables a trozos y que la descomposición del espacio

(t,x) inducida por las superficies de discontinuidad de $\bar{y}_1$ y $\bar{z}_1$, $\bar{y}_2$ y $\bar{z}_2$, tiene ciertas propiedades de regularidad que se especifican en el parágrafo siguiente.

3. DESCOMPOSICION REGULAR.

DEFINICION. *Llamaremos "descomposición regular de una región* R*" a la que cumple con las siguientes condiciones:*

La región R *en la cual se produce el juego es la unión finita*

$$R = (\underset{i=1}{\cup} R_i) \cup N_{i_1,\ldots,i_k}$$

donde las R_i *son subregiones cubiertas simplemente por trayectorias óptimas y cada* $N_{i_1,\ldots,i_k}$ *es una superficie de dimensión* $\leqslant n$ *tal que* $N_{i_1,\ldots,i_k} = (\bar{R}_{i_1} \cap \ldots \cap \bar{R}_{i_k}) \cap \bar{R}$.

De cada punto de $N_{i_1,\ldots,i_k}$ sólo puede emanar una trayectoria que sigue hacia el interior de una de las dos regiones R_{i_j} $(j=1,\ldots,k)$.

Además, cada R_i es la unión de subregiones R_{ij} $(j = 1,\ldots,j_i)$ en las cuales las funciones $y_1 = \bar{y}_1(t,x(t))$, $z_1 = \bar{z}_1(t,x(t))$, $y_2 = \bar{y}_2(t,u(t))$, $z_2 = \bar{z}_2(t,u(t))$ son continuamente diferenciables.

Si ponemos $M_{ij} = (R_{ij} \cap R_{i,j+1}) \cap R \qquad (j = 1,\ldots,j_{i-1})$

cada superficie M_{ij} de dimensión n divide a R_i, quedando las superficies M_{ij} a distancia positiva una de otra. Supondremos además que en cada R_i, las trayectorias óptimas no son tangentes a las superficies M_{ij}, las que llamaremos *superficies de discontinuidad*.

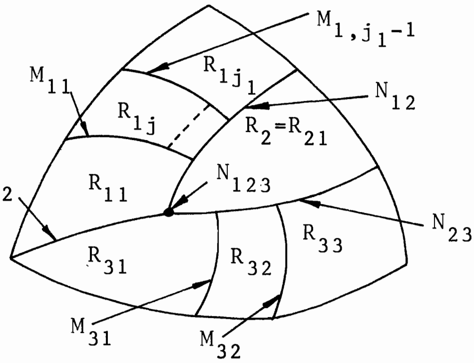

FIGURA 1: Descomposición regular de una región.

4. TEOREMA.

Sean los juegos diferenciales (1.5) *y* (1.6) *con sus respectivas funcionales "pago":*

$$\begin{cases} P_1 = \mu_{t_o}(x) + \displaystyle\int_{t_o}^{T} h(s,x(s),y_1(s,x(s)),z_1(s,x(s)))\,ds & (1.7) \\ P_2 = \mu_{t_o}(u) + \displaystyle\int_{t_o}^{T} h(s,u(s),y_2(s,u(s)),z_2(s,u(s)))\,ds & (1.8) \end{cases}$$

que satisfacen las condiciones (i) *a* (iv) *y la condición adicional:*

(v) f_2 *es lipschitziana respecto a* y *y a* z, *vale decir:*

$$|f_2(t,x,y,z) - f_2(t,u,y^*,z)| \leqslant k_1 |y - y^*| ,$$

$$|f_2(t,x,y,z) - f_2(t,u,y,z^*)| \leqslant k_2 |z - z^*| ,$$

en una región R *que admite una descomposición regular.*

Sea además:

$$|f_1(t,x,y,z) - f_2(t,u,y,z)| \leqslant g(t,|x - u|),$$

para todo $y \in Y$, $z \in Z$ *donde* g *es una función continua en* $[t_0,T] \times R^+$. *Sea* $g^*(t,|x - u|) = g(t,|x - u|) + k|x - u|$.

Sea r(t) *la solución máxima de la ecuación diferencial:*

$$\dot{r} = g^*(t,r) \quad con \quad r(t_0) = |x(t_0) - u(t_0)| .$$

Entonces es:

$$|V_1^+ - V_2^+| \leqslant \psi_1(r(T))$$

$$|V_1^- - V_2^-| \leqslant \psi_2(r(T)),$$

donde las funciones $\psi_1(r)$ *y* $\psi_2(r) \to 0$ *cuando* $r \to 0$.

Demostración. Dentro de cada R_{ij} podemos escribir:

$$|f_1(t,x,\bar{y}(t,x(t)),\bar{z}(t,x(t))) - f_2(t,u(t),\bar{y}(t,u(t)),\bar{z}(t,u(t)))| =$$

$$= |f_1(t,x(t),\bar{y}(t,x(t)),\bar{z}(t,x(t)) - f_2(t,u(t),\bar{y}(t,x(t)),\bar{z}(t,x(t))) +$$

$$+ f_2(t,u(t),\bar{y}(t,x(t)),\bar{z}(t,x(t))) - f_2(t,u(t),\bar{y}(t,u(t)),\bar{z}(t,y(t)))| \leqslant$$

$$\leqslant g(t,|x - u|) + |f_2(t,u(t),\bar{y}(t,x(t)),\bar{z}(t,x(t))) -$$

$$- f_2(t,u(t),\bar{y}(t,u(t)),\bar{z}(t,u(t))| .$$

Con respecto al segundo sumando, por ser f_2 lipschitziana respecto alos controles y y z, por hipótesis, podemos poner:

$$= g(t,|x - u|) + |f_2(t,u(t),\bar{y}(t,x(t)),\bar{z}(t,x(t))) +$$

$$+ f_2(t,u(t),\bar{y}(t,x(t)),\bar{z}(t,u(t))) - f_2(t,u,\bar{y}(t,x(t)),\bar{z}(t,u(t))) -$$

$$- f_2(t,u,\bar{y}(t,u(t)),\bar{z}(t,u(t)))| \leqslant g(t,|x - u|) + k_1\ |y - y^*| +$$

$$+ k_2\ |z - z^*| ,\text{ donde } y^* = \bar{y}(t,u(t));\ z^* = \bar{z}(t,u(t)).$$

Como los controles y y z son funciones continuamente diferenciables, cumplen la condición de Lipschitz:

$$|y - y^*| \leqslant k_3\ |x - u| \quad ; \quad |z - z^*| \leqslant k_4\ |x - u| \ ,$$

de manera que finalmente resulta:

$$|f_1(t,x,\bar{y}(t,x(t)),\bar{z}(t,x(t))) - f_2(t,u,\bar{y}(t,u(t)),\bar{z}(t,u(t)))| \leqslant$$

$$\leqslant g(t,\ |x - u|) + k\ |x - u| .$$

En consecuencia, dentro de cada subregión R_{ij} vale la demostración del teorema de Rao tomando como r(t) la solución máxima de la ecuación diferencial:

$$\dot{r} = g^*(t,r) \quad \text{con} \quad r(t_0) = |x(t_0) - u(t_0)| .$$

En cada superficie de discontinuidad M_{ij}, demostraremos que r(t) podrá tener una discontinuidad que a lo sumo será una multiplicación por un factor acotado. De esto resultará que si r(t) tiende a cero antes del cruce de la superficie M_{ij}, también tenderá a cero después del cruce (y será un infinitésimo del mismo orden).

En efecto, hemos supuesto que la trayectoria incidente sobre la superficie de discontinuidad forma con ésta un ángulo α no nulo (Figura 2). Como la velocidad con que es descripta la trayectoria es finita, resulta que cuando $r(t) \to 0$, lo mismo sucede con la distancia $\overline{P_0 P'_0}$ y también la diferencia de los valores de t correspondientes a P_0 y P'_0 tiende a cero. Por lo tanto, las condiciones iniciales para ambas trayectorias en la siguiente región sólo diferirán en un infinitésimo y las trayectorias seguirán siendo próximas entre sí.
Lo mismo sucede en cada paso por una superficie de discontinuidad y hemos supuesto que toda trayectoria óptima sólo posee un número finito de talès intersecciones. Hemos así demostrado que las trayectorias óptimas permanecen próximas entre sí. La distancia entre ellas puede acotarse por la función r(t) que entonces podrá presentar discontinuidades como indica la Figura 3. Los correspondientes saltos pueden estimarse numéricamente en función de los ángulos α y las correspondientes velocidades.

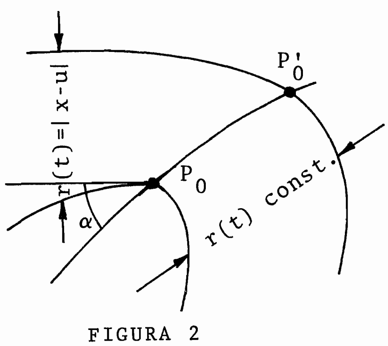

FIGURA 2

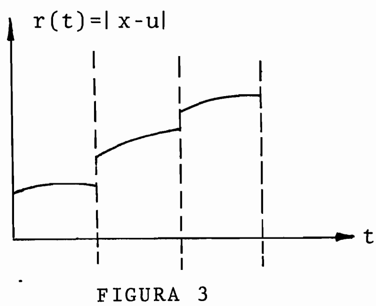

FIGURA 3

NOTA. Condiciones similares a las que hemos utilizado, también han sido impuestas por Friedman en la superficie terminal de juegos de duración no prefijada.

Es preciso mencionar que el grave inconveniente de las estrategias del tipo Berkovitz es que se hace depender la admisibilidad de una estrategia y(t,x(t)) de las trayectorias solución x(t), vale decir, de la probable estrategia opuesta z(t,x(t)).

BIBLIOGRAFIA

[1] A.N.V. RAO, Trabajo de tesis presentado al Departamento de Matemática de la Universidad de Rhode Island, Kingston, R.I., 02881.

[2] A. FRIEDMAN, *On the definition of differential games and the existence of Value and saddle points*, J. Diff. Equations, 7 (1970), pp. 69-91.

[3] RUFUS ISAACS, *Differential Games*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1965.

[4] L. D. BERKOVITZ, *Necessary conditions for optimal strategies in a class of differential games and control problems*, SIAM J. Control, 5 (1967), pp. 1-24.

Departamento de Matemática,
Fac. de Ciencias Exactas, Universidad de Buenos Aires. Argentina.

Recibido en abril de 1972.
Versión final junio de 1972.

Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 26, 1972.

ON A CLASS OF POLYNOMIALS

by D. H. Voelker

ABSTRACT. A class of polynomials is defined and studied. Its functional relation is given from which the properties are deduced. The polynomials are reciprocal of 1st kind, primitive, monic and positive. Their zeros are simple and real negative. The coefficients are positive integers and increasing until the center, then decreasing. They are calculated until the order 12. Their recursion and generic formulae are given.

1. INTRODUCTION. When the complex Fourier series $\sum_{-\infty}^{\infty} c_\kappa e^{i\kappa x} = f(x)$ is used for the solution of differential equations of 1st order, one has to use the result that the Fourier coefficient $c_\kappa = \frac{1}{i\kappa-\alpha}$ $(\alpha \neq i\kappa)$ corresponds to the function

$f(x) = \frac{2\pi e^{\alpha x}}{1-e^{2\pi\alpha}}$ in the interval $(0, 2\pi)$; in the case of an equation of 2nd order that $c_\kappa = \frac{1}{(i\kappa-\alpha)^2}$ belongs to

$f(x) = \frac{2\pi e^{\alpha x}}{1-e^{2\pi\alpha}} \left(x + \frac{2\pi e^{2\pi\alpha}}{1-e^{2\pi\alpha}}\right)$. The general case can be broken

down to terms of the form $\frac{(i\kappa)^m}{(i\kappa-\alpha)^{n+1}}$ $(0 \leqslant m \leqslant n$, here and throughout this paper) by expansion into partial fractions. But as the factor $(i\kappa)^m$ means only the mth derivative of $f(x)$, we need to consider only $c_\kappa = \frac{1}{(i\kappa-\alpha)^{n+1}}$. By induction it can be found that this Fourier coefficient corresponds to the function

$$f(x) = \frac{2\pi e^{\alpha x}}{n!(1-e^{2\pi\alpha})} \left[x^n + e^{2\pi\alpha} \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n}{\nu} \phi_{\nu-1}(e^{2\pi\alpha}) \left(\frac{2\pi}{1-e^{2\pi\alpha}}\right)^\nu x^{n-\nu}\right]$$

where the ϕ_n are polynomials defined by formula (A).

2. DEFINING FORMULA

$$\text{(A)}\quad \phi_n(x) = (1-x)^n + x\sum_{\nu=1}^{n}\binom{n+1}{\nu}\phi_{\nu-1}(x)(1-x)^{n-\nu}\quad,\quad \phi_0(x) = 1.$$

By this definition we can calculate the first polynomials as follows:

$\phi_0(x) = 1$; $\phi_1(x) = 1 + x$; $\phi_2(x) = 1 + 4x + x^2$;

$\phi_3(x) = 1 + 11x + 11x^2 + x^3$; $\phi_4(x) = 1 + 26x + 66x^2 + 26x^3 + x^4$;

$\phi_5(x) = 1 + 57x + 302x^2 + 302x^3 + 57x^4 + x^5$.

For $n > 5$ see Appendix p. 124.

If we replace n in (A) by (n-1) and multiply by (1-x) we obtain

$$\phi_{n-1} = (1-x)^n + x\sum_{\nu=1}^{n}\binom{n}{\nu}\phi_{\nu-1}(x)(1-x)^{n-\nu}.$$

If we subtract this from (A) and use $\binom{n+1}{\nu} - \binom{n}{\nu} = \binom{n}{\nu-1}$ we find another form of the definition:

$$\text{(B)}\quad \phi_n(x) - \phi_{n-1}(x) = x\sum_{\nu=1}^{n}\binom{n}{\nu-1}\phi_{\nu-1}(x)(1-x)^{n-\nu}\quad (n\neq 0)\quad \text{or also}$$

$$\text{(C)}\quad \phi_n(x) = (1+nx)\phi_{n-1}(x) + x\sum_{\nu=1}^{n-1}\binom{n}{\nu-1}\phi_{\nu-1}(x)(1-x)^{n-\nu}\quad (n\neq 0).$$

These definitions can be transformed into still other forms if one applies a priori the relation $x^n\phi_n(1/x) = \phi_n(x)$, proved on p. 118 (3.5) ff. Then the definitions (A), (B) and (C) become

$$\text{(A')}\quad \phi_n(x) = (x-1)^n + \sum_{\nu=1}^{n}\binom{n+1}{\nu}\phi_{\nu-1}(x)(x-1)^{n-\nu}$$

$$\text{(B')}\quad \phi_n(x) - \phi_{n-1}(x) = \sum_{\nu=1}^{n}\binom{n}{\nu-1}\phi_{\nu-1}(x)(x-1)^{n-\nu}\quad (n\neq 0)$$

$$\text{(C')}\quad \phi_n(x) = (x+n)\,\phi_{n-1}(x) + \sum_{\nu=1}^{n-1}\binom{n}{\nu-1}\phi_{\nu-1}(x)(x-1)^{n-\nu}\quad (n\neq 0)$$

Definition (A) can be rewritten in shorter form as

$$\text{(D)}\quad \phi_n(x) = x\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n+1}{\nu}\phi_{\nu-1}(x)(1-x)^{n-\nu}\;,\ \text{but then we have to}$$

define $\phi_{-1}(x)$ to be $1/x$. Also, (D) cannot be transformed by the relation (3.5) because the latter is not valid for $n = -1$.

All the above defining formulae are used in this paper only with $\phi_0(x) = 1$. It should be pointed out that (A), (B), and (C) can be generalized either by another choice of $\phi_0(x)$ or by a [a general] $\phi_0(x)$. (A'), (B'), (C') and (D) then become useless.
From (A) or any of the other definitions it follows that the $\phi_n(x)$ are polynomials of degree n. Their absolute term is always 1, since (2.1) $\phi_n(0) = 1$.
If we set x = 1 in (A) we obtain $\phi_n(1) = (n+1)\ \phi_{n-1}(1)$ and by iteration (2.2) $\phi_n(1) = (n+1)!$
As to other properties of the $\phi_n(x)$ it is advisable to establish first a functional relation for $\phi_n(x)$ and then find the properties from it.

3. FUNCTIONAL RELATIONS.

A functional relation for the $\phi_n(x)$ of fundamental importance is

(3.1) $\phi_n(x) = (1+nx)\ \phi_{n-1}(x) + x(1-x)\ \phi'_{n-1}(x)$.

Proof. The derivative of (D) is $\phi'_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+1}{\nu}\ \phi_{\nu-1}(x)(1-x)^{n-\nu} +$

$$+\ x\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+1}{\nu}\ \phi'_{\nu-1}(x)(1-x)^{n-\nu} - x\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+1}{\nu}\phi_{\nu-1}(x)(n-\nu)(1-x)^{n-\nu-1}\ .$$

In the second sum we insert $\phi_{\nu-1}(x)$ from formula (3.1) which is supposed to be valid for n as stated. Then the second addend becomes $\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+1}{\nu}\ \phi_\nu(x)(1-x)^{n-\nu-1} - \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+1}{\nu}(1+\nu x)\phi_{\nu-1}(x)(1-x)^{n-\nu-1}$

from which we obtain that

$$\phi'_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+1}{\nu}\ \phi_\nu(x)(1-x)^{n-\nu-1} - (n+1)x\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+1}{\nu}(1-x)^{n-\nu-1}\ .$$

Using (D) on the second sum we find that

$$\phi'_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n+1}{\nu-1}\ \phi_{\nu-1}(x)(1-x)^{n-\nu} + \binom{n+1}{n}\ \phi_n(x)(1-x)^{-1} -$$

$$-\ (n+1)\ \phi_n(x)(1-x)^{-1}\ .$$

On the right side, only the first term remains. Applying to it definition (C) we find finally

$x(1-x)\ \phi_n'(x) = \phi_{n+1}(x) - [1+(n+1)x]\ \phi_n(x)$, and this is (3.1)

for (n+1) instead of n.

Formula (3.1) is better suited for the numerical calculation of the $\phi_n(x)$ that the defining formulae of section 2. The table of coefficients on page 124 has been calculated by the use of (3.1) through n = 9.

An immediate consequence of (3.1) is obtained by use of (C),

$$(3.2)\qquad \phi_n'(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n+1}{\nu-1}\ \phi_{\nu-1}(x)(1-x)^{n-\nu} .$$

From (3.2) we can find

$$(3.3)\quad \phi_n'(0) = 2(2^n-1) - n \qquad\qquad (3.4)\quad \phi_n'(1) = \binom{n+1}{2}\ .\ n!$$

An important consequence of (3.1) is the relation

$$(3.5)\quad x^n\ \phi_n(1/x) = \phi_n(x).$$

Proof. Let (3.5) be valid for n as stated. Its derivative is $nx^{n-1}\ \phi_n(1/x) - \frac{x^n}{x^2}\ \phi_n'(1/x) = \phi_n'(x)$. We eliminate the two derivatives by use of (3.1) and have

$$nx^{n-1}\phi_n(1/x) - x^{n-2}\ \frac{\phi_{n+1}(1/x) - [1+(n+1)/x]\ \phi_n(1/x)}{(1-\frac{1}{x})\ \frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{\phi_{n+1}(x) - [1+(n+1)x]\ \phi_n(x)}{(1-x)x}$$. Adding the identity

$$\frac{1+(n+1)x}{(1-x)x}\ x^n\ \phi_n(1/x) = \frac{1+(n+1)x}{(1-x)x}\ \phi_n(x)$$ we obtain

$$\frac{x^{n+1}}{(1-x)x}\ \phi_{n+1}(1/x) = \frac{\phi_{n+1}(x)}{(1-x)x}$$, or finally $x^{n+1}\ \phi_{n+1}(1/x) = \phi_{n+1}(x)$,

which is (3.5) for (n+1) instead of n.

The relation (3.5) characterizes reciprocal polynomials.

4. PROPERTIES OF THE COEFFICIENTS.

Let $\phi_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu}x^\nu$ and insert it into (3.1), the latter written for (n+1) instead of n. Comparison of the coefficients of x^ν

$(1 \leqslant \nu \leqslant n)$ yields

$$a_{n+1,\nu} = a_{n,\nu} + (n+1)a_{n,\nu-1} + \nu a_{n,\nu} - (\nu-1)a_{n,\nu-1} \quad \text{or shorter}$$

$$(4.1) \qquad a_{n+1,\nu} = (\nu+1)a_{n,\nu} + (n+2-\nu)a_{n,\nu-1} \, .$$

This recursion formula holds also when $\nu = n+1$ and $\nu = 0$ if $a_{n,\nu} = 0$ for negative indices.

Consequences of (4.1)

(4.2) *All coefficients* $a_{n,\nu}$ *are positive integers.*

Proof. If $\phi_n(x)$ has only positive integer coefficients, the right side of (4.1) is a positive integer, therefore also $a_{n+1,\nu}$. The coefficients through $n = 5$ are positive integers, see page 116.

(4.3) *The coefficients are symmetrical*: $a_{n,\nu} = a_{n,n-\nu}$.

Proof. It is well known that from (3.5) follows $|a_{n,\nu}| = |a_{n,n-\nu}|$ (reciprocal polynomials). By (4.2) the coefficients are all positive, thus $a_{n,\nu} = a_{n,n-\nu}$, i.e. the $\phi_n(x)$ are symmetrical polynomials, also called reciprocal of 1st kind.

(4.4) $a_{n,0} = a_{n,n} = 1$. This follows from (4.3) for $\nu = 0$ and from (2.1). Thus, the $\phi_n(x)$ are monic and primitive.

$$(4.5) \qquad a_{n,\nu} < a_{n,\nu+1} \qquad (0 \leqslant \nu \leqslant \tfrac{n}{2}-1).$$

Proof.

$$a_{n+1,\nu+1} - a_{n+1,\nu} = (\nu+2)a_{n,\nu+1} + (n-2\nu)a_{n,\nu} - (n+2-\nu)a_{n,\nu-1} >$$

$$> (\nu+2)a_{n,\nu+1} + (n-2\nu)a_{n,\nu} - (n+2-\nu)a_{n,\nu} = (\nu+2)(a_{n,\nu+1} - a_{n,\nu}) > 0.$$

Thus, if (4.5) holds for n, it holds for (n+1). That it holds for $n = 2,3,4,5$ is seen on page (p.116).

Because of the symmetry (4.3) the coefficients must decrease monotonically in the second half of the polynomials.

Two particular cases of (4.1) are useful.

(4.6) $a_{n+1,1} = 2a_{n,1} + n + 1$ (Set $\nu = 1$ in (4.1) and use (4.4))

(4.7) $a_{2n,n} = 2(n+1)a_{2n-1,n}$ (Set $n = 2\kappa-1$, $\nu=\kappa$ in (4.1) and use (4.3)).

The recursion formula (4.1), together with (4.3), (4.6) and (4.7) as well as (2.2), seems to be the most convenient way to calculate the coefficients. The table on page 124 has been extended until n = 12 by this method.

$$(4.8) \qquad a_{n,\nu} = \sum_{\kappa=0}^{\nu} (-1)^{\kappa} \binom{n+2}{\kappa} (\nu+1-\kappa)^{n+1}.$$

Proof. Substitute (4.8) into the right side of (4.1)

$$(\nu+1)a_{n,\nu} + (n+2-\nu)a_{n,\nu-1} = (\nu+1)\sum_{\kappa=0}^{\nu}(-1)^{\kappa}\binom{n+2}{\kappa}(\nu+1-\kappa)^{n+1} +$$

$$+ (n+2-\nu)\sum_{\kappa=0}^{\nu}(-1)^{\kappa}\binom{n+2}{\kappa}(\nu-\kappa)^{n+1} = (\nu+1)\sum_{\kappa=1}^{\nu}(-1)^{\kappa}\binom{n+2}{\kappa}(\nu+1-\kappa)^{n+1} +$$

$$+ (\nu+1)(\nu+1)^{n+1} + (n+2-\nu)\sum_{\kappa=1}^{\nu}(-1)^{\kappa}\binom{n+2}{\kappa-1}(\nu+1-\kappa)^{n+1} =$$

$$= \sum_{\kappa=1}^{\nu}(-1)^{\kappa}(\nu+1-\kappa)^{n+1}\left[(\nu+1)\binom{n+2}{\kappa} - (n+2-\nu)\binom{n+2}{\kappa-1}\right] + (\nu+1)^{n+2} =$$

$$= \sum_{\kappa=1}^{\nu}(-1)^{\kappa}(\nu+1-\kappa)^{n+1}\left[(\nu+1-\kappa)\binom{n+3}{\kappa}\right] + (\nu+1)^{n+2} =$$

$$= \sum_{\kappa=0}^{\nu}(-1)^{\kappa}\binom{n+3}{\kappa}(\nu+1-\kappa)^{n+2} = a_{n+1,\nu}. \qquad \text{q.e.d.}$$

5. THE ZEROES OF THE $\phi_n(x)$.

It is desirable to know where the zeros of the $\phi_n(x)$ are situated, not only to help their numerical computation but also for theoretical reasons.

The zeros of the first five polynomials (p.116) can be found by elementary methods. They are

$n = 1$, -1; $n = 2$, $-2 \pm \sqrt{3} \approx \begin{cases} -0.268 \\ -3.73 \end{cases}$

$n = 3$ $\quad -1$

$\qquad -5 \pm 2\sqrt{6} \approx \begin{cases} -0.101 \\ -9.90 \end{cases}$

$$n = 4 \qquad -\frac{13+\sqrt{105}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{270+26\sqrt{105}} \approx \begin{cases} -0.0431 \\ -23.20 \end{cases}$$

$$-\frac{13-\sqrt{105}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{270-26\sqrt{105}} \approx \begin{cases} -0.431 \\ -2.32 \end{cases}$$

$$n = 5 \qquad -1$$

$$-(14+3\sqrt{15}) \pm \sqrt{330+84\sqrt{15}} \approx \begin{cases} -0.0195 \\ -51.22 \end{cases}$$

$$-(14-3\sqrt{15}) \pm \sqrt{330-84\sqrt{15}} \approx \begin{cases} -0.220 \\ -4.54 \end{cases}$$

The zeros for $n = 6$ and $n = 7$ are (by approximation)

$n = 6$: -0.00915 ; -0.123 ; -0.535 ; -1.87 ; -8.16 ; -109.3 .

$n = 7$: -0.00438 ; -0.0717 ; -0.319 ; -1.000 ; -3.14 ; -13.96 ; -228.5.

The zeros are all simple, real negative and are separated by the zeros of the next lower polynomial.

(5.1) *These are general properties of the* $\phi_n(x)$.

Proof. Let $x_{n\nu}(1 \leqslant \nu \leqslant n)$ be the (simple) zeros of $\phi_n(x)$ such that $x_{nn} < x_{n,n-1} < \ldots < x_{n2} < x_{n1} < 0$. Then, the derivative $\phi_n'(x)$ has different signs at two consecutive zeros, and equation (3.1) becomes, for (n+1) instead of n and for $x = x_{n\nu}$,

$\phi_{n+1}(x_{n\nu}) = (1-x_{n\nu})x_{n\nu}\phi_n'(x_{n\nu})$ where the factor of $\phi_n'(x_{n\nu})$ is negative for all ν. Therefore also $\phi_{n+1}(x)$ has different signs at two consecutive zeros of $\phi_n(x)$ so that between them must lie at least one zero of $\phi_{n+1}(x)$. Thus we have at least (n-1) different zeros of $\phi_{n+1}(x)$. Another zero must lie between x_{n1} and 0 $(x_{n1} < x_{n+1,1} < 0)$ because of $\phi_{n+1}(0) = 1$ and $\phi_{n+1}(x_{n1}) < 0$. Corresponding to this zero $x_{n+1,1}$, another zero must exist, found beyond x_{nn}, as the polynomials are reciprocal and $x_{nn} = \frac{1}{x_{n1}}$, $x_{n+1,n+1} = \frac{1}{x_{n+1,1}}$. Since we have now (n+1) different zeros of $\phi_{n+1}(x)$, they must be simple. They lie all on the real negative axis and are separated by those of $\phi_n(x)$. Thus, the statement (5.1) has been proved.

The fact that the zeros of the polynomials $\phi_n(x)$ lie on the negative real axis makes the $\phi_n(x)$ a subclass of the class of Hurwitz polynomials, i.e. of those polynomials whose zeros lie all in the left half plane. Hurwitz polynomials play a role in considerations of stability.

As the Hurwitz polynomials are positive, i.e. assume for values of the right half plane only values of the same, the $\phi_n(x)$ are also positive polynomials.

Some more properties of the zeros of $\phi_n(x)$ are easily obtained.

If we set $x = -1$ in (3.5) we have $(-1)^n\phi_n(-1) = \phi_n(-1)$ which implies $\phi_n(-1) = 0$ for odd n. For even n, $x = -1$ cannot be a zero of a reciprocal polynomial .

The zero $x = -1$ is the only rational one; all others are irrational because the real zeros of a polynomial with integer coefficients are either integer or irrational.
Besides, our polynomials are reciprocal so that if p (integer) is a zero, also $\frac{1}{p}$ would be a zero, which is only possible if $p = \pm 1$.
But $p = 1$ cannot be a zero because of the positivity of the coefficients (4.2) so that $x = -1$ is the only rational one.

A look at the cases $1 \leqslant n \leqslant 7$ shows that the zeros of $\phi_n(x)$ lie between $-a_{n,n-1}$ and $-\frac{1}{a_{n1}}$ .It can be proved, that the relation

(5.2) $\quad -a_{n,n-1} \leqslant x_{n\nu} \leqslant -\frac{1}{a_{n1}} \quad (1 \leqslant \nu \leqslant n)$ holds for all n.

Proof. For $1 \leqslant n \leqslant 5$ is $\max \frac{a_{n,\nu+1}}{a_{n\nu}} = a_{n1}$. (p.116).

For arbitrary n we have, using (4.1),

$$\frac{a_{n+1,\nu+1}}{a_{n+1,\nu}} = \frac{(\nu+2)a_{n,\nu+1} + (n+1-\nu)a_{n\nu}}{(\nu+1)a_{n\nu} + (n+2-\nu)a_{n,\nu-1}} = \frac{\frac{a_{n,\nu+1}}{a_{n\nu}} + \frac{n+1-\nu}{\nu+2}}{\frac{\nu+1}{\nu+2} + \frac{n+2-\nu}{\nu+2}\,\frac{a_{n,\nu-1}}{a_{n\nu}}} .$$

This fraction assumes a maximum when $\nu = 0$:

$$\frac{a_{n+1,\nu+1}}{a_{n+1,\nu}} = 2a_{n1} + n + 1 = a_{n+1,1} \text{ (cfr. 4.6) } = a_{n+1,n} .$$

Therefore, we find by Kakeya's theorem $\left(|x_{n+1,\nu}| \leqslant \max \frac{a_{n+1,\nu+1}}{a_{n+1,\nu}}\right)$

that $-a_{n+1,n} \leqslant x_{n+1,\nu}$ for all $\nu \leqslant n+1$ and , as the polynomials are reciprocal, also $x_{n+1,\nu} \leqslant -\frac{1}{a_{n+1,1}}$. Thus, we have (5.2) for (n+1) instead of n.

The zeros x_{n1} *accumulate toward the origin if* $n \to \infty$.

Proof. If $x_{n-1,1} > -\frac{1}{n}$ we have, on ground of (5.1), $-\frac{1}{n} < x_{n-1,1} < x_{n1}$. If $x_{n-1,1} < -\frac{1}{n}$ we have $\phi'_{n-1}(-\frac{1}{n}) > 0$ and, because of (3.1),

$$\phi_n(-\tfrac{1}{n}) = \frac{n+1}{n^2}\,\phi'_{n-1}\,(-\tfrac{1}{n}) < 0,$$

which implies, together with $\phi_n(0)=1$, that $-\frac{1}{n} < x_{n1} < 0$. Thus we have $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n1} = -0$, and as the $\phi_n(x)$ are reciprocal also $\lim\limits_{n\to\infty} x_{nn} = -\infty$.

Clarkson College of Technology
Postdam, New York, E.E.U.U.

Recibido en mayo de 1972.

6. Appendix. Coefficients of the $\phi_n(x)$ $(0 \leqslant n \leqslant 12)$.

n													
0	1												
1	1	1											
2	1	4	1										
3	1	11	11	1									
4	1	26	66	26	1								
5	1	57	302	302	57	1							
6	1	120	1191	2416	1191	120	1						
7	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1					
8	1	502	14608	88234	156190	88234	14608	502	1				
9	1	1013	47840	455192	1310354	1310354	455192	47840	1013	1			
10	1	2036	152637	2203488	9738114	15724248	9738114	2203488	152637	2036	1		
11	1	4083	478271	10187685	56580360	172250400	172250400	56580360	10187685	478271	4083	1	
12	1	8178	1479726	45533450	374590965	1486145280	2411505600	1486145280	374590965	45533450	1479726	8178	1

NORMAS PARA LA PRESENTACION DE ARTICULOS

Los artículos que se presenten a esta revista no deben haber sido publicados o estar siendo considerados para su publicación en otra revista.

Cada trabajo deberá ser enviado en su forma definitiva, con todas las indicaciones necesarias para su impresión. No se envían pruebas de imprenta a los autores.

Cada artículo debe presentarse por duplicado, mecanografiado a doble espacio. Es deseable que comience con un resúmen simple de su contenido y resultados obtenidos. Debe ponerse especial cuidado en distinguir índices y exponentes; distinguir entre la letra O y el número cero, la letra l y el número uno, la letra i y la ι (iota), ε y ϵ , etc. Los diagramas deben dibujarse en tinta china. Los símbolos manuscritos deben ser claramente legibles. Salvo en la primera página, deben evitarse en lo posible notas al pie.

El artículo deberá acompañarse de una lista completa de los símbolos utilizados en el texto.

La recepción de cada trabajo se comunicará a vuelta de correo y en su oportunidad, la aceptación del mismo para su publicación.

Los trabajos deben enviarse a:
DIRECTOR DE LA REVISTA DE LA U.M.A.
INSTITUTO DE MATEMATICA.
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR.
BAHIA BLANCA.

NOTES FOR THE AUTHORS

Submission of a paper to this journal will be taken to imply that it has not been previously published and that it is not being considered elsewhere for publication.

Papers when submitted should be in final form. Galley proofs are not sent to the authors.

Papers should be submitted in duplicate, neatly typewritten, double spaced. It is desirable that every paper should begin with a simple but explicit summary of its content and results achieved. Special care should be taken with subscripts and superscripts; to show the difference between the letter O and the number zero, the letter l and the number one, the letter i and ι (iota), ε and ϵ , etc. Diagrams should be drawn with black Indian ink. Symbols which have been inserted by hand should be well spaced and cleary written. Footnotes not on the firts page should be avoided as far as possible.

A complete list of the symbols used in the paper should be attached to the manuscript.

Reception of a paper will be acknowledged by return mail and its acceptance for publication will be communicated later on.

Papers should be addressed to:
DIRECTOR DE LA REVISTA DE LA U.M.A.
INSTITUTO MATEMATICA.
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR.
BAHIA BLANCA.
ARGENTINA.

INDICE

Volúmen 26, Número 2, 1972

Reg. Nac. de la Prop.

Int. N° 1.044.738

Correo Argentino	Casa Central y Suc. 69	TARIFA REDUCIDA CONCESION Nº 9120
		FRANQUEO PAGADO CONCESION Nº 3626

AUSTRAL IMPRESOS
VILLARINO 739 - B. B.