REVISTA DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

VOLUMEN 26, NUMERO 3
1972

BAHIA BLANCA
1972

UNION MATEMATICA ARGENTINA

La U.M.A. reconoce cuatro categorías de miembros: honorarios, protectores, titulares y adherentes. El miembro protector paga una cuota anual de \$ 4.000, por lo menos; el titular una cuota anual de \$ 2000 y el adherente (estudiante solamente) una cuota anual de \$ 1000. Los pagos deberán efectuarse por cheque, giro u otro medio de gastos, a la orden de UNION MATEMATICA ARGENTINA, Casilla de Correo 3588, Buenos Aires.

Los autores de trabajos reciben gratuitamente una tirada aparte de 50 ejemplares. La correcciones extraordinarias de pruebas son por cuenta de los autores.

Foreign subscriptions: 12 U.S. dollars.

All administrative correspondence and subscriptions orders should be addressel to:

REVISTA DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

Casilla de Correo 3588

Buenos Aires. (Argentina)

REVISTA DE LA
UNION
MATEMATICA ARGENTINA

VOLUMEN 26, NUMERO 3
1972

BAHIA BLANCA
1972

Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 26, 1972.

FOURIER SERIES EXPANSION FOR THE GENERAL POWER OF THE DISTANCE BETWEEN TWO POINTS

by R. F. A. Abiodun

ABSTRACT. Simply by using the property of orthogonality of cosine functions, the Fourier series for the hypergeometric function ${}_2F_1[\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\lambda+1; -\frac{r^2}{c^2}]$ where $r = (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \omega)^{\frac{1}{2}}$ is the distance between two points $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ and $(r_2, \theta_2, \varphi_2)$ is given. When $c = 0$, it yields the expansion for $r^{-(\lambda+1)}$ valid for all values of λ, where λ can be real or complex. By specializing λ, the expansions for $(c^2 + r^2)^{-1/2}$ and $(c^2 + r^2)^{-3/2}$ are also obtained.

1. INTRODUCTION. The expansion for powers of the distance between two points is often required in various fields of Mathematical Physics. Various approaches to the expansion have been considered by several authors. Recently Sack [1] in a generalization of Laplace's expansion, presented a series expansion of the form

$$r^n = \sum_{\ell=0} R_{n,\ell}(r_1, r_2)\, P_\ell(\cos \omega) \quad , \tag{1}$$

in terms of Legendre polynomials P_ℓ for arbitrary real powers of the distance $r = (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \omega)^{1/2}$ between the two points $P_1 \equiv (r_1, \theta_1, \varphi_1)$ and $P_2 \equiv (r_2, \theta_2, \varphi_2)$ referred to polar coordinates and $\cos \omega = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 . \cos (\varphi_1 - \varphi_2)$.

Ashour [2] following Sack's method obtained the Fourier series expansion:

$$r^n = \sum_{\ell=0} R_{n,\ell}(r_1, r_2) \cos \ell\omega \tag{2}$$

Sack's approach (and in effect Ashour's as well) requires a knowledge of the partial differential equation satisfied by r^n. Secondly, their approach assumes a preknowledge of the functional form of the desired expansion functions $R_{n,\ell}$. Thirdly, their expansion presuppose the knowledge of the expansion for a specific value of n. Furthermore, the use of series solution and the equating of coefficients which their approach entails could be cumbersome.

In this paper we show that a new Fourier expansion for r^λ (where λ can be any number real or complex satisfying $R(\lambda) > -1$) can be obtained very simply merely by using the orthogonal properties of the cosine functions. Two other new results are also given.

2. MATHEMATICAL DERIVATIONS.

Eason, Noble and Sneddon [3] have proved that

$$(3)\qquad \int_0^\infty J_\mu(at)J_\nu(bt)e^{-ct}t^\lambda dt = \frac{\Gamma(\mu-\nu+\lambda+1)}{2^{\mu-\nu}\,\pi\, c^{\mu-\nu+\lambda+1}\,\Gamma(\mu+\nu+1)} \times$$

$$\int_0^\pi (a-be^{-i\theta})^{\mu-\nu}\, e^{-i\nu\theta}\; {}_2F_1[\tfrac{1}{2}\mu - \tfrac{1}{2}\nu + \tfrac{1}{2}\lambda + \tfrac{1}{2},$$

$$\tfrac{1}{2}\mu - \tfrac{1}{2}\nu + \tfrac{1}{2}\lambda + 1 \;;\; \mu - \nu + 1 \;;\; -\frac{r^2}{c^2}]\; d\theta$$

where $r^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$, $R(\mu-\nu+\lambda+1) > 0$, and $R(c) > 0$. Using the result given by Erdelyi {4, p.373, equ.(8)} and putting $\mu = \nu$, we obtain after simplifications that

$$(4)\qquad \int_0^\infty J_m(at)J_m(bt)t^\lambda e^{-ct}dt = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2} + m)\;\Gamma(\frac{1}{2}\lambda + 1 + m)\,2^\lambda (ab)^m}{\sqrt{\pi}\; c^{2m+\lambda+1}\;[\Gamma(m+1)]^2} \times$$

$$F_4[(m + \tfrac{1}{2}\lambda + \tfrac{1}{2}),\ (m + \tfrac{1}{2}\lambda + 1);\ m+1,\ m+1;\ -\frac{a^2}{c^2},\ -\frac{b^2}{c^2}]$$

valid for $R(\lambda) > -1$. The function F_4 appearing in equation (4) is the Appell hypergeometric function of two variables defined by

$$(5)\qquad F_4[\alpha,\beta;\gamma,\delta;x,y] = \sum_{p=0}^\infty \sum_{q=0}^\infty \frac{(\alpha)_{p+q}\,(\beta)_{p+q}}{(\gamma)_p\,(\delta)_q\, p!\,q!}\, x^p y^q$$

With the notation,

(6) $a = r_< = \min(r_1, r_2)$, $b = r_> = \max(r_1, r_2)$, $(r_< > 0)$

we obtain from equations (3) and (4) that

$$(7) \quad \int_0^\infty \cos m\,\theta \;{}_2F_1[\tfrac{1}{2}\lambda + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\lambda + 1; 1; -\frac{r^2}{c^2}]\, d\theta =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\; 2^\lambda (r_< r_>)^m\; \Gamma(\frac{1}{2}\lambda + m + \frac{1}{2})\; \Gamma(\frac{1}{2}\lambda + m + 1)}{c^{2m}\; \Gamma(\lambda+1)\; [m!]^2} \times$$

$$\times \quad F_4[\tfrac{1}{2}(\lambda+2m+1), \tfrac{1}{2}(\lambda+2m+2); m+1, m+1; -(\frac{r_<}{c})^2, -(\frac{r_>}{c})^2]$$

valid for $R(\lambda) > -1$.
This result becomes useful in the following section.

3. THE MAIN RESULT TO BE PROVED.

We shall obtain the Fourier expansion of the hypergeometric function ${}_2F_1[\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\lambda + 1; 1; -\frac{r^2}{c^2}]$.

Let

$$(8) \quad {}_2F_1[\tfrac{1}{2}\lambda + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\lambda + 1; 1; -\frac{r^2}{c^2}] = \sum_{m=0}^{\infty} A_{\lambda,m} \cos m\,\theta .$$

The hypergeometric function ${}_2F_1$ is continuous and of bounded variation in the interval $(0,\pi)$.
Multiplying both sides of equation (8) by $\cos n\theta$ and integrating with respect to θ from 0 to π, and using the orthogonality property of cosine functions, we obtain

$$A_{\lambda,0} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi {}_2F_1[\tfrac{1}{2}\lambda + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\lambda + 1; 1; -\frac{r^2}{c^2}]\, d\theta \quad , \text{ and}$$

$$(9) \quad \underset{(m\neq 0)}{A_{\lambda,m}} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos m\theta \;{}_2F_1[\tfrac{1}{2}\lambda + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\lambda + 1; 1; -\frac{r^2}{c^2}]\, d\theta$$

With the help of equation (7), the Fourier series for ${}_2F_1$ is obtained thus:

$$(10)\quad A_{\lambda,0} = \frac{2^{\lambda}\,\Gamma(\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}\lambda+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+1)}\; F_4[\tfrac{1}{2}(\lambda+1),\ \tfrac{1}{2}(\lambda+2);\ 1,\ 1;$$

$$;\ -(\frac{r_<}{c})^2,\ -(\frac{r_>}{c})^2]$$

$$A_{\lambda,m} = -\frac{2^{\lambda+1}(r_< r_>)^m\,\Gamma(\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}+m)\,\Gamma(\frac{1}{2}\lambda+m+1)}{\sqrt{\pi}\,c^{2m}\,\Gamma(\lambda+1)\,[m!]^2}\ \times$$

$$\times\ F_4[\tfrac{1}{2}(\lambda+2m+1),\ \tfrac{1}{2}(\lambda+2m+2);\ m+1,\ m+1;\ -(\frac{r_<}{c})^2,\ -(\frac{r_>}{c})^2]$$

valid for $R(\lambda) > -1$.

4. PARTICULAR CASES.

On specializing the parameters in equations (9) and (10), interesting results can be obtained.

Case (1): On letting $c \to 0$, equations (8) and (10) reduce to

$$(11)\qquad r^{-(\lambda+1)} = \sum_{m=0}^{\infty} A_{\lambda,m}\cos m\theta$$

with $\quad A_{\lambda,0} = r_>^{-(\lambda+1)}\ {}_2F_1[\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2};\ 1;\ (\frac{r_<}{r_>})^2]$

$$(12)\qquad \underset{(m\neq 0)}{A_{\lambda,m}} = \frac{2}{m!}\, r_<^m\, r_>^{-m-\lambda-1}(\tfrac{1}{2}\lambda+\tfrac{1}{2})_m\ {}_2F_1[m+\tfrac{1}{2}\lambda+\tfrac{1}{2}\,,$$

$$,\ \frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2};\ m+1;\ (\frac{r_<}{r_>})^2\ ]$$

valid for $R(\lambda) > -1$. By analytical continuation, this condition can be further relaxed. For negative values of λ, the series for $A_{\lambda,m}$ is of finite terms and the expansion therefore remains valid for all values of λ. When λ is real, the expansion of this case reduces to the result of Ashour [2].

Case (ii): Let $\lambda = 0$, $c \neq 0$. Equations (8) and (10) reduce to

(13) $$(c^2 + r^2)^{-1/2} = \sum_{m=0}^{\infty} A_{\lambda,m} \cos m\theta$$

with

(14) $$A_{\lambda,0} = c\, F_4\, [\tfrac{1}{2},\ 1;\ 1,\ 1;\ -(\frac{r_<}{c})^2\ ,\ -(\frac{r_>}{c})^2\ ]$$

$$\underset{(m\neq 0)}{A_{\lambda,m}} = \frac{2(r_< r_>)^m\ \Gamma(m+1/2)}{\sqrt{\pi}\ c^{2m-1}\ m!}\ F_4[\ (m+1/2),\ (m+1);\ (m+1),$$

$$,\ (m+1);\ -(\frac{r_<}{c})^2\ ,\ -(\frac{r_>}{c})^2\ ]$$

Case (iii): Let $\lambda = 1$, $c \neq 0$. Equations (8) and (10) again yield the Fourier expansion

(15) $$(c^2 + r^2)^{-3/2} = \sum_{m=0}^{\infty} A_{\lambda,m} \cos m\theta$$

with

(16) $$A_{\lambda,0} = c^3\, F_4[\ 1,\ 3/2;\ 1,\ 1;\ -(\frac{r_<}{c})^2\ ,\ -(\frac{r_>}{c})^2\ ]$$

$$\underset{(m\neq 0)}{A_{\lambda,m}} = \frac{4(r_< r_>)^m\ \Gamma(m+3/2)}{\sqrt{\pi}\ c^{2m-3}\ m!}\ F_4[\ m+1,\ m+3/2;\ m+1,\ m+1;$$

$$;\ -(\frac{r_<}{c})^2\ ,\ -(\frac{r_>}{c})^2\ ]$$

Expressions such as expanded in Cases (ii) and (iii) frequently arise in atomic physics where the constant c may be treated as an adjustable physical parameter.

By setting the parameters suitably, further results can be obtained as particular cases of expansion (8). Other interesting expansions of the function f(r) will be treated in the next communication.

ACKNOWLEDGEMENT. The author would like to thank Professor B. L. Sharma for helpful discussions.

REFERENCES

[1] SACK, R. A. *Generalization of Laplace's Expansions to Arbitrary Powers and Functions of the Distance between Two Points.* J. Math. Phys. 5, 245 (1964).

[2] ASHOUR, A. A., *Fourier Series Expansion for the General Power of the Distance between Two Points.* J. Math. Phys. 6, 492 (1965).

[3] EASON, G., NOBLE B., and SNEDDON, I. N., *On Certain Integrals of Lipschitz-Hankel Type Involving Products of Bessels Functions.* Phil. Trans. Roy. Soc. (London) A 247, 529, (1955).

[4] ERDELYI, A., Tables of Integral Transforms Vol.2. (1954).

Department of Mathematics
University of Ife
Ile-Ife, Nigeria.

Recibido en octubre de 1971.

Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 26, 1972.

SISTEMA AXIOMATICO PARA OPERADORES DE CAPSULA CONVEXA

por Juan Carlos Bressan

1. INTRODUCCION. Consideraremos un sistema axiomático independiente y no categórico para operadores de cápsula convexa basado en un trabajo de Ellis [1]. Muchas de sus definiciones y teoremas se obtienen por analogía con la teoría de la convexidad en espacios vectoriales; de esta forma, pueden deducirse en este sistema algunos de los resultados dados por Hammer [2]. Finalmente obtenemos un sistema axiomático para operadores de bandas equivalente al antes estudiado; sus axiomas son teoremas de la teoría axiomática para segmentos de Voiculescu [5].

Deseo expresar mi agradecimiento al Dr. Fausto A. Toranzos por haberme dirigido y asesorado en la realización de este trabajo.

2. NOTACION Y AXIOMAS.

Sean X un conjunto tal que card $X \geqslant 2$, P(X) la familia de todos los subconjuntos de X, $K:P(X) \longrightarrow P(X)$ una función que llamaremos *operador de cápsula convexa*. Si $\{a_1,\dots,a_n\} \subset X$, $K(\{a_1,\dots,a_n\})$ se escribirá $K(a_1,\dots,a_n)$. Dado $\{a,b\} \subset X$, diremos que K(a,b) es la *banda* determinada por a,b.

La función K debe cumplir los siguientes axiomas:

(Ax 1) $A \subset X \Rightarrow K(K(A)) \subset K(A)$.

(Ax 2) $A \subset X \Rightarrow K(A) = \cup\{K(F)/F$ finito y $F \subset A\}$.

(Ax 3) $a \in X \Rightarrow K(a) = \{a\}$.

(Ax 4) $\phi \neq F \subset X$, F finito y $p \in X \Rightarrow K(F \cup \{p\}) \subset \cup\{K(a,p)/a\in K(F)\}$.

(Ax 5) $a \in K(b,p)$ y $c \in K(d,p) \Rightarrow K(a,d) \cap K(b,c) \neq \phi$.

Dado $A \subset X$, K(A) se llamará la *cápsula convexa* de A. Diremos que

A es *convexo* si $A = K(A)$

Los axiomas precedentes son propiedades de la cápsula convexa usual en espacios vectoriales sobre cuerpos ordenados; en consecuencia, el sistema axiomático que definimos es consistente y no categórico. Otros modelos de este sistema son:

i. X subconjunto convexo de un espacio vectorial V sobre un cuerpo ordenado; para $A \subset X$, $K(A) = \text{conv } A$ donde conv A es la cápsula convexa usual de A en V.

ii. X un conjunto tal que card $X \geqslant 2$, para $A \subset X$, $K(A) = A$.

iii. Sean X el plano euclidiano, $|xy|$ la longitud del segmento xy, s un punto de X. Dados $a,b \in X$, $d_s(a,b) = |ab|$ si a,b,s están alineados y $d_s(a,b) = |as| + |sb|$ si a,b,s no están alineados; (X,d_s) es un espacio métrico; para $A \subset X$, definimos K(A) igual a la cápsula convexa de A en la métrica d_s (la definición de cápsula convexa en una métrica se encuentra en Toranzos [3]). Se ve fácilmente que las bandas definidas por K cumplen (P 1) a (P 4) del parágrafo 6, en consecuencia K cumple (Ax 1) a (Ax 5).

El sistema axiomático considerado es una particularización del dado por Ellis en [1], tomando en lugar de dos operadores un solo operador K y pidiendo que para todo $a \in X$ $K(a) = \{a\}$ lo cual no se deduce en el sistema axiomático dado en [1], pero permite obtener $K(\phi) = \phi$ y algunos resultados sobre semiespacios. Si se considera un único operador K, los axiomas 1 y 2 de [1] resultan de (4.1) i y ii respectivamente, mientras que los axiomas 3, 4 y 5 de [1] son respectivamente (Ax 2), (Ax 4) y (Ax 5).

3. INDEPENDENCIA DE LOS AXIOMAS.

Veremos que cualquiera de los axiomas precedentes es independiente de los otros hallando, para cada axioma, un conjunto X tal que car $X \geqslant 2$ y una función $K:P(X) \longrightarrow P(X)$ que no verifique dicho axioma pero cumpla todos los restantes; en cada caso tendremos que definir K(A) para todo $A \subset X$. Los ejemplos i a v dados a continuación prueban la independencia de (Ax 1) a (Ax 5) respectivamente.

i. X espacio vectorial real tal que dim $X \geqslant 2$, $K(A) = \cup\{[a,b] / a \in A \text{ y } b \in A\}$ donde $[a,b]$ es el segmento cerrado de extremos a,b.

ii. X el conjunto R de todos los números reales, $K(A) = \bar{A}$ donde $\bar{A}$ es la clausura de A en la topología usual de R.

iii. X conjunto tal que card $X \geqslant 2$, $K(A) = X$.

iv. X conjunto tal que card $X \geqslant 4$, $K(A) = A$ si card $A \leqslant 2$ y $K(A) = X$ si card $A > 2$.

v. $X = [b,p] \cup [d,p]$ donde b,p,d son tres puntos no alineados de R^2, $K(A) = X \cap \operatorname{conv} A$ donde conv A es la cápsula convexa usual de A en R^2.

4. CONSECUENCIAS DE LOS CUATRO PRIMEROS AXIOMAS.

Muchas de las propiedades de K se deducen de los cuatro primeros axiomas.

(4.1) *Sean* A,B *subconjuntos de* X. *Entonces:* i. $A \subset K(A)$; ii. $K(K(A)) = K(A)$; iii. $A \subset B \Rightarrow K(A) \subset K(B)$; iv. $K(X) = X$; v. $K(\phi) = \phi$.

Demostración. i. Es consecuencia de (Ax 2) y (Ax 3). ii. Se deduce de i y de (Ax 1). iii. Se aplica (Ax 2). iv. Es trivial. v. Sea $\{a,b\} \subset X$ y $a \neq b$; por iii y (Ax 3) resulta $K(\phi) \subset K(a) \cap K(b) = \phi$.

El resultado dado en (4.1) iii se encuentra en [1], 4.1, (b).

(4.2) *Si* $A \subset X$, *los siguientes enunciados son equivalentes:* i. $K(A) = A$; ii. $\{a,b\} \subset A \Rightarrow K(a,b) \subset A$.

Demostración. i $\Rightarrow$ ii. Resulta inmediatamente de (4.1) iii. ii $\Rightarrow$ i. Supongamos que se verifica ii. Por (4.1) i y (Ax 2), alcanza con ver que F finito y $F \subset A \Rightarrow K(F) \subset A$. Dicha prueba se hace por inducción sobre j = card F, utilizando (Ax 4).

De la analogía entre la proposición (4.2) y la definición usual de convexo en espacios vectoriales sobre cuerpos ordenados, resulta la siguiente proposición:

(4.3) i. *La intersección de cualquier familia de subconjuntos convexos de* X *es un subconjunto convexo de* X. ii. *La unión de cualquier cadena de subconjuntos convexos de* X *es un subconjunto convexo de* X.

(4.4) *Si* $A \subset X$, $K(A)$ *es la intersección de la familia de los subconjuntos convexos de* X *que incluyen a* A.

Demostración. Es consecuencia de los tres primeros enunciados de (4.1).

Por esta proposición, $K(A)$ es elemento minimal de la familia de los subconjuntos convexos de X que incluyen a A.

Observemos que, por (4.2) y (4.4), el operador de cápsula convexa K queda determinado por la familia de todas las bandas $K(a,b)$ con $a,b \in X$. Sea $A \subset X$, veamos cómo se expresa $K(A)$ utilizando las bandas $K(a,b)$. Definimos $C(A) = \cup\{K(a,b)/a,b \in A\}$. Muchas de las propiedades de C coinciden con las de K.

(4.5) i. $A \subset C(A)$; ii. $C(A) \subset C(C(A))$; iii. $A \subset B \subset X \Rightarrow C(A) \subset$ $\subset C(B)$; iv. $C(X) = X$; v. $C(\phi) = \phi$.

Sin embargo es fácil ver que $C(A)$ puede no ser convexo. Como consecuencia de (4.2) se obtiene:

(4.6) A *es convexo si y sólo si* $A = C(A)$.

Definamos inductivamente $C^n(A)$ por:i. $C^o(A) = A$.
ii. $C^{j+1}(A) = C(C^j(A))$. Por (4.5) i y ii, la sucesión de los $C^n(A)$ es creciente.

(4.7) $K(A) = \cup\{C^n(A)/n \geqslant 0\}$.

Demostración. Es análoga a la dada en [3], (1.2) para la convexidad en una métrica.

Las proposiciones (4.1) y (4.3) permiten obtener en forma inmediata:

(4.8) i. *Si* $\{A_j/j \in J\}$ *es una familia de subconjuntos de* X , *entonces* $K(\cap\{A_j/j \in J\}) \subset \cap\{K(A_j)/j \in J\}$.
ii. *Si* $\{A_j/j \in J\}$ *es una cadena de subconjuntos de* X, *entonces* $K(\cup\{A_j/j \in J\}) = \cup\{K(A_j)/j \in J\}$.

Una demostración de (4.8) ii aplicando (4.1) iii y (Ax 2), se encuentra en [1], 4.2.

Sean $A,B \subset X$; definimos $S(A,B) = \cup\{K(a,b)/a \in A \text{ y } b \in B\}$. Trivialmente se deducen las siguientes propiedades de S:

(4.9) i. $S(A,A) = C(A)$; ii. $S(A,B) = S(B,A) \subset K(A \cup B)$.
iii. $A_1 \subset A$ y $B_1 \subset B \Rightarrow S(A_1,B_1) \subset S(A,B)$.
iv. $A \neq \phi \neq B \Rightarrow A \cup B \subset S(A,B)$; v. $S(A,\phi) = \phi$.
vi. $A \neq \phi \Rightarrow S(A,X) = X$.

(4.10) $\{a,b,c,d\} \subset X \Rightarrow K(a,b,c,d) = S(K(a,b),K(c,d))$.

Demostración. Sean a,b,c,d elementos de X, no necesariamente distintos dos a dos. Inmediatamente obtenemos que $S(K(a,b),K(c,d)) \subset$ $\subset K(a,b,c,d)$.
Consideremos ahora $x \in K(a,b,c,d)$. Por (Ax 4), existe $p \in K(a,b,c)$ tal que $x \in K(p,d)$. Análogamente, existe $q \in K(a,b)$ tal que $p \in K(q,c)$. Como $K(p,d) \subset K(q,c,d)$, resulta $x \in K(q,c,d)$ y aplicando nuevamente (Ax 4), existe $r \in K(c,d)$ tal que $x \in K(q,r)$. Así, $x \in S(K(a,b),K(c,d))$.

(4.11) *Si* A,B *son subconjuntos no vacíos de* X, $K(A \cup B) =$ $= S(K(A),K(B))$.

Demostración. Sea $M = S(K(A),K(B))$; por (4.10), M resulta convexo; como $A \cup B \subset M \subset K(A \cup B)$, es $K(A \cup B) = M$.

Como corolario de (4.11), obtenemos la siguiente generalización de (Ax 4) (enunciada análogamente en [1], 4.3):

(4.12) $\phi \neq A \subset X$ *y* $p \in X \Rightarrow K(A \cup \{p\}) = \cup\{K(a,p)/a \in K(A)\}$.

La proposición (4.11) permite demostrar:

(4.13) *Si* $A_1,\dots,A_n$ *son subconjuntos no vacíos de* X,
$K(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \cup\{K(a_1,\dots,a_n)/a_i \in K(A_i)$ *para* $1 \leqslant i \leqslant n\}$.

Demostración. Se aplica inducción sobre n.

(4.14) *Sea* $\mathcal{A}$ *una familia de subconjuntos de* X *y* $A = \cup \mathcal{A}$. *Definimos una familia* $\mathcal{F}$ *por* $F \in \mathcal{F}$ *sii existe* $\{A_1,\dots,A_n\}$ *subfamilia fi-*

nita de $\mathcal{A}$ *tal que* $F \subset K(A_1) \cup \ldots \cup K(A_n)$ *y* card $(K(A_j) \cap F) \leqslant 1$ *para* $1 \leqslant j \leqslant n$. *Entonces* $K(A) = \cup\{K(F)/F \in \mathcal{F}\}$.

Demostración. Obviamente $\cup\{K(F)/F \in \mathcal{F}\} \subset K(A)$. Sea $x \in K(A)$, por (Ax 2) y (4.1) iii, existe $\{A_1,\ldots,A_n\}$ subfamilia finita de $\mathcal{A}$ tal que $x \in K(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$. Dicha subfamilia puede tomarse minimal, o sea, de tal forma que si $j \in \{1,\ldots,n\}$, $x \notin K(\cup\{A_i/1 \leqslant i \leqslant n,\ i \neq j\})$.
Por (4.13) existen $a_1 \in K(A_1),\ldots,a_n \in K(A_n)$ tales que $x \in K(a_1,\ldots,a_n)$.
Sea $F_0 = \{a_1,\ldots,a_n\}$; por la minimalidad de $\{A_1,\ldots,A_n\}$, $F_0 \in \mathcal{F}$ y en consecuencia $x \in \cup\{K(F)/F \in \mathcal{F}\}$.

Como corolarios inmediatos de (4.14), obtenemos las dos proposiciones siguientes:

(4.15) *Sea* $\{A_i/i \in I\}$ *una familia de subconjuntos de* X, $A = \cup\{A_i/i \in I\}$ *y* $\widetilde{A} = \cup\{K(A_i/i \in I\}$. *Si* $\{K(A_i)/i \in I\}$ *es una familia de subconjuntos disjuntos dos a dos, entonces*
$K(A) = \cup\{K(F)/F$ finito, $F \subset \widetilde{A}$ y card $(K(A_i) \cap F) \leqslant 1$ para $i \in I\}$.

(4.16) *Sea* $\{A_i/i \in I\}$ *una familia de subconjuntos no vacíos de* X, *entonces* $K(\cup\{A_i/i \in I\}) = \cup\{K(\{a_i/i \in I\})/a_i \in K(A_i)$ para $i \in I\}$.

Por (4.7) sabemos que si $A \subset X$, $K(A) = \cup\{C^n(A)/n \geqslant 0\}$. Ahora veremos que bajo ciertas condiciones, existe $i \geqslant 0$ tal que $K(A) = C^i(A)$ y en consecuencia, para todo $j \geqslant i$, $K(A) = C^j(A)$.

(4.17) *Sea* A *un subconjunto finito de* X , i *un entero no negativo tal que* card $A \leqslant 2^i$. *Entonces* $K(A) = C^i(A)$.

Demostración. Se aplica inducción sobre i. Para $i = 0$ es trivial Supongamos que vale (4.17) para $i = j \geqslant 0$. Sea $A \subset X$ y card $A = m \leqslant 2^{j+1}$. Si $m > 2^j$, existe una partición $\{A_1,A_2\}$ de A tal que máx $\{$card A_1, card $A_2\} \leqslant 2^j$. Luego por (4.11) y la hipótesis inductiva, $K(A) = S(C^j(A_1),C^j(A_2)) \subset C^{j+1}(A)$, o sea, $K(A) = C^{j+1}(A)$.

Sea $A \subset X$; diremos que A verifica la *condición de Caratheodory n-dimensional* $(n \geqslant 0)$, o que A cumple (C_n) si

$$K(A) = \cup\{K(F)/\text{card } F \leqslant n+1 \text{ y } F \subset A\}.$$

(4.18) *Si* A *cumple* (C_n), *sea* i *un entero tal que* $n+1 \leqslant 2^i$; *entonces* $K(A) = C^i(A)$.

Demostración. Por hipótesis y (4.17), obtenemos que $K(A) = \cup\{C^i(F)/\text{card } F \leqslant n+1 \text{ y } F \subset A\} \subset C^i(A)$, de donde $K(A) = C^i(A)$.

Una demostración de (4.18) para X espacio vectorial real, se encuentra en [4], teorema 1.24.

5. SEMIESPACIOS Y PUNTOS EXTREMALES.

En este parágrafo, por analogía con la convexidad usual en espacios vectoriales sobre cuerpos ordenados, introduciremos los semiespacios y caracterizaremos los puntos extremales de un convexo.

(5.1) *Si* A,B *son subconjuntos convexos de* X *disjuntos, entonces existen* C,D *convexos complementarios tales que* $A \subset C$ *y* $B \subset D$.

Esta proposición es el teorema 3.1 de [1], tomando en lugar de dos operadores un solo operador K.

Diremos que S es *semiespacio* si S y X-S son subconjuntos convexos no vacíos de X. Evidentemente S es semiespacio sii X-S es semiespacio. Si $A \subset X$ y S es semiespacio entonces $A \subset S$ sii $K(A) \subset S$. Dados $A,B \subset X$, diremos que los semiespacios complementarios S_1, S_2 *separan* A,B si $A \subset S_1$ y $B \subset S_2$ o si $A \subset S_2$ y $B \subset S_1$. De (5.1) obtenemos:

(5.2) *Si* A,B *son subconjuntos convexos no vacíos de* X *disjuntos, entonces existen* S_1,S_2 *semiespacios complementarios que separan* A,B.

Como card $X \geqslant 2$ y los subconjuntos unitarios son convexos, (5.2) nos asegura la existencia de semiespacios y la siguiente proposición:

(5.3) *Si* $A \subset X$ *y* $x \in X-K(A)$, *entonces existe* S *semiespacio tal que* $K(A) \subset S$ *y* $x \notin S$.

(5.4) $A \subset X \Rightarrow K(A) = \cap\{S/S$ semiespacio y $A \subset S\}$.

Demostración. Se aplica (5.3).

Entre los semiespacios que incluyen a un subconjunto A de X, donde $\phi \neq K(A) \neq X$, resulta interesante considerar aquéllos que son minimales, o sea, los semiespacios S tales que $A \subset S$ y si S_1 es semiespacio y $A \subset S_1 \subset S$ entonces $S_1 = S$. En nuestro sistema axiomático, estos semiespacios desempeñan un papel análogo al de los semiespacios que incluyen a A determinados por hiperplanos de apoyo de dicho subconjunto, en la teoría de la convexidad usual en un espacio vectorial X sobre un cuerpo ordenado.

(5.5) *Si* A *es un subconjunto no vacío de* X *y* S_1 *es semiespacio que incluye a* A *, entonces* $S \subset S_1$ *tal que* S *es semiespacio minimal que incluye a* A.

Demostración. Resulta inmediata por el principio minimal para familias de conjuntos.

Como consecuencia de (5.4) y (5.5) obtenemos:

(5.6) $\phi \neq A \subset X \Rightarrow K(A) = \cap\{S/S$ semiespacio minimal que incluye a $A\}$.

Sea $p \in X$, diremos que S_p es *semiespacio de vértice* p si es un subconjunto convexo maximal de $X-\{p\}$; esta noción fue introducida por Hammer [2] para espacios vectoriales reales. Veremos que los semiespacios con vértice son semiespacios. La relación entre puntos extremales y semiespacios con vértice, ya mencionada en [2], aparece en (5.11). Finalmente, (5.12) es el teorema 5 de [2]; la demostración dada por Hammer también vale en nuestro sistema axiomático.

(5.7) *Si* $p \in X$ *y* S_p *es semiespacio de vértice* p*, entonces* S_p *es semiespacio.*

Demostración. Por (5.3) existe S semiespacio tal que $S_p \subset S$ y $p \notin S$; por la maximalidad de S_p es $S_p = S$; así S_p es semiespacio.

(5.8) *Si* $p \in X$ *y* $S_p \subset X$, *los siguientes enunciados son equivalentes:* i. S_p *es semiespacio de vértice* p. ii. $X-S_p$ *es semiespacio minimal que incluye a* $\{p\}$. iii. S_p *es un subconjunto convexo de* $X-\{p\}$ *tal que para todo* $x \in X-S_p$ *existe* $y \in S_p$ *de forma que* $p \in K(x,y)$.

Demostración. i $\Rightarrow$ ii. Por (5.7), S_p es semiespacio, luego $X-S_p$ es semiespacio que incluye a $\{p\}$; la minimalidad se obtiene en forma rutinaria.
ii $\Rightarrow$ iii. Trivialmente, S_p es subconjunto convexo de $X-\{p\}$. Sea $x \in X-S_p$; de suponer que $p \notin K(S_p \cup \{x\})$, por (5.2) resulta que no vale ii. Así $p \in K(S_p \cup \{x\})$ y por (4.12) existe $y \in S_p$ tal que $p \in K(x,y)$.
iii $\Rightarrow$ i. Si $x \in X-S_p$, existe $y \in S_p$ tal que $p \in K(x,y)$; en consecuencia $p \in K(S_p \cup \{x\})$. Luego S_p es subconjunto convexo maximal de $X-\{p\}$.

(5.9) *Si* $A \subset X$ *y* $p \in X-K(A)$, *entonces existe* S_p *semiespacio de v vértice* p *tal que* $K(A) \subset S_p$.

Demostración. Se aplica el lema de Zorn.

Como corolario de (5.9) resulta que para todo $p \in X$, existe S_p semiespacio de vértice p.

(5.10) $A \subset X \Rightarrow K(A) = \cap\{S/A \subset S$ y para algún $p \in X$, S es semiespacio de vértice $p\}$.

Demostración. Se aplica (5.9).

Diremos que una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos convexos de X es *base de convexos* si para todo A subconjunto convexo de X, existe $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$ tal que $A = \cap\, \mathcal{B}_1$. Las proposiciones (5.4) y (5.10) aseguran que tanto la familia $\mathcal{S}$ de todos los semiespacios, como la $\mathcal{S}_v$ de los semiespacios con vértice son bases de convexos. Esta última base es mínima, o sea, si $\mathcal{B}$ es base de convexos entonces $\mathcal{S}_v \subset \mathcal{B}$.

Sea $x \in A$, donde A es subconjunto convexo de X; diremos que x es *punto extremal* de A si $y,z \in A$ implica $x \notin K(y,z)-\{y,z\}$. Denotaremos con ex A al conjunto de los puntos extremales de A.

(5.11) *Sea* A *subconjunto convexo de* X *y* $x \in A$. *Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:* i. $x \in$ ex A ; ii. $A-\{x\}$ *es convexo*; iii. $x \notin K(A-\{x\})$; iv. *existe* S_x *semiespacio de vértice* x *tal que* $A-\{x\} \subset S_x$.

Demostración. En forma inmediata se prueba que i $\Rightarrow$ ii, ii $\Rightarrow$ iii, iii $\Rightarrow$ i, iii $\Longleftrightarrow$ iv.

(5.12) *Si* A *es subconjunto convexo de* X, *los siguientes enunciados son equivalentes:* i. $A = K(\text{ex } A)$; ii. $x \in A$ *y* S_x *semiespacio de vértice* $x \Rightarrow (X-S_x) \cap \text{ex } A \neq \phi$.

6. SISTEMA AXIOMATICO PARA OPERADORES DE BANDAS.

Consideraremos un nuevo sistema axiomático. Sean X un conjunto tal que card $X \geqslant 2$, $B:X\text{x}X \longrightarrow P(X)$ una función que llamaremos *operador de banda* y que satisface los siguientes axiomas:

(P 1) $\{a,b\} \subset B(a,b)$.

(P 2) $B(a,a) \subset \{a\}$.

(P 3) Si $a_1 \in B(a,p)$, $b_1 \in B(b,p)$ y $x_1 \in B(a_1,b_1)$, entonces existe $x \in B(a,b)$ tal que $x_1 \in B(x,p)$.

(P 4) $a \in B(b,p)$, $c \in B(d,p) \Rightarrow B(a,d) \cap B(b,c) \neq \phi$.

Los axiomas que cumple B son propiedades de las bandas K(a,b) del sistema axiomático definido en el parágrafo 2. En efecto, (P 1), (P 2) y (P 4) son consecuencias de (4.1) i, (Ax 3) y (Ax 5) respectivamente. Finalmente, si $a_1 \in K(a,p)$, $b_1 \in K(b,p)$ y $x_1 \in K(a_1,b_1)$, por (4.1) ii y iii $x_1 \in K(a,b,p)$; así, por (Ax 4) existe $x \in K(a,b)$ tal que $x_1 \in K(x,p)$.

Ahora, a partir de B, obtendremos una función $K:P(X) \longrightarrow P(X)$ que cumplirá (Ax 1) a (Ax 5). Sea $A \subset X$, definimos $C(A) = \cup\{B(a,b)/ a,b \in A\}$; $C^n(A)$ inductivamente por $C^0(A) = A$, $C^{j+1}(A) = C(C^j(A))$;

$K(A) = \cup\{C^n(A)/n \geqslant 0\}$. Siguiendo la misma notación del parágrafo 2, $K(\{a_1,\ldots,a_n\})$ se escribirá $K(a_1,\ldots,a_n)$. Las cuatro proposiciones siguientes pueden demostrarse en forma inmediata:

(6.1) *Si* A, A_1 *son subconjuntos de* X *y* $n \geqslant 0$, *entonces:*
i. $A \subset C^n(A) \subset C^{n+1}(A) \subset K(A)$; ii. $C^n(A) = C^{n+1}(A) \Longleftrightarrow C^n(A) = K(A)$;
iii. $A_1 \subset A \Rightarrow C^n(A_1) \subset C^n(A)$ *y* $K(A_1) \subset K(A)$.

(6.2) $c,d \in B(a,b) \Rightarrow B(c,d) \subset B(a,b)$.

(6.3) $K(a,b) = B(a,b)$.

(6.4) *Sea* $A \subset X$, *entonces son equivalentes:*
i. $A = K(A)$; ii. $A = C(A)$; iii. $\{a,b\} \subset A \Rightarrow K(a,b) \subset A$.

(6.5) *Si* $x \in C^n(A)$, *entonces existe* F *finito y* $F \subset A$ *tal que* $x \in C^n(F)$.

Demostración. Trivialmente, (6.5) es válida si $n = 0$. Supongamos que también vale para $n = j \geqslant 0$; sea $x \in C^{j+1}(A)$, luego $x \in K(a,b)$ donde $a,b \in C^j(A)$. Sean F_1,F_2 subconjuntos finitos de A tales que $a \in C^j(F_1)$;y $b \in C^j(F_2)$; así $x \in C^{j+1}(F_1 \cup F_2)$.

(6.6) K *cumple* (Ax 1) *a* (Ax 5).

Demostración. Sea $A \subset X$; dados $a,b \in K(A)$ puede probarse que $K(a,b) \subset K(A)$; así por (6.4) $K(A) = K(K(A))$; en consecuencia, K cumple (Ax 1). Consideremos $A \subset X$; si $F \subset A$ resulta $K(F) \subset K(A)$; sea $x \in K(A)$, por (6.5) $x \in K(F)$ para algún F finito y $F \subset A$; así K verifica (Ax 2). Trivialmente se ve que K cumple (Ax 3) y (Ax 5). Nos resta ver que K cumple (Ax 4); sean $\phi \neq F \subset X$, F finito y $p \in X$; tomemos $A = \cup\{K(a,p)/a \in K(F)\}$; evidentemente $F \cup \{p\} \subset A$; si $a_1,b_1 \in A$, por (P 3) y (6.3) $K(a_1,b_1) \subset A$. Luego, por (6.4) $A = K(A)$; así $K(F \cup \{p\}) \subset K(A) = A$.

Ahora podemos afirmar que el sistema axiomático dado en este parágrafo es equivalente al considerado en el 2; en consecuencia es consistente y no categórico. Fácilmente se ve que cualquiera de sus axiomas es independiente de los restantes. Los ejemplos i a iv prueban la independencia de (P 1) a (P 4) respectivamente; en cada caso se define $B(x,y)$ para todo $x,y \in X$.

i. X conjunto tal que card $X \geq 2$; $B(x,y) = \phi$.
ii. X conjunto tal que card $X \geq 2$; $B(x,y) = X$.
iii. $X = (\text{conv}\,\{a,b,p\})-(a,b)$, donde a,b,p son tres puntos no alineados del plano, conv la cápsula convexa usual y (a,b) el segmento abierto a,b; $B(x,y) = X \cap \text{conv}\,\{x,y\}$.
iv. El mismo ejemplo utilizado para probar la independencia de (Ax 5), con $B(x,y) = X \cap \text{conv}\,\{x,y\}$.

Los axiomas (P 1) a (P 4) son teoremas de la teoría axiomática de Voiculescu [5]. En efecto, (P 1) se deduce de A.1 y A.3; (P 2) trivialmente de A.2; (P 3) se obtiene aplicando A.8; (P 4) es consecuencia de P.5 (II). Sin embargo, hay axiomas de [5], como A.7, que no se deducen en nuestro sistema axiomático para operadores de bandas.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. W. ELLIS, *A general set-separation theorem*, Duke Math. J. 19 (1952), 417-421.

[2] P. C. HAMMER, *Maximal convex sets*, Duke Math. J. 22 (1955), 103-106.

[3] F. A. TORANZOS, *Inmersión de espacios métricos convexos en* E^n, Math. Notae 21 (1966-67), 29-53.

[4] F. A. VALENTINE, *Convex sets*, McGraw-Hill, New York, 1964.

[5] D. VOICULESCU, *Spatii cu convexitate,* (I), (II), St. Cerc. Mat. 19 (1967), 295-311.

Universidad de Buenos Aires.

Recibido en diciembre de 1971.
Versión final agosto de 1972.

Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 26, 1972.

DOS DESIGUALDADES EN NORMAS CON PESOS PARA SERIES DE WALSH

Por E. O. Harboure y N. E. Aguilera

INTRODUCCION. El propósito de este trabajo es demostrar desigualdades en norma L^p con peso entre una función y su serie de bloques lacunares de Walsh asociada. Desigualdades de este tipo fueron obtenidas por Paley [1], en el caso del peso 1 y Hirschman [2], en el caso del peso x^{α}, con condiciones sobre α. En el presente trabajo se demuestran las desigualdades para funciones de peso crecientes o decrecientes que cumplen la condición dada por Muckenhoupt en [3].

Más precisamente, denotemos por ϕ_n el sistema de funciones de Rademacher:

$$\phi_n(t) = \text{sg sen}(2n\pi t) \qquad n \geq 0 \ , \ 0 \leq t \leq 1$$

y por $\psi_n(t)$ el sistema de funciones de Walsh:

$$\psi_n(t) = \phi_{n_1}(t) \ \dots \ \phi_{n_j}(t) \qquad n = 2^{n_1} + \dots + 2^{n_j}$$

y

$$\psi_0(t) = 1$$

Es conocido que el sistema de Walsh es ortogonal y completo en $L^2([0,1],\mu)$, donde μ es la medida de Lebesgue del intervalo $[0,1]$. Sean entonces c_k los coeficientes de Fourier-Walsh de $f \in L^1([0,1])$:

$$c_k = \int_0^1 f(t) \ \psi_k(t)dt$$

Si ahora

$$f_n(t) = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} c_k \ \psi_k(t)$$

$$f_1(t) = c_0 \ \psi_0(t)$$

Resulta:

$$f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, \psi_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$$

donde el último miembro es lo que llamaremos la serie de bloques lacunares de Walsh asociada a f.

Se trata de ver qué condiciones debe cumplir una función de peso φ para que valgan las desigualdades:

$$A \int_0^1 |f(t)|^p \varphi(t)dt \leqslant \int_0^1 (\sum_{n=-1}^{\infty} f_n^2(t))^{p/2} \varphi(t)dt \leqslant$$

$$\leqslant A' \int_0^1 |f(t)|^p \varphi(t)dt \qquad 1 < p < \infty$$

donde A y A' son constantes que dependen sólo de φ y p.

El teorema 1 muestra que dichas desigualdedes valen en el caso de ser φ creciente o decreciente y verificando la condición A_p:

$$(\int_I \varphi(t)dt) \, (\int_I \varphi(t)^{-\frac{1}{p-1}})^{p-1} \leqslant A \, |I|^p$$

donde I es un subintervalo de $[0,1]$; $|I|$ indica su medida de Lebesgue y A es una constante dependiente sólo de φ y p.

El teorema 2 se obtiene como corolario más importante de aquel teorema, y establece que las sumas parciales tienen norma (con peso) dominada por la norma de la función, en otras palabras si

$$s_n(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k \, \psi_k(t)$$

entonces

$$\int_0^1 |s_n(t)|^p \varphi(t)dt \leqslant C \int_0^1 |f(t)|^p \varphi(t)dt.$$

si φ cumple las condiciones anteriormente citadas.

El lema 2 es particularmente interesante, ya que muestra la analogía existente entre las integrales $\int_{I_k} \varphi(t)dt$ y expresiones del tipo ρ^k donde $0 < \rho < 1$, y entre $\dfrac{1}{\int_{I_k} \varphi(t)dt}$ y R^k con $R > 1$.

Finalmente, en la parte II se analizan algunos ejemplos.

PARTE I

Para establecer el resultado necesitaremos los siguientes lemas:

LEMA 1. *Si* φ *cumple* A_p *para algún* $p > 1$; I, I' *son intervalos en* $[0,1]$, *tales que* $I \subset I'$ *y* $|I| = \frac{1}{2}|I'|$, *entonces*

$$\int_{I'} \varphi(x)dx \leqslant C \int_I \varphi(x)dx$$

donde C *no depende de* I *ni de* I'.

Demostración. Por la desigualdad de Hölder tenemos:

$$|I|^p \leqslant \left(\int_I \varphi(x)dx\right)\left(\int_I \varphi(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1}$$

luego

$$\frac{\int_{I'}\varphi(x)dx}{\int_I \varphi(x)dx} \leqslant \frac{\left(\int_{I'}\varphi(x)dx\right)\left(\int_I \varphi(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1}}{|I|^p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\left(\int_{I'}\varphi(x)dx\right)\left(\int_{I'}\varphi(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1}}{|I|^p} \leqslant C.2^p$$

Observación: Si φ verifica A_p, entonces $\varphi^{-\frac{1}{p-1}}$ verifica A_q, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; luego vale el lema para $\varphi^{-\frac{1}{p-1}}$.

En los lemas 2, 3 y 4 usaremos la siguiente notación: $\{I'_k\}_{k\in N}$ indicará una sucesión de intervalos encajados, contenidos estrictamente uno en el otro, y de la forma $I'_k = [\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}]$, verificando $|I'_k| = 2|I'_{k+1}|$; por otra parte, $\{I_k\}_{k\in N}$ será una familia deducida de una de la forma $\{I'_k\}_{k\in N}$, donde $I_k = I'_k - I'_{k+1}$, es decir, son intervalos diádicos rampantes que forman un cubrimiento del $[0,1]$ y con medida $1/2^k$.

LEMA 2. *Si* φ *cumple* A_p *y* $r > 0$, *entonces se tiene*:

i) $$\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{\left(\int_{I_j}\varphi(x)dx\right)^r} \leqslant \frac{A}{\left(\int_{I_k}\varphi(x)dx\right)^r}$$

ii) $\sum_{k=j}^{\infty} \left(\int_{I_k} \varphi(x)dx\right)^r \leqslant A \left(\int_{I_j} \varphi(x)dx\right)^r$

Demostración. Sea $\alpha > 1$ tal que φ^{α} cumple A_p. (La existencia de un tal α fue probada por Muckenhoupt en [3]). Probaremos que:

$$|I|^{1/\alpha'} \left(\int_I \varphi^{\alpha}(x)dx\right)^{1/\alpha} \leqslant C \int_I \varphi(x)dx \qquad (*)$$

donde $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$, $I \subset [0,1]$.

En efecto:

$$|I|^{1/\alpha'} \left(\int_I \varphi^{\alpha}(x)dx\right)^{1/\alpha} \leqslant C \frac{|I|^{1/\alpha'} |I|^{p/\alpha}}{\left(\int_I \varphi(x)^{-\frac{\alpha}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{\alpha}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C\,|I|^{1/\alpha'}\,|I|^{p/\alpha}\,|I|^{\frac{p-1}{\alpha'}}}{\left(\int_I \varphi(x)^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1}} \leqslant C \int_I \varphi(x)dx$$

usando A_p y Hölder. Notar que la desigualdad de Hölder da

$$\int_I \varphi(x)dx \leqslant \left(\int_I \varphi^{\alpha}(x)dx\right)^{1/\alpha} |I|^{1/\alpha'}$$

y (*) da la desigualdad inversa.

Veamos i):

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{\left(\int_{I_j} \varphi(x)dx\right)^r} \leqslant C \sum_{j=0}^{k} \frac{2^{jr/\alpha'}}{\left(\int_{I_j} \varphi^{\alpha}(x)dx\right)^{r/\alpha}}$$

usando (*).

Si ahora usamos el lema 1 y que $I'_k \subset I'_j$ para $j \leqslant k$

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{\left(\int_{I_j} \varphi(x)dx\right)^r} \leqslant C \sum_{j=0}^{k} \frac{2^{jr/\alpha'}}{\left(\int_{I'_j} \varphi^{\alpha}(x)dx\right)^{r/\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{\left(\int_{I'_k} \varphi^{\alpha}(x)dx\right)^{r/\alpha}} \sum_{j=0}^{k} 2^{jr/\alpha'}$$

Usando nuevamente el lema 1 y la desigualdad de Hölder tenemos

$$\frac{C}{(\int_{I'_k} \varphi^{\alpha}(x)dx)^{r/\alpha}} \sum_{j=0}^{k} 2^{jr/\alpha'} \leqslant \frac{C\ 2^{kr/\alpha'}}{(\int_{I_k} \varphi^{\alpha}(x)dx)^{r/\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{(\int_{I_k} \varphi(x)dx)^{r}}$$

Veamos ahora ii). De la desigualdad de Hölder y el lema 1 se tiene

$$\sum_{k=j}^{\infty} (\int_{I_k} \varphi(x)dx)^{r} \leqslant \sum_{k=j}^{\infty} \frac{(\int_{I_k} \varphi^{\alpha}(x)dx)^{r/\alpha}}{2^{kr/\alpha'}} \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{k=j}^{\infty} \frac{(\int_{I'_k} \varphi^{\alpha}(x)dx)^{r/\alpha}}{2^{kr/\alpha'}}$$

En forma análoga a la demostración de i) obtenemos

$$\sum_{k=j}^{\infty} (\int_{I_k} \varphi(x)dx)^{r} \leqslant C \frac{(\int_{I_j} \varphi^{\alpha}(x)dx)^{r/\alpha}}{2^{jr/\alpha'}}$$

y usando ahora (*):

$$\sum_{k=j}^{\infty} (\int_{I_k} \varphi(x)dx)^{r} \leqslant C(\int_{I_j} \varphi(x)dx)^{r}$$

con lo que el lema queda demostrado.

LEMA 3. *Sea* φ *verificando* A_p. *Sean* $r,s \in R$, $0 < r$, $s < \infty$, $a_k \geqslant 0$, $k \in N$, *y* $A_k^s = a_0^s + \ldots + a_k^s$

entonces $$\sum_{k=0}^{\infty} A_k^r \int_{I_k} \varphi(x)dx \leqslant C \sum_{k=0}^{\infty} a_k^r \int_{I_k} \varphi(x)dx$$

donde C *depende solamente de* r, s *y* φ.

Demostración. Sea

$$b_k = a_k^s \left(\int_{I_k} \varphi(x)dx\right)^{s/r} , \quad B_k = A_k^s \left(\int_{I_k} \varphi(x)dx\right)^{s/r}$$

Debemos probar entonces que

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k^{r/s} \leq C \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{r/s}$$

Consideraremos dos casos:

$$\text{a) } 1 < \frac{r}{s} < \infty \qquad \text{b) } 0 < \frac{r}{s} \leq 1$$

Caso a): Tenemos que

$$B_k = \sum_{j=0}^{k} b_j \frac{\left(\int_{I_k} \varphi(x)dx\right)^{s/r}}{\left(\int_{I_j} \varphi(x)dx\right)^{s/r}} \leq \left[\sum_{j=0}^{k} \frac{b_j^{r/s}\left(\int_{I_k} \varphi(x)dx\right)^{s/r}}{\left(\int_{I_j} \varphi(x)dx\right)^{s/r}}\right]^{s/r} .$$

$$\cdot \left[\sum_{j=0}^{k} \left(\frac{\int_{I_k} \varphi(x)dx}{\int_{I_j} \varphi(x)dx}\right)^{s/r}\right]^{1-\frac{s}{r}}$$

aplicando Hölder. Usando ahora la parte i) del lema 2 tenemos:

$$B_k \leq C \left[\sum_{j=0}^{k} b_j^{r/s} \left(\frac{\int_{I_k} \varphi(x)dx}{\int_{I_j} \varphi(x)dx}\right)^{s/r}\right]^{s/r}$$

luego $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} B_k^{r/s} \leq C \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} b_j^{r/s} \left(\frac{\int_{I_k} \varphi(x)dx}{\int_{I_j} \varphi(x)dx}\right)^{s/r} =$

$$= C \sum_{j=0}^{\infty} b_j^{r/s} \sum_{k=j}^{\infty} \left(\frac{\int_{I_k} \varphi(x)dx}{\int_{I_j} \varphi(x)dx}\right)^{s/r} \leq C \sum_{j=0}^{\infty} b_j^{r/s}$$

en virtud del lema 2 parte ii).

Caso b):

$$B_k^{r/s} \leqslant \sum_{j=0}^{k} b_j^{r/s} \frac{\int_{I_k} \varphi(x)dx}{\int_{I_j} \varphi(x)dx}$$

luego

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k^{r/s} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} b_j^{r/s} \frac{\int_{I_k} \varphi(x)dx}{\int_{I_j} \varphi(x)dx} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} b_j^{r/s} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{\int_{I_k} \varphi(x)dx}{\int_{I_j} \varphi(x)dx} \leqslant C \sum_{j=0}^{\infty} b_j^{r/s}$$

como queríamos demostrar.

LEMA 4. *Si* φ *verifica* A_p, $0 < r,\ s < \infty$, $a_k \geqslant 0$, $k \in N$ *y* $A_k^s = \sum_{j=k}^{\infty} a_j^s$, *entonces existe una constante* C *que depende de* r, s, φ *y* p *tal que*

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k^r\, 2^{kp} \int_{I_k} \varphi(x)dx \leqslant A \sum_{k=0}^{\infty} a_k^r\, 2^{kp} \int_{I_k} \varphi(x)dx$$

Demostración. Es análoga a la del lema anterior, usando en este caso que

$$\sum_{k=0}^{j} (2^{pk} \int_{I_k} \varphi(x)dx)^{s/r} \leqslant A\, (2^{pj} \int_{I_j} \varphi(x)dx)^{s/r}$$

y $$\sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{(2^{pj} \int_{I_j} \varphi(x)dx)^{s/r}} \leqslant \frac{A}{(2^{pk} \int_{I_k} \varphi(x)dx)^{s/r}}$$

desigualdades que resultan del lema 2 (i), ii) respectivamente), notando que $2^{pk} \int_{I_k} \varphi(x)dx \simeq \dfrac{1}{(\int_{I_k} \varphi^{-\frac{1}{p-1}}(x)dx)^{p-1}}$ y que $\varphi^{-1/p-1}$

verifica A_q.

TEOREMA 1. *Si φ es una función creciente (decreciente) en* $[0,1]$ *que verifica* A_p *y si* $f \in L^1([0,1])$, *entonces existen constantes* C *y* C' *dependientes sólo de* φ *y* p *tales que*

$$C \int_0^1 |f(x)|^p \varphi(x)dx \leq \int_0^1 (\sum_{n=-1}^{\infty} f_n^2(x))^{p/2} \varphi(x)dx \leq$$

$$\leq C' \int_0^1 |f(x)| \varphi(x)dx.$$

siempre que alguno de los miembros exista.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$c_0 = \int_0^1 \psi_0(t) f(t)dt = 0$$

Definimos:

$$\mu_n = 2^n \phi_n(0) \int_0^{2^{-n}} f(x) \phi_n(x)dx = 2^n \int_0^{2^{-n}} f(x) \phi_n(x)dx$$

$$\gamma_n = 2^n \phi_n(1) \int_{1-2^{-n}}^1 f(x) \phi_n(x)dx = -2^n \int_{1-2^{-n}}^1 f(x) \phi_n(x)dx$$

y sean

$$g_n(t) = 2^{-n} \mu_n \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \psi_k(t) \quad ; \quad g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t)$$

$$h_n(t) = 2^{-n} \gamma_n \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \psi_k(t)\ \psi_k(1) \quad ; \quad h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(t)$$

Se puede ver fácilmente que $g_n(t) = \mu_n$ para $0 < t < 2^{-n-1}$,

$g_n(t) = -\mu_n$ para $2^{-n-1} < t < 2^{-n}$, $g_n(t) = 0$ si $t > 2^{-n}$ y que

$h_n(t) = 0$ si $t < 1 - 2^{-n}$, $h_n(t) = -\gamma_n$ si $1 - 2^{-n} < t < 1 - 2^{-n-1}$

y $h_n(t) = \gamma_n$ si $1 - 2^{-n-1} < t < 1$.

Demostraremos primero el teorema para g y h. Lo haremos sólo para g ya que para h se procede en forma análoga.

$$g(t) = \mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_{n-1} - \mu_n \quad \text{si } 2^{-n-1} < t < 2^{-n}$$

$$\mu_0 + \ldots + \mu_{n-1} - \mu_n = \sum_{j=0}^{n-1} \mu_j - \mu_n =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 (\sum_{k=0}^{2^j-1} \psi_k(t))\ f(t)\ \phi_n(t)dt - \mu_n =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 \sum_{j=2^j}^{2^{j+1}-1} \psi_k(t)\ f(t)dt - \mu_n =$$

$$= \int_0^1 f(t) \sum_{k=0}^{2^n-1} \psi_k(t)dt - \mu_n = 2^n \int_0^{2^{-n}} f(t)dt -$$

$$- 2^n \int_0^{2^{-n}} f(t)\ \phi_n(t)dt = 2.2^n \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} f(t)dt\ .$$

Tenemos entonces

$$\int_0^1 |g(t)|^p \varphi(t)dt = 2^p \sum_{n=0}^{\infty} 2^{np} \left| \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} f(t)dt \right|^p \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} \varphi(t)dt$$

y

$$\int_0^1 (\sum_{n=0}^{\infty} g_n^2(t))^{p/2} \varphi(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} \mu_k^2)^{p/2} \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} \varphi(t)dt$$

Luego, por el lema 3 obtenemos

$$\int_0^1 (\sum_{n=0}^{\infty} g_n^2(t))^{p/2} \varphi(t)dt \leqslant C \sum_{n=0}^{\infty} |\mu_n|^p \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} \varphi(t)dt$$

como además

$$|\mu_n|^p \leqslant C\ 2^{np} \left[\left| \int_0^{2^{-n-1}} f(t)dt \right|^p + \left| \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} f(t)dt \right|^p \right]$$

y

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{np} \left| \int_0^{2^{-n-1}} f(t)dt \right|^p \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} \varphi(t)dt \leqslant$$

$$\leqslant A \sum_{n=0}^{\infty} 2^{np} \left| \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} f(t)dt \right|^p \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} \varphi(t)dt$$

por el lema 4 tenemos que

$$\int_0^1 (\sum_{n=0}^{\infty} g_n^2(t))^{p/2} \varphi(t)dt \leqslant C \int_0^1 |g(t)|^p \varphi(t)dt$$

Veamos ahora la otra desigualdad:

Como $|g(t)| \leqslant |\mu_0| + \ldots + |\mu_n|$ si $2^{-n-1} < t < 2^{-n}$

resulta

$$\int_0^1 |g(t)|^p \varphi(t)dt \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^{n} |\mu_j|)^p \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} \varphi(t)dt \leqslant$$

$$\leqslant A \sum_{n=0}^{\infty} |\mu_n|^p \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} \varphi(t)dt \leqslant A \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^{n} \mu_n^2)^{p/2} \cdot$$

$$\cdot \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} \varphi(t)dt = A \int_0^1 (\sum q_n^2(t))^{p/2} \varphi(t)dt$$

donde hemos usado nuevamente el lema 3.

Hemos demostrado entonces el teorema para las funciones g y h. (Cabe observar que con esta misma técnica se podría demostrar el teorema para funciones características de intervalos diádicos sin usar la hipótesis de que φ es creciente o decreciente).

Probaremos ahora que

$$\int_0^1 |g(t)|^p \varphi(t)dt \leqslant C \int_0^1 |f(t)|^p \varphi(t)dt$$

y

$$\int_0^1 (\sum_{n=0}^{\infty} g_n^2(t))^{p/2} \varphi(t)dt \leqslant C \int_0^1 (\sum f_n^2(t))^{p/2} \varphi(t)dt$$

y desigualdades análogas para h.

$$\int_0^1 |g(t)|^p \varphi(t)dt = 2^p \sum_{n=0}^{\infty} 2^{np} \left|\int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} f(t)dt\right|^p \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} \varphi(t)dt \leqslant$$

$$\leqslant 2^p \sum_{n=0}^{\infty} 2^{np} (\int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} |f(t)|^p \varphi(t)dt)(\int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} \varphi^{-\frac{1}{p-1}}(t)dt)^{p-1} \cdot$$

$$\cdot \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} \varphi(t)dt \leqslant C \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} |f(t)|^p \varphi(t)dt =$$

$$= C \int_0^1 |f(t)|^p \varphi(t)dt \quad \text{usando la condición } A_p.$$

Por otra parte $\quad |g_n(t)| \leqslant |f_n(t)|$

de donde se deduce la segunda desigualdad.

Veremos ahora que bajo la hipótesis de que φ es creciente (decreciente), existe una función ψ escalonada, constante en intervalos de la forma $(2^{-n-1}, 2^{-n})$ con $n > 0$ y $(1-2^{-n}, 1-2^{-n-1})$ y equivalente a ella, es decir, existen constantes C_1 y C_2 tales que

$$C_1 \ \psi(t) \leqslant \varphi(t) \leqslant C_2 \ \psi(t) \qquad t \in [0,1]$$

En efecto, sea ψ definida por:

$$\psi(t) = \varphi(2^{-n-1}) \qquad \text{si } 2^{-n-1} < t < 2^{-n} \qquad n > 0$$

$$\psi(t) = \varphi(1-2^{-n}) \qquad \text{si } 1-2^{-n} < t < 1-2^{-n-1} \qquad n > 0$$

Es claro que $\psi(t) \leqslant \varphi(t)$ ya que φ es creciente.

Además, si $2^{-n-1} < t < 2^{-n}$ tenemos

$$\varphi(t) \leqslant \varphi(2^{-n}) \leqslant 2^n \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n+1}} \varphi(t')dt' \leqslant$$

$$\leqslant C \ 2^{n+1} \int_0^{2^{-n-1}} \varphi(t')dt' \leqslant C \ \varphi(2^{-n-1}) = C \ \psi(t)$$

donde hemos usado el lema 1 y el hecho de que φ es creciente; en forma completamente análoga vemos que $\varphi(t) \leqslant C \ \psi(t)$ si $1-2^{-n} < t < 1-2^{-n-1} \quad n > 0$.

Observemos que para que $u(t)$ sea de la forma

$$u(t) = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \ \psi_k(t)$$

es necesario y suficiente que $u(t)$ sea constante en los intervalos de la forma $(\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}})$ si $k \geqslant 0$ y que su integral sobre intervalos de la forma $(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$ sea nula.

Veamos que la función $(f_n - g_n - h_n)\ \psi^{1/p}$ verifica estas condiciones. En efecto:

$f_n - g_n - h_n = 0$ en los intervalos $(0,2^{-n})$ y $(1-2^{-n},1)$

por otra parte, ψ es constante en los intervalos $(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$ si $1 \leqslant k < 2^n-1$. Obviamente la integral es nula en $(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$; luego resulta que

$$[\psi^{1/p}(f - g - h)]_n = \psi^{1/p}(f_n - g_n - h_n)$$

Podemos usar, pues, las desigualdades de Paley para obtener

$$\int_0^1 (\sum_{n=0}^{\infty} (f_n-g_n-h_n)^2(t))^{p/2}\ \psi(t)dt \simeq \int_0^1 |(f-g-h)(t)|^p\ \psi(t)dt$$

y entonces

$$\int_0^1 (\sum_{n=0}^{\infty} (f_n-g_n-h_n)^2(t))^{p/2}\ \varphi(t)dt \simeq \int_0^1 |(f-g-h)(t)|^p\ \varphi(t)dt$$

en virtud de la equivalencia entre φ y ψ.

Finalmente tenemos

$$\int_0^1 (\sum_{n=0}^{\infty} f_n^2(t))^{p/2}\ dt \leqslant C\left\{\int_0^1 (\sum_{n=0}^{\infty} (f_n-g_n-h_n)^2(t))^{p/2}\ \varphi(t)dt\ +\right.$$

$$\left. + \int_0^1 (\sum_{n=0}^{\infty} g_n^2(t))^{p/2}\ \varphi(t)dt + \int_0^1 (\sum_{n=0}^{\infty} h_n^2(t))^{p/2}\ \varphi(t)dt\right\} \leqslant$$

$$\leqslant C\left\{\int_0^1 |f-g-h|^p(t)\ \varphi(t)dt + \int_0^1 |g(t)|^p\ \varphi(t)dt + \int_0^1 |h(t)|^p \varphi(t)dt\right\} \leqslant$$

$$\leqslant C\left\{\int_0^1 |f(t)|^p\ \varphi(t)dt + \int_0^1 |g(t)|^p\ \varphi(t)dt + \int_0^1 |h(t)|^p\ \varphi(t)dt\right\} \leqslant$$

$$\leqslant C\int_0^1 |f(t)|^p\ \varphi(t)dt\ .$$

donde hemos usado las desigualdades demostradas y otras triviales, quedando así demostrada una parte del teorema.

Para la otra, observemos que

$$\int_0^1 |f(t)|^p \varphi(t)dt \leq C \left[\int_0^1 |f-g-h|^p(t) \varphi(t)dt + \int_0^1 |g(t)|^p\varphi(t)dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 |h(t)|^p \varphi(t)dt)\right] \leq C \left[\int_0^1 (\sum_{n=0}^{\infty} (f_n-g_n-h_n)^2(t))^{p/2} \varphi(t)dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 (\sum_{n=0}^{\infty} g_n^2(t))^{p/2} \varphi(t)dt + \int_0^1 (\sum_{n=0}^{\infty} h_n^2(t))^{p/2} \varphi(t)dt)\right] \leq$$

$$\leq C \left[\int_0^1 (\sum_{n=0}^{\infty} f_n^2(t))^{p/2} \varphi(t)dt + \int_0^1 (\sum_{n=0}^{\infty} g_n^2(t))^{p/2} \varphi(t)dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 (\sum_{n=0}^{\infty} h_n^2(t))^{p/2} \varphi(t)dt\right] \leq C \int_0^1 (\sum_{n=0}^{\infty} f_n^2(t))^{p/2} \varphi(t)dt$$

y el teorema queda completamente probado.

TEOREMA 2. *Sea* φ *creciente o decreciente en* $[0,1]$ *y tal que verifica* A_p, $1 < p < \infty$. *Sea* $n \in N$ *y* $s_n(t)$ *la suma parcial de orden* n *de* $f \in L^1[0,1]$ *tal que* $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| < \infty$. *Entonces*

$$\int_0^1 |s_n(t)|^p \varphi(t)dt \leq C \int_0^1 |f(t)|^p \varphi(t)dt$$

Demostración. Supongamos $n = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \ldots + 2^{n_\lambda}$, y sea $g(t) = f(t)\ \psi_n(t)$.

Entonces se tiene la siguiente igualdad (ver [1]):

$$s_n(t)\ \psi_n(t) = g_{n_1}(t) + \ldots + g_{n_\lambda}(t)$$

Si usamos el teorema 1, resulta que

$$\int_0^1 |s_n(t)|^p \varphi(t)dt = \int_0^1 |g_{n_1}(t) + \ldots + g_{n_\lambda}(t)|^p \varphi(t)dt \leq$$

$$\leq C \int_0^1 (g_{n_1}^2(t) + \ldots + g_{n_\lambda}^2(t))^{p/2} \varphi(t)dt \leq C \int_0^1 (\sum_{n=0}^{\infty} g_n^2(t))^{p/2} .$$

$$. \varphi(t)dt \leq C \int_0^1 |g(t)|^p \varphi(t)dt = C \int_0^1 |f(t)|^p \varphi(t)dt$$

que es lo que queríamos demostrar.

PARTE II

En esta sección veremos algunos ejemplos de funciones de peso para las cuales vale el teorema 1 dado en la parte I. Es fácil verificar que los pesos utilizados por Hirschman en [2] son casos particulares de los mencionados en este trabajo; en efecto, los pesos en ese caso son de la forma x^{α}, donde α es tal que $-\frac{1}{p} < \alpha < 1 - \frac{1}{p}$.

Como ejemplo de generalización, veremos que la función de peso $\varphi(t)$ definida por

$$\varphi(t) = n^{\alpha} \quad \text{si} \quad 2^{-n} < t \leq 2^{-n+1}$$

donde $\alpha \in R$, es una de las mencionadas en los teoremas 1 y 2.

Es obvio que la función $\varphi(t)$ así definida es creciente o decreciente, según α sea positivo o negativo. Veamos entonces que cumple la condición A_p.

Para ello consideremos primero el caso en que $\alpha > 0$.

La condición A_p es:

$$\left(\int_I \varphi(x)\,dx\right)\left(\int_I \varphi^{-\frac{1}{p-1}}(x)\,dx\right)^{p-1} \leq C\ |I|^{p}$$

veremos que se cumple en el caso de ser I un intervalo de la forma $[0,2^{-n}]$. En este caso tenemos:

$$\int_0^{2^{-n}} \varphi(x)\,dx = \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} \varphi(x)\,dx = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^{\alpha}}{2^k} =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k^{\alpha}}{2^k} + \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{k^{\alpha}}{2^k}$$

Ahora bien

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k^{\alpha}}{2^k} \leq \frac{2^{\alpha}\, n^{\alpha}}{2^n}$$

por ser $\alpha > 0$, y dado que $\frac{k^\alpha}{2^{k/2}} \leqslant C$ si $k \in N$, se deduce que

$$\sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{k^\alpha}{2^k} \leqslant C \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k/2}} \leqslant C \frac{1}{2^{2n/2}} = C \frac{1}{2^n}$$

Por lo tanto:

$$\int_0^{2^{-n}} \varphi(x)dx \leqslant C \frac{n^\alpha}{2^n} + C \frac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon \frac{n^\alpha}{2^n}$$

Por otra parte

$$\int_0^{2^{-n}} \varphi^{-\frac{1}{p-1}}(x)dx = \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} \varphi^{-\frac{1}{p-1}}(x)dx =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^{-\frac{\alpha}{p-1}}}{2^k} \leqslant n^{-\frac{\alpha}{p-1}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = n^{-\frac{\alpha}{p-1}} \frac{1}{2^n}$$

donde hemos usado que $\alpha > 0$. Usando las acotaciones obtenidas, queda

$$\left(\int_0^{2^{-n}} \varphi(x)dx\right)\left(\int_0^{2^{-n}} \varphi^{-\frac{1}{p-1}}(x)dx\right)^{p-1} \leqslant C \frac{n^\alpha}{2^n} \left(\frac{n^{-\frac{\alpha}{p-1}}}{2^n}\right)^{p-1} = C \left(\frac{1}{2^n}\right)^p$$

que es lo que queríamos deducir.

Si ahora $I = [a,b]$ es un intervalo general, tenemos tres casos posibles:

i) Existe $n \in N$ tal que $\frac{1}{2^n} \leqslant a \leqslant b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$

ii) Existe $n \in N$ tal que $\frac{1}{2^{n+1}} \leqslant a < \frac{1}{2^n} \leqslant b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$

iii) Existe $n \in N$ tal que $a < \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n} < b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$

Veamos cada caso separadamente.

Caso i)

En este caso la función φ es constante en el intervalo I y se tiene

$$\left(\int_I \varphi(x)dx\right)\left(\int_I \varphi^{-\frac{1}{p-1}}(x)dx\right)^{p-1} = 1$$

Caso ii)

$$\int_I \varphi(x)dx = \int_a^{1/2^n} \varphi(x)dx + \int_{1/2^n}^b \varphi(x)dx = (n+1)^\alpha(\frac{1}{2^n}-a) + n^\alpha(b-\frac{1}{2^n})$$

Pero como $\alpha > 0$, tenemos que $n^\alpha < (n+1)^\alpha$ y por lo tanto

$$\int_I \varphi(x)dx \leqslant n^\alpha[(\frac{1}{2^n} - a) + (b - \frac{1}{2^n})] = (n+1)^\alpha (b-a)$$

Análogamente:

$$\int_I \varphi^{-\frac{1}{p-1}}(x)dx \leqslant n^{-\frac{\alpha}{p-1}} (b-a)$$

y entonces

$$(\int_I \varphi(x)dx)(\int_I \varphi^{-\frac{1}{p-1}}(x)dx)^{p-1} \leqslant (n+1)^\alpha(b-a)[n^{-\frac{\alpha}{p-1}}(b-a)]^{p-1} =$$

$$= (\frac{n+1}{n})^\alpha (b-a)^p .$$

Dado que $(\frac{n+1}{n})^\alpha < 2^\alpha$, obtenemos el resultado.

Caso iii)

Aquí es $\frac{1}{2^{n+1}} < b-a < \frac{1}{2^{n-1}}$ y entonces

$$(\int_I \varphi(x)dx)(\int_I \varphi^{-\frac{1}{p-1}}(x)dx)^{p-1} \leqslant (\int_0^{2^{-n+1}} \varphi(x)dx)(\int_0^{2^{-n+1}} \varphi^{-\frac{1}{p-1}}(x)dx)^{p-1} \leqslant$$

$$\leqslant C\ (2^{-n+1})^p \leqslant C\ [4(b-a)]^p \leqslant C\ (b-a)^p$$

y los tres casos quedan completamente terminados; es decir, φ cumple A_p si $\alpha > 0$.

Si ahora $\alpha < 0$, recordemos que si ψ verifica A_p, entonces $\psi^{-\frac{1}{p-1}}$ verifica A_q, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; el resultado se obtiene entonces tomando $\psi = \varphi^{-(p-1)}$.

REFERENCIAS

[1] R.E.A.C. PALEY, *A remarkable series of orthogonal functions*, I. Proc. London Math. Soc., vol. 34, 1932, pgs 241-264.

[2] I.I. HIRSCHMAN, *The decomposition of Walsh and Fourier series*. Memoirs of the Am. Math. Soc. n°15, 1955.

[3] B. MUCKENHOUPT, *Weighted norm inequalities for the Hardy Maximal function*. Math. research paper n°219, 1971. State University of New York at Albany.

Universidad Nacional de Buenos Aires
Argentina

Recibido en junio de 1972.

Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 26, 1972.

SOBRE EL ANILLO DE COBORDISMO DEL ESPACIO PROYECTIVO REAL DE DIMENSION INFINITA

por Oscar Valdivia Gutierrez

INTRODUCCION. En este trabajo calculamos el anillo del espacio proyectivo real de dimensión infinita utilizando la sucesión de Gysin.

Agradezco al Profesor A. Liulevicius de la Universidad de Chicago, por las discusiones y sugerencias que me brindó durante la elaboración de este trabajo.

1. GRUPOS DE COBORDISMO Y BORDISMO COMPLEJOS.

Consideremos una *teoría de cohomología generalizada* en una categoría cuyos objetos son complejos regulares finitos y sus morfismos son funciones contínuas (ver [1]). Un *espectrum* E es una sucesión $\{E_n \ / \ n \in Z\}$ de espacios y una sucesión de funciones contínuas $\quad i_n: SE_n \longrightarrow E_{n+1}$

donde SE_n es la suspensión del espacio E_n (ver [6],[8]).

Por ejemplo, tenemos el espectrum MU unitario de Thom, que se construye como sigue: Para cada n fijamos un U(n)-espacio fibrado vectorial universal E_n sobre el espacio clasificante BU(n) del grupo unitario U(n), tal que:

i) E_1 sobre $BU(1) = CP(\infty)$, espacio proyectivo complejo de dimensión infinita, es el espacio fibrado canónico de dimensión 1, η sobre $CP(\infty)$.

ii) Si $i_n: BU(n) \longrightarrow BU(n+1)$ es la aplicación inducida por la inclusión natural $U(n) \hookrightarrow U(n+1)$ entonces el fibrado inducido $i_n^*(E_{n+1})$ es equivalente a la suma de Whitney $E_n \oplus 1$, donde 1 es el fibrado trivial de dimensión 1.

iii) Si ρ_{kl}: $BU(k) \times BU(1) \longrightarrow BU(k+1)$ es la aplicación inducida por la inclusión natural $U(k) \times U(1) \hookrightarrow U(k+1)$ entonces el fibrado inducido $\rho^*_{kl}(E_{k+1})$ es equivalente al espacio fibrado producto $E_k \times E_1$.

Sea $E \longrightarrow X$ un espacio fibrado, $D(E)$ y $S(E)$ los espacios totales de los fibrados de discos y de esferas asociados respectivamente. El espacio de Thom $ME = D(E)/S(E)$ ([4],[7]) es un CW-complejo sin celdas en dimensión menor que 2n, excepto el punto base, y M es un functor de la categoría de espacios fibrados a la categoría de los CW-complejos con puntos bases.

Sean $E \longrightarrow X$ y $F \longrightarrow Y$, respectivamente, $U(n)$ y $U(m)$-fibrados. Entonces $E \times F \longrightarrow X \times Y$ es un $U(n+m)$-espacio fibrado y son homeomorfos $M(E \times F)$ y el wedge $ME \wedge MF$. Si Y es un punto entonces $MF = S^{2m}$, esfera de dimensión 2m ,y la suspensión $S^{2m}\, ME = ME \wedge S^{2m}$ es isomorfa a $M(E \oplus m)$, donde $\underline{m}$ es el espacio fibrado trivial de dimensión m.

Sea $MU(n)$ el espacio de Thom del espacio fibrado $E_n \longrightarrow BU(n)$. Entonces por (ii) se tiene una aplicación contínua

$$i_n: S^2\, MU(n) \longrightarrow MU(n+1)$$

Luego MU consiste de la sucesión $\{MU(n)/n \in Z\}$ de espacios y de la sucesión $\{i_n/n \in Z\}$ de funciones contínuas (ver [4],[6]).

Según G. W. Whitehead (ver [9]), un espectrum determina una teoría de cohomología y de homología generalizadas. Las teorías de cohomología asociadas al espectrum unitario de Thom MU se llaman Cobordismo y Bordismo complejo respectivamente (ver [3]).
Si X es un CW-complejo finito, estos grupos son

$$MU^n(X) = [S^{2k-n}X,\ MU(k)] \ , \quad MU_n(X) = [S^{2k+n},\ MU(k)\ X]$$

para $\underline{k}$ suficientemente grande, donde $[A,B]$ designa las clases de equivalencia de homotopías de A en B.

2. SUCESION DE GYSIN.

Sea η el fibrado complejo canónico de dimensión 1 sobre $BU(1) = CP(\infty)$ con fibra la esfera de dimensión 1, $S^1 = U(1)$,
$p: E = EB(\eta) \longrightarrow BU(1)$ y $p_0: E_0 = ES(\eta) \longrightarrow BU(1)$ los fibra-

dos asociados de disco y esfera respectivamente y la inclusión $i\colon E \subset (E,\ E_0)$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & MU^q(E,E_0) \arrow[r, "i^*"] & MU^q(E) \arrow[r] & MU^q(E_0) \arrow[r] & MU^{q+1}(E,E_0) \arrow[r, "\delta"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & MU^{q-2}(CP^\infty) \arrow[u, "\approx"', "\phi"] \arrow[r] & MU^q(CP^\infty) \arrow[u, "\approx"', "\rho^*"] \arrow[r, "\rho^*_0"] & MU^q(E_0) \arrow[u, equal] \arrow[r] & MU^{q-1}(CP^\infty) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{2.1}
$$

donde la primera fila es la sucesión exacta del par (E,E_0), ϕ es el isomorfismo de Thom (ver [3],[5]), y sea $g \in MU^2(E,E_0)$ la clase de Thom de η.

Para cada $a \in MU^{q-2}(CP^\infty)$ se tiene que:

$p^{*-1}\ i^*\ \phi(a) = p^{*-1}\ i^*(p^*a \cup g) = p^{*-1}(p^*a \cup i^*g) = a \cup p^{*-1}i^*g$

PROPOSICION 2.2. *Se tiene que* $p^{*-1}i^*g$ *es la clase característica de Conner-Floyd de* η.

Demostración. En efecto, la clase característica de Conner-Floyd de η, que designamos con $cf_1(\eta) = W$ es la representante (ver [4], [6],[8]) de la composición de las aplicaciones contínuas

$$CP^\infty \xrightarrow[\text{o-sección}]{\approx} E \xrightarrow{i} MU(1)$$

lo que implica

$$S^{2n} \wedge (CP^\infty)^+ \xrightarrow{1\wedge f} S^{2n} \wedge MU(1) \longrightarrow MU(n+1)$$

es decir, $f \in \{(CP^\infty)^+\ ,\ MU\}_{-2} = \{(CP^\infty)^+\ ,\ MU\}^2$

Por otra parte, la clase de Thom $g' \in MU^{2n}(E,E_0)$ de un fibrado complejo sobre el espacio X se construye como sigue:

Sea $f_\alpha\colon X \longrightarrow BU(n)$ la aplicación clasificante del fibrado α esto es

$$
\begin{tikzcd}
E = EB(\alpha) \arrow[d, "\alpha"'] & \arrow[d, "\gamma_n"] \\
X \arrow[r, "f_\alpha"] & BU(n)
\end{tikzcd}
$$

donde γ_n es el fibrado canónico, $E_0 = ES(\alpha)$ espacio total del fibrado asociado de esferas.

Como $\quad B^{2n} \overset{i}{\subset} E = EB(\alpha) \xrightarrow{\hat{f}_\alpha} EB(\gamma_n)$

y $\quad S^{2n-1} \subset E_0 = ES(\alpha) \longrightarrow ES(\gamma_n)$

la aplicación contínua $\hat{f}_\alpha$ induce

$S^{2n} \xrightarrow{\hat{i}} M(\alpha) = E/E_0 \xrightarrow{\hat{\hat{f}}_\alpha} MU(n) = S^{2n} \cup$ celdas de dimensión mayor.

Esta composición representa una clase $\underline{g}$ en $\widetilde{MU}^{2n}(M(\alpha)) = MU^{2n}(E,E_0)$ y la imagen de $\underline{g}$ bajo $\hat{i}^*: \widetilde{MU}^{2n}(M(\alpha)) \longrightarrow \widetilde{MU}^{2n}(S^{2n})$ es $1 \in \widetilde{MU}^{2n}(S^{2n})$.

En el caso del fibrado complejo η se tiene

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, shift left, "p"] \arrow[dr, "i"] & & \\ CP^\infty \arrow[ur, shift left, "\text{o-sección}"] \arrow[rr, "f"] & & E/E_0 \arrow[r, "\hat{\hat{f}}_\eta", "1"'] & MU(1) \end{tikzcd} \quad , \quad g \in MU^2(MU(1))$$

Luego f es un representante de la clase $cf_1(\eta) = W \in MU^2(CP^\infty)$, o sea, $f^*(g)$ es la clase representada por $f = w$. Por tanto,

$$p^*w = i^*g$$

Utilizando la naturalidad resulta la

PROPOSICION 2.3. *Para cada fibrado complejo* α *de dimensión* 1 *sobre* X *se tiene*

$$\begin{aligned} MU^{q-2}(X) &\longrightarrow MU^q(X) \\ a &\longrightarrow a \cup cf_1(\alpha). \end{aligned}$$

PROPOSICION 2.4. *Para cada fibrado complejo* α *de dimensión* 1 *sobre* X*, la sucesión*

$$\ldots \longrightarrow MU^{q-2}(X) \longrightarrow MU^q(X) \longrightarrow MU^q(E_0) \longrightarrow MU^{q-1}(X) \longrightarrow \ldots$$

es exacta.

OBSERVACION. A esta sucesión por analogía a la cohomología ordinaria la llamamos sucesión de Gysin y podemos obtener el caso general usando un argumento usual.

3. CALCULO DEL ANILLO DE COBORDISMO $MU^*(RP^\infty)$.

Sea η el fibrado canónico complejo de dimensión 1 sobre BU(1) y consideremos el diagrama conmutativo de transformaciones de fibrados

$$\begin{array}{ccc} BO(1) = RP^\infty & \longrightarrow & EU(1) \\ \pi \downarrow \alpha & & \downarrow \eta \\ BU(1) & \xrightarrow{f_\alpha} & BU(1) = CP^\infty \end{array}$$

donde f_α es la aplicación clasificante del fibrado complejo α de dimensión 1.

La esfera S^1 es fibra tanto de α como de η y la aplicación de S^1 en S^1 determinada por la transformación $BO(1) \longrightarrow EU(1)$ induce un homomorfismo de $MU^2(CP^\infty)$ en sí mismo que lleva el elemento $y = cf_1(\eta)$ en el elemento $2y$; por consiguiente,

(3.1) $\qquad \alpha = \eta \otimes \eta$

Aplicando la sucesión de Gysin al fibrado $\eta \otimes \eta$, teniendo en cuenta que el espacio total de su fibrado asociado de esferas es $E_0(\eta \otimes \eta) = RP^\infty$, obtenemos

(3.2)
$$\begin{array}{l} \cdots \longrightarrow MU^{q-2}(CP^\infty) \xrightarrow{\smile cf_1(\eta \otimes \eta)} MU^q(CP^\infty) \xrightarrow{\pi^*} \\ \qquad MU^q(RP^\infty) \longrightarrow MU^{q-1}(CP^\infty) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Pero $cf_1(\eta \otimes \eta) = L(\eta,\eta)$ satisface la ley de un grupo formal (ver [2]) y es de la forma

(3.3) $\qquad L(\eta,\eta) = 2W + \sum a_{ij} W^{i+j+2}$

PROPOSICION 3.4. *Para* CP^∞, *en la sucesión de Gysin* (3.2), $\smile L(\eta,\eta)$ *es un monomorfismo.*

Demostración. En efecto, $L(\eta,\eta) = 2W$ + términos en W de dimensión mayor.

Sea $\chi \in MU^*(CP^\infty)$, entonces $\chi = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i W^i$, $\alpha_i \in MU^*(S^0)$. Supongamos que α_k es el primer coeficiente no nulo, entonces

$$\chi = \alpha_k W^k + \alpha_{k+1} W^{k+1} + \dots$$

y $$L(\eta,\eta)\chi = 2\alpha_k W^{k+1} + \text{términos en } W \text{ de dimensión mayor.}$$

Sin embargo, para CP^n es $W^{n+1} = 0$, por consiguiente,

$$L(\eta_n,\eta_n) \smile W^n = 2W^{n+1} = 0$$

De la sucesión (3.2) y la Proposición 3.4 se deduce la

PROPOSICION 3.5. *La sucesión*

$$0 \longrightarrow MU^*(CP^\infty) \xrightarrow{\smile L(\eta,\eta)} MU^*(CP^\infty) \xrightarrow{\pi^*} MU^*(RP^\infty) \longrightarrow 0$$

es exacta.

OBSERVACION. Como π^* es un epimorfismo, entonces Ker π^* es el ideal en $MU^*(CP^\infty)$ generado por $L(\eta,\eta)$.

De las anteriores proposiciones se deduce el

TEOREMA 3.6. *El anillo de Cobordismo* $MU^*(RP^\infty)$ *es isomorfo al anillo de series formales* $\pi_*(MU)[[W]]$ *módulo el ideal generado por* $L(\eta,\eta) = 2W + \sum \alpha_{ij} W^{i+j}$.

REFERENCIAS

[1] ADAMS, J.F., *Lectures on generalized cohomology*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 99 (1969), Springer-Verlag.

[2] ----------- *Quillen's work on formal Groups and Complex Cobordism*, Lecture Notes, University of Chicago 1970.

[3] ATIYAH, M.F., *Bordism and Cobordism*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 57 (1961) 200-208.

[4] CONNER, P.E. y FLOYD, E.E., *The Relation of Cobordism to K-Theory*, Lecture Notes in Mathematics, Vol.28 (1966) Springer-Verlag.

[5] DOLD, A., *Relations between ordinary and extraordinary Cohomology*, Colloquium on Algebraic Topology, Aartus 1962.

[6] HANSEN, IDAR, *Stable Operations on Complex Cobordism*, Tesis, Oslo 1970.

[7] NOVIKOV, S.P., *Homotopy properties of Thom Complexes*, Math. Sb.57 (1962), 407-442.

[8] ------------- *The methods of Algebraic Topology from the point of view of Cobordism Theory*, Math. USSR-Izvestija, Vol. 31 (1967) 827-913.

[9] WHITEHEAD,,G.W., *Homology theories and duality*, Trans. Amer. Math., Soc.102 (1962) 277-283.

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Lima, Perú.

Recibido en agosto de 1972.

Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 26, 1972.

POINTWISE CONVERGENCE OF SERIES OF BESSEL FUNCTIONS

A. Benedek and R. Panzone

1. INTRODUCTION. The following result is proved in [5], Ch. 4. *Let be* $f(x) \in L^1(0,1)$, $\nu > -1/2$ *and* $x \in (0,1)$. *If the Fourier series of* f *converges to* 1 *at the point* x *then the Fourier-Bessel series of* f *converges to the same value at the same point.*
This result cannot be extended to $\nu > -1$ since, in general, a function in L^1 has not Fourier-Bessel coefficients for $\nu \in (-1,-1/2)$. However, it is possible to prove the following result which is contained in theorem 4 of this paper. *Assume* $\mu = (1/2 + \nu) \wedge 0$, $\nu > -1$, $x \in (0,1)$ *and* $f(x)x^{\mu} \in L^1(0,1)$. *Then, the expansions of* f *with respect to the trigonometric system and the Bessel system are equiconvergent.*
To prove this result, which is crucial in the proof of the main result of this paper, we prove two theorems on equiconvergence of the Fourier expansion with the expansion of the function under consideration with respect to the system of eigenfunctions of a second order differential equation. This is done following the line of proof of theorem 9.5 in Titchmarsh's book.
The main result of this paper is theorem 5 which roughly states that any system of solutions of Bessel's equation, orthogonal with respect to xdx, complete in the space L^2 defined by means of this measure, has the property that if the space L^p admits convergence in the norm then it also admits convergence almost everywhere. All these systems are described and also a family of L^p-spaces which admit convergence in the norm.

2. AUXILIARY RESULTS AND NOTATION.

Assume $0 < x < 1$, $-1 < \nu < \infty$ and $\{u_n : n=1,2,\dots\}$ defined by one of the following formulae:

(1) $u_n(x) = a_n^{-\nu} J_{\nu}(a_n x) + K.a_n^{\nu} J_{-\nu}(a_n x)$, $K \in (-\infty,\infty)$, $K=0$ if $\nu \geqslant 0$

(2) $u_n(x) = -(2/\pi)\lg(ka_n)\, J_o(a_n x) + Y_o(a_n x), \quad k \in (0,\infty)$

with arg $a_n \in [0,\pi)$. Each system $\{u_n\}$ is associated to a value of K or k. Each function u_n is a solution of the equation:

$$(3) \qquad (xy')' + (a_n^2 x - \nu^2/x)y = 0$$

with $\nu=0$ for the functions of the systems (2).
The a_n's are obtained from the homogeneous boundary condition:

(4) $((\sin\alpha)/2 + \cos\alpha)u_n(1) + (\sin\alpha)u_n'(1) = 0\ , \quad \alpha \in [0,\pi)$

For a fixed α the set of solutions of (4), $\{a_n\}$, is a denumerable family. This set together with the value of K or k define the system $\{u_n\}$, i.e. each system is determined by two parameters: α and K (or k). Besides, *each of them is orthogonal with respect to the weight* x *and complete in the space* L^2 *determined by this weight,* (cf. [5], Ch. 4).
We shall denote with $L^p(w(x))$, $\infty > w(x) > 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, the real space of p-integrable functions with respect to the measure w(x)dx and shall say that $L^p(w)$ *admits convergence in the norm* with respect to $\{u_n\}$ if for $f \in L^p$, the expansion of f with respect to the system converges to the function in L^p. That is, let be

$$S_N(f) = \sum_1^N c_n u_n\ ,\ c_n = \int_0^1 u_n\ f\ xdx \Big/ \int_0^1 u_n^2\ xdx \text{ and } f \in L^p(w),$$

then $\|(S_n f - f)\, w\|_p \longrightarrow 0$ if $n \longrightarrow \infty$. Observe that u_n is not conjugated because it is always a *real function.*

3. POINTWISE CONVERGENCE OF EIGENFUNCTION EXPANSIONS IN L^2.

In what follows assume the results and notation of chapters 1 and 2 of [5]. Let q be continuous in $0 \leqslant x < \Delta$, $\Delta \leqslant \infty$. Consider the differential equation

$$(5) \qquad y'' + (\lambda - q)y = 0$$

and the solutions ϕ and θ such that

(6) $\phi(0,\lambda)=\sin\alpha$, $\phi'(0,\lambda)=-\cos\alpha$; $\theta(0,\lambda)=\cos\alpha$, $\theta'(0,\lambda)=\sin\alpha$.

Assume that $m(\lambda)$ is an analytic function, holomorphic in the complex plane except for simple poles at the real points $\lambda_o < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ such that $m(\overline{\lambda}) = \overline{m(\lambda)}$.

Assume that for non-real λ, $m(\lambda)$ is on the "limit circle" at λ and such that there exist two sequences $\{b_n\}$ and $\{\beta_n\}$ with the property that for any λ with $\mathrm{Im}(\lambda) > 0$ it holds:

$$m(\lambda) = \lim_{b_n \uparrow \Delta} -\frac{\theta(b_n)\ \mathrm{cotg}\ \beta_n + \theta'(b_n)}{\phi(b_n)\ \mathrm{cotg}\ \beta_n + \phi'(b_n)} = \lim_{b_n \uparrow \Delta} 1_{b_n,\beta n}(\lambda) ,$$

$\beta_n \in [0,2\pi)$, $\beta_n \longrightarrow \beta$.

The residues of the function $\psi(x,\lambda) = \theta(x,\lambda) + m(\lambda)\ \phi(x,\lambda)$ at the poles of $m(\lambda)$ are:

$$\psi_n(x)/\|\phi(.,\lambda_n)\|_2 = \phi(x,\lambda_n)/\|\phi(.,\lambda_n)\|_2^2$$

$\{\psi_n(x)\}$ is an *orthonormal* family of functions in $L^2(0,\Delta)$.

We shall prove next theorem following the pattern given by paragraphs 1-4 of chapter 9 in Titchmarsh's book.

THEOREM 1. *Assume that at* $x \in (0,\Delta)$ *the functions* $\psi_n(x)$ *verify*

$$\sum_{T^2-T<\lambda_n<T^2+T} |\psi_n(x)|^2 = 0(1) \quad \text{if} \quad T \longrightarrow \infty$$

If f *is a real function,* $f \in L^2(0,\Delta)$, *and the ordinary Fourier series of* f *converges at* x *to* 1, *then the series*

$$\sum c_n\ \psi_n(x) \quad , \quad c_n = \int_0^\Delta f(y)\ \psi_n(y)\ dy ,$$

also converges to 1.

By "the ordinary Fourier series of f" we understand the expansion of the restriction of f to the finite interval $(0,b)\ni x$ with respect to the system $\{\sin 2\pi\ nx/b,\ \cos 2\pi\ nx/b\}$. Next lemma 2 asserts that if the ordinary Fourier series of f converges at x to 1 then this value is independent of b whenever $0 < x < b < \Delta$.

To prove theorem 1 we need some estimations from Titchmarsh's book. Assume $0 \leqslant \arg\lambda \leqslant \pi$, $s = \sqrt{\lambda} = \sigma + it$, $0 \leqslant \arg s \leqslant \pi/2$, $\Delta > b > b_o > 0$.

Then, (cf. [5], 1.7. (ii))

$$(7)\quad \begin{cases} \phi(x,\lambda) = \sin\alpha \cos sx + O(1)\ e^{tx}/|s| & \text{if } \sin\alpha \neq 0 \\ \phi(x,\lambda) = -(\sin sx)/s + O(1)\ e^{tx}/|s|^2 & \text{if } \sin\alpha = 0 \end{cases}$$

where the O's are uniform in x and s whenever $x \in (0,b)$ and $|s| > \sigma_o(b)$. A careful examination of the constants in the proofs of 9.2.12 and 9.2.13 in [5], proves that next formulae (8) and (9) hold.

$$(8)\quad \begin{cases} \psi(x,\lambda)=e^{isx}/is\sin\alpha + O(1)\ e^{t(x-2b)}/\sigma + O(1)e^{-xt}/|s|^2 & \text{if } t>1 \\ \psi(x,\lambda) = O(1)/\sigma t & \text{if } 0 < t \leqslant 1 \end{cases}$$

where $\sin\alpha \neq 0$, and if $\sin\alpha = 0$,

$$(9)\quad \begin{cases} \psi(x,\lambda) = e^{isx} + O(1)|s|e^{t(x-2b)}/\sigma + O(1)\ e^{-xt}/|s| & \text{if } t > 1 \\ \psi(x,\lambda) = O(1)|s|/\sigma t & \text{if } 0 < t \leqslant 1 \end{cases}$$

In both formulae, *the O's are uniform whenever* $x \in (0,b)$ *and* $|s| > \sigma_o(b)$. (For this it is convenient to consider formula 9.2.11 of [5] for the cases $bt > 1$ and $bt \leqslant 1$).
We need also the following result on analytic functions (cf. [5], lemma 2.11).

LEMMA 1. *Let* $F(z)$ *be holomorphic on* $-R \leqslant x \leqslant R$, $-r \leqslant y \leqslant r$ *where* $z=x+iy$. *If in this rectangle* $|F| < M/|y|$ *then* $|F(z)| \leqslant M_o.M$ *in* $-r \leqslant y \leqslant r$, $-R/2 \leqslant x \leqslant R/2$, *where* $M_o = M_o(r,R)$.

Since $\psi(x,s^2) - e^{isx}/is\sin\alpha$ is regular in the square $-1 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $T-1 \leqslant t \leqslant T+1$ for T great enough and takes conjugate values at points symmetric with respect to the imaginary axis, we can apply the preceding lemma to obtain from (8):

$$(10)\quad \begin{cases} \psi(x,\lambda) = e^{isx}/is\sin\alpha + O(1)e^{t(x-2b)}/(\sigma\vee 1)+O(1)e^{-xt}/|s|^2 = \\ \qquad = O(1)\ e^{-xt}/|s| \ , \ \text{if } t > 1 \\ \psi(x,\lambda) = O(1)/\sigma t \ , \ \text{if } 0 < t \leqslant 1 \end{cases}$$

for $\sin\alpha \neq 0$ and from (9), when $\sin\alpha = 0$:

$$(11)\quad \begin{cases} \psi(x,\lambda) = e^{isx} + O(1)|s|\ e^{t(x-2b)}/(\sigma\vee 1) + O(1)e^{-xt}/|s| = \\ \qquad = O(1)\ e^{-xt} & \text{if } t > 1 \\ \psi(x,\lambda) = O(1)|s|/\sigma t & \text{if } 0 < t \leqslant 1 \end{cases}$$

In formulae (10) and (11), the O's have the same properties as in formulae (8) and (9).
After integration of formulae (7) we obtain:

$$
(12)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \phi(y,\lambda)\, dy = O(1)e^{tx}(1+x)/|s| & \text{if } \sin\alpha \neq 0 \\[2ex] \displaystyle\int_0^x \phi(y,\lambda)\, dy = O(1)\, e^{tx}(1+x)/|s|^2 & \text{if } \sin\alpha = 0 \end{cases}
$$

where the O's have same properties as in (8) and (9).
Next, we shall see that if $x < b$ then

$$
(13)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_x^b \psi(y,\lambda)\, dy = O(1)e^{-xt+b.d(t)}/(t\wedge 1)|s|^2, & \text{for } \sin\alpha \neq 0 \\[2ex] \displaystyle\int_x^b \psi(y,\lambda)\, dy = O(1)e^{-xt+b.d(t)}/(t\wedge 1)|s| & \text{for } \sin\alpha = 0 \end{cases}
$$

where the O's have the same properties as in formulae (8) and (9), and $d(t)=t$ if $0 < t \leqslant 1$, $=0$ if $t > 1$.
To prove (13), observe that $\psi(x,\lambda)$ satisfies the integral equation:

$$
(14)\quad \psi(x,\lambda) = \psi(b,\lambda)\cos(s(x-b)) + \psi'(b,\lambda)\sin(s(x-b))/s + \int_b^x s^{-1} \sin(s(x-y))\, q(y)\, \psi(y,\lambda)\, dy .
$$

After integration of (14), we obtain:

$$
\int_b^x \psi(y,\lambda)dy = \psi(b,\lambda)\, s^{-1} \sin(s(x-b)) + \psi'(b,\lambda)(1-\cos(s(x-b)))s^{-2} + \int_b^x q(y)\, \psi(y,\lambda)(1-\cos(s(x-y)))\, s^{-2}\, dy .
$$

Then

$$
(15)\quad \left| e^{xt} \int_b^x \psi(y,\lambda)dy \right| \leqslant O(1)s^{-1}. \sup_{0\le y\le b} |e^{yt}\, \psi(y,\lambda)| + 2|s|^{-2}. |\psi'(b,\lambda)\, e^{bt}|
$$

where $O(1)$ has the same properties as in formula (8).
From (14) it follows that for b fixed and $x < b$:

$$\left|\frac{\psi'(b,\lambda)}{s}\right| e^{bt} \leqslant \frac{e^{t(b-x)}}{|\sin(s(x-b))|}\{|e^{xt}\ \psi(x,\lambda)| + |e^{bt}\ \psi(b,\lambda)\ .$$

$$.\ \cos(s(x-b))e^{t(x-b)}| + \int_x^b \left|\frac{\sin(s(x-y))}{s.e^{t(y-x)}} q(y)\ e^{ty}\ \psi(y,\lambda)\right| dy\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M\ e^{(b-x)t}}{|\sin(s(b-x))|}\ .\ \sup_{0\le x\le b} |e^{xt}\ \psi(x,\lambda)|$$

where M is an absolut constant if $|s| > \sigma_0(b)$.
In consequence,

$$(16)\quad \left|\frac{\psi'(b,\lambda).e^{bt}}{s}\right| \leqslant M.\min_{0\le x\le b}\left|\frac{e^{(b-x)t}}{\sin(s(b-x))}\right|.\max_{0\le x\le b}|e^{xt}\ \psi(x,\lambda)| \leqslant$$

$$\leqslant M'.\max_{0\le x\le b}|e^{xt}\ \psi(x,\lambda)|$$

where M' is an absolut constant when $|s| > \sigma_0(b)$, as it can be seen using the formula: $|\sin(x+iy)|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$ to estimate the minimum.

(13) follows now from (15) and (16), and the estimations (10) and (11).

QED.

It also holds (cf. 9.3.1 and 9.3.2 in [5]):

$$(17)\quad \int_b^\Delta |\psi(y,\lambda)|^2 dy = \begin{cases} O(1)/\sigma^2 t^2\ , & 0 < t \leqslant 1 \\ O(1)e^{-2bt}/\sigma^2 t\ , & t > 1 \end{cases}$$

whenever $\sin\alpha \neq 0$. In case $\sin\alpha = 0$,

$$(18)\quad \int_b^\Delta |\psi(y,\lambda)|^2 dy = \begin{cases} O(1)\ |s|^2/\sigma^2 t^2\ , & 0 < t \leqslant 1 \\ O(1)\ s^2 e^{-2bt}/\sigma^2 t\ , & t > 1 \end{cases}$$

In both formulae the O's are independent of b if $|s| > \sigma_0(b)$.

Finally, we mention a familiar result on convergence of Fourier series (cf. [6], p.242, Th. 1.3).

LEMMA 2. *Assume* $\int_0^b |f(y)|dy < \infty$, $\int_0^b |f_1(y)|dy < \infty$ *and* $f=f_1$ *in a neighbourhood of* $x \in (0,b)$. *Then, the ordinary Fourier series of* f *relative to the interval* (0,b) *converges to* 1 *if and only if*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^b f_1(y) \frac{\sin(T(x-y))}{x-y} dy = 1$$

4. PROOF OF THEOREM 1.

Let us assume that C_1 is the circumference of radius $T^2=|\lambda|$ and that in the interval $(-\infty,-T^2]$ there is no eigenvalue of the equation. If T^2 is not an eigenvalue and

$$(19) \quad \Phi(x,\lambda) = \psi(x,\lambda) \int_0^x \phi(y,\lambda)f(y)dy + \phi(x,\lambda) \int_x^\Delta \psi(y,\lambda)f(y)dy$$

then (cf. [5], Th. 2.17):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \Phi(x,\lambda)d\lambda = \sum_{\lambda_n<T^2} c_n\psi_n(x)$$

Since $\Phi(x,\bar{\lambda}) = \overline{\Phi(x,\lambda)}$, if C_2 is the half circle in the λ-plane image of $C = \{s=Te^{i\varphi},\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2\}$, $s=\sqrt{\lambda}$, we have:

$$\frac{1}{2i} \int_{C_1} \Phi(x,\lambda)d\lambda = \mathrm{Im} \int_{C_2} \Phi(x,\lambda)d\lambda$$

In consequence,

$$(20) \qquad \sum_{\lambda_n<T^2} c_n\ \psi_n(x) = \frac{2}{\pi} \mathrm{Im} \int_C \Phi(x,s^2)\ s ds$$

Let ε and η be arbitrary positive numbers.
Write $f=f_1+f_2+f_3$, where f_2 is a continuously differentiable function equal to zero on (b,Δ) and in a neighbourhood $(x-\delta,x+\delta)$ of the point x, f_1 is zero on (b,Δ) and such that $\int_0^\Delta |f_1|dy < \eta$ and f_3 is zero in (0,b) with $\int_0^\Delta |f_3|^2dy < \varepsilon^2$

Since $f \in L^2$, this can be done if b is chosen great enough and greater than x and δ sufficiently small.

With this decomposition $\Phi(x,\lambda) = \Phi_1(x,\lambda) + \Phi_2(x,\lambda) + \Phi_3(x,\lambda)$, where Φ_i is given by (19) with f_i instead of f.

In the following formulae (21),(22) and (23), the O's are independent of b if $|s| > \sigma_o(b)$.

$$(21)\quad \begin{cases} \Phi_1(x,\lambda) = \displaystyle\int_o^b e^{is|x-y|} f_1(y)(2is)^{-1}dy + \\ \qquad + O(1)\left(\dfrac{e^{-xt}}{|s|} + \dfrac{1}{|s|^2} + \dfrac{e^{(x-b)t}}{\sigma \vee 1}\right).\eta \quad \text{if } t > 1, \\ \qquad = O(1)\ \eta\ e^{xt}/\sigma t \quad \text{if } 0 < t \leqslant 1. \end{cases}$$

$$(22)\quad \Phi_2(x,\lambda) = e^{-\delta t}(1+x)\ O(1)/|s|^2 \quad \text{if } t > 1\ ,$$
$$= O(1)(1+x)e^{bt}/t|s|^2 \quad \text{if } 0 < t \leqslant 1.$$

$$(23)\quad \Phi_3(x,\lambda) = e^{(x-b)t}\ O(1)\ \varepsilon/\sigma \vee 1 \quad \text{if } t > 1,$$
$$= O(1)\ \varepsilon\ e^{xt}/\sigma t \quad \text{if } 0 < t \leqslant 1.$$

(21) is a direct consequence of (7) and (10) and (11). In fact, because of these formulae:

$$\Phi_1(x,\lambda) = \int_o^b \left[\frac{e^{is|x-y|}}{2is} + O(1)\left(\frac{e^{-(x+y)t}}{|s|} + \frac{e^{-|x-y|t}}{|s|^2} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{e^{(x+y-2b)t}}{\sigma \vee 1}\right)\right] f_1(y)dy \quad \text{if } t > 1; \text{ and if } t \in (0,1],$$

$$\Phi_1(x,\lambda) = \int_o^b [O(1)\ e^{xt}f_1(y)/\sigma t]\ dy.$$

To prove (22) observe that

$$\Phi_2(x,\lambda) = \psi(x,\lambda)\int_o^{x-\delta} \phi(y,\lambda)f_2(y)dy + \phi(x,\lambda)\int_{x+\delta}^b \psi(y,\lambda)f_2(y)dy =$$

$$= -\ \psi(x,\lambda)\int_o^{x-\delta} \phi^*(y,\lambda)f_2'(y)dy + \phi(x,\lambda)\int_{x+\delta}^b \psi^*(y,\lambda)f_2'(y)dy$$

where $\phi^*(y,\lambda) = \int_o^y \phi(r,\lambda)dr$, $\psi^*(y,\lambda) = \int_y^b \psi(r,\lambda)dr$.

Applying to this formula the estimations (7),(10) (or (11)), (12) and (13), we obtain (22). Finally,

$$|\Phi_3(x,\lambda)| = |\phi(x,\lambda)\int_b^\Delta \psi(y,\lambda)f(y)dy| \leq |\phi(x,\lambda)|\varepsilon(\int_b^\Delta|\psi(y,\lambda)|^2dy)^{1/2}.$$

After application of (7) and (17) (or (18)), (23) follows for $0 < t \leq 1$, and $\Phi_3(x,\lambda) = \varepsilon\ O(1)(\exp(x-b)t)/\sigma$ for $t > 1$. Since $\Phi_3(x,s^2)$ is regular in the square $-1 < \sigma < 1$, $T-1 < t < T+1$ (if T is great enough) and takes conjugate values at symmetric points with respect to the imaginary axis, we can apply lemma 1, obtaining so (23).
Calling $C'=C \cap \{t > 1\}$, $C''=C \cap \{t \leq 1\}$, we obtain from (21):

$$\int_{C'} \Phi_1(x,s^2)\ 2s\ ds = -i \int_{C'} ds \int_o^b e^{is|x-y|}\ f_1(y)\ dy +$$

$$+ \eta.O(1) \int_{C'} (\frac{e^{-xt}}{|s|} + \frac{1}{|s|^2} + \frac{e^{(x-b)t}}{\sigma\vee 1})|s||ds| =$$

$$= -i \int_C ds \int_o^b e^{is|x-y|} f_1(y)dy + \eta.O(1)(1+x^{-1} + (b-x)^{-1} + (b-x)^{-2})$$

where O(1) does not depend on b if $|s|$ is great enough. Then,

(24) $$\int_{C'} \Phi_1(x,s^2)2sds = \int_o^b (e^{iT|x-y|} - e^{-T|x-y|})f_1(y)|x-y|^{-1}dy+\eta O(1)$$

where O(1) is independent of b if $b > b_1 > b_o$, $|s|$ is great enough and x runs in a fixed closed interval contained in $(0,b_1)$.
Applying (22), it is obtained:

(25) $$\int_{C'} \Phi_2(x,s^2)2sds = O(1) \int_{C'} \exp(-\delta t)|ds|/T = O(1)/T\delta$$

Applying (23), it follows,

(26) $$\int_{C'} \Phi_3(x,s^2)2sds = O(1)\ \varepsilon \int_{C'} \frac{e^{(x-b)t}}{\sigma\vee 1}|s||ds| = O(1)\ \varepsilon$$

In (25) and (26) the O's are as in (24). From (24), (25) and (26) it follows that:

$$(27)\quad \mathrm{Im}\int_{C'}\Phi(x,s^2)2sds = \int_o^b \frac{\sin(T|x-y|)}{|x-y|} f_1(y)dy+O(1)(\varepsilon+\eta+1/T\delta)$$

To study the analogous integral on C" we define the auxiliary function:

$$\Omega(x,s^2) = \Phi(x,s^2) - \sum_{T^2-T<\lambda_n<T^2+T} c_n\ \psi_n(x)/(s^2-\lambda_n)$$

This function is regular on the strip $(T^2-T)^{1/2} < \sigma < (T^2+T)^{1/2}$ and therefore on $T-1/4 < \sigma < T+1/4$, if T is great enough. Besides, because of (21), (22) and (23) we have for $|\mathrm{Im}\ s| = |t| \leqslant 1$,

$$(28)\quad \begin{aligned}\Omega(x,s^2) &= O(1)\{\varepsilon+\eta+T^{-1}e^{bt}+\sum |c_n||\psi_n(x)|\}/t.\sigma =\\ &= O(1)\{\varepsilon+\eta+T^{-1}e^{bt}+(\sum|c_n|^2)^{1/2}(\sum|\psi_n|^2)^{1/2}\}/t.T\end{aligned}$$

Here the sums are on the set of $\lambda_n \in (T^2-T,T^2+T)$ and O is as in formula (24).

Since $f \in L^2(0,\Delta)$, $\sum|c_n|^2$ converges. In consequence, $\sum c_n^2$ in formula (28) is o(1) for $T \to \infty$. By hypothesis, $\sum|\psi_n(x)|^2 = O(1)$. Therefore, from (28) we obtain next formula (29) where o(1) is independent of b:

$$(29)\quad \Omega(x,s^2) = O(1)(\eta+\varepsilon+o(1))/tT$$

From (29) and lemma 1 we obtain that on C":

$$\Omega(x,s^2) = O(1)(\eta+\varepsilon+o(1))/T$$

Therefore,

$$(30)\quad \int_{C''}\Omega(x,s^2)2sds = O(1)(\varepsilon+\eta) + o(1)$$

On the other hand we have: $\left|\mathrm{Im}\int_{C''}\frac{2s}{s^2-\lambda_n}ds\right|=|\mathrm{var.Im}\ \lg(s^2-\lambda_n)|< \pi$.

Then

$$(31)\quad \left|\mathrm{Im}\int_{C''}\sum\frac{c_n\ \psi_n}{s^2-\lambda_n}\ 2s\ ds\right| \leqslant \pi\ \sum|c_n\ \psi_n(x)| = o(1)$$

In formula (31) the sum is on the set of $\lambda_n\in(T^2-T,T^2+T)$. From (30) and (31), it follows,

$$\text{(32)} \qquad \operatorname{Im} \int_{C''} \Phi(x,s^2)\ 2s\ ds = O(1)(\varepsilon+\eta) + o(1)$$

Taking $\varepsilon=\eta$, from (20), (27) and (32) we obtain:

$$\text{(33)} \qquad \sum_{\lambda_n<T^2} c_n\psi_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_o^b \frac{\sin(T(x-y))}{x-y} f_1(y)dy + O(1)[\varepsilon+(T\delta)^{-1}]+o(1)$$

Since $f_1(y)=f(y)$ in a neighbourhood of x, from lemma 2 it follows that the integral in formula (33) converges to 1 when $T \to \infty$.

Therefore , $\overline{\lim\limits_{T\to\infty}} \left| \sum\limits_{\lambda_n<T^2} c_n\ \psi_n(x) - 1\right| \leqslant C\ \varepsilon$

where C is a constant which does not depend on b neither on x, if x belongs to a fixed closed interval contained in $(0,b_1)$. Since ε is arbitrarily small, we obtain $\sum c_n\psi_n(x) = 1$.

QED.

From Carleson's theorem (cf. [3] or [4]), it immediately follows next corollary.

COROLLARY. *Under the hypothesis of theorem* 1, $\sum c_n\psi_n(x)$ *converges to* f(x) *for a.e. x*.

5. APPLICATION TO BESSEL'S EQUATION.

In this section we apply the results of the preceding section to the case of Bessel's second order differential equation:

$$\text{(34)} \qquad Y''(x) + (\lambda - \frac{\nu^2-1/4}{x^2})\ Y(x) = 0, \quad 0 < x < 1\ ,$$

$$Y(1)\cos\alpha + Y'(1)\sin\alpha = 0.$$

In this case $\Delta=0$. In [5], Ch.4, §8, Weyl's theory is applied to this equation. There it is obtained that the functions satisfying the equation and the boundary conditions (6) with $\alpha=0$ are:

$$\text{(35)} \qquad \phi(x,\lambda) = \frac{\pi\ \sqrt{x}}{2}\{J_\nu(xs)Y_\nu(s) - Y_\nu(xs)J_\nu(s)\}$$

$$\theta(x,\lambda) = \frac{\pi\sqrt{x}\ s}{2}\{J_\nu(xs)Y_\nu'(s)-Y_\nu(xs)J_\nu'(s)\} + \phi(x,\lambda)/2$$

and also that for $0 < \nu < 1$, $\nu \neq 1/2$ (limit-circle case):

$$m(\lambda) = -s\,\frac{c.s^{-\nu}J_\nu'(s) + s^\nu J_{-\nu}'(s)}{c.s^{-\nu}J_\nu(s) + s^\nu J_{-\nu}(s)} - \frac{1}{2}\ , \quad -\infty < c \leqslant \infty$$

The same formula holds for $\nu=1/2$, as it can be easily verified. In this case the equation has no singularity at x=0.
For $\nu=0$ (limit-circle case):

$$m(\lambda) = -s\,\frac{2J_o'(s)\ \lg(sc) - \pi Y_o'(s)}{2\ J_o(s)\ \lg(sc) - \pi Y_o(s)} - \frac{1}{2}\ , \quad 0 < c \leqslant \infty$$

and for $\nu \geqslant 1$ (limit-point case):

$$m(\lambda) = -s\,\frac{J_\nu'(s)}{J_\nu(s)} - \frac{1}{2}$$

where $m(\lambda)$ is limit of $l(\lambda) = -(\theta\,\mathrm{cotg}\beta+\theta')/(\phi\,\mathrm{cotg}\beta+\phi')$. The corresponding functions in the case of $\sin\alpha \neq 0$ are, as it is easy to see:

$$(36)\qquad \begin{cases} \tilde{\phi}(x,\lambda) = \phi\cos\alpha + \theta\sin\alpha \\ \tilde{\theta}(x,\lambda) = -\phi\sin\alpha + \theta\cos\alpha \end{cases}$$

and therefore, $\tilde{m}(\lambda)$ is the limit of the circles ($b \to 0$):

$$\tilde{l}(\lambda) = -(\tilde{\theta}(b,\lambda)\ \mathrm{cotg}\beta + \tilde{\theta}'(b,\lambda))/(\tilde{\phi}(b,\lambda)\ \mathrm{cotg}\beta + \tilde{\phi}'(b,\lambda)).$$

From (36) we obtain:

$$\tilde{l}(\lambda) = \frac{\sin\alpha - (\cos\alpha)[(\theta\,\mathrm{cotg}\beta + \theta')/(\phi\,\mathrm{cotg}\beta + \phi')]}{\cos\alpha + (\sin\alpha)[(\theta\,\mathrm{cotg}\beta + \theta')/(\phi\,\mathrm{cotg}\beta + \phi')]} =$$

$$= \frac{\sin\alpha + l(\lambda)\cos\alpha}{\cos\alpha - l(\lambda)\sin\alpha}$$

and since $m(\lambda)$ is the limit of the circles $l(\lambda)$, we have:

$$(37)\qquad \tilde{m}(\lambda) = \frac{m(\lambda)\cos\alpha + \sin\alpha}{-m(\lambda)\sin\alpha + \cos\alpha}$$

Using (36) and (37), we obtain for any α:

(38) $\qquad \tilde{\psi}(x,\lambda) = \tilde{\theta} + \tilde{m}(\lambda)\tilde{\phi} = (\theta + m.\phi)/(\cos\alpha - m.\sin\alpha)$.

Using (35) and the corresponding values of $m(\lambda)$, we have in the different cases:

(39) $\qquad \tilde{\psi}(x,\lambda) =$

$$= \frac{\sqrt{x}(cs^{-\nu}J_\nu(xs)+s^\nu J_{-\nu}(xs))}{[(\sin\alpha)/2+\cos\alpha](cs^{-\nu}J_\nu(s)+s^\nu J_{-\nu}(s))+(\sin\alpha)s(cs^{-\nu}J_\nu'(s)+s^\nu J_{-\nu}'(s))},$$

$0 < \nu < 1$, $c \in (-\infty,+\infty]$;

(40) $\qquad \tilde{\psi}(x,\lambda) =$

$$= \frac{\sqrt{x}\ [(2/\pi)J_o(xs)\lg(sc)-Y_o(xs)]}{[(\sin\alpha)/2+\cos\alpha][\frac{2}{\pi}J_o(s)\lg(sc)-Y_o(s)]+(\sin\alpha)s[\frac{2}{\pi}J_o'(s)\lg(sc)-Y_o'(s)]},$$

$\nu=0$, $c \in (0,\infty]$;

(41) $$\tilde{\psi}(x,\lambda) = \frac{\sqrt{x}\ J_\nu(xs)}{[(\sin\alpha)/2+\cos\alpha]J_\nu(s)+sJ_\nu'(s).\sin\alpha}, \quad \nu \geqslant 1 .$$

Then, the orthogonal systems which correspond to the different functions $m(\lambda)$ are given by: $\{\psi_n(x) = \sqrt{x}\ u_n(x)/\|\sqrt{.}\ u_n(.)\|_2\}$ where u_n is defined by (1) or (2) and satisfies (4). Using the asymptotic formulae for Bessel's functions, it follows that $\psi_n(x) = O(1)$ if x is fixed and $\lambda_n \sim n^2\pi^2$. Therefore, $\sum |\psi_n|^2 = O(1)$ for $T^2-T < \lambda_n < T^2+T$, and the hypotheses of theorem 1 are verified for these cases. In consequence, we have:

THEOREM 2. *Assume* $\nu > -1$ *and* $f \in L^2$. *Then* $S_nf = \sum_{j\leq n} c_j\psi_j$ *converges to* f *a.e.*.

6. POINTWISE CONVERGENCE OF EIGENFUNCTION EXPANSIONS IN L^p.

Let be $1 \leqslant p \leqslant \infty$ and $0 < u(x) < \infty$ a.e., $0 < x < \Delta$. We have defined as $L^p(u)$ the space of "functions" f such that $uf \in L^p$. *We shall write*: $\|uf\|_p = \|f\|_{p,u}$. Let $\{\psi_n\}$ be the system defined at the beginning of paragraph 3. With the same notation of that section and the same hypotheses on $m(\lambda)$, it holds:

THEOREM 3. *Assume* $f \in L^p(u) \cap L^1$, $1 \leq p < \infty$, *and that the following hypotheses are satisfied*:

1) *There exist the Fourier coefficients of* f *with respect to* $\{\psi_n\}$, $c_n = \int_0^\Delta f\psi_n dx$, *and* $\int_0^\Delta |\psi(x,\lambda)|.|f(x)|dx$ *is locally bounded in* $R^2-\{\lambda_n\}$.

2) $\sum \{c_n\psi_n;\ T^2-T < \lambda_n < T^2+T\} = o(1)$ *in a given* $x \in (0,\Delta)$ *for* $T \to \infty$.

3) *If* $1/p + 1/q = 1$, *the following equalities hold with the* O's *independent of* b *whenever* $|\lambda| > \sigma_o(b)$:

$$\left(\int_b^\Delta |\psi(x,s^2)/u(x)|^q dx\right)^{1/q} \begin{array}{l} = O(1)/\sigma t \quad \text{if } 0 < t \leq 1 \\ = O(1)\ e^{-bt}/\sigma \quad \text{if } t \geq 1 \end{array} \Bigg\} \ \sin\alpha \neq 0\ ,$$

$$\begin{array}{l} = O(1)|s|/\sigma t \quad \text{if } 0 < t \leq 1 \\ = O(1)|s|\, e^{-bt}/\sigma \quad \text{if } t \geq 1 \end{array} \Bigg\} \ \sin\alpha = 0\ .$$

(*If* $q=\infty$, *the left hand side of* 3) *should be replaced by* $\operatorname{ess.sup}_{x\in(b,\Delta)} |\psi(x,s^2)/u(x)|$).

Then, $\sum c_j\psi_j$ *and the ordinary Fourier series of* f *(in the sence of theorem* 1) *are equiconvergent: if the last one converges to the number* 1 *then also* $\sum c_j\psi_j = 1$.

Proof. From 1) it follows that the function:

$$\Phi(x,\lambda) = \psi(x,\lambda) \int_0^x \phi(x,\lambda)f(y)dy + \phi(x,\lambda) \int_x^\Delta \psi(y,\lambda)f(y)dy$$

is, for x fixed, an analytic function in the complex plane with simple poles at the points λ_n and residues $c_n\psi_n(x)$. In fact, it is sufficient to prove that $F(\lambda) = \int_x^\Delta \psi(y,\lambda)f(y)dy$ has at λ_n a simple pole with residue $\int_x^\Delta \phi(y,\lambda_n)f(y)dy/\|\phi(.,\lambda_n)\|_2^2$. Consider $F_b(\lambda) = \int_x^b \psi(y,\lambda)f(y)dy$, $b < \Delta$. Then, from section 3, we have:

$$F_b(\lambda) = G_b(\lambda) + (\lambda-\lambda_n)^{-1} \int_x^b \phi(y,\lambda_n)f(y)dy / \int_0^b |\phi(x,\lambda_n)|^2 dx$$

where G_b is regular in a neighbourhood of λ_n. For $b \to \Delta$, it follows that

$$F(\lambda) = G(\lambda) + (\lambda-\lambda_n)^{-1} \int_x^\Delta \phi(y,\lambda_n)f(y)dy/\|\phi\|_2^2 , \quad \lambda \overline{\in} \{\lambda_j\} .$$

Here, F and G are uniform limits on compact sets. In consequence, G is regular in a neighbourhood of λ_n and F has the desired properties.

Following the proof of theorem 1, we see that (20) holds. Now, we decompose f as in that theorem, $f = f_1 + f_2 + f_3$, with the same requirements on f_1 and f_2 and the support of f_3, but requiring in this case: $\|f_3\|_{p,u} < \varepsilon$.

Then (21) and (22) hold. Using in the proof of (23) that

$$\left|\int_b^\Delta \psi(y,\lambda)f(y)dy\right| \leqslant \|f_3\|_{p,u}\left(\int_b^\Delta |\psi(y,\lambda)/u(y)|^q dy\right)^{1/q}$$

and the hypothesis 3) instead of (17) or (18), we obtain (27). (32) also holds if we take into account (cf. formulae (28) and (31)) hypothesis 2). Therefore, (33) holds and the theorem follows.

QED.

7. APPLICATION TO SERIES OF BESSEL FUNCTIONS.

In this section we apply last theorem to Bessel and Dini series. The function

$$\text{(42)} \qquad \psi(x,\lambda) = \frac{\sqrt{x}\; J_\nu(xs)}{[\cos\alpha+(\sin\alpha)/2]\; J_\nu(s)+(\sin\alpha)sJ_\nu'(s)} , \qquad -1 < \nu < \infty$$

corresponds to (39) if c=0 and $-1 < \nu < 0$, also to (39) if $c=\infty$ and $0 < \nu < 1$, to (40) if $c=\infty$ and $\nu=0$ and to (41) if $\nu \geqslant 1$.

The system associated to this function is:

$$\text{(43)} \qquad \psi_n(x) = \frac{\sqrt{x}\; J_\nu(xs_n)}{\|\sqrt{x}\; J_\nu(xs_n)\|_2} \sim \sqrt{xs_n}\; J_\nu(xs_n)$$

where $\{s_n\}$ is the set of zeros of the denominator in (42) and such that $0 \leqslant \arg s_n \leqslant \pi/2$.

THEOREM 4. *Assume* $\nu > -1$, $\mu = (1/2 + \nu) \wedge 0$ *and* $f \in L^1(x^\mu)(\subset L^1)$.

Then, the expansion of f *with respect to the system* (43) *is equiconvergent with the ordinary Fourier expansion in the sense already defined for* $x \in (0,1)$.

Proof. Let us verify the hypotheses of theorem 3 with p=1. Since ψ and ψ_n are $O(x^{\mu})$,1) follows. (As before, for this application $\Delta=0$ and 1 instead of 0). Using the asymptotic expansions in the denominator of (42) we know that $\lambda_n \sim n^2\pi^2$. Since $\psi_n(x)=O(1)$, to prove 2) it is enough to see that $c_n=o(1)$. From (43) it follows that:

$$\psi_n(x) = \begin{cases} x^{\mu}O(1) & \text{if } 0 < x < 1 \ , \\ C_n\cos(xs_n-\nu\pi/2-\pi/4) + O(1)/xs_n & \text{if } xs_n > 1 \ . \end{cases} \tag{44}$$

Here, the O's do not depend neither on x nor on n, and C_n is bounded above independently of n. Assume that $h=s_n^{-1/2}$; applying (44) we obtain:

$$|c_n| = |\int_0^1 \psi_n(x)f(x)dx| = O(1)(\int_0^h x^{\mu}|f|dx+|\int_h^1 \cos(ys_n-\nu\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{\pi}{4})f(y)dy| +$$

$$+ \int_h^1 |f(y)|/ys_n dy) = O(1)(\int_0^h x^{\mu}|f|dx+|\int_0^1 \cos(xs_n-\nu\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{\pi}{4})f(x)dx| +$$

$$+ s_n^{-1/2}\int_0^1 |f(y)|dy = o(1)$$

as it easily follows from the hypoteses and Riemann-Lebesgue's lemma.

Let us prove 3). Since in this case the singular extreme is 0, the norm to be bounded is calculated on (0,1-b), $b \to 1$. Because of the asymptotic formula for J_ν :

$$\sqrt{xs}\ J_\nu(xs)x^{-\mu} = O(e^{tx}) \qquad \text{if } 0 < t \ , \ |xs| > 1 \tag{45}$$

Because of the behaviour of J_ν at the origin, the same formula holds for $|xs| \leqslant 1$. Then

$$\sup_{x\in(0,1-b)} \left| \frac{\psi(x,s^2)}{x^{\mu}} \right| = \frac{O(e^{t(1-b)})}{|A\sqrt{s}\ J_\nu(s) + B\sqrt{s^3}\ J_\nu'(s)|} \ ; \tag{46}$$

$A = (\sin\alpha)/2 + \cos\alpha \quad , \quad B = \sin\alpha$.

Again, because of the symptotic formulae for Bessel functions and their derivatives:

$$(47) \qquad |A\sqrt{s}\, J_\nu(s) + B\sqrt{s^3}\, J_\nu'(s)| \geqslant M(1\wedge t)e^t(|A|+|Bs|)$$

with $M > 0$, independent of s if s is great enough. From (46) and (47), 3) follows. QED.

LEMMA 3. $1 \leqslant r \leqslant p \leqslant \infty$. *If* γ *and* β *are real numbers verifying* $\beta + 1/p < \gamma + 1/r$ *then* $L^p(x^\beta) \subset L^r(x^\gamma)$.

Proof. Assume $p < \infty$. From Hölder's inequality:

$$\int_0^1 (|f|x^\gamma)^r dx = \int_0^1 (|f|x^\beta)^r x^{(\gamma-\beta)r} dx \leqslant [\int_0^1 (|f|x^\beta)^p dx]^{r/p} \;.$$

$$.\; \|x^{(\gamma-\beta)r}\|_{(p/r)^*} \;.$$

Since $(p/r)^*=p/(p-r)$, last norm is finite whenever $r < p$ and $(\gamma-\beta)rp/(p-r) > -1$, or whenever $r=p$ and $\beta < \gamma$, i.e. if the hypothesis is verified. Therefore, $\|fx^\beta\|_p C \geqslant \|fx^\gamma\|_r$. This proves in part the lemma. The case $p=\infty$ follows in the same way . QED.

COROLLARY TO THEOREM 4. *Assume that* p *and* β,*real, verify*

$$(48) \qquad 1/p < 1 + \mu - \beta \quad , \quad p > 1 \; ,$$

and that $f \in L^p(x^\beta)$ *on the interval* $(0,1)$. *Then the expansion of* f *with respect to the system* (43) *converges a.e. to* f.

Proof. $\mu \leqslant 0$ implies the existence of a number $r > 1$ such that $1/p + \beta < 1/r < 1 + \mu$. From lemma 3: $f \in L^r \subset L^1(x^\mu)$. The corollary follows from the thèorem of Carleson and Hunt on convergence of ordinary Fourier series, (cf. [3] and [4]).
QED.

REMARK. We could now obtain the analogous result for the systems described in §2. To avoid calculations, which for these systems are slightly more complicated, we give an alternative proof in next paragraph.

8. CONVERGENCE A.E. OF ORTHOGONAL SERIES OF BESSEL FUNCTIONS.

The aim of this section is to prove the following result.

THEOREM 5. *Let* $\{u_n\}$ *be a system of solutions of Bessel's equation of order* ν, ν *any real number, satisfying a real homogeneous boundary condition at* $x=1$, *orthogonal and complete in* $L^2(\sqrt{x})$. *Then* $\nu > -1$, *and if* p, β *and* ν *satisfy*

(49) $\quad 1 < p \quad ; \quad \{(\nu + 1/2)\wedge 0\} + 3/2 - \beta > 1/p$,

then for any $f \in L^p(x^\beta)$ *its expansion with respect to the system* $\{u_n\}$ *(in the sense of paragraph* 2) *converges to* f *a.e..*

This result is a consequence of the following theorem (which is proved in [2]) and theorem 7.

THEOREM 6. *Assume* $-1 < \nu$ *and* $\{u_n\}$ *given by* (1) *or* (2), *and* $0 < x < 1$.

a) If $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $-\infty < \beta < \infty$, *then* $L^p(x^\beta)$ *admits convergence in the norm with respect to the system* $\{u_n\}$ *if and only if* (49) *and* (50) *hold:*

(50) $\quad p < \infty \quad ; \quad 1/p > 1/2 - \beta - \{(\nu + 1/2)\wedge 0\}$.

b) Any system of solutions of Bessel's equation of order $\nu \in (-\infty,\infty)$, $\{w_n\}$, *satisfying a real homogeneous boundary condition* (4), *orthogonal with respect to* $x\,dx$, *complete in* $L^2(x^{1/2})$, *is equivalent to one of the systems* (1) *or* (2) *in the sense that for each* n *there exists a number* $h_n \neq 0$ *such that* $w_n=h_n u_n$.

c) For each system, $\{a_n\}$ *is real if* $n \geqslant n_o$, *where* n_o *depends on the system. Moreover,* $a_n \to \infty$ *if* $n \to \infty$. *So, we shall suppose that* $n \geqslant n_o$ *implies* $a_n < a_{n+1}$. *If* a_n *is not real then it is purely imaginary.*

d) Let $\{u_n\}$ *be a system obtained from* (1) *with* $K\neq 0$ *and* $\nu \in (-1,0)$. *We associate to it another system* $\{\tilde{u}_n\}$, *and precisely that obtained from* (1) *with the same boundary condition and* $K=0$. *If* $\{u_n\}$ *is obtained from formula* (2) *then* $\{\tilde{u}_n\}$ *will be that obtained (with the same boundary condition) from formula* (1) *for the case* $\nu=0$ *(and therefore* $K=0$*).*

For each system and its associate there exist a number m *and a fn.* G(x) *such that if* $S_n f(\widetilde{S}_n f)$ *designates the* n^{th} *partial sum of the expansion of* f *with respect to the system* $\{u_n\}$ $(\{\widetilde{u}_n\})$ *then, if* (49) *and* (50) *hold then for any* $f \in L^p(x^\beta)$ *it also holds:*

$$(51) \qquad |S_n f(x) - \widetilde{S}_{n+m} f(x)| \leq C_n \; G(x) \| f.x^\beta \|_p \;, \quad \forall\, n \,,$$

where $C_n = n^{2\nu}$ *if* $-1 < \nu < 0$, $C_n = 1/\lg n$ *if* $\nu = 0$, *and* G(x) *is finite everywhere and depends only on* ν,β *and* p.

THEOREM 7. *Assume* $\nu > -1$ *and* ν,β *and* p *satifying* (49). *Then, if* $\{u_n\}$ *is one of the systems defined by* (1) *or* (2) *then* $L^p(x^\beta)$ *admits convergence a.e. with respect to it.*

Proof. Assume that the system under consideration is defined by (1) with K=0. This system after multiplication by $\sqrt{x}$, coincides except for normalization with the system $\{\psi_n\}$ of paragraph 7.
The corollary to theorem 4 implies that if $F \in L^p(x^\delta)$ and $1/p < 1 \wedge (1+\mu-\delta)$, then the expansion of F with respect to the system $\{\sqrt{x}u_n(x)\}$ converges to F a.e..
Definig f and β by $F=f\sqrt{x}$, $\beta = \delta + 1/2$, we have: $f \in L^p(x^\beta)$, and in consequence, theorem 7 for K=0 follows.
From theorem 6,d), it follows that theorem 7 holds whenever the following inequalities hold:

$$(52) \qquad 1 < p < \infty \quad ; \quad 1/2 - \mu < \beta + 1/p < 3/2 + \mu .$$

Assume $f \in L^s(x^\gamma)$, and $\gamma + 1/s \leq 1/2 - \mu$. In this situation, there exist p and β verifying (52) and such that $p < s$. From lemma 3, we obtain $L^p(x^\beta) \supset L^s(x^\gamma)$.

QED.

REFERENCES

[1] BENEDEK, A, and PANZONE, R., *Mean convergence of series of Bessel functions*, Rev. UMA, vol 26,(1972), 42-61.

[2] ---------------------------, *On convergence of orthogonal series of Bessel functions*, to appear in Ann. di Pisa.

[3] CARLESON, L., *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*, Acta Math., 116,(1966), 135-157.

[4] MOZZOCHI, Ch.J., *On the pointwise convergence of Fourier series*, Lecture Notes in Mathematics n°199, Springer.

[5] TITCHMARSH, E.C., *Eigenfunction expansions*, I, Oxford.

[6] ZYGMUND, A., *Trigonometric series*, II,(1959), Cambridge.

Universidad Nacional del Sur
Bahía Blanca,Argentina.

Recibido en setiembre de 1972.

NORMAS PARA LA PRESENTACION DE ARTICULOS

Los artículos que se presenten a esta revista no deben haber sido publicados o estar siendo considerados para su publicación en otra revista.

Cada trabajo deberá ser enviado en su forma definitiva, con todas las indicaciones necesarias para su impresión. No se envían pruebas de imprenta a los autores.

Cada artículo debe presentarse por duplicado, mecanografiado a doble espacio. Es deseable que comience con un resúmen simple de su contenido y resultados obtenidos. Debe ponerse especial cuidado en distinguir índices y exponentes; distinguir entre la letra O y el número cero, la letra I y el número uno, la letra i y la ι (iota), ε y $\in$, etc. Los diagramas deben dibujarse en tinta china. Los símbolos manuscritos deben ser claramente legibles. Salvo en la primera página, deben evitarse en lo posible notas al pie.

El artículo deberá acompañarse de una lista completa de los símbolos utilizados en el texto.

La recepción de cada trabajo se comunicará a vuelta de correo y en su oportunidad, la aceptación del mismo para su publicación.

Los trabajos deben enviarse a:

DIRECTOR DE LA REVISTA DE LA U.M.A.
INSTITUTO DE MATEMATICA.
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR.
BAHIA BLANCA.

NOTES FOR THE AUTHORS

Submission of a paper to this journal will be taken to Imply that it has not been previously published and that it is not being considered elsewhere for publication.

Papers when submitted should be in final form. Galley proofs are not sent to the authors.

Papers should be submitted in duplicate, neatly typewritten, double spaced. It is desirable that every paper should begin with a simple but explicit summary of its content and results achieved. Special care should be taken with subscripts and superscripts; to show the difference between the letter O and the number zero, the letter I and the number one, the letter i and ι (iota), ε and $\in$, etc. Diagrams should be drawn with black Indian ink. Symbols which have been inserted by hand should be well spaced and cleary written. Footnotes not on the firts page should be avoided as far as possible.

A complete list of the symbols used in the paper should be attached to the manuscript.

Reception of a paper will be acknowledged by return mail and its acceptance for publication will be communicated later on.

Papers should be addressed to:

DIRECTOR DE LA REVISTA DE LA U.M.A.
INSTITUTO MATEMATICA.
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR.
BAHIA BLANCA.
ARGENTINA.

INDICE

Volumen 26, Número 3, 1972

Reg. Nac. de la Prop.

Int. Nº 1.044.738

Correo Argentino

Casa Central y Suc. 60

TARIFA REDUCIDA
CONCESION Nº 9120

FRANQUEO PAGADO
CONCESION Nº 3626

AUSTRAL IMPRESOS
VILLARINO 739 - B. B