REVISTA DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

Director: Darío J. Picco

Redactores: M. Balanzat, A. Calderón, E. Gentile,

E. Marchi, R. Panzone, J. Tirao, C. Trejo

Secretario de Redacción: M. L. Gastaminza

VOLUMEN 29, NUMEROS 1 y 2

DEDICADO AL PROFESOR LUIS A. SANTALÓ

1979

BAHIA BLANCA

1979

UNIÓN MATEMÁTICA ARGENTINA

JUNTA DIRECTIVA: Presidente: Ing. O. E. Villamayor; Vicepresidente 1º: Ing. M. Castagnino; Vicepresidente 2º: Dr. J. A. Tirao; Secretario: Lic. C. G. Gregorio; Prosecretario: Lic. N. Patetta; Tesorero: Lic. A. E. Blangino; Protesorero: Lic. G. S. Birman; Director de Publicaciones: Dr. D. J. Picco; Vocales Regionales: Buenos Aires y La Plata: J. J. Martínez; Centro: H. Alaggia; Cuyo: M. R. Berraondo; Litoral: C. Meritano; Nordeste: H. Tamburini; Noroeste: R. Ovejero; Sur: M. L. Gurmendi.

SECRETARIOS LOCALES: Bahía Blanca: M. L. Gurmendi; Buenos Aires: J. Busch; Córdoba: A. Niell; Jujuy: F. R. Corning; La Plata: S. Salvioli; Mar del Plata: R. Rodríguez; Olavarría: A. Asteasuain; Resistencia: H. Tamburini; Río Cuarto: R. Marangunic; Rosario: C. Meritano; Salta: R. G. Ovejero; San Juan: E. Pick; San Luis: M. R. Berraondo; Santa Fe: J. C. Canavelli; Santa Rosa: H. Iervasi; Tandil: M. D. de Aranzadi; Tucumán: R. Lucioni; Villa Mercedes: A. Castagno.

MIEMBROS HONORARIOS: Antonio Zygmund; Laurent Schwartz; Charles Ehresmann; Jean Dieudonné; Alexandre Ostrowski; José Babini; Marcel Brélot; Antonio A. Monteiro; Alberto González Domínguez.

MIEMBROS INSTITUCIONALES: Universidad Nacional del Nordeste, Universidad Nacional de La Pampa, Instituto Argentino de Matemática, Universidad Nacional del Centro de la Prov. de Buenos Aires, Instituto de Matemática de Bahía Blanca.

La U. M. A. reconoce, además de miembros honorarios e institucionales, tres categorías de asociados: titulares, adherentes (estudiantes solamente) y protectores.

Toda la correspondencia administrativa, relativa a suscripciones y números atrasados de la Revista, información y pago de cuotas de asociados debe dirigirse a:

UNIÓN MATEMÁTICA ARGENTINA
Casilla de Correo 3588
1000 Correo Central
Buenos Aires (Argentina)

La presentación de trabajos para la Revista debe ser realizada en cualquiera de las dos siguientes direcciones:

Revista de la U.M.A.
Instituto de Matemática
Universidad Nacional del Sur
8000 Bahía Blanca
Argentina.

Revista de la U.M.A.
Facultad de Ciencias Exactas
y Naturales
Universidad Nacional de La Pampa
6300 Santa Rosa
Argentina.

Los autores reciben gratuitamente 50 separatas.

1º SEMESTRE 1979

Este fascículo se publica mediante un subsidio del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).

REVISTA DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

Director: Darío J. Picco

Redactores: M. Balanzat, A. Calderón, E. Gentile,
E. Marchi, R. Panzone, J. Tirao, C. Trejo

Secretario de Redacción: M. L. Gastaminza

VOLUMEN 29, NUMEROS 1 y 2

DEDICADO AL PROFESOR LUIS A. SANTALÓ

1979

BAHIA BLANCA
1979

LUIS A. SANTALO

Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 29, 1979.

PRESENTACION

En 1976 el Dr. Luis Antonio Santaló cumplió 65 años de edad y también 42 años de actividad matemática desarrollada, en su casi totalidad, en la Argentina. La Unión Matemática Argentina ha considerado que este aniversario era una buena oportunidad para dedicar un volumen de homenaje al insigne matemático.

La vinculación de Santaló con la Argentina tiene una prehistoria que comienza hacia 1931; en aquellos años era estudiante en Madrid, un estudiante de cuyas dotes ya se hacían lenguas los que eran sus compañeros, y todos estos jóvenes tenían contactos con Rey Pastor cuando éste, en su incesante viajar, llegaba a Madrid. Don Julio en largas y sabrosas charlas hablaba de la Argentina con cariño y gracejo. Cuan lejos estaba Santaló de pensar que aquel lejano país sería el suyo para el resto de su vida. Su porvenir parecía ya trazado, brillantísimo egresado, autor, antes de los 25 años, de importantes trabajos de investigación, su incorporación como catedrático a la universidad española parecía inminente. ¡Pero vino la guerra civil!. A su término, como tantos otros españoles, miró hacia la América Hispana. Don Julio Rey Pastor gravitó en forma decisiva para que la meta fuese la Argentina.

La primera mención de Santaló en esta Revista es a finales de 1939. En el último fascículo de ese año se anuncia la "grata noticia" de la llegada a Argentina de dos "destacados universitarios": los profesores Alejandro Terracini y Luis A. Santaló. En el primer fascículo del siguiente volumen se hace la presentación de Santaló y se puede observar que, pese a su juventud, tiene ya publicados doce trabajos, ocho en España, tres en Alemania y uno en Francia.

La colaboración de Santaló con la U.M.A. comienza de inmediato. En el mismo volumen en que se hizo la presentación publicó dos trabajos de investigación, dos resúmenes de comunicaciones a Sesiones Científicas y dos artículos de divulgación. En este primer contacto ya están puestas en evidencia las características básicas de su personalidad como hombre de ciencia: en primer lugar la labor de investigación, pero también hay mucho interés en el fomento de las vocaciones matemáticas.

Pretendemos en esta presentación mostrar el desarrollo, durante varios decenios, de estas dos facetas de su vida: el investigador por una parte y el maestro y expositor por otra.

En primer lugar su obra de investigación. El homenaje que le rinde la U.M.A. es, ante todo, pero no exclusivamente, por su obra de creación que a continuación trataremos de esbozar.

La lista que aparece en este volumen de los trabajos de Santaló tiene 135 títulos publicados en revistas científicas de veinte países: Alemania, Argentina, Bélgica, Brasil, Canadá, España, E.E.U.U., Francia, Holanda, Hungría, India, Italia, Japón, Perú, Portugal, Rumania, Suiza, Turquía, U.R.S.S., y Uruguay. Estas contribuciones se pueden agrupar en seis distintos dominios del saber matemático.

1. GEOMETRIA INTEGRAL.

Es acaso, el campo en que ha hecho contribuciones de mayor importancia y también el que ha cultivado toda su vida.

Santaló llega a Hamburgo en 1934 cuando Blaschke y sus discípulos están por dar a luz las primeras publicaciones de una nueva disciplina geométrica: la geometría integral. Rápidamente con sus primeros trabajos pasa Santaló a ocupar un lugar destacado como investigador en aquel dominio para llegar a ser, andando el tiempo: "for many years the undisputed leader in the field of Integral Geometry". Esta frase de Marc Kac figura en la presentación del libro de Santaló (libro (10)) "Integral Geometry and Geometric Probability", volumen I de la reciente "Encyclopedia of Mathematics and its Applications", en la cual Kac es el editor general de la sección de probabilidades. Este libro es un excelente tratado y la fuente más indicada para conocer a fondo la obra de Santaló en geometría integral y probabilidades geométricas así como los muchos otros trabajos originados en dicha obra.

La idea original de Santaló en sus primeros trabajos ((7), (8), (9) y (11))* fue la de extender y aplicar la llamada "medida cinemática" introducida accidentalmente por Poincaré en su Cálculo de Probabilidades y que, en manos de Santaló, resultó extraordinariamente fructífera. Estos trabajos corresponden a la época alemana de Santaló (1934 a 1936). Tras el paréntesis de la guerra civil y ya en Argentina, Santaló va extendiendo sus resultados a otros dominios: figuras ilimitadas (22), curvas situadas en la superficie esférica (28) y (30), figuras del plano hiperbólico (33) y (36) y figuras hiperconvexas (60). Esta línea de investigación culmina con los trabajos (80), (84) y (90) en los que Santaló obtiene y aplica la denominada fórmula fundamental cinemática para espacios de cualquier dimensión con curvatura constante.

Las directivas fundamentales de la teoría desarrollada en los trabajos

(*) ver la lista de publicaciones: trabajos de investigación

anteriores son las siguientes: Sea E un espacio en el que actúa transitivamente un grupo G de transformaciones. Dada una figura o conjunto de puntos F contenido en E, consideremos un conjunto de posiciones de F, o sea un conjunto de figuras, transformadas de F por operaciones de G. Se trata entonces de "medir" este conjunto de figuras congruentes con F, respecto de G. Esta "medida" no es otra cosa que la medida de Haar del grupo G, que existe siempre si G es localmente compacto y puede calcularse explícitamente si G es un grupo de Lie. El desarrollo de la teoría lleva a calcular explícitamente la medida de conjuntos particulares para grupos también particulares y de estos cálculos Santaló dedujo muchas e importantes consecuencias geométricas; en particular obtuvo bellas desigualdades isoperimétricas y fórmulas integrales que generalizaban en mucho las primitivas fórmulas de Crofton de las probabilidades geométricas (ver los trabajos (13), (23), (52), (53) y (72)).

Una nueva línea de investigaciones es abierta por Santaló en su famosa memoria (66) de los "Annals of Mathematics". En esta memoria y en las (77) y (91) Santaló vincula la medida cinemática con la medida en espacios homogéneos, cuyo ejemplo más importante, desde el punto de vista geométrico, es el de la medida de conjuntos de subespacios lineales del espacio euclidiano, afín o proyectivo de n dimensiones. No siempre esta medida existe y del análisis de los casos de existencia o de no existencia Santaló obtuvo en los trabajos (106), (112) y (116) resultados muy interesantes. En estos trabajos se dieron criterios para la existencia de una medida invariante para subconjuntos de espacios lineales. También estudió Santaló la geometría integral en espacios complejos y obtuvo (78) una generalización de la clásica forma de Bezout para curvas algebraicas.

Santaló siempre se interesó en las aplicaciones de los resultados que él obtenía; entre las diversas aplicaciones obtenidas se destacan: una nueva manera de definir la longitud de curvas (17), el área de subvariedades (69) y la medida de conjuntos de geodésicas (83); nuevas demostraciones de la propiedad isoperimétrica del círculo (23) y (33) y otras aplicaciones a las probabilidades geométricas y a la teoría de números que mencionaremos más adelante.

Además de las investigaciones en geometría integral Santaló se preocupó de hacer exposiciones de conjunto de los métodos y resultados obtenidos. Hace más de un cuarto de siglo publicó dos libros (Libros (2) y (3)) de los cuales el segundo, escrito en inglés alcanzó amplia difusión y fue traducido al ruso. Recientemente el cuerpo de doctrina tomó forma definitiva con la publicación del libro "Integral Geometry and Geometric Probability" que mencionamos anteriormente.

2. GEOMETRIA DIFERENCIAL METRICA, AFIN Y PROYECTIVA.

Los trabajos (3), (10), (27), (39), (41), (55), (59), (62), (71),(108) y (110) se refieren a temas de geometría diferencial clásica, a esta disciplina pertenece también el estudio hecho en (25) y (94) de las curvas de Darboux que Santaló probó que coinciden con las extremales de la torsión total. Es también importante el trabajo (109) sobre propiedades características de la esfera; los resultados de Santaló, que engloban los parciales obtenidos previamente por varios autores, dejan terminado este importante problema.

Pasando al campo de la geometría diferencial afín y proyectiva, en (47) se estudian las superficies desarrollables vinculadas de manera proyectivamente invariante con una curva del espacio; en (50) se obtienen resultados sobre la caracterización geométrica de invariantes afines de las curvas del espacio; en (98) se aplican por primera vez, simultaneamente con Favard, los métodos del "repère mobile" para el estudio de la geometría diferencial afín. Estos trabajos y resultados pasaron posteriormente a diversos tratados de geometría diferencial, hecho que se reitera en todos los dominios de la matemática a los que Santaló ha hecho contribuciones.

3. GEOMETRIA DE CUERPOS CONVEXOS.

Los resultados obtenidos por Santaló en el campo de la geometría integral fueron de mucha utilidad en la teoría de cuerpos convexos; originaron nuevos problemas y permitieron resolver otros viejos; la naturaleza de los resultados es muy variada, los hay de tipo clásico como los de los trabajos (41), (44), (54), (79), (85), (87), (93) y (105), pero otros como (37), (40), (45), (49), (71), (115), (118), (123) se refieren a cuerpos convexos en espacios no euclidianos, teoría iniciada por Santaló. Merecen especial mención los trabajos (24), (31) y (70). El primero, que se ocupa de transversales de figuras convexas, tuvo mucha repercusión y ha tenido aplicación en problemas de optimización mencionándose los resultados en textos de dicha disciplina. El segundo, pese a su naturaleza más bien elemental, ha sido uno de los más citados e incluído en textos, y el tercero se ha revelado de interés para la teoría de ecuaciones diferenciales de segundo orden.

4. TEORIA DE NUMEROS.

En la teoría geométrica de números, fundada por Minkowski, la convexidad y la medida en grupos son de aplicación directa; no es entonces de extrañar que algunos de los trabajos de Santaló se vinculen a dicha

teoría. Los de mayor interés son: (66) donde se da una nueva demostración del teorema clásico de Minkowski-Hlawka; (70) en donde se demuestra por primera vez una desigualdad conjeturada por Mähler y utilizada posteriormente por Bambah; (89) en donde se generaliza un resultado de Tsuji, llegando a un teorema de geometría hiperbólica análogo al teorema fundamental de Minkowski y (22) en donde se generaliza un resultado clásico de Blichfeld.

5. PROBABILIDADES GEOMETRICAS.

El origen de la geometría integral son las probabilidades geométricas; por ello desde sus primeros trabajos (6), (12), (14), (15) y (16) Santaló hizo contribuciones a dicha teoría y no la volvió a abandonar;señalamos a continuación los principales trabajos: (19) en el que Santaló estudia problemas sobre redes que generalizan el clásico problema de la aguja de Buffon; (28) y (82) en los que se inició una nueva línea de investigación: probabilidades sobre la esfera que ha sido continuada posteriormente por otros matemáticos; (35) y (92) tienen importancia en tecnología (estereología) para analizar la composición de conglomerados; (43) y (61) se refieren a un problema derivado de la física, iniciado por Goudsmit para el plano, generalizado en (43) al espacio y en (113) al plano hiperbólico, donde presenta notables particularidades que fueron puestas de manifiesto en (126); el trabajo (56) tiene interés para la estadística.

6. TEORIA DEL CAMPO UNIFICADO.

Santaló se ha interesado también en la física matemática donde ha obtenido resultados de amplio interés. En (76) generaliza un resultado de Synge sobre campos vectoriales. En (95) dió una caracterización de los operadores vectoriales. Los trabajos (86),(100),(103),(111),(127) y (128) se vinculan con la teoría de Einstein del campo unificado en su aspecto geométrico y, con la idea de lograr una caracterización de las ecuaciones del campo, se hace el estudio de ecuaciones del campo muy generales de las que son casos particulares las de Einstein y de Schrödinger del campo unificado. Finalmente el trabajo (131) es de interés en los problemas cosmológicos.

Paralela a esta obra de creación matemática se desarrolla la acción de Santaló como maestro; lo ha sido y lo es en todos los sentidos de la palabra. Ha desarrollado prácticamente toda su actuación profesoral en la Argentina. En donde actúa o ha actuado (Universidades de Rosario, La Plata y Buenos Aires, Escuela Superior Técnica del Ejército y Comisión Nacional de Energía Atómica) ha dejado un recuerdo inolvidable. Uno de sus antiguos alumnos le dedicó la edición de un libro poniendo: "A Luis A. Santaló que me enseñó a enseñar".

Santaló ha sido maestro en varias formas. Como buen investigador ha dirigido y sigue dirigiendo tesis doctorales. Sus cursos universitarios son profundos, brillantes y claros. No sólo emplea la voz y la tiza para explicar sino que además usa con éxito sus manos, las que dibujan en el aire curvas y superficies y sugieren sus propiedades, y eso que a veces están en espacios de dimensión mayor que tres. Es rarísimo, por no decir imposible, encontrar un alumno que diga no haber entendido nada de la explicación de Santaló, lo cual no quiere decir que todos puedan captar en su totalidad la profundidad de su enseñanza; eso sí, el que lo consigue queda marcado para el resto de su existencia.

Los libros y monografías (son diez los primeros y seis las segundas) escritos por Santaló han pesado mucho en el desarrollo de la matemática en los países de habla castellana. Ya hablamos antes de sus tres libros de geometría integral. Entre los restantes hay que señalar en primer lugar el titulado *Vectores y Tensores*, donde desarrolla una teoría matemática que tiene justificada fama de ser muy difícil de exponer con claridad. Santaló consigue esto plenamente, lo que explica que la obra haya sido un éxito editorial, con muchas ediciones y sirviendo de texto en numerosas universidades y escuelas de ingenieros en los países de habla castellana. De características análogas es el titulado *Geometría Proyectiva* que también ha servido como libro de texto y ha alcanzado varias ediciones, menos que la primera obra, lo que no es de extrañar ya que la geometría proyectiva tiene una menor área de interés y de aplicaciones que el cálculo tensorial. Una disciplina geométrica de la que faltaban textos accesibles a los no especialistas era la teoría de espinores. Uno de los últimos libros de Santaló, su *Geometría Espinorial*, fue concebido y realizado para llenar ese vacío, meta que sin duda alguna será alcanzada.

La publicación de monografías tiene como objetivo para Santaló el marcar las líneas generales de una o varias disciplinas sin entrar en los detalles necesarios en un libro de texto; todas las publicadas por él han alcanzado amplia difusión. Es posible que la más interesante sea la dedicada a las geometrías no euclidianas; pese a su carácter expositivo aparecen en ella varios puntos de vista originales y ha obtenido críticas muy elogiosas. La monografía sobre espacios vectoriales y geometría analítica así como la que trata sobre probabilidades e in-

critas con la claridad típica de las obras de Santaló y se han difundido en todo el continente.

La lista de publicaciones de Santaló termina con un acápite sobre: artículos de divulgación, conferencias publicadas y trabajos sobre educación matemática. Son en total 46 títulos que pueden agruparse así: 25 artículos de divulgación y conferencias de carácter general, 8 artículos sobre historia de la ciencia y 13 publicaciones sobre educación matemática.

No nos detendremos, pese al interés que revisten muchos de ellos, en el análisis de los primeros, pero no podemos dejar de señalar una de las características de la personalidad de Santaló: sus dones de conferenciante. El número de conferencias que ha dado oralmente es muchas veces superior al de las publicadas ; el lector de estas últimas podrá apreciar el tratamiento profundo del tema, la claridad y lo agudo de algunas expresiones, pero perderá algo importante: la amenidad de la exposición. Por árido que pueda ser el tema, Santaló sabe provocar con suma frecuencia sonrisas, francas risas y hasta en algunos casos reprimidas carcajadas, pero todo ello sin afectar en lo más mínimo la seriedad de la exposición. Solamente un dominio profundo del tema y un muy sutil manejo de la ironía hacen posible este "instruir deleitando". Corolario: el anuncio de una conferencia de Santaló llena cualquier local hasta los topes.

La historia de la matemática ha sido también cultivada por Santaló; sobre ella ha publicado varios artículos de interés, pero su obra básica es la publicación del tomo I de la colección Evolución de las Ciencias en la República Argentina, editada por la Sociedad Científica Argentina; el volumen está consagrado a la evolución de la matemática desde 1923 hasta 1972. Santaló fue el redactor, coordinó la labor de los otros colaboradores y escribió la parte crucial sobre la evolución en Buenos Aires y La Plata desde 1942.

Esta obra no debería faltar en la biblioteca de los que en Argentina se interesan por la matemática. Santaló hace un análisis cuidadoso del cambio acaecido en la Matemática argentina. En medio siglo se pasó de un país que no tenía, en 1922, ninguna biblioteca con revistas matemáticas a un país "exportador" de matemáticos. Los juicios de Santaló son fundados e imparciales; no duda en hacer la "integral" del actuar de los matemáticos más destacados, poniendo de manifiesto las partes positivas y negativas. Él creó la expresión "generación del 61" para designar al grupo de jóvenes que se licenciaron alrededor de dicha fecha. Santaló dice que esa generación, "por lo numerosa y capaz era y sigue siendo la destinada a mantener un nivel de primera línea para la matemática argentina y poner una valla definitiva a todo retroceso; ellos habrán de saber, llegado el caso, proteger la matemática y defenderla de toda infiltración espuria". En el estudio de esta evolución de la matemática hay una sola omisión tan importante como inevitable; falta el análisis de la influencia de Santaló en dicha evolu-

ción.

Un último aspecto de la obra de Santaló es su participación en la renovación general de la enseñanza de la matemática, preferentemente al nivel secundario. Esta renovación empieza a tomar cuerpo en 1960 y desde ese inicio hasta ahora Santaló ha tomado parte muy activa en su desarrollo. Dos monografías y 13 trabajos publicados sobre el tema, muchas más conferencias no publicadas, su participación en congresos y simposios nacionales e internacionales, y en varios casos la organización de los mismos, le han llevado a ocupar una posición muy destacada en todo ese movimiento de ideas tanto en Europa como en América. Consecuencia natural de su interés y de su autoridad fué su elección, primero como Vicepresidente (1966-72) y luego como Presidente (1972-1979) del Comité Interamericano de Educación Matemática.

Puede parecer extraño que un matemático de la talla de Santaló se haya dedicado tanto durante cuatro lustros a una actividad que en cierto aspecto está al margen de su obra de investigador. Aparte de que Santaló tiene tiempo para todo, creemos conocer las razones que ha tenido para encarar ese esfuerzo. Él está convencido de que la educación matemática es uno de los puntos más importantes para un desarrollo eficaz de los países y considera que es entonces su deber dedicar parte de su tiempo a mejorar dicha educación.

Este bosquejo de la obra de Santaló quedaría incompleto si no habláse mos un poco de su carácter y de sus prendas morales. Santaló es ejemplo de una vida consagrada enteramente a la ciencia sin prisas y sin pausas, sin exageraciones ni claudicaciones.

Santaló ha recibido muchos honores los que, como es costumbre en las presentaciones, vamos a enumerar. Doctor honoris causa de las Universidades de Barcelona y del Nordeste, Académico Titular de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Buenos Aires, Académico Correspondiente de las Academias de Lima, Madrid, Córdoba y Barcelona; Primer Premio Nacional de Cultura, Premios: Sociedad Científica Argentina, Mibashan, Aguilar y Vaccaro, Profesor Emérito de la Universidad de Buenos Aires, son los principales. Todos vinieron a él por gravitación natural y sin que haya hecho, no digamos intrigas, sino ni siquiera empeñosas gestiones, para conseguirlos. En esto es también un ejemplo.

A Santaló nunca le ha interesado ocupar cargos de lustre ni tener posiciones de influencia, pero jamás rehuye las responsabilidades que se le ofrecen y cree que es su deber aceptarlas. Así fue su gestión en el CONICET como colaborador de Don Bernardo Houssay que lo tenía en el mayor aprecio. Aceptó en una sola ocasión la presidencia de la U.M.A., cuando, después de los sucesos de 1966, hizo falta alguien que la recompusiera. En Comisiones y Consejos Directivos su actuación tiene co

Otra de sus prendas es la moderación. De Santaló podríamos decir que es apasionadamente moderado. Muchas veces en esas reuniones de los científicos, en las que los ánimos se encrespan y se llega hasta el encono,deja hablar, toma la palabra al final y su intervención lleva las aguas salidas de madre a su cauce natural; no lo consigue siempre, no puede hacer milagros, y en ocasiones tampoco busca la transacción; es inflexible en lo que se refiere a los principios básicos y jamás transigió con las supercherías en el dominio científico o con las falsificaciones de los juicios de valor.

Señalaremos como característica final la disponibilidad. En su despacho, en su casa está siempre trabajando y siempre dispuesto a atender cualquier pedido, desde una consulta sobre matemática o un consejo sobre política científica hasta el informe a un alumno sobre una equivalencia de asignaturas. De esta disponibilidad se abusa poniéndolo en demasiadas comisiones, jurados, etc.

Es posible que nos hayamos dejado en el tintero otros méritos y virtudes, pero creemos que los expuestos justifican (para los que le conozcan poco, pues para los otros no es necesario) el homenaje que le rinde la Unión Matemática Argentina.

TRABAJOS DE INVESTIGACION PUBLICADOS

1. *Area engendrada por un segmento que se mueve conservándose normal a una línea y describiendo una superficie desarrollable.* Revista Matemática Hispano-Americana, vol. 9, 1934, 101-107.

2. *Unos problemas de combinatoria.* Matemática Elemental, vol. III, 1934, 21-22.

3. *Algunas propiedades de las curvas esféricas y una característica de la esfera.* Revista Mat. Hisp-Am., vol. X, 1935, 1-4.

4. *Superficies desarrollables que pasan por una línea.* Las Ciencias, vol. I, 1934.

5. *Una fórmula integral para las figuras convexas en el plano y en el espacio.* Rev. Mat. Hisp-Am., vol. 11, 1936, 209-216.

6. *Unos problemas referentes a probabilidades geométricas.* Rev. Mat. Hisp-Am., vol. 11, 1936, 87-97.

7. *Geometría Integral 4: Sobre la medida cinemática en el plano.* Hamburg Abhandlungen, vol. XI, 1936, 222-236.

8. *Integralgeometrie 5: Ueber das kinematische Mass im Raum.* Actualités Hermann, N° 357, Paris 1936.

9. *Geometría Integral 7: Nuevas aplicaciones del concepto de medida cinemática en el plano y en el espacio.* Revista de la Academia de Ciencias de Madrid, vol. 33, 1936, 3-50 (Tesis doctoral del autor).

10. *Curvas sobre una superficie que cumplen la condición* $dsf(k,t)ds=0$. Rev. Mat. Hisp-Am. vol. 12, 1937, 3-12.

11. *Geometría integral 15: Fórmula fundamental de la medida cinemática para cilindros y planos paralelos móviles.* Hamburg Abhandlungen, vol. 12, 1937, 38-41.

12. *Geometría integral 31: Sobre valores medios y probabilidades geométricas.* Hamburg Abhandlungen, vol. 13, 1940, 284-294.

13. *Géométrie intégrale 32: Quelques formules intégrales dans le plan et dans l'espace.* Hamburg Abhandlungen, vol. 13, 1940, 344-356.

14. *Valor medio del número de partes en que una figura convexa es dividida por n rectas arbitrarias.* Revista de la Unión Mat. Argentina, vol. 7, 1940-41.

15. *Generalización de un problema de probabilidades geométricas.* Revista de la Unión Mat. Arg., vol. 7, 1940-41.

16. *Un esquema de valores medios en la teoría de probabilidades geométricas.* Revista de Ciencias, Lima, vol. 42, 1940, 146-154.

17. *A theorem and an inequality referring to rectifiable curves.* American Journal of Mathematics, vol. 63, 1941, 635-644.

18. *Quelques propriétés des courbes gauches dans la géométrie differentielle affine.* Portugaliae Mathematica, vol. 3, 1942, 63-68.

19. *Sur quelques problèmes de probabilités géométriques.* Tôhoku Mathematical Journal, vol. 47, 1940, 159-171.

20. *Verallgemeinerung eines Satz von T. Kubota ueber Eilinien.* Tôhoku Math. Journal, vol. 48, 1941, 64-67.

21. *Algunas propiedades infinitesimales de las curvas planas,* Mathem.

Notae, vol. 1, 1941, 129-144.

22. *Geometría integral de figuras ilimitadas*. Publicaciones del Instituto de Matemáticas, Rosario, vol. 1, 1939, 5-58.

23. *Una demostración de la propiedad isoperimétrica del círculo*. Publicaciones del Inst. de Mat. Rosario, vol. 2, 1940, 37-46.

24. *Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas*, Publ. del Inst. de Mat. Rosario, vol. 2, 1940, 49-60.

25. *Curvas extremales de la torsión total y curvas D*, Publ. del Inst. de Mat. Rosario, vol. 3, 1941, 133-156.

26. *Complemento a la nota "Un teorema sobre conjuntos de paralelepípedos de aristas paralelas"*. Publ. Inst. Mat. Rosario, vol. 3, 1942, 203-210.

27. *Sobre ciertas variedades con carácter de desarrollables en el espacio euclidiano de 4 dimensiones*, Publ. Inst. Mat. Rosario, vol. 4, 1942, 3-44.

28. *Algunos valores medios y desigualdades referentes a curvas situadas sobre la superficie esférica*, Revista de la Unión Mat. Argentina, vol. 8, 1942.

29. *Sobre el concepto de curvatura de superficies*, Mathem. Notae, vol. 2, 1942, 165-184.

30. *Integral formulas in Crofton's style on the sphere and some inequalities referring to spherical curves*. Duke Math. Jour. vol. 9, 1942, 707-722.

31. *Algunas desigualdades entre los elementos de un triángulo*. Mathem. Notae, vol. 3, 1943, 65-73.

32. *Sobre la cónica osculatriz en un punto ordinario de una curva plana*, Revista de la Unión Mat. Arg. vol. 9, 1943.

33. *La desigualdad isoperimétrica sobre superficies de curvatura constante negativa*. Revista de Mat. y Física teórica de la Universidad de Tucumán, vol. 3, 1942.

34. *Una propiedad característica del círculo*. Math. Notae, vol. 3, 1943, 142-147.

35. *Sobre la distribución probable de corpúsculos en un cuerpo deducida de la distribución en sus secciones y problemas análogos*. Revista de la Unión Mat. Arg. vol. 9, 1943, 145-164.

36. *Integral geometry on surfaces of constant negative curvature*, Duke Math. Journal, vol. 10, 1943, 687-704.

37. *Propiedades de las figuras convexas sobre la esfera*. Math. Notae, vol. 4, 1944, 11-40.

38. *Acotaciones para la longitud de una curva o para el número de puntos necesarios para cubrir aproximadamente un dominio*. Anais da Academia Brasileira de Ciencias, vol. 16, 1944.

39. *Superficies cuyas curvas-D son geodésicas o trayectorias isogonales de las líneas de curvatura*. Publicaciones del Inst. de Mat. Rosario, vol. 5, 1943, 255-267.

40. *Note on convex spherical curves*. Bulletin of the American Math. Soc. vol. 50, 1944, 528-534.

41. *Area limitada por la curva engendrada por el extremo de un segmento cuyo otro extremo recorre una curva fija y aplicación a la obtención de algunos teoremas sobre óvalos*. Math. Notae, vol. 4, 1944, 213-226.

42. *Un teorema sobre representación conforme*, Mathem.Notae, vol. 5, 1945, 29-40.

43. *Valor medio del número de regiones en que un cuerpo del espacio es dividido por n planos arbitrarios*. Revista de la Unión Mat. Arg., vol. 10, 1945, 101-108.

44. *Sobre el círculo de radio máximo contenido en un recinto*, Revista de la U. Mat. Arg., vol. 10, 1945, 155-162.

45. *Note on convex curves on the hyperbolic plane*, Bulletin of the Am. Math. Soc. vol. 51, 1945, 405-412.

46. *Complemento a la nota "Sobre un problema diofántico"*. Math. Notae, vol. 5, 1945, 162-171.

47. *Algunas propiedades de las curvas alabeadas en la geometría diferencial proyectiva*. Actas de la Academia de Ciencias de Lima, vol. 8, 1945, 203-216.

48. *Sobre un complejo lineal ligado a una curva cerrada del espacio*, Math. Notae vol. 6, 1946, 45-56.

49. *Convex regions on the n-dimensional spherical surface*, Annals of Mathematics, vol. 47, 1946, 448-459.

50. *A geometrical characterization for the affine differential invariants of a space curve*, Bull. of the Am. Math. Soc. vol. 52, 1946, 625-632.

51. *Sobre la longitud de una curva del espacio como valor medio de las longitudes de sus proyecciones ortogonales*. Math. Notae, vol. 6, 1946, 158-166.

52. *Una fórmula integral referente a figuras convexas*, Revista de la Unión Mat. Arg., vol. 7.

53. *Unas fórmulas integrales referentes a cuerpos convexos*, Revista de la Unión Mat. Arg. vol. 12, 1946, 78-87.

54. *Sobre los cuerpos convexos de anchura constante en* E_n, Portugaliae Mathematica, vol. 5, 1946, 195-201.

55. *Estudios numerativos sobre las variedades de contacto de las superficies en un espacio de n dimensiones* (en colaboración con B. Levi y De María), Publ. del Inst. de Mat. Rosario, vol. 8, 1946, 3-72.

56. *On the first two moments of the measure of a random set*. Annals of Mathematical Statistics, vol. 18, 1947, 37-49.

57. *Sobre la medida del conjunto de figuras convexas congruentes contenidas en el interior de un rectángulo o de un triángulo*, Actas Acad. de Ciencias de Lima, vol. 10, 1947, 102-118.

58. *Affine invariants of certain pairs of curves and surfaces*, Duke Math. Journal, vol. 14, 1947, 559-574.

59. *Una propiedad característica de las cuádricas de revolución y de los cilindros cuya sección recta es una espiral logarítmica*, Math. Notae, vol. 7, 1947, 81-90.

60. *Sobre figuras planas hiperconvexas*, Summa Brasiliensis Mathematicae, vol. 1, fasc. 11, 1946, 221-239.

61. *Sobre la distribución de planos en el espacio*, Revista de la Unión Mat. Argentina, vol. 13, 1948, 120-124.

62. *Curvas D sobre conos*, Math. Notae, vol. 7, 1947, 179-190.

63. *Beweis eines Satzes von Bottema ueber Eilinien*, Tôhoku Math. Jour

nal, vol. 48, 1941, 221-224.

64. *Integral geometry on surfaces*, Duke Math. J. vol. 16, 1949, 361-375.

65. *Un invariante afín para las curvas convexas del plano*. Math. Notae, vol. 8, 1949, 103-111.

66. *Integral geometry on projective and affine spaces*. Annals of Mathematics, vol. 51, 1950, 739-755.

67. *Geometría integral en los espacios tridimensionales de curvatura constante*, Mathem. Notae, vol. 9, 1950, 1-28.

68. *On parallel hypersurfaces in the elliptic and hyperbolic n-dimensional space*. Proc. of the Am. Math. Soc. vol. 1, 1950, 325-330.

69. *Unas fórmulas integrales y una definición del área q-dimensional de un conjunto de puntos*, Revista de Mat. y Física teórica de la Univ. de Tucumán, vol. 7, 1950.

70. *Un invariante afín para los cuerpos convexos del espacio de n-dimensiones*, Portugaliae Mathem. vol. 8, 1949, 155-161.

71. *Unas desigualdades entre los elementos de un tetraedro en geometría no-euclidiana*. Math. Notae, vol. 9, 1950, 113-117.

72. *Sobre unas fórmulas integrales y valores medios referentes a figuras convexas móviles en el plano*. Publ. de la Fac. de Ciencias Exactas de la Univ. de Buenos Aires, vol. 1, N°2, 1950, 25-45.

73. *Observaciones sobre superficies y poliedrales inscritas*, Revista "Las Ciencias", Madrid, vol. 15, 1950.

74. *Generalización de una desigualdad de H. Hornich a espacios de curvatura constante*, Revista de la Unión Mat. Arg. vol. 15, 1951, 62-66.

75. *La probabilidad en las construcciones geométricas*, Anales de la Soc. Cient. Argentina, vol. 152, 1951, 203-229.

76. *On permanent vector varieties in n dimensions*, Portugaliae Math. vol. 10, 1951, 125-127.

77. *Integral Geometry in general spaces*, Proceedings of the International Congress of Mathematiciens, Cambridge 1950, vol. 1, 483-489.

78. *Integral geometry in Hermitian spaces*, American J. of Mathematics, vol. 74, 1952, 423-434.

79. *Dos propiedades de los círculos sobre la superficie esférica*, Math. Notae, vol. 11, 1952, 73-78.

80. *Geometría integral en espacios de curvatura constante*, Publicaciones de la Com. Nac. de la Energía Atómica, Serie Matemática, vol. 1, fasc. 1, 1952, 1-68.

81. *Problemas de geometría integral*, Symposium sobre "algunos problemas matemáticos que se están estudiando en América Latina", Punta del Este, Uruguay, 1951, 23-40.

82. *Algunos valores medios sobre la semiesfera*. Math. Notae, vol.12-1, 1952, 32-37.

83. *Measure of sets of geodesics in a riemannian space and applications to integral formulas in elliptic and hyperbolic spaces*, Summa Brasiliensis Mathematicae, vol. 3, N°1, 1952, 1-11.

84. *On the kinematic formula in spaces of constant curvature*, Proceedings of the International Congress of Mathematiciens, Amsterdam,

1954.

85. *Unas generalizaciones del teorema de los cuatro vértices*, Math. Notae, vol. 12, 1954, 69-78.

86. *Sobre unos tensores análogos al de curvatura en espacios de conexión afín no simétrica*, Revista de Mat. y Física teórica, Universidad de Tucumán, vol. 10, 1954, 19-26.

87. *Sobre el teorema de Holditch y análogos en geometría no euclidiana*, Math. Notae, vol. 14, 1954, 32-49.

88. *Cuestiones sobre geometría diferencial afín de superficies*, Coloquio sobre algunas cuestiones matemáticas que se están estudiando en América Latina, II, Villavicencio, Mendoza, 1954, 21-33.

89. *On geometry of numbers*, Japanese J. of Math. vol. 7, 1955, 208-213.

90. *Cuestiones de geometría diferencial e integral en espacios de curvatura constante*, Rendiconti del Seminario Mat. di Torino, vol. 14, 1955, 277-295.

91. *Sur la mesure des espaces linéaires qui coupent un corps convexe et problèmes qui s'y rattachent*, Coloquio sobre cuestiones de realidad, Liége, 1955, 177-190.

92. *Sobre la distribución de los tamaños de los corpúsculos contenidos en un cuerpo a partir de la distribución en sus secciones*, Trabajos de Estadística, Madrid, vol. 6, 1956, 181-196.

93. *Sobre las cuerdas de una curva convexa*, Revista de la Unión Mat. Argentina, vol. 17, 1955, 217-222.

94. *Curvas sobre una superficie extremales de una función de la curvatura y de la torsión*, Abhandlungen der Hamburgische Universität, vol. 20, 1956, 261-222.

95. *Sobre la unicidad de los operadores vectoriales*, Mathematicae Notae, vol. 14, 1956, 120-132.

96. *On the mean curvatures of a flattened convex body*, Revue de la Fac. des Sciences, Université Istanbul, vol.21, 1956, 189-194.

97. *Unas propiedades de la representación conforme local de una superficie sobre otra*, Rev. de la Unión Mat. Argentina, vol.18, 1957, 45-52.

98. *Geometría diferencial afín y cuerpos convexos*,Math. Notae, vol. 16, 1957, 20-42.

99. *Un nuevo invariante afín para las figuras convexas del plano y del espacio*, Math. Notae, vol. 16, 1958, 78-91.

100. *Sobre las ecuaciones del campo unificado de Einstein*, Revista de Mat. y Física Teórica Univ. Tucumán,vol. 12, 1959, 31-55.

101. *Unas desigualdades referentes a figuras convexas del plano y del espacio*, Actas de la reunión de la Unión Mat. Arg. en Bahía Blanca, 1957.

102. *Two applications of the integral geometry in affine and projective spaces*, Publ. Math. Debrecen, vol 7, 1960, 226-237.

103. *Sobre las teorías del campo unificado*, Rev. de la Unión Mat. Argentina, vol. 19, 1960, 195-206.

104. *Una fórmula de Steiner para superficies paralelas en geometría afín*, Rev. de Mat. y Fís. Teórica Univ. de Tucumán, 13, 1960, 194-208.

105. *Sobre los sistemas completos de desigualdades entre los elementos de una figura convexa plana*, Math. Notae, 17, 1961,82-104.

106. *On the measure of sets of parallel linear spaces in affine space*, Canadian J.of Math. 14, 1962, 313-319.

107. *Sobre la fórmula fundamental cinemática de la geometría integral en espacios de curvatura constante*, Math. Notae, 18,1963, 79-94.

108. *Sobre la fórmula de Gauss-Bonnet para poliedros en espacios de curvatura constante*, Rev.Unión Mat. Argentina, 20, 1960,79-91.

109. *Sobre unas propiedades características de la esfera*, Rev. Mat. y Fis. Teórica Univ. Tucumán, 14, 1962, 287-297.

110. *Una relación entre las curvaturas medias de cuerpos convexos paralelos en espacios de curvatura constante*, Rev. Unión Mat. Argentina, 21, 1963, 121-137.

111. *On Einstein's unified field theory*, Artículo del libro "Perspectives in Geometry and Relativity" Indiana University Press, 1966, 343-352.

112. *Integral Geometry of the proyective groups on the plane depending on more than 3 parameters*, Ann. Scient. Université de Jassy, 11, 1965, 307-335.

113. *Valores medios para polígonos formados por rectas al azar en el plano hiperbólico*, Rev. Mat. y Fis. Teor. Universidad de Tucumán, 16, 1966, 29-44.

114. *Sobre el recíproco de un teorema de Jacobi referente a curvas del espacio*, Rev. Mat. y Fis. Teor. Universidad de Tucumán,17, 1967, 83-89.

115. *Horocycles and convex sets in hyperbolic plane*, Archiv der Math. 28, 1967, 83-89.

116. *Grupos del plano respecto de los cuales los conjuntos de puntos y de rectas admiten una medida invariante*, Rev. Unión Mat. Argentina, 23, 1967, 119-148.

117. *Integral Geometry*. Artículo del libro "Studies in global Analysis and Geometry" editado por S.S. Chern, The Mathematical Association of America, Prentice Hall, 1967, 147-193.

118. *Horospheres and convex bodies in hyperbolic space*, Proc. Amer. Math. Society, 19, 1968, 390-395.

119. *Curvaturas absolutas totales de variedades contenidas en un espacio euclidiano*, Acta Científica Compostelana, 5, 1968, 149-158.

120. *On some geometric inequalities in the style of Fary*, American J. Math. 91, 1969, 25-41.

121. *Spaces with two affine connections*, Bull. Calcuta Math. Soc. 59, 1967, 3-8.

122. *Convexidad en el plano hiperbólico*, Rev. Mat. y Fis. Teórica Universidad Tucumán, 19, 1969, 174-183.

123. *Algunos problemas de geometría diferencial*, Notas Científicas serie A, Matemática, Lima, vol 7, 1969, 27-43.

124. *Mean values and curvatures*, Izv. Akad. Nauk. Armejan, SSR, Ser. Mat. vol. 5, 1970, 286-295.

125. *Probabilidades sobre cuerpos y cilindros convexos*, Rev. Unión Matemática Argentina, 25, 1970, 286-295.

126. *Averages for polygons formed by random lines in Euclidean and*

Hyperbolic planes (en colaboración con Y.Yañez), Journal of Applied Probability, 9, 1972, 140-157.

127. *Sobre algunas teorías asimétricas del campo unificado*, Rev. R. Academia de Ciencias de Madrid, 66, 1972, 395-425.

128. *Unified field theories of Einstein's type deduced from a variational principle: Conservation laws*, Tensor, 25, 1972, 383-389.

129. *Total curvatures of Compact Manifolds immersed in Euclidean space*, Symposium Mathematica,vol. 14, Instituto Nazionale di Alta Matematica, Roma (Academic Press, New York, 1974, 363-390).

130. *Curvas y Cuaterniones*, Rev. Unión Mat. Argentina, vol. 27, 1974, 41-52.

131. *Sobre las geodésicas del universo de Gödel-Synge*, volumen de homenaje al profesor Lora Tamayo, Real Academia de Ciencias Exactas, Fis. y Nat. de Madrid, 1975, 51-69.

132. *The kinematic formula in integral geometry for cylinders*,Annali di Matematica serie IV, vol. 103, 1975, 71-79.

133. *Plate and line segment processes* (en colaboración con N. Fava), J. Appl. Probability, 15, 1978, 494-581.

134. *Random processes of linear segments and graphs*, Lecture Notes on Biomathematics, n°23, Springer, Berlin, 1978, 279-294.

LIBROS PUBLICADOS

1. *Historia de la Aeronáutica*, Espasa-Calpe Argentina, Buenos Aires, 1946.

2. *Geometría Integral* (en colaboración con J.Rey Pastor), Espasa Calpe Argentina, Buenos Aires, 1951.

3. *Introduction to Integral Geometry*, Hermann, Paris, 1953.(Existe traducción al ruso).

4. *La Probabilidad y sus Aplicaciones*, Ed. Iberoamericana, Buenos Aires, 1955.

5. *Geometría Analítica* (en colaboración con Rey Pastor y Balanzat), Ed. Kapelusz, Buenos Aires, 1955.

6. *Vectores y Tensores*, Editorial Universitaria de Buenos Aires (EUDEBA), 1961.

7. *Geometrías no-euclidianas*, EUDEBA, 1961.

8. *Geometría Proyectiva*, EUDEBA, 1966.

9. *Espacios vectoriales y Geometría Analítica*, Monografías de la OEA, Washington, 1965.

10. *Probabilidad e Inferencia Estadística*, Monografías de la OEA, Washington, 1970.

11. *La Matemática en la Escuela Secundaria*, EUDEBA, 1966.

12. *Evolución de las Ciencias en la República Argentina, tomo I, La Matemática*. Volumen publicado por la Sociedad Científica Argentina en su Centenario, Buenos Aires, 1975 (en colaboración con varios autores), 243 páginas.

13. *Geometría Espinorial*, Instituto Argentino de Matemática, CONICET, Buenos Aires, 1976, 130 páginas.

14. *Integral Geometry and Geometric Probability*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Addison-Wesley, Reading, 1976, 404 páginas.

15. *La Educación Matemática, hoy*. Editorial Teide, Barcelona, España, 1975, 110 páginas.

ARTICULOS DE DIVULGACION Y CONFERENCIAS PUBLICADAS

1. *Algunos problemas geométricos que plantea la navegación aérea.* Boletín Mat., vol.13, 1940.

2. *Sobre las probabilidades continuas,* Ciencia(México), vol.1,1940.

3. *Posibilidades del vuelo interplanetario,* Rev. de Ingeniería y Arquitectura, Rosario, 1942.

4. *La Matemática y el Lenguaje,* conferencia publicada por la Asociación Cultural de Conferencias, Rosario, 1941.

5. *Nicolo Tartaglia y la resolución de la ecuación de tercer grado,* Math. Notae, vol. 1, 1941.

6. *Isaac Newton y el Binomio,* Math. Notae, vol. 2, 1942.

7. *La probabilidad y sus diversas aplicaciones,* Conferencia publicada por la Asociación Cultural de Conf. Rosario, 1942.

8. *Breve historia y estado actual de algunas quimeras y fantasías del hombre,* Revista Centro Estudiantes Fac. Ciencias Mat.,Rosario, 1943.

9. *Origen y desarrollo de la geometría integral,* Rev. de la Univ. Católica del Perú, vol.12, 1944.

10. *Origen y evolución de algunas teorías matemáticas,* Revista de Ingeniería, Montevideo, octubre 1945.

11. *Sobre el problema del radio de acción de los aviones,* Rev. del Centro de Estudiantes de la Fac. de Ciencias Mat. Rosario, 1945.

12. *Las probabilidades geométricas y la geometría integral,* Conferencia en la Fac. de Ing. de Montevideo, publicada en el Boletín de la misma Fac., vol. 3, 1945.

13. *Contribuciones de la aviación al progreso de las ciencias.* Conferencia publicada por la Asoc. Cultural de conf. de Rosario, 1945.

14. *Aplicaciones y problemas actuales de algunas teorías matemáticas,* Conferencia pronunciada en la Soc. Cient. Argent. y publicada en los Anales de la misma, vol. 150, 1950.

15. *Nuevos problemas planteados a la matemática por las otras ciencias,* Boletín del Centro de Cooperación Científica, UNESCO, Montevideo, 1952.

16. *El problema de la unificación de los campos: la última teoría de Einstein,* Mundo Atómico, año 4, 1953.

17. *La última teoría del campo único de Einstein,* Ciencia e Investigación, vol. 9, 1953.

18. *La probabilidad en geometrías no euclidianas,* Estocástica, vol.2, 1954.

19. *Aspectos modernos en el campo de la geometría,* Ciencia y Tecnología, vol. 4, N° 12, 1954.

20. *La obra de Einstein en el campo matemático,* Ciencia e Investigación, Julio 1955.

21. *Geometría analítica y geometría sintética,* Ciencia e Investigación,1961.

22. *La Matemática en la Argentina*, Revista de la Universidad de Buenos Aires, 1961.

23. *Geometrías finitas* (en colaboración con C.Carranza), Ciencia e Investigación, Buenos Aires, 1963.

24. *Perspectivas del desarrollo de la matemática en América Latina*, Rev. de la Unión Mat. Arg. 20, 1960, 23-32.

25. *La obra científica de Beppo Levi*, Math.Notae, 18, 1962, 23-28.

26. *La enseñanza de las ciencias en la escuela media: La Matemática*, Ciencia e Investigación, Buenos Aires, 1963, 245-252.

27. *La formación de profesores de matemáticas* (en colaboración con A. Valeiras), Educación Matemática en las Américas, I, Columbia University, Teachers College, 1962.

28. *La matemática moderna en la escuela primaria y en la secundaria*, La Educación, Washington, OEA, 1965, N° 37-38, 25-44.

29. *Problemas que encuentra la reforma de la matemática en América Latina referentes a los profesores y programas*. Educación Matemática en las Américas II, Informe de la Conferencia de Lima, 1966, 23-29.

30. *Preparación de profesores de matemática para la enseñanza secundaria* (en colaboración con R. Voelker), Educación Matemática en las Américas, II, 1966, 189-196.

31. *La Matemática y la Educación*, Publicación de la Oficina de Ciencias de la UNESCO para América Latina, Montevideo, 1972.

32. *La Matemática en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires en el período 1865-1930*, Primer Congreso Argentino de Historia de la Ciencia, Boletín de la Acad. Nac. Ciencias, Córdoba, 1970, 255-273.

33. *La Matemática y su Enseñanza en los niveles elemental, medio y superior*. Actas del IV Congreso Bolivariano de Matemáticas, Panamá, 1973. Publicado también en "Conceptos de Matemática",1973, N° 27.

34. *Las Aplicaciones de la Matemática en la Enseñanza Secundaria:papel de la Estadística y de la Probabilidad*. Volumen titulado "Las Aplicaciones en la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática en la Escuela Secundaria", Oficina de Ciencias de la UNESCO, Montevideo, 1974.

35. *Panorama de la Matemática en América Latina en 1974*. Boletín de la Oficina de Ciencias de la UNESCO, N° 8 , 1974.

36. *La teoría de los conjuntos y la enseñanza de la matemática*. Conceptos de Matemática, N° 34, 1975, 4-10.

37. *La enseñanza de la Matemática: de Platon a la Matemática Moderna*, Revista del Instituto de Investigaciones Educativas (IIE), año 3, N° 12, Buenos Aires, Septiembre 1977, 3-26.

38. *El debate actual sobre la Matemática Moderna*, Rev. del IIE, Buenos Aires, año 3, N° 14, Nov. 1977, 3-22.

39. *Geometría y Física*, "Conceptos de Matemática", N°43, 1977.

40. *Información y Cultura*, Rev. Nacional de Cultura, I, n°1 , Buenos Aires, 1978, 75-81.

Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 29, 1979.

ALGEBRAS DE FUNCIONES DIFERENCIABLES

Gustavo Corach y Angel R. Larotonda*

Dedicado al Doctor Luis A. Santaló

En la presente nota se establecen condiciones necesarias y suficientes para que un álgebra topológica A sea isomorfa al álgebra de funciones infinitamente diferenciables sobre una variedad diferenciable X de dimensión finita . Se establece de esta forma una correspondencia funtorial entre la categoría de variedades diferenciables y una categoría de álgebras topológicas, correspondencia que deviene una equivalencia categorística. En tal sentido hay puntos de contacto con [5]; la diferencia es que aquí no se manipula con haces sino más bien con secciones globales. Por lo que las caracterizaciones no resultan de traducción inmediata. En particular, algunas condiciones no tienen análogos en ambas presentaciones.

La equivalencia de categorías aquí estudiada tiene como fundamento una algebrización de la geometría diferencial (o, al menos, de parte de ella), de modo análogo al caso de variedades algebraicas afines y álgebras afines, o bien espacios compactos y C^*-álgebras conmutativas.

1. Salvo advertencia, todas las álgebras consideradas serán álgebras conmutativas sobre el cuerpo real $\mathbf{R}$, con elemento unidad indicado 1. Un morfismo $f: A \longrightarrow B$ de tales álgebras será una aplicación R-lineal que verifique

$$f(x.y) = f(x).f(y) \quad \text{para} \quad x,y \in A, \quad f(1) = 1 .$$

En general la mayor parte de las nociones que se utilizarán pueden pensarse en contextos más amplios, pero no insistiremos en ello. En particular nos restringiremos al caso de álgebras m-convexas [12]; indicaremos en tal caso con $X(A)$ al espacio de caracteres de A, es decir al conjunto de los morfismos continuos $h: A \longrightarrow \mathbf{R}$, provisto de la topología de la convergencia simple. Por lo general no requiere mayores esfuerzos adaptar la teoría existente (álgebras sobre el cuerpo $\mathbf{C}$) a nuestro caso, vía complexificación.

Como nos interesan las álgebras "esencialmente" reales, nos concentraremos en aquellas (que denominaremos *álgebras formalmente reales*) que verifican:

* El primero de los autores realizó el trabajo contando con el apoyo de una beca del CONICET.

$$\text{"}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \text{ no inversible} \Rightarrow \text{ningún } a_i \text{ inversible"}$$

Si A es un álgebra formalmente real es inmediato que $A \otimes_R \mathbf{C}$ es una $\mathbf{C}$-álgebra m-convexa con involución cuyos caracteres son todos hermitianos (observar que $1 + xx^*$ resulta siempre inversible); por otro lado A se identifica con la subálgebra de los elementos hermitianos de $A \otimes_R \mathbf{C}$ y los caracteres de A y de $A \otimes_R \mathbf{C}$ se corresponden. Combinando esto con [12] pág. 53 obtenemos:

PROPOSICION 1.1. *Sea* A *formalmente real; entonces todo ideal maximal cerrado es de codimensión* 1 *y por ende el núcleo de un carácter. Si además* A *es de Fréchet, todo morfismo* $h: A \longrightarrow \mathbf{R}$ *es continuo. En consecuencia, si* A *es un álgebra de Fréchet formalmente real y* $M \subset A$ *es un ideal, son equivalentes*

a) M *es maximal cerrado.*

b) M *es de codimensión* 1.

c) $M = h^{-1}(0)$ *para un (único) morfismo* $h: A \longrightarrow \mathbf{R}$.

Nos restringiremos en lo que sigue a álgebras de Fréchet formalmente reales y m-convexas; en tal caso X(A) es siempre hemicompacto ([12] pág. 22). De 1.1 resulta una inyección continua

$$\eta: X(A) \longrightarrow J(A) \qquad (1)$$

donde J(A) indica el espacio de los ideales maximales de A, provisto de la topología de Jacobson (esto es, como subconjunto del espectro primo de A, [2]). Recordemos que esta topología hace de J(A) un espacio T_1, casi-compacto pero en general no separado.
Se dirá que A es un *álgebra armónica* si J(A) es separado (luego compacto) (ver [15], [16]).

La *transformación de Gelfand*

$$g: A \longrightarrow C_c(X(A),\mathbf{R})$$

definida por $g(x) = \hat{x}$ (donde $\hat{x}(h) = h(x)$) resulta continua cuando se considera la topología de convergencia uniforme sobre compactos para $C(X(A),\mathbf{R})$ (éste es el significado del subíndice c); basta observar que por ser A de Fréchet coinciden los equicontinuos con los débilmente relativamente compactos de A'. La imagen $\hat{A} = g(A)$ es una subálgebra densa de $G(X(A),\mathbf{R})$ por el teorema de Stone-Weierstrass.

Es claro asimismo que la topología de X(A) es la topología definida por la familia $\hat{A}$, esto es la menos fina que hace continuas a todas las aplicaciones $\hat{a}$ (a en A). El núcleo de g es evidentemente

$\cap \{h^{-1}(0): h \in X(A)\} = \text{Rad}(A)$ que en nuestro caso coincide con el ra

males de A) (ver [12], Prop. 7.3). La identidad de ambos radicales tiene como consecuencia inmediata el hecho que la imagen de la aplicación (1) es densa en J(A).

El álgebra A se dice *regular* si la aplicación (1) es un homeomorfismo entre X(A) y su imagen (o lo que es igual, la topología de Jacobson inducida en X(A) coincide con la topología débil).

Adoptaremos aquí una definición de regularidad fuerte que es una modificación de la usada en [1]; para ello denotemos con sop(a), para $a \in A$, al soporte de la aplicación $\hat{a}: X(A) \longrightarrow \mathbf{R}$, esto es:

$$\text{sop } (a) = \overline{\{h \in X(A): h(a) \neq 0\}}$$

Si $A_o = \{a \in A: \text{sop}(a) \text{ es compacto}\}$, es inmediato que A_o es un ideal de A que puede coincidir con A (por ejemplo si X(A) es compacto).

Diremos que A es un *álgebra fuertemente regular* si se verifican:

a) Rad (A) = 0 (esto es g es inyectiva).

b) Para cada $h \in X(A)$ y cada $a \in h^{-1}(0)$ existe un elemento $b \in A_o$ tal que $h(b) = 1$ y $b^2(1-a) + \lambda^2$ es inversible para todo escalar $\lambda \neq 0$.

LEMA 1.2. *Sea* A *un álgebra de Fréchet* m-*convexa, formalmente real y fuertemente regular. Entonces*

a) A *es regular y armónica.*

b) X(A) *es localmente compacto y numerable al infinito.*

c) A_o *es un ideal denso de* A.

Demostración. a) Sea $U \subset X(A)$ un abierto para la topología débil; veamos que es abierto para la topología de Jacobson. Sea $h_o \in U$; por definición existen elementos $x_1, \ldots, x_r$ en A y $\varepsilon > 0$ tales que $V = \bigcap_{i=1}^{r} \{h: |h(x_i) - h_o(x_i)| < \varepsilon\} \subset U$. Pongamos $a = 1/\varepsilon^2 . \sum_{i=1}^{r} (x_i - h_o(x_i))^2$; claramente $h_o(a) = 0$ de modo que por definición existe un $b_o \in A_o$ tal que $b^2 . (1-a) + \lambda^2$ es inversible para todo $\lambda \neq 0$. Por consiguiente la aplicación $\hat{b}^2 . (1-\hat{a}) + \lambda^2$ no se anula sobre ningún $h \in X(A)$ (cualquiera sea $\lambda \neq 0$) de donde $\hat{b}^2 . (1-\hat{a}) \geqslant 0$. En consecuencia $\text{sop}(b) \subset \{h: h(a) \leqslant 1\}$. Si $x = b^2 . (1-a)$ tendremos entonces $h_o(x) = 1$ y $h(x) = 0$ si $h \notin U$ (ya que $h \notin U$ implica $h(a) \geqslant 1$ luego $\hat{x}(h) \leqslant 0$); ahora si $V(x) = \{M \in J(A): x \notin M\}$, V(x) es entorno de h_o para la topología de Jacobson y $V(x) \cap X(A) \subset U$. Esto da la regularidad y por consiguiente lo afirmado en a); en efecto de [4] se deduce que J(A) es isomorfo de manera natural a la compactificación de Stone-Čech $\beta X(A)$.

b) Como X(A) es unión numerable de compactos, basta ver que para cada $h_o \in X(A)$ existe un entorno compacto; por definición existe un $b \in A_o$

tal que $h_o(b) = 1$; luego $V = \{h: h(b) \neq 0\} \subset sop(b)$ da el entorno en cuestión.

c) Si $I \subset A$ es un ideal cerrado (propio) existe por lo menos un $h \in X(A)$ tal que $I \subset h^{-1}(0)$ (cf. [12] th. 5.9). Si A_o no fuera denso existiría $h \in X(A)$ tal que $\overline{A}_o \subset h^{-1}(0)$ contra la definición de regularidad fuerte.

OBSERVACIONES 1.3. i) Con las hipótesis de 1.2 vale un "teorema de Urysohn": si F_1 y F_2 son cerrados disjuntos de X(A) entonces existe un $a \in A$ tal que $\hat{a}|F_1 = 0$ y $\hat{a}|F_2 = 1$ (cf. [4] 1.5 ó [6]).

ii) Asimismo se deduce de 1.2 la existencia de particiones de la unidad por elementos de A, y en particular toda aplicación $f:X(A) \longrightarrow \mathbf{R}$ que coincide localmente con elementos de A es un elemento de A (cf. [6] 0.2.4.4).

La situación precedente es propicia para considerar localizaciones; sin desarrollar una teoría general (ver [6]) nos limitaremos a considerar el caso de un álgebra de Fréchet m-convexa, formalmente real y fuertemente regular A. Si $h \in X(A)$ indicaremos con $A_{M(h)}$ el álgebra local de A en $M(h) = h^{-1}(0)$ ([2] ch. II §3).

Por otro lado A_h denotará el álgebra de gérmenes de elementos de A en h, esto es: A_h es el cociente de A por el ideal $\{a: \hat{a}|U = 0$ para un entorno U de $h\}$. El morfismo $a \longrightarrow \hat{a}(h)$ se anula sobre ese ideal, definiendo así un morfismo $A_h \longrightarrow \mathbf{R}$ cuyo núcleo es el ideal m(h) de los gérmenes nulos en h. Como $a \longrightarrow \hat{a}$ es un isomorfismo de A sobre $\hat{A}$ (pues Rad(A) = 0), resulta de inmediato que el morfismo $a \longrightarrow \hat{a}$ induce un isomorfismo $A/P(h) \xrightarrow{\approx} A_h$, donde $P(h) = \{a \in A: h \notin sop(a)\}$ es un ideal incluído en M(h); por ese isomorfismo M(h)/P(h) se aplica sobre m(h).

PROPOSICION 1.4. *En las condiciones anteriores se verifica:*

a) A_h *es un álgebra local, naturalmente isomorfa a* $A_{M(h)}$.

b) P(h) *es el menor ideal cuya cápsula es* {h} (cf. [9] pág. 111). *En particular* $P(h) \subset M(h)^r$ *para todo* $r \geqslant 1$.

Demostración. a) Veamos primero que A_h es local; es suficiente ver que si $a \in A$ verifica $h(a) \neq 0$ entonces a es inversible módulo P(h). Sea V un entorno compacto de h tal que $\varphi(a) = \hat{a}(\varphi) \neq 0$ para todo $\varphi \in V$ y sea $I = \cap \{\varphi^{-1}(0): \varphi \in V\}$, ideal cerrado de A contenido en P(h). Si B = A/I entonces B es un álgebra de Fréchet m-convexa y la aplicación $A \xrightarrow{\pi} B$ induce un homeomorfismo $X(B) \longrightarrow \{\psi \in X(A): \psi(I) = 0\}$; ahora $\{\psi \in X(A): \psi(I) = 0\}$ es la clausura de V para la topología de

B es regular, es decir de espectro compacto (cf. [9], pág. 64). Poniendo $b = \pi(a) \in B$, es claro que b no se anula en ningún punto $V = X(B)$ y es un resultado clásico entonces que b es inversible en B (ver por ejemplo [17] ch. VI ó [12] 10.1) ya que $Rad(B) = 0$. Es claro entonces que a es inversible módulo I, por lo tanto es inversible módulo P(h). Habiendo probado que A_h es local con ideal maximal m(h) consideramos el morfismo $x \longrightarrow \overline{x}$ de A en A_h. Como $\overline{x}$ es inversible cada vez que $x \notin M(h)$, resulta que este morfismo se factoriza como la composición del morfismo canónico $A \longrightarrow A_{M(h)}$ con el morfismo $\theta: A_{M(h)} \longrightarrow A_h$ definido como sigue: si utilizamos la notación a/b para los elementos de $A_{M(h)}$ entonces ponemos $\theta(a/b) = \overline{a}.(\overline{b})^{-1}$. Es obvio entonces que θ es un epimorfismo. Por otro lado si $\theta(a/b) = \theta(c/d)$ resulta que $\hat{a}.\hat{d} - \hat{b}.\hat{c}$ se anula en un entorno U de h; si $V \subset U$ es un entorno compacto de h, por la regularidad existe un $r \in A$ con $\hat{r}|V = 1$ y $\hat{r}|X(A)-U = 0$. Por lo tanto, siendo $Rad(A) = 0$ resulta $r \in M(h)$ y $r.(a.d-b.c) = 0$ de donde $a/b = c/d$ por la definición de $A_{M(h)}$.

b) Es una simple adaptación de [15] 1.23 y se omite la demostración.

2. Se hace notar que si A es un álgebra de Fréchet m-convexa, formalmente real y semisimple (o sea $Rad(A) = 0$), A resulta un espacio vectorial ordenado por $a \geqslant 0 \iff h(a) \geqslant 0$ para todo $h \in X(A)$, o sea $a \geqslant 0 \iff \hat{a} \geqslant 0$.

El cono $A^+ = \{x \in A: x \geqslant 0\}$ resulta cerrado y el orden resulta compatible con la estructura de álgebra de A, es decir $x \in A^+$, $y \in A^+ \Rightarrow x.y \in A^+$.

3. Una cuestión esencial es la formulación de un "cálculo operacional" adecuado en A. De las diversas definiciones adoptaremos la siguiente: si $0 \leqslant k \leqslant \infty$ diremos que A *admite un cálculo operacional de clase* C^k si para cada $x \in A$ existe un morfismo continuo $T_x: C^k(R) \longrightarrow A$ tal que $T_x(t) = x$ (donde t denota la aplicación idéntica de R) donde la topología de $C^k(R)$ es la de convergencia uniforme sobre compactos de todas las derivadas hasta el orden k (ver [7] ch. XVII).

Como los polinomios son densos en $C^k(R)$, resulta claro que hay a lo sumo un morfismo con esa propiedad. Si A es un álgebra de Fréchet m-convexa semisimple la continuidad de T_x es automática por el teorema del gráfico cerrado.

LEMA 3.1. *Sea* A *un álgebra de Fréchet* m*-convexa semisimple. Son equivalentes:*

a) A *admite un cálculo operacional de clase* C^k.

b) *Para toda* $f \in C^k(R)$ *y para todo* $x \in A$, $f \circ \hat{x} \in \hat{A}$.

Si A *es además formalmente real y fuertemente regular,* a) *y* b) *equivalen a:*

c) *Para toda* $f \in C_o^k(R)$ (*funciones de clase* C^k *con soporte compacto*) *y para todo* $x \in A$, $f \circ \hat{x} \in \hat{A}$. Esto a su vez se prueba viendo que el conjunto de las $f \in C^k(R)$ para las cuales vale esta fórmula es una subálgebra cerrada que contiene a los polinomios en t.

Para ver que b) $\Rightarrow$ a) notemos que $x \longrightarrow \hat{x}$ es un isomorfismo de A sobre $\hat{A}$ (algebraico); poniendo $T_x(f)$ = único $y \in A$ tal que $f \circ \hat{x} = \hat{y}$, resulta de inmediato un morfismo $C^k(R) \longrightarrow A$ que define un cálculo operacional de clase C^k en A.
Finalmente veamos que con las hipótesis adicionales c) $\Rightarrow$ b); sea $f \in C^k(R)$ y sea $x \in A$. Si $h_o \in X(A)$ consideremos un entorno compacto V y enseguida una aplicación $g \in C_o^k(R)$ tal que $g|K = f|K$, siendo K el compacto $\hat{x}(V)$. Claramente $g \circ \hat{x} \in \hat{A}$ y además $g \circ \hat{x}|V = f \circ \hat{x}|V$; ahora basta usar 1.3 ii) para obtener $f \circ \hat{x} \in \hat{A}$.

Interesa particularmente el caso $k = \infty$. Diremos que un álgebra A es *diferenciablemente completa* si admite un cálculo operacional de clase C^∞; se da esta denominación en [6] donde además se da una caracterización de las mismas en términos de la topología de A. Adaptaremos a nuestra situación dicha teoría; conviene hacer notar que las álgebras de [6] son álgebras sobre C, de modo que se considerará aquí el caso de un álgebra formalmente real A; y su complexificada A_C. Es inmediato que A es diferenciablemente completa si y sólo si A_C lo es. Si A es m-convexa y completa está definido $e^{i\lambda x} \in A_C$ para todo $\lambda \in R$ y $x \in A$, mediante la serie usual. Recordemos por otro lado que un cálculo operacional analítico es siempre posible en cualquier álgebra m-convexa completa ([17], pág. 120), en particular para definir $e^{i\lambda x}$.

PROPOSICION 3.2. *Sea* A *un álgebra de Fréchet* m*-convexa, formalmente real y fuertemente regular. Son equivalentes:*

a) A *es diferenciablemente completa.*

b) *Para cada* $x \in A$ *la aplicación* $\lambda \longrightarrow e^{i\lambda x}$ *es de crecimiento lento* (*o sea: para cada seminorma continua de álgebra de* A, *o al menos para cada seminorma de un sistema fundamental, existen* $c \geqslant 0$ *y un entero* $m \geqslant 0$ *tales que* $p(e^{i\lambda x}) \leqslant c(1+|\lambda|^m)$ *para todo* $\lambda \in R$).

La equivalencia de a) y b) es entonces consecuencia de [6] III.21.1; de cualquier manera podemos dar aquí una demostración alternativa de b) $\Rightarrow$ a); por 3.1 c) basta ver que $f \circ \hat{x} \in \hat{A}_C$ cuando $x \in A$ y $f \in C_o^\infty$; si $\hat{f}$ indica la transformada de Fourier usual de f, la integral vectorial

$$\int_R e^{i\lambda x} \cdot \hat{f}(\lambda) d\lambda$$

una seminorma de A la aplicación $\lambda \longrightarrow \hat{f}(\lambda).p(e^{i\lambda x})$ es integrable por ser $\hat{f}$ de decrecimiento rápido. Es fácil ver entonces que $\hat{y}(h) = f(\hat{x}(h))$ para todo $h \in X(A)$, esto es $f \circ \hat{x} = \hat{y}$.

4. Consideremos ahora una variedad diferenciable X (salvo advertencia todas las variedades diferenciables serán de dimensión finita y numerables al infinito) y su álgebra $C^\infty(X)$ de aplicaciones $X \longrightarrow \mathbf{R}$ de clase C^∞. Esta álgebra es obviamente formalmente real y provista de la topología usual (ver [7], ch. XVII) resulta un álgebra de Fréchet m-convexa separable.

Si $f: X \longrightarrow Y$ es una aplicación C^∞ entre variedades, la regla $a \longrightarrow f \circ a$ define un morfismo $f^*: C^\infty(Y) \longrightarrow C^\infty(X)$ y es entonces inmediato que las reglas $X \longrightarrow C^\infty(X)$, $f \longrightarrow f^*$ definen un funtor contravariante de la categoría de variedades diferenciables en la categoría de álgebras m-convexas. Nuestro objeto es caracterizar la imagen de este funtor, para lo cual haremos algunas observaciones previas. Ante todo notemos que cada $x \in X$ define un carácter $e_X(x) : C^\infty(X) \longrightarrow R$ por $e_X(x)(f) = f(x)$ ("evaluación en x").

PROPOSICION 4.1. *Sea* X *una variedad diferenciable. Entonces*

a) *La aplicación natural* $e_X: X \longrightarrow X(C^\infty(X))$ *es un homeomorfismo.*

b) *El álgebra* $C^\infty(X)$ *es fuertemente regular.*

Demostración. Como $C^\infty(X)$ es una subálgebra de $C(X)$ que distingue puntos la aplicación e_X es inyectiva; su continuidad es asimismo inmediata. Veamos que es biyectiva (comparar con [1]). Sea $\varphi_o: C(X) \longrightarrow R$ un carácter, se trata de probar que existe un x_o tal que $\varphi_o(f) = f(x_o)$ para toda $f \in C^\infty(X)$. Si no existe un tal x_o, para cada $x \in X$ existe $f_x \in C^\infty(X)$ que verifica $f_x(x) \neq 0$ y $\varphi_o(f_x) = 0$.

Para cada x consideramos un entorno relativamente compacto U_X tal que $0 \notin f_X(U_X)$; como X es numerable al infinito existe un subcubrimiento numerable U_{x_i} $(i \geqslant 1)$ y una partición C^∞ de la unidad g_i $(i \geqslant 1)$ subordinada a dicho cubrimiento. Pongamos $f = \sum_{i \geq 1} g_i . f_{x_i}^2$; ciertamente $f \in C^\infty(X)$ y $f(x) > 0$ para todo $x \in X$, en particular f es inversible. Pero esto es absurdo pues f pertenece al ideal maximal (cerrado) $\varphi_o^{-1}(0)$: en efecto si $u_n = \sum_{i=1}^{n} g_i . f_{x_i}^2$ tendremos $u_n \longrightarrow f$ pues para cada $x \in X$ hay un entorno V de x tal que $u_n|V = f|V$ para todo $n \geqslant n_o$; por lo tanto $\varphi_o(f) = \lim_{n\to\infty} \varphi_o(u_n) = 0$. Finalmente e_X es un homeomorfismo: si $x_o \in X$ y U es entorno de x_o existe $f \in C^\infty(X)$ con soporte compacto incluído en U y $f(x_o) = 1$. Claramente $V = \{\varphi \in X(C^\infty(X)): \varphi(f) \neq 0\}$ es entorno de $e_X(x_o)$ y $V \subset e_X(U)$.

Con las modificaciones obvias todo esto es válido para $C^k(X)$ con $0 \leqslant k \leqslant \infty$; además si operamos sobre cada componente conexa lo afirmado

sólo requiere que X sea paracompacta.

b) Es evidente que $C^\infty(X)$ es semisimple; por otro lado si $x_o \in X$ y $f(x_o) = 0$ para una $f \in C^\infty(X)$, basta considerar $g \in C^\infty(X)$ tal que $g(x_o) = 1$ y sop(g) es un compacto contenido en $\{x \in X: f(x) < 1\}$. Entonces $g^2.(1-f) \geqslant 0$, y de aquí es claro que $C^\infty(X)$ es fuertemente regular.

El siguiente resultado es bien conocido (cf. [16], §5); su demostración sólo se incluye a los efectos de hacer completa la exposición.

PROPOSICION 4.2. *Sean* X,Y *variedades diferenciables y sea* $f: X \longrightarrow Y$ *una aplicación continua. Entonces son equivalentes:*

a) f *es de clase* C^∞.

b) *Para toda* $g \in C^\infty(Y)$, $g \circ f \in C^\infty(X)$.

Demostración. a) $\Rightarrow$ b) es evidente; suponiendo que vale b), sea $x \in X$ y sea V un entorno de f(x), $v: V \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un difeomorfismo. Sea U un entorno de x tal que $f(U) \subset V$, con un difeomorfismo $u: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Por hipótesis $g \circ f: X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es de clase C^∞ luego $v \circ f \circ u^{-1}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ también lo es, pero esto significa que f es de clase C^∞.

COROLARIO 4.3. *Sean* X,Y *variedades diferenciables.*

a) *Si* $\alpha: C^\infty(Y) \longrightarrow C^\infty(X)$ *es un morfismo de álgebras, existe una única aplicación* $f: X \longrightarrow Y$ *de clase* C^∞ *tal que* $f^* = \alpha$.

b) X *e* Y *son difeomorfas si y sólo si* $C^\infty(X)$ *y* $C^\infty(Y)$ *son álgebras isomorfas.*

Demostración. a) La unicidad es evidente; por otra parte α induce una aplicación continua $\alpha': X(C^\infty(X)) \longrightarrow X(C^\infty(Y))$ y basta poner $f = e_Y^{-1} \circ \alpha' \circ e_X$ usando 4.1 y 4.2.

b) Es consecuencia inmediata de a).

Los resultados anteriores muestran que, mediante el funtor $X \longrightarrow C^\infty(X)$, la categoría de variedades diferenciables es equivalente a una cierta subcategoría plena de la categoría de las álgebras de Fréchet m-convexas formalmente reales. Indicando con A esta subcategoría de las C^∞-álgebras, daremos primero una serie de condiciones que deben cumplir los objetos de A. Se verá luego que esas condiciones son asimismo suficientes para que un álgebra de Fréchet m-convexa formalmente real sea del tipo $C^\infty(X)$ para una variedad diferenciable X.

4.4. a) *Toda* C^∞*-álgebra es fuertemente regular:* es evidente por 4.1. ii).

4.4. b) *Toda* C^∞*-álgebra es diferenciablemente completa* (cf. [6]):

4.4. c) *Si* A *es una* C^∞*-álgebra, el* A*-módulo* Der(A) *de las derivaciones de* A *es proyectivo y finitamente generado* (recordamos que si M es un A-módulo una derivación D: A $\longrightarrow$ M es una aplicación R - lineal que verifica $D(a_1.a_2) = a_1.D(a_2) + a_2.D(a_1)$ para todo par de elementos $a_1, a_2 \in A$; ver [10]).

Si A es un álgebra de Fréchet m-convexa regular semisimple toda derivación D: A $\longrightarrow$ A es automáticamente continua (cf. [13]). Aquella afirmación es una consecuencia inmediata de la bien conocida identificación entre derivaciones de $C^\infty(X)$ y campos vectoriales de clase C^∞ sobre X (o sea secciones de clase C^∞ del fibrado tangente T(X)). (cf. [14]).

Por supuesto el A-módulo dual $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Der}(A), A)$ también es proyectivo y finitamente generado, y se identifica con el módulo de secciones C^∞ del fibrado dual de T(X), que se denota $\Gamma(T(X)^*)$ ("formas diferenciales de grado uno").

Si consideramos el morfismo de álgebras de Fréchet $A \hat{\otimes} A \xrightarrow{\psi} A$ inducido por la multiplicación $(x,y) \mapsto x.y$ (aquí el producto tensorial indica el producto tensorial proyectivo [8]) y si Δ es el ideal núcleo de ψ, se sabe que Der(A) es el A-módulo dual de $\Delta / \overline{\Delta^2}$ (cf. [6]); si ponemos $\Omega(A) = \Delta / \overline{\Delta^2}$ esto significa que $\mathrm{Der}(A) = \mathrm{CHom}_A(\Omega(A), A)$, donde CHom_A indica los homomorfismos A-lineales continuos.

El A-módulo de Fréchet $\Omega(A)$ es el denominado módulo de diferenciales de A, con significado análogo al módulo de diferenciales de Kahler en el caso de la geometría algebraica.

Sin embargo, de lo anterior no se deduce mucho sobre el módulo $\Omega(A)$; el resultado siguiente es conocido pero se adjunta una demostración para no dejar lagunas en la exposición.

LEMA 4.4. d). *Si* A *es una* C^∞*-álgebra, el* A*-módulo* $\Omega(A)$ *es proyectivo finitamente generado.*

Demostración. Debemos considerar el caso $A = C^\infty(X)$.

i) X = U abierto de $\mathbf{R}^m$. Se sabe que en este caso $A \hat{\otimes} A$ se identifica con $C^\infty(U \times U)$ y que Δ se identifica con el ideal de las aplicaciones nulas sobre la diagonal. De la fórmula de Taylor se deduce que Δ es generado por los $x_i - y_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ y de aquí sigue inmediatamente que los elementos dx_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ (clase módulo Δ^2 de los $x_i - y_i$) son una base de $\Omega(A)$; éste resulta así libre de dimensión m.

ii) Caso general. Por el teorema de inmersión de Whitney (cf. [7], ch. XVI) podemos suponer que X es una subvariedad cerrada de $\mathbf{R}^m$ para m suficientemente grande; sea U un entorno tubular de X y r: U $\longrightarrow$ X de clase C^∞ una retracción (loc. cit.). La inclusión induce un epimorfismo i^*: $B = C^\infty(U) \longrightarrow A = C^\infty(X)$ con inversa a derecha r^*: A $\longrightarrow$ B dada por $r^*(f) = f \circ r$. De la teoría general hay un epimorfismo

$u: A \otimes_B \Omega(B) \longrightarrow \Omega(A)$ ([6], §III) que verifica $u(1 \otimes d_B b) = d_A(i^*(b))$ para cada $b \in B$. Notemos que u es A-lineal y continuo y que de lo anterior resulta que $A \otimes_B \Omega(B)$ es un A-módulo libre (por ser $\Omega(B) \approx B^m$). Bastará entonces definir una inversa a derecha de u; esto se hace poniendo primero $\lambda: A \longrightarrow A \otimes_B \Omega(B)$, $\lambda(a) = 1 \otimes d_B r^*(a)$. Así λ es una derivación continua, luego por definición hay una aplicación A-lineal continua $v: \Omega(A) \longrightarrow A \otimes_B \Omega(B)$ que verifica $\lambda = v \circ d_A$.
De esto sigue inmediatamente que $u \circ v(d_A x) = d_A x$ para todo $x \in A$, luego $u \circ v = id$, ya que los elementos $d_A(x)$ $(x \in A)$ generan un submódulo denso de $\Omega(A)$ (cf. [6] §III).

Mencionemos que por ser Der(A) el dual de $\Omega(A)$, usando 4.4.d) es fácil probar que $\Omega(A)$ es canónicamente isomorfo al módulo de diferenciales de grado 1.

4.4.e) *Toda* C^∞*-álgebra* A *es topológicamente finitamente generada*; esto significa que existe una familia finita $u_1,\ldots,u_n$ de elementos de A tal que la subálgebra de A generada por dichos elementos (la subálgebra de "polinomios" en $u_1,\ldots,u_n$) es densa en A. La demostración de esto es inmediata cuando $A = C^\infty(R^m)$: los u_i son las funciones coordenadas $(t_1,\ldots,t_m) \longrightarrow t_i$. En el caso general basta observar que por el teorema de inmersión de Whitney $C^\infty(X)$ es un cociente de $C^\infty(R^m)$ para un m conveniente.

4.4.f) Si A es una C^∞-álgebra y $h \in X(A)$ el ideal maximal M(h) tiene propiedades muy interesantes que reflejan la estructura "puntual" de la variedad. Así por ejemplo no es difícil ver que M(h) es finitamente generado (o sea, todo ideal maximal cerrado de $C^\infty(X)$ es de tipo finito). Supongamos primero $X = R^m$, M(h) determinado por el punto $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$.

$$f(\xi) = f(\lambda) + \sum_{i=1}^{m} \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \xi_i}(t\xi + (1-t)\lambda)dt\right)(\xi_i - \lambda_i) \qquad (3)$$

muestra que los elementos $\xi_i - \lambda_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ generan M(h). El caso general se reduce a éste, ya que podemos suponer que X es una subvariedad cerrada de R^m; si $f \in M(h)$ hay una extensión $\overline{f} \in C^\infty(R^m)$ de f y se aplica lo anterior a $\overline{f}$, en cuyo caso los elementos $\xi_i|X - \lambda_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ generan M(h). Debe notarse que el argumento no es aplicable al caso $C^r(X)$ con $r < \infty$.

Hay otra consecuencia importante de la fórmula (3) que también utilizaremos. Si $M(h)^2 = \{\sum a_i.b_i;\ a_i, b_i \in M(h)\}$ entonces $M(h)^2$ es un ideal contenido en M(h), a saber el ideal de los $f \in C^\infty(X)$ que se anulan en h junto con su diferencial. La demostración de esto es inmediata a partir de (3), ya que cuando X es un entorno abierto de $\lambda \in R^m$ las condiciones $df(\lambda) = 0$ y $\partial f/\partial \xi_i(\lambda) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ son equivalentes. Resulta claro entonces que $M(h)^2$ es un ideal cerrado. Sin embar-

En efecto:

LEMA 4.4. g). *Sea* A *un álgebra de Fréchet* m*-convexa real y sea* $M \subset A$ *un ideal maximal cerrado. Si* M *es finitamente generado entonces* M^2 *es un ideal cerrado.*

Demostración. Si $x_1,\ldots,x_p$ generan M, las clases de $x_1,\ldots,x_p$ generan M/M^2 como R-espacio vectorial, luego $\dim_R(M/M^2) < \infty$.

Consideremos la aplicación A-lineal $u: A \oplus \ldots \oplus A$ (p factores) $\longrightarrow M$ definida por $u(a_1,\ldots,a_p) = \sum_{i=1}^{p} a_i.x_i$; como u es continua y suryectiva, por el teorema del gráfico cerrado se deduce que u es abierta, luego M es un cociente de $A \oplus \ldots \oplus A$ y bastará ver que $u^{-1}(M^2)$ es cerrado en $A \oplus \ldots \oplus A$; pero $u^{-1}(M^2) \supset M \oplus \ldots \oplus M$, que es cerrado de codimensión finita en $A \oplus \ldots \oplus A$, de donde resulta la tesis. (Evidentemente con una demostración análoga resulta M^r cerrado para todo $r \geqslant 1$.)

4.4. h). *Si* A *es una* C^∞*-álgebra, para cada* $h \in X(A)$ *se tiene* (cf. §2)

$$A^+ \cap (M(h)) \subset M(h)^2. \qquad (4)$$

En efecto, esto no es otra cosa que el criterio elemental de determinación de extremos de una función ("condición necesaria") pues $f \in C^\infty(X)$ se anula en $x \in X$ y $f \geqslant 0$, entonces f tiene un mínimo en x y por consiguiente $df(x) = 0$, y lo afirmado resulta de la discusión precedente.

De cualquier manera es claro que estas condiciones "puntuales" no reflejan completamente la estructura de una variedad diferenciable. Una condición global satisfactoria sobre el álgebra $A = C^\infty(X)$ es:

4.4. i). *La diagonal* Δ (*núcleo del morfismo canónico* $A \hat{\otimes}_R A \longrightarrow A$) *es un ideal de tipo finito de* $A \hat{\otimes}_R A$. En efecto, cuando $X = \mathbf{R}^n$ es claro que $A \hat{\otimes} A$ se identifica con $C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ (con "variables $x_1,\ldots,x_n$, $y_1,\ldots,y_n$") y que Δ consiste de las aplicaciones $f: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ de clase C^∞ y nulas sobre la "diagonal geométrica" esto es $f(x,x) = 0$ para todo $x \in \mathbf{R}^n$. Con un argumento igual al de 4.4.f) se ve que una tal aplicación es de la forma

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{m} g_i(x,y).(x_i - y_i)$$

con $g_i \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Por consiguiente los $x_i - y_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ generan Δ. En el caso de una variedad diferenciable X se utiliza este hecho junto con una inmersión en algún $\mathbf{R}^n$.

Del mismo modo resulta que Δ^2 (o más generalmente Δ^r) es un ideal cerrado que consiste de las aplicaciones nulas junto con sus derivadas primeras (resp. las derivadas de orden $< r$) sobre la diagonal. Se verá en lo que sigue que esta propiedad es más fuerte que las indicadas en 4.4; ver 5.4 y 4.4.g).

Resumiendo:

PROPOSICION 4.5. *Sea* A *una* C^∞*-álgebra. Entonces:*

i) A *es un álgebra de Fréchet* m*-convexa formalmente real.*

ii) A *es fuertemente regular.*

iii) *El* A*-módulo* $\Omega(A)$ *es proyectivo.*

iv) *La diagonal* Δ *es un ideal de* $A \hat{\otimes} A$ *de tipo finito y* Δ^2 *es cerrado.*

v) A *es topológicamente finitamente generada.*

vi) *Para cada* $h \in X(A)$ *se verifica* $A^+ \cap M(h) \subset M(h)^2$.

vii) A *es diferenciablemente completa.*

Veremos que es posible probar que las condiciones enunciadas en 4.5 constituyen de hecho una caracterización de las C^∞-álgebras. El siguiente parágrafo provee algunos lemas técnicos destinados a la demostración de esta afirmación.

5. LEMAS TECNICOS. Si A es una **R**-álgebra y $S \subset A$ es un subconjunto no vacío indicaremos con $[S]$ (resp. $[S]_o$) a la subálgebra (resp. subálgebra "sin identidad") de A engendrada por S. Claramente $[S]$ (resp. $[S]_o$) consiste de los "polinomios" $P(s_1,\ldots,s_r)$ $(s_i \in S)$ (resp. "polinomios sin término constante").

LEMA 5.1. *Sea* A *un álgebra localmente convexa sobre* R, $a_i \in A$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ *tales que* $[a_1,\ldots,a_r]$ *es densa en* A. *Entonces para todo* $h \in X(A)$ *la subálgebra sin identidad* $[a_1 - h(a_1),\ldots,a_r - h(a_r)]_o$ *es densa en* M(h).

Demostración. Evidente; basta observar que si $P \in R[t_1,\ldots,t_r]$ entonces $P(a_1,\ldots,a_r) = Q(a_1-h(a_1),\ldots,a_r-h(a_r)) + \alpha$ donde Q es un polinomio sin término constante y $\alpha \in R$.

LEMA 5.2. *Sea* A *un álgebra que verifica las condiciones* i) *e* ii) *de* 4.5. *Supongamos que una sucesión* $(h_j)_{j\geq 1}$ *en* X(A) *converge a un cierto* $h \in X(A)$, $h \neq h_j$ *para todo* $j \geqslant 1$. *Existe entonces un* $x \in M(h)$ *tal que* $h_j(x) > 0$ *para todo* $j \geqslant 1$.

Demostración. Para cada $j \geqslant 1$ existe un $x_j \in M(h)$ con $h_j(x_j) = 1$ (cf. 1.3 i)). Consideremos una sucesión de seminormas p_j $(j \geqslant 1)$ que define la topología de A, pudiendo suponerse que $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots$ y definimos $y_j = (1 + p_j(x_j^2))^{-1}.x_j$, $j \geqslant 1$. Ciertamente $y_j \in M(h)$ y $h_j(y_j) > 0$ para todo $j \geqslant 1$; además la sucesión $(y_j)_{j\geq 1}$ es acotada en A ya que para cada $m \geqslant 1$ es $p_m(y_j) < 1$ si $m < j$. Poniendo $x = \sum 2^{-j}.y_j$ (cf. [12] 7.7 b)) se obtiene la tesis.

LEMA 5.3. *Sea* A *un álgebra que verifica las condiciones* i), ii) *y* iv) *de* 4.5, *sea* $x \in A$ *tal que* $\hat{x}: X(A) \longrightarrow \mathbf{R}$ *tiene un mínimo local en* $h_o \in X(A)$ (*esto es* $h_o(x) \leqslant h(x)$ *para todo* h *en un entorno* U *de* h_o). *Entonces* $x-h_o(x) \in M(h_o)^2$.

Demostración. Sea $a \in A_o$ tal que $\hat{a}|V = 1$ y $sop(a) \subset U$, donde V es un entorno de h_o tal que $\overline{V} \subset U$; como $a^2.(x-h_o(x)) \in A^+ \cap M(h_o)$ resulta $a^2.(x-h_o(x)) \in M(h_o)^2$. Luego por 1.4. resulta que

$$x-h_o(x) = a^2.(x-h_o(x)) + (1-a^2).(x-h_o(x)) \in M(h_o)^2 + P(h_o) \subset M(h_o)$$

como queríamos.

LEMA 5.4. *Sea* A *un álgebra localmente convexa sobre* R *que verifica la condición* iv) *de* 4.5. *Entonces para todo* $h \in X(A)$ *el ideal maximal* M(h) *es de tipo finito.*

Demostración. Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Delta & \longrightarrow & A \hat{\otimes} A & \xrightarrow{\psi} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow p & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & M(h) & \longrightarrow & A & \xrightarrow[h]{} & \mathbf{R} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donde p es inducido por el morfismo $A \otimes_{\mathbf{R}} A \longrightarrow A$, deducido de $x \otimes y \longrightarrow h(x)\, y$; esto muestra que $p(\Delta) \subset M(h)$. Ahora si $z_1, \ldots, z_r$ generan Δ (como ideal en $A \hat{\otimes} A$) y $x \in M(h)$, será $1 \otimes x - x \otimes 1 \in \Delta$, de donde $1 \otimes x - x \otimes 1 = \sum_{i=1}^{r} c_i.z_i$ para ciertos $c_i \in A \hat{\otimes} A$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Entonces $x = p(1 \otimes x - x \otimes 1) = \sum_{i=1}^{r} p(c_i).p(z_i)$ muestra que los $u_i = p(z_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ generan el ideal M(h) de A.

De manera general, si A es un álgebra de Fréchet m-convexa un A-módulo E se dirá un A-*módulo de Fréchet* si E está provisto de una topología que lo hace un espacio de Fréchet y la aplicación bilineal natural $A \times E \longrightarrow E$ resulta continua. Del mismo modo una A-*álgebra de Fréchet* será una A-álgebra B provista de una topología que la hace un álgebra de Fréchet m-convexa de forma tal que las aplicaciones naturales $A \times B \longrightarrow B$ resulten continuas. Claramente el morfismo $a \longrightarrow a.1$ de A en B es continuo; todo B-módulo de Fréchet resulta un A-módulo de Fréchet, etc.

Si A es un álgebra de Fréchet es claro que A^n $(n \geqslant 1)$ es un A-módulo de Fréchet; si E es un A-módulo de Fréchet libre de tipo finito entonces E es isomorfo (algebraica y topológicamente) a A^n $(n = \dim_A(E))$ ya que la biyección algebraica $A^n \longrightarrow E$ definida por cualquier base de E es continua, y por el teorema del gráfico cerrado es homeomorfismo. Lo mismo ocurre si E es proyectivo de tipo finito; hay una única topología en E para la cual E es un A-módulo de Fréchet; se define como cociente de cualquier epimorfismo $A^m \longrightarrow E$ y un argumento elemental muestra que esto es independiente de la "presentación" de E como

cociente de un A-módulo libre. Nótese que un tal A-módulo E puede considerarse como núcleo de un proyector e: $A^m \longrightarrow A^m$ (automáticamente continuo) y por ende como un sumando directo (cerrado) de un A^m.

LEMA 5.5. *Sea* A *un álgebra de Fréchet* m*-convexa, sea* E *un* A*-módulo de Fréchet de tipo finito.*

a) *Si* F *es un* A*-módulo de Fréchet toda aplicación* A*-lineal* u: E $\longrightarrow$ F *es continua.*

b) *Si* E *es proyectivo, para todo ideal cerrado* I $\subset$ A, I.E *es cerrado en* E.

c) *Si* A *es a inversa continua (o* Q*-álgebra* [12]) E *no tiene submódulos propios densos.*

d) *Si* E *es proyectivo,* E *no tiene submódulos propios finitamente generados densos.*

Demostración. a) Sea f: $A^m \longrightarrow$ E un epimorfismo; f es automáticamente continuo, luego por el teorema del gráfico cerrado f es abierta así que E es un cociente de A^m.

b) P es sumando directo de A^m con A^m/P proyectivo, luego playo; entonces I.P = $I^m \cap P$ (cf. [2] Ch. I, §2, n°6).

c) Supongamos primero que E = A^m; la continuidad del determinante y el hecho que el conjunto de elementos inversibles de A es abierto implican que $\{(v_1,\ldots,v_m) \in A^m \times\ldots\times A^m$: $(v_1,\ldots,v_m)$ es una base de $A^m\}$ es abierto en $A^m \times\ldots\times A^m$. Por consiguiente todo submódulo denso debe contener una base de A^m, por lo tanto coincide con A^m. En el caso general hay un epimorfismo abierto f: $A^m \longrightarrow$ E; si M $\subset$ E es submódulo denso resulta $f^{-1}(M)$ denso en A^m (ya que no hay hiperplanos cerrados que lo contengan), luego $f^{-1}(M) = A^m$ por lo anterior y entonces M = E.

d) Si E = A esto es un hecho conocido ([0]); supongamos por inducción que la tesis es cierta para E = A^r. (r < n) y sea M un submódulo denso de tipo finito de A^n. Si $\varphi(a_1,\ldots,a_n) = a_n$ claramente $\varphi(M)$ es denso de tipo finito en A, luego $\varphi(M)$ = A, así que hay un $x_o \in M$ con $\varphi(x_o) = 1$. Sea f: $A^n \longrightarrow A^n$, $f(x) = x - \varphi(x).x_o$; como $f(x) = x \Leftrightarrow x \in A^{n-1}$ (identificado este último con un submódulo de A^n generado por $e_1,\ldots,e_{n-1}$) resulta $f(M) = M \cap A^{n-1}$ submódulo denso de tipo finito de A^{n-1} y por ende $f(M) = A^{n-1}$, así que $A^{n-1} \subset M$. Claramente $\{e_1,\ldots,e_{n-1},x_o\}$ es una base de A^n, luego M = A^n.

En el caso general hay una sucesión exacta $0 \longrightarrow N \longrightarrow A^n \longrightarrow E \longrightarrow 0$ que se escinde vía u: E $\longrightarrow A^n$ (luego N es de tipo finito); si M $\subset$ E es un submódulo denso generado por $v_1,\ldots,v_r$, el submódulo de A^n generado por N y $u(v_1),\ldots,u(v_r)$ es denso de tipo finito, luego coincide con A^n de donde M = E. El argumento es en realidad aplicable al caso en

LEMA 5.6. *Sea* A *un álgebra de Fréchet* m*-convexa, sea* I *un ideal cerrado de* A, B = A/I *el álgebra cociente. Si* P *es un* A*-módulo proyectivo de tipo finito (provisto de su topología canónica) el producto tensorial algebraico* $B \otimes_A P$ *es completo para la topología proyectiva (esto es, coincide con* $B \hat{\otimes}_A P$) (cf. [6] I.1.3).

Demostración. De la sucesión exacta $0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$ se deduce la sucesión exacta $0 \longrightarrow I.P \longrightarrow P \longrightarrow B \otimes_A P \longrightarrow 0$.

De 5.5 b) sigue que la topología cociente hace de $B \otimes_A P$ un A-módulo de Fréchet, que indicaremos P'. Ciertamente P' es un B-módulo y como B × P' es cociente de A × P sigue fácilmente que la aplicación bilineal B × P' ⟶ P' es continua, luego P' es un B-módulo de Fréchet finitamente generado.

Por otro lado, de las propiedades de $\hat{\otimes}_A$ es claro que $B \hat{\otimes}_A P$ es un B-módulo de Fréchet proyectivo de tipo finito (pues $P \oplus S \approx A^m$ para convenientes S,m); como la aplicación $x \longrightarrow 1 \otimes x$ de P en $B \hat{\otimes}_A P$ es continua, también lo es la inclusión $B \otimes_A P \xrightarrow{i} B \hat{\otimes}_A P$ ($B \otimes_A P$ con la topología cociente). Como i tiene imagen densa de 5.5.d) resulta que i es biyectiva, luego un homeomorfismo por gráfico cerrado.

En lo que sigue de este §, A será un álgebra de Fréchet m-convexa sobre **R** que verifica las siguientes hipótesis:

1. $\Omega(A)$ es un A-módulo proyectivo de tipo finito.

2. Para cada $h \in X(A)$ el ideal maximal M(h) es finitamente generado.

De 5.6 obtenemos una sucesión exacta de A-módulos de Fréchet

$$0 \longrightarrow M(h).\Omega(A) \longrightarrow \Omega(A) \xrightarrow{\pi} \Omega(A) \otimes_A \mathbf{R} \longrightarrow 0 \qquad (6)$$

donde **R** se considera como A-módulo vía $\hat{h}: A \longrightarrow \mathbf{R}$; como $\Omega(A)$ es de tipo finito es claro que $\Omega(A) \otimes_A \mathbf{R}$ es un **R**-espacio vectorial de dimensión finita.

Si $\delta_h: A \longrightarrow M(h)/M(h)^2$ está definida por $\delta_h(x)$ = "clase mod $M(h)^2$ de x-h(x)" es inmediato que δ_h es una derivación continua (cf. 4.4 g)) así que $\delta_h = \varphi\, d_A$ para una única $\varphi: \Omega(A) \longrightarrow M(h)/M(h)^2$, A-lineal y continua. Obviamente $\varphi(M(h).\Omega(A)) = 0$, así que φ se factoriza como $\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi$ con $\overline{\varphi}: \Omega(A) \otimes_A \mathbf{R} \longrightarrow M(h)/M(h)^2$ continua.

Por otra parte $d_A(M(h)^2) \subset M(h).\Omega(A)$ induce una aplicación R-lineal $\Delta_h: M(h)/M(h)^2 \longrightarrow \Omega(A) \otimes_A \mathbf{R}$ con $\Delta_h\, \delta_h = \pi \circ d_A$.

Como $d_A(A)$ engendra un submódulo denso de $\Omega(A)$, se ve enseguida que δ_h y $\overline{\varphi}$ son isomorfismos recíprocos (cf. III. 1.3.).

Siempre bajo la hipótesis 1. y 2. tenemos otra construcción: si $D \in \mathrm{Der}(A)$ la aplicación **R**-lineal continua h o D: M(h) ⟶ **R** se anula sobre $M(h)^2$ e induce $\overline{h \circ D}: M(h)/M(h)^2 \longrightarrow \mathbf{R}$. Este proceso da $k_h: \mathrm{Der}(A) \longrightarrow (M(h)/M(h)^2)^*$ vía $k_h(D) = \overline{h \circ D}$ (aquí * indica el R-dual). Se tiene entonces el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_A(\Omega(A),A)\otimes_A R & \longleftarrow & \mathrm{Der}(A)\otimes R & \overset{\pi}{\swarrow} & \\ \downarrow \eta & & & & \mathrm{Der}(A) \\ \mathrm{Hom}_R(\Omega(A)\otimes_A R, R) & \xrightarrow[\Delta_h^*]{} & (M(h)/M(h)^2)^* & \overset{k_h}{\nwarrow} & \end{array} \qquad (7)$$

donde $\pi(D) = D\otimes 1$ y η es la aplicación natural definida por $\eta(F\otimes 1)\,(w\otimes 1) = h(\langle F,w\rangle)$. Como Δ_h es isomorfismo es claro que su tras<u></u>puesta Δ_h^* también lo es; por otra parte siendo $\Omega(A)$ proyectivo de tipo finito, es un resultado clásico que η es un isomorfismo. De 5.5 a) sigue que $\mathrm{Hom}_A(\Omega(A),A) = \mathrm{CHom}_A(\Omega(A),A) = \mathrm{Der}(A)$, de manera que i también es isomorfismo.

Sigue de esto que k_h es epimorfismo y que la sucesión

$$0 \longrightarrow M(h).\mathrm{Der}(A) \longrightarrow \mathrm{Der}(A) \xrightarrow[k_h]{} (M(h)/M(h)^2)^* \longrightarrow 0 \qquad (8)$$

es exacta.

LEMA 5.7. *Con las hipótesis* 1. *y* 2. *sea* $h_o \in X(A)$ *y sea* (D_i) $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *una familia de derivaciones de* A *tales que* $k_{h_o}(D_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *es una base de* $(M(h_o)/M(h_o)^2)^*$. *Existe entonces un entorno* U *de* h_o *en* X(A) *tal que para cada* $h \in U$ *la familia* $k_h(D_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *es una base de* $(M(h)/M(h)^2)^*$. *Además si* $h \in U$ *y* $x \in M(h)$, *son equivalentes*

a) $x \in M(h)^2$.

b) $h \circ D_i(x) = 0$ *para* $1 \leqslant i \leqslant n$.

Demostración. Como Der(A) es proyectivo de tipo finito, hay un $a \notin M(h_o)$ tal que el módulo de fracciones $\mathrm{Der}(A)_a = \mathrm{Der}(A)\otimes_A A_a$ es un A_a-módulo libre de rango n, para un cierto n. Multiplicando, si es necesario, por un elemento inversible de A_a (de la forma a^r) podemos suponer que hay una base de $\mathrm{Der}(A)_a$ de la forma $T_j/1$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ con $T_j \in \mathrm{Der}(A)$. Sea la aplicación A-lineal $u\colon A^m \longrightarrow \mathrm{Der}(A)$, $u(a_1,\ldots,a_m) = \sum_{i=1}^{m} a_i.T_i$ y sea N el núcleo de u, C el conúcleo de u. Por definición resulta que $N_a = 0$, $C_a = 0$; como C es de tipo finito hay un $r \geqslant 0$ tal que $a^r.C = 0$. Además para cada $v \in N$ hay un $q \geqslant 0$ ($q = q(v)$) tal que $a^q.v = 0$. Por consiguiente si $D \in \mathrm{Der}(A)$ existen elementos $a_i \in A$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ tales que $a^r.D = \sum_{i=1}^{m} a_i.T_i$ y si $\sum_{i=1}^{m} c_i.T_i = 0$ entonces $(c_1,\ldots,c_m) \in N$ y por lo tanto hay un $q = q(c_1,\ldots,c_m)$ tal que $a^q.c_i = 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Sea $U_o = \{h\colon h(a) \neq 0\}$ entorno abierto de h_o; entonces:

1) Si $h \in U_o$, $k_h(T_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ generan $(M(h)/M(h)^2)^*$; pues si $\psi \in (M(h)/M(h)^2)^*$ será $\psi = k_h(D)$ para una $D \in \mathrm{Der}(A)$ y por lo anterior hay elementos $a_i \in A$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ tales que $a^r.D = \sum_{i=1}^{m} a_i.T_i$. Entonces $h(a^r).k_h(D) = \sum_{i=1}^{m} h(a_i).k_h(T_i)$ de donde

$$\psi = \sum_{i=1}^{m} \frac{h(a_i)}{h(a^r)} \cdot k_h(T_i)$$

2) Si $h \in U_o$, $k_h(T_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ es linealmente independiente. Pues supongamos que $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j k_h(T_j) = 0$ $(\lambda_j \in R)$; resulta de (8) que $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j T_j \in M(h)$. Der(A) y por lo tanto $\sum_{k=1}^{m} \lambda_j T_j = \sum_{k=1}^{p} b_k . L_k$ con $b_k \in M(h)$ y $L_k \in Der(A)$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$.

Pero para cada k hay elementos $a_{k_j} \in A$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ tales que $a^r . L_k = \sum_{j=1}^{m} a_{k_j} . T_j$. Sigue que $\sum_{j=1}^{m} (a^r . \lambda_j - \sum_{k=1}^{p} b_k . c_{k_j}) . T_j = 0$ y entonces hay un $q \geqslant 0$ tal que $a^q (a^r . \lambda_j - \sum_{k=1}^{p} b_k . c_{k_j}) = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$. Como $h(a) \neq 0$ y $h(b_k) = 0$ para todo k, obtenemos $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.

De 1) y 2) y de la hipótesis resulta en particular que n = m pues $\dim(M(h_o)/M(h_o)^2) = n$. Para cada D_i de la hipótesis hay elementos $a_{ij} \in A$ $(1 \leqslant i,j \leqslant n)$ tales que $a^r D_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} . T_j$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ y la matriz $(h_o(a_{ij})) \in R^{n \times n}$ es inversible ("matriz de cambio de base"); por continuidad hay un entorno U_1 de h_o tal que $(h(a_{ij}))$ es inversible para cada $h \in U_1$. Por consiguiente $U = U_o \cap U_1$ verifica las condiciones de la tesis. Para la última afirmación notemos que a) $\Rightarrow$ b) trivialmente; por otra parte si vale b) resulta que $k_h(D)$ (clase de x mod $M(h)^2$) = 0 para toda derivación D, de donde "clase de x mod $M(h)^2$" = 0 , o sea $x \in M(h)^2$.

OBSERVACION. La proposición precedente permite establecer la existencia del "fibrado tangente" sobre X(A), con fibra $(M(h)/M(h)^2)^*$ en cada $h \in X(A)$.

LEMA 5.10. *Sea* A *un álgebra de Fréchet fuertemente regular, sea* D *una derivación de* A, *sea* $U \subset X(A)$ *un abierto. Si* $a \in A$, $b \in A$ *verifican* $\hat{a}|U = \hat{b}|U$ *entonces será* $\widehat{D(a)}\,|U = \widehat{D(b)}\,|U$.

Demostración. Es suficiente considerar el caso b = 0; sea $h_o \in U$ y consideremos un entorno V de h_o con $\overline{V} \subset U$. Sea $x \in A$ con $\hat{x}|\overline{V} = 1$, $\hat{x}|X-U = 0$ (1.3.i)) así que a.x = 0. Luego para todo $h \in X(A)$ será $0 = h(x) . h \circ D(a) + h(a) . h \circ D(x)$, en particular $0 = h(x) . h \circ D(a) = h \circ D(a)$ para todo $h \in \overline{V}$. Luego $\widehat{D(a)}\,|\overline{V} = 0$; como h_o es cualquiera en U, resulta que $\widehat{D(a)}$ se anula sobre U.

Siempre bajo hipótesis 1. y 2. anteriores, pongamos para cada $h \in X(A)$: $\rho(h) = \dim_R(M(h)/M(h)^2)$; ciertamente $\rho(h) < \infty$ para todo $h \in X(A)$.

LEMA 5.8. *Supongamos que* A *es fuertemente regular y que verifica las*

condiciones 1. *y* 2.; *si* $h_o \in X(A)$ *son equivalentes:*

a) $M(h_o) = M(h_o)^2$ (*o sea* $\rho(h_o) = 0$).

b) $M(h_o) = P(h_o)$.

c) $M(h_o)$ *es generado por un idempotente.*

d) $\{h_o\}$ *es abierto y cerrado en* $X(A)$.

Demostración. a) $\Rightarrow$ b). Resulta $m(h_o) = m(h_o)^2$ en el anillo local A_{h_o}, luego $m(h_o) = 0$ por el lema de Nakayama y se aplica 1.4.

b) $\Rightarrow$ a). Trivial.

b) $\Rightarrow$ c). Como $A_{h_o} = A/P(h_o)$, sale $M(h_o)_{h_o} = 0$ y por ser $M(h_o)$ de tipo finito, hay un $c \in P(h_o)$ tal que $(1-c).M(h_o) = 0$. Como $c \in M(h_o)$ se obtiene $c^2 = c$ y $c.x = x$ para todo $x \in M(h_o)$. Sigue que $M(h_o) = A.c$.

c) $\Rightarrow$ a) Evidente. c) $\Rightarrow$ d). Resulta $\{h_o\}$ abierto en $J(A)$, a fortiori en $X(A)$.

d) $\Rightarrow$ c). Como A es fuertemente regular hay un $c \in A$ tal que $\hat{c}(h_o) = 0$, $\hat{c}(h) = 1$ para todo $h \neq h_o$ (por 1.3.i) claramente c es un idempotente, $c \in M(h_o)$ y $c.x = x$ para todo $x \in M(h_o)$ (pues $Rad(A) = 0$).

COROLARIO 5.9. *Bajo las hipótesis de* 5.8 *la aplicación* ρ *es localmente constante.*

6. En todo lo que sigue, A será un álgebra que verifica las condiciones i) a vii) de 4.5.; veremos que es posible dotar a $X(A)$ de una estructura de variedad diferenciable, para lo cual precisamos construir primero "coordenadas locales". Empezamos la construcción con la

PROPOSICION 6.1. *Sea* $h_o \in X(A)$ *con* $\rho(h_o) = n > 0$. *Existen entonces un entorno abierto* U_o *de* h_o, *elementos* $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m$ *en* $M(h_o)$ *y derivaciones* D_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *tales que:*

a) *La subálgebra* $[x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m]$ *es densa en* A.

b) *Para todo* $h \in X(A)$, $M(h)$ *es generado por* $x_1-h(x_1),\ldots,x_n-h(x_n)$, $y_1-h(y_1),\ldots,y_m-h(y_m)$.

c) $hD_i(x_j) = \delta_{ij}$ *para todo* i,j *y todo* $h \in U_o$.

d) *Las clases* mod $M(h)^2$ *de los* $x_i-h(x_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *forman una base de* $M(h)/M(h)^2$ *para cada* $h \in U_o$.

e) *Para cada* $h \in U_o$, $M(h)$ *es generado por* $P(h)$ *y los* $x_i-h(x_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

f) *Si* $h \in U_o$ *y* $h(x_i) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *entonces* $h = h_o$.

h) *Existe un* $a \in 1 + P(h_o)$ *tal que*

1) $aD_i(x_k) = a.\delta_{ik}$ *para todo* i,k.

2) *Para todo* $w \in \Omega(A)$, $a.w = \sum_{i=1}^{n} \langle D_i, w \rangle \, dx_i$ *(en particular* $a.dx = a \cdot \sum_{i=1}^{n} D_i(x)\, dx_i$ *si* $x \in A$).

Demostración. Por la hipótesis V), hay una familia finita u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ de elementos de A tal que $[u_1,\ldots,u_r]$ es denso en A; luego (ver 5.1) resulta que para cada $h \in X(A)$ la subálgebra $[u_1-h(u_1),\ldots,u_r-h(u_r)]_o$ es densa en M(h). Claramente las imágenes de los $u_i - h_o(u_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ son densas en $M(h_o)/M(h_o)^2$ (observár que $M(h)^2$ es cerrado para todo $h \in X(A)$ por 5.4. y 4.4g)) pero como éste es un espacio de dimensión finita separado resulta que estas imágenes generan $M(h_o)/M(h_o)^2$. Por un eventual reordenamiento, podemos suponer que las imágenes de $u_1 - h_o(u_1),\ldots,u_n - h_o(u_n)$ forman una base de $M(h_o)/M(h_o)^2$. Ponemos $x_i = u_i - h_o(u_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ e indicamos con $y_1,\ldots,y_m$ los restantes $u_i - h_o(u_i)$ (si r=n podemos suponer $y_1 = \ldots = y_m = 0$). La afirmación a) es entonces evidente.

Por (8) hay derivaciones F_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de A tales que $h_o F_i(x_j) = \delta_{ij}$ $(1 \leqslant i,j \leqslant n)$; hay un entorno W de h_o tal que la matriz $(hF_i(x_j))_{i,j} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ es inversible para todo $h \in W$, así que si $a = \det(F_i(x_j))$ se tendrá $h(a) \neq 0$ para todo $h \in W$, luego hay un $b \in A$ con $ab \in 1 + P(h_o)$. Si (c_{ij}) indica la matriz adjunta de $(F_i(x_j))$ se tendrá $(c_{ij}).(F_i(x_j)) = a.(\delta_{ik})$; ponemos $a_{ij} = a.c_{ij}$ $(1 \leqslant i,j \leqslant n)$ y entonces es $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} F_j(x_k) = \delta_{ik} + p_{ik}$ $(p_{ik} \in P(h_o)$, $1 \leqslant i,k \leqslant n)$.

Definimos $D_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} F_j$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; si V_o es un entorno abierto de h_o tal que $V_o \subset W$ y $\hat{p}_{ik} \mid V_o = 0$ para todo i,k, se obtiene que c) es válido para todo $h \in V_o$ (el entorno U_o se construirá de modo que $U_o \subset V_o$).

Ahora $k_{h_o}(D_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ es una base de $(M(h_o)/M(h_o)^2)^*$, luego hay un entorno $V_1 \subset V_o$ tal que $h_k(D_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ es base de $(M(h)/M(h)^2)^*$ para todo $h \in V_1$ (ver 5.7). Como $\rho(V_1) = n$, para obtener d) bastará ver que para cada $h \in V_1$ es

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - h(x_i)) \in M(h)^2 \quad , \quad \lambda_i \in \mathbf{R} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

Pero esto es evidente ya que $hD_j(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - h(x_i)) = \lambda_j \in hD_j(M(h)^2)) = 0$ para cada $j \leqslant n$, por c).

Para e) consideramos el anillo local A_h $(h \in V_1)$; las clases de los

$x_i - h(x_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ generan $M(h)/M(h)^2 \approx m(h)/m(h)^2$ y entonces por Nakayama las clases de los $x_i - h(x_i)$ generan $m(h)$ en $A_h = A/P(h)$. De aquí e) es trivial.

Para probar f) consideramos un entorno V de h_o de clausura compacta en V_1; como A es separable (por a)) y como $\overline{V}$ es equicontinuo débilmente cerrado en A* (por ser A de Fréchet) resulta $\overline{V}$ compacto metrizable ([3], ch.IV, § 2). En particular es legítimo el uso de sucesiones en V. Sea $F = \{h \in V: h(x_1) = \ldots = h(x_n) = 0\}$, cerrado en V con $h_o \in F$; se afirma que h_o no es punto de acumulación de F. De lo contrario existiría una sucesión de puntos distintos h_j $(j \geqslant 1)$ en F con $h_j \longrightarrow h_o$ y $h_j \neq h_o$ para todo $j \geqslant 1$. Sea $x \in M(h_o)$ tal que $h_j(x) > 0$ para todo $j \geqslant 1$ (ver 5.2); por e) será $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b$ $(a_i \in A,\ b \in P(h_o))$. Claramente $h_j(b) = 0$ a partir de un cierto j_o de donde $0 < h_j(x) = \sum_{i=1}^{n} h_j(a_i)h_j(x_i) = 0$ si $j > j_o$, lo que es absurdo. Resulta de esto que hay un entorno abierto U_o de h_o en V (luego U_o es abierto en X(A)) tal que $U_o \cap F = \{h_o\}$, lo que prueba f).

Resta probar b). Para cada $h \in X(A)$ sea I(h) el ideal generado por los $x_i - h(x_i), y_j - h(y_j)$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$; claramente $I(h) \subset M(h)$. Por la construcción de los x_i, y_j y por la parte e) se deduce que I(h) y P(h) generan M(h) para todo $h \in X(A)$; bastará ver entonces que $P(h) \subset I(h)$ para cada $h \in X(A)$, o lo que es igual que la cápsula de I(h) es $\{h\}$ (cf.1.4). Pero como $[x_1 - h(x_1), \ldots, y_m - h(y_m)]_o \subset I(h)$, resulta de 5.1 que I(h) es denso en M(h), luego $I(h) \subset M(h') \Rightarrow h = h'$, dando lo afirmado.

Veamos g): ante todo es claro por d) que si $h \in U_o$ entonces las clases mod $M(h)^3$ de los $(x_i - h(x_i)).(x_j - h(x_j))$ $(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)$ generan el R-espacio vectorial $M(h)^2/M(h)^3$. Veamos que son linealmente independientes: sea

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij}(x_i - h(x_i)).(x_j - h(x_j)) \in M(h)^3 \text{ con } \lambda_{ij} = \lambda_{ji} \in R$$

Notemos que por c) será $D_k(x_i) = \delta_{ik} + a_{ik}$, con $\hat{a}_{ik}|U_o = 0$ $(1 \leqslant i,k \leqslant n)$; por lo tanto , como $h \in U_o$, será $a_{ik} \in P(h)$ y por consiguiente tendremos $a_{ik} \in M(h)^r$ para todo $r \geqslant 1$; en particular $a_{ik} \in M(h)^3$ (cf. 1.4.). Aplicando D_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ obtenemos (por ser $D_k(M(h)^{r+1}) \subset M(h)^r$ si $r \geqslant 1$)

$$\sum_{i,j} \lambda_{ij}(D_k(x_i)(x_j - h(x_j)) + (x_i - h(x_i)).D_k(x_j)) \in M(h)^2.$$

Como $D_k(x_i) - \delta_{ik} \in M(h)^3$ queda, para $1 \leqslant i \leqslant n$,

o sea

$$\sum_j \lambda_{kj}(x_j - h(x_j)) + \sum_i \lambda_{ik}(x_i - h(x_i)) = 2 \sum_{j=1}^{n} \lambda_{kj}(x_j - h(x_j)) \in M(h)^2 \quad y$$

por tanto $\lambda_{kj} = 0$ para todo k,j por d). Luego las clases de los $(x_i - h(x_i))\ (x_j - h(x_j))$ $(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)$ forman una base de $M(h)^2/M(h)^3$. Ahora para cada $x \in A$, $x - h(x) - \sum_{i=1}^{n} hD_i(x)(x_i - h(x_i)) \in M(h)^2$; su clase mod $M(h)^3$ será entonces expresable en forma única en términos de estos elementos. O sea, existen únicos $\lambda_{ij} \in R$, $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ $(1 \leqslant i,j \leqslant n)$ tales que

$$x - h(x) - \sum_{i=1}^{n} hD_i(x_i)(x_i - h(x_i)) - \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij}(x_i - h(x_i)).(x_j - h(x_j)) \in M(h)^3.$$

Aplicando hD_kD_ℓ $(1 \leqslant k, \ell \leqslant n)$ y recordando que $D_k(x_i) - \delta_{ik} \in M(h)^2$, se obtiene $hD_kD_\ell(x) = \lambda_{k\ell}$. Por lo tanto $hD_kD_\ell(x) = hD_\ell D_k(x)$, y como h es un elemento cualquiera de U_o se obtiene lo afirmado.

Finalmente veamos h). Consideramos las aplicaciones A-líneales $f: A^n \longrightarrow \Omega(A)$ $g: \Omega(A) \longrightarrow A^n$ dadas por $f(a_1,\ldots,a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i dx_i$, $g(w) = (\langle D_i, w\rangle)_{i \leq n}$; pasando al anillo local $A_{h_o} \approx A/P(h_o)$ obtenemos $f_o: A_{h_o}^n \longrightarrow \Omega(A) \otimes_A A_{h_o}$, $g_o: \Omega(A) \otimes_A A_{h_o} \longrightarrow A_{h_o}^n$, y afirmamos que f_o y g_o son isomorfismos recíprocos. Como se trata de aplicaciones entre A_{h_o} - módulos libres, es suficiente ver que reduciendo todo mod $m(h_o)$ se obtiene $g_o f_o = id$ ([2], ch. II, §3, n°2); como $A_{h_o}/m(h_o) \approx A/M(h_o) \approx R$, esto equivale a decir que

$$R^n \approx A^n \otimes_A R \xrightarrow{f} \Omega(A) \otimes_A R \xrightarrow{g} A^n \otimes_A R \approx R^n$$

son isomorfismos recíprocos (R considerado como A-módulo vía $h_o: A \longrightarrow R$). Pero esto es inmediato por (7), ya que el isomorfismo $\Delta h_o: M(h_o)/M(h_o)^2 \longrightarrow \Omega(A) \otimes_A R$ de §5 manda la base de los x_i mod $M(h_o)^2$ en los correspondientes $dx_i \otimes 1$, y por otra parte los h_oD_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ forman la correspondiente base dual. Siendo f_o y g_o isomorfismos recíprocos, resulta que hay un $a \in 1 + P(h_o)$ tal que $a.fg = a.1_{\Omega(A)}$, $a.gf = a.1_{A^n}$ ([2], ch. II, §2, prop. 19) y esto da la tesis.

OBSERVACION. Si $h \in U_o$ y $x \in M(h)$, son equivalentes:

a) $x \in M(h)^2$.

b) $D_i(x) \in M(h)$ para todo $i \leqslant n$ (cf. 5.7.).

NOTACION 6.2. Indicaremos con U un entorno abierto de h_o con $\overline{U}$ compacto y $\overline{U} \subset U_o$.

Nos ubicaremos en lo que sigue en la situación de 6.1.

Se tiene una aplicación continua

$$\theta: X(A) \longrightarrow R^n \ , \quad \theta(h) = (h(x_1),\ldots,h(x_n)).$$

La idea es que $\theta|U$ defina un mapa en h_o; pero en general esto no será posible ya que $\theta|U$ no es en principio inyectiva (de cualquier modo es claro por 6.1. f) que $(\theta|U)^{-1}(0)$ se reduce a $\{h_o\}$).

Consideremos en R^n la norma $\|v\| = (\sum_{i=1}^{n} v_i^2)^{1/2}$ y los conjuntos

$$F_\varepsilon = \{h \in X(A): \|\theta(h)\| \leqslant \varepsilon\} \ , U_\varepsilon = \{h \in X(A): \|\theta(h)\| < \varepsilon\}$$

para cada $\varepsilon > 0$. Claramente U_ε es entorno abierto de h_o y $U_\varepsilon \subset F_\varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$.

LEMA 6.3. *Con las notaciones anteriores se tiene*

a) *Si* $0 < \varepsilon < \delta$, *entonces* $F_\varepsilon \cap \overline{U} \subset \overline{U_\delta \cap U} \subset F_\varepsilon \cap \overline{U}$.

b) *La familia* $\{F_\varepsilon \cap \overline{U}: \varepsilon > 0\}$ *es una base de entornos de* h_o.

c) *La familia* $\{U_\varepsilon \cap U: \varepsilon > 0\}$ *es una base de entornos de* h_o.

Demostración. a) Si $h \in F_\varepsilon \cap \overline{U}$ será $\|\theta(h)\| \leqslant \varepsilon$ y $h = \lim_{k\to\infty} h_k$ con $h_k \in U$; por lo tanto hay un k_o tal que $\|\theta(h_k)\| < \delta$ si $k > k_o$, luego $h_k \in U_\delta \cap U$ si $k > k_o$ y por ende $h \in \overline{U_\delta \cap U}$. La otra inclusión es trivial.

b) Siendo $\bigcap_{\varepsilon>0} F_\varepsilon \cap \overline{U} = \{h_o\}$ por 6.1 f) resulta que h_o es el único punto adherente a la base de filtro $(F_\varepsilon \cap \overline{U})_{\varepsilon>0}$ en el espacio compacto $\overline{U}$. Por lo tanto esta base de filtro converge a h_o en $\overline{U}$. Si W es cualquier entorno de h_o en X(A) $W \cap \overline{U}$ es entorno de h_o en $\overline{U}$, luego para un $\varepsilon > 0$ será $F_\varepsilon \cap \overline{U} \subset W \cap \overline{U} \subset W$.

c) Evidente por lo anterior.

Indicaremos con la notación $E_\varepsilon(0)$ al abierto $\{v \in R^n: \|v\| < \varepsilon\} \subset R^n$, $\varepsilon > 0$.

LEMA 6.4. *Existe un* $\varepsilon_o > 0$ *tal que* $\theta(U_\varepsilon \cap U) \supset E_{\varepsilon/2}(0)$ *para todo* $\varepsilon < \varepsilon_o$.

Demostración. Sea V un entorno abierto de h_o tal que $V \subset \overline{V} \subset U$, $\overline{V}$ compacto, y sea $\varepsilon_o > 0$ tal que $F_{\varepsilon_o} \cap \overline{U} \subset V$. Supongamos entonces que $0 < \varepsilon < \varepsilon_o$ y sea $v = (v_1,\ldots,v_n)$ tal que $\|v\| < \varepsilon$; definamos $x = \sum_{i=1}^{n} (x_i - v_i)^2$; por compacidad hay un $h_1 \in F_\varepsilon \cap \overline{U}$ tal que $\alpha = h_1(x) = \inf \{h(x): h \in F_\varepsilon \cap \overline{U}\}$.

Notar que $x \geqslant 0$, así que $\alpha \geqslant 0$. Afirmamos que $h_1 \in U_\varepsilon$; como $h_1 \in F_\varepsilon$

$$2\sum_{i=1}^{n} h_1(x_i).v_i \leqslant 2(\sum_{i=1}^{n} h_1(x_i)^2)^{1/2}.(\sum_{i=1}^{n} v_i^2)^{1/2} < 2.\varepsilon.\varepsilon/2 = \varepsilon^2,$$

de donde

$\|v\|^2 = h_o(x) \geqslant h_1(x) = \|\theta(h_1)\|^2 + \|v\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} h_1(x_i)v_i = \varepsilon^2 + \|v\|^2 -$
$- 2\sum_{i=1}^{n} h_1(x_i)v_i > \|v\|^2$ lo que es absurdo. Luego $h_1 \in U_\varepsilon \cap \overline{U} \subset F_\varepsilon \cap \overline{U} \subset$
$\subset V$; pero $U_\varepsilon \cap \overline{U} \subset F_\varepsilon \cap \overline{U} \subset V$ da $U_\varepsilon \cap \overline{U} \subset U_\varepsilon \cap V \subset U_\varepsilon \cap \overline{U}$ luego $U_\varepsilon \cap \overline{U} = U_\varepsilon \cap V$. En conclusión $h_1 \in U_\varepsilon \cap V$ (que *es abierto*) y $h_1(x) \leqslant$ $\leqslant h(x)$ para todo $h \in F_\varepsilon \cap \overline{U}$ implica $h_1(x) \leqslant h(x)$ para todo $h \in U_\varepsilon \cap V$, pues $U_\varepsilon \cap V \subset F_\varepsilon \cap \overline{U}$. En conclusión, $\hat{x}$ tiene un mínimo local en h_1 y por lo tanto $x - \alpha \in M(h_1)^2$ por 5.3., luego $h_1 D_i(x) = h_1 D_i(x-\alpha) = 0$ para todo $i \leqslant n$. Pero evidentemente es $h_1 D_i(x) = 2(h_1(x_i)-v_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ luego $h_1(x) = v$, y concluímos.

NOTACION. Para cada $p = (p_1,\ldots,p_n)$ (los p_i enteros no negativos) ponemos $|p| = \sum_{1}^{p} p_i$; $\partial^p/\partial t^p$ será el operador

$$f \longrightarrow \partial^{|p|} f/\partial t_1^{p_1} \ldots \partial t_n^{p_n}$$

actuando sobre $C^\infty(R^n)$. Asimismo para cada multi-índice $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ (los α_i enteros, $1 \leqslant \alpha_i \leqslant n$) definimos $D^{(\alpha)}$: A $\longrightarrow$ A por $D^{(\alpha)}(x) = D_{\alpha_1},\ldots,D_{\alpha_r}(x)$ (los D_k dados por 6.1). Nótese que es esencial el orden de la r-upla $(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ ya que en general no disponemos de la identidad $D_iD_j = D_jD_i$ si $i \neq j$; no obstante:

LEMA 6.5. *Supongamos que* $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ *y* $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_r)$ *difieren en una permutación. Entonces para todo* $x \in A$ *se tiene*

$$\widehat{D^{(\alpha)}(x)} \mid U = \widehat{D^{(\beta)}(x)} \mid U$$

(*donde* U *es el entorno abierto fijado en* 6.2.)

Demostración. Inmediata a partir de 6.1. g).

En particular es posible definir para cada $p = (p_1,\ldots,p_n)$ el operador D^p: A $\longrightarrow$ C(U) como *cualquiera* de los $D^{(\alpha)}$ que verifican $p_k = \text{card}\{i: \alpha_i = k \text{ para } 1 \leqslant k \leqslant n\}$; si $h \in U$ se obtiene entonces una "derivación puntual asociada al carácter h, de orden $|p|$ " definida sin ambigüedad por hD^p: A $\longrightarrow$ R, automáticamente continua.

Indicaremos ahora con $\mathrm{I\!I}_n(v)$, para $v = (v_1,\ldots,v_n) \in R^n$, el ideal maximal $\{f; f(v) = 0\}$ de $C^\infty(R^n)$; $\mathrm{I\!I}_n(v)$ está generado por $t_1-v_1,\ldots,t_n-v_n$ y para cada $r \geqslant 1$ $\mathrm{I\!I}_n(v)^r$ consiste de las $f \in C^\infty(R^n)$ que verifican

$\partial^p f / \partial t^p(v) = 0$ para todo p con $|p| < r$. Asimismo con $\mathcal{E}_n$ indicamos el álgebra local de gérmenes de aplicaciones de clase C^∞ en 0; $\mathcal{E}_n$ no es otra cosa que el cociente de $C^\infty(R^n)$ por el ideal

$P = \{f \in C^\infty(R^n) \ ; \ f \mid W = 0$ para algún entorno W de $0\}$.

El ideal maximal de $\mathcal{E}_n$ es $M_n = \Pi_n(0)/P$ y F_n será el álgebra de series formales en n indeterminadas.

Es clásico que F_n se identifica al completado (separado) de $\mathcal{E}_n$ para la topología M_n-ádica, que $F_n \approx \mathcal{E}_n/M_n^\infty$ $(M^\infty = \bigcap_{r \geq 1} M^r)$ ([11]).

Consideramos ahora el cálculo operacional C^∞, $T: C^\infty(R^n) \longrightarrow A$, único morfismo que verifica $T(t_i) = x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; en general $f(x_1,\ldots,x_n)$ denotará el elemento $T(f) \in A$ para $f \in C^\infty(R^n)$. Si $h \in X(A)$ se tiene $(f(x_1,\ldots,x_n)) = f(h(x_1),\ldots,h(x_n))$.

PROPOSICION 6.6. *Con las notaciones anteriores, se tiene:*

a) *Si* $f \in C^\infty(R^n)$ *entonces* $f \in P \Leftrightarrow T(f) \in P(h_o)$.

b) *Si* $f \in C^\infty(R^n)$ *y* $h \in U$, *para todo* $i \leqslant n$ *es*

$$hD_i(T(f)) = hT\left(\frac{\partial f}{\partial t_i}\right) \left(= \frac{\partial f}{\partial t_i}(h(x_1),\ldots,h(x_n))\right).$$

c) *Si* $f \in C^\infty(R^n)$, $h \in U$ *y* $p = (p_1,\ldots,p_n)$, *es*

$$hD^p(T(f)) = h\left(T\,\frac{\partial^p f}{\partial t^p}\right)\right) \left(= \frac{\partial^p f}{\partial t^p}(h(x_1),\ldots,h(x_n))\right).$$

Demostración. a) Una afirmación es evidente (si $f|W = 0$, la continuidad de θ: $X(A) \longrightarrow R^n$ da $\widehat{T(f)} \mid W' = 0$ donde $W' = \theta^{-1}(W)$). Recíprocamente supongamos que es $T(f) \in P(h_o)$, luego $\widehat{T(f)}|U_\varepsilon \cap U = 0$ para un cierto $\varepsilon > 0$ (6.3. c)). Si ε_o es como en 6.4, podemos suponer $\varepsilon < \varepsilon_o$ así que $f(h(x_1),\ldots,h(x_n)) = 0$ para todo $h \in U_\varepsilon \cap U$ de donde $f\theta\,(U_\varepsilon \cap U) = 0$ y entonces por 6.4. obtenemos $f \mid E_{\varepsilon/2}(0) = 0 \Rightarrow f \in P$.

b) Ambos miembros definen derivaciones continuas $C^\infty(R^n) \longrightarrow R$; como los polinomios en $t_1,\ldots,t_n$ son densos en $C^\infty(R^n)$ basta verificar la igualdad cuando $f = t_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Pero esto es inmediato por 6.1 .

c) Evidente por b) e inducción.

COROLARIO 6.7. *Si* $f \in C^\infty(R^n)$ *y* $h \in U$, *son equivalentes para cada* $r \geqslant 1$:

a) $f \in \Pi_n(\theta(h))^r$.

b) $T(f) \in M(h)^r$.

En particular $f \in \Pi_n(\theta(h))^\infty \Longleftrightarrow f \in M(h)^\infty = \bigcap_{r \geq 1} M(h)^r$

si $r \geqslant 1$; supongamos que $T(f) \in M(h)^{r+1}$ $(r \geqslant 1)$ y sea $p = (p_1,\ldots,p_n)$ con $|p| \leqslant r$. Siendo $hD^p(T(f)) = 0$ resulta por 6.6 c) que

$\frac{\partial^p f}{\partial t^p}(\theta(h)) = 0$; como esto vale para todo p con $|p| \leqslant r$ sigue entonces $f \in \Pi_n(\theta(h))^{r+1}$.

Para cada $h \in X(A)$ hay un morfismo τ_h: $R[t_1,\ldots,t_n] \longrightarrow A$ definido por $\tau_h(t_i) = x_i - h(x_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ (notar que τ_{h_o} no es otra cosa que la restricción de T al álgebra de polinomios); de 6.7. sigue que τ_h es compatible con las filtraciones:

i) la definida por los $\Pi_n(0)^r$ $(r \geqslant 0)$ e

ii) la definida por los $M(h)^r$ $(r \geqslant 0)$

y por lo tanto induce un morfismo de álgebras graduadas

$$\bar{\tau}_h: R[t_1,\ldots,t_n] \longrightarrow gr_{M(h)}(A) = \bigoplus_{r\geq 0} M(h)^r/M(h)^{r+1}. \qquad (9)$$

PROPOSICION 6.8. *Para todo* $h \in U$, *el morfismo* $\bar{\tau}_h$ *es un isomorfismo de álgebras graduadas. En particular, las clases* mod $M(h)^{r+1}$ *de los elementos* $(x_1-h(x_1))^{p_1}\ldots(x_n-h(x_n))^{p_n}$ *con* $|p| = r$ *forman una base de* $M(h)^r/M(h)^{r+1}$.

Demostración. Si $h \in U$, los elementos $x_i-h(x_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ definen una base de $M(h)/M(h)^2$, de modo que $gr_1(\bar{\tau}_h)$ es un isomorfismo. Por lo tanto $\bar{\tau}_h$ es un epimorfismo. Supongamos que f es un polinomio homogéneo de grado $r \geqslant 1$

$$f = \sum_{|p|=r} c_p\, t_1^{p_1} \ldots t_n^{p_n}$$

tal que $\bar{\tau}_h(f) = 0$.

Esto significa que $\sum_{|p|=r} c_p(x_1-h(x_1))^{p_1}\ldots(x_n-h(x_n))^{p_n} \in M(h)^{r+1}$;

entonces por 6.7 a) resulta que el polinomio

$$g = \sum_{|p|=r} c_p(t_1-h(x_1))^{p_1}\ldots(t_n-h(x_n))^{p_n}$$

tiene todas sus derivadas de orden $\leqslant r+1$ nulas en el punto $(h(x_1),\ldots,h(x_n))$. Como el grado total de g es $\leqslant r$, deberá ser $g=0$; como $g(t_1,\ldots,t_n) = f(t_1-h(x_1),\ldots,t_n-h(x_n))$, sigue que $f=0$. Esto prueba que $gr_r(\bar{\tau}_h)$ es inyectiva para todo $r \geqslant 1$ y concluímos.

COROLARIO 6.9. *Si* $h \in U$ *y* $x \in A$, *existen únicos* $c_p \in R$ $(p=(p_1,\ldots,p_n))$ *tales que*

$$x - \sum_{|p|\leq r} c_p(x_1-h(x_1))^{p_1}\ldots(x_n-h(x_n))^{p_n} \in M(h)^{r+1}.$$

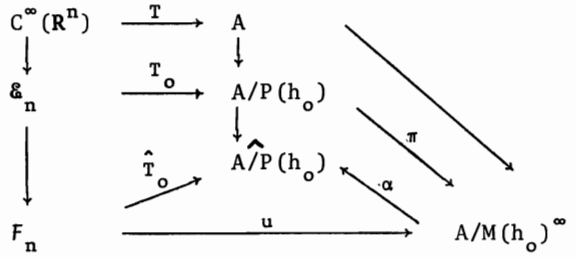
OBSERVACION 6.10. Es fácil ver que los coeficientes c_p no son sino

$p!\ c_p = hD^p(x) \quad (p \geqslant 0)$.

Para ello basta aplicar sucesivamente los hD^p con $|p| = 0,1,\ldots,r$ y usar 6.6 c) aplicado a:

$$f(t_1,\ldots,t_n) = \sum_{|p|\leq r} c_p(t_1-h(x_1))^{p_1}\ldots(t_n-h(x_n))^{p_n} \quad (p!=p_1!\ldots p_n!).$$

Consideremos ahora el diagrama (10) de álgebras y morfismos, en el cual las flechas sin nombre son las evidentes y $\widehat{A/P}(h_o)$ indica el completado separado de $A/P(h_o)$ para la topología $\widehat{M(h_o)}/P(h_o)$-ádica (o sea la $m(h_o)$-ádica). Claramente $\widehat{A/P}(h_o) = \lim A/M(h_o)^r$, de donde resulta el morfismo α:



(10)

De 6.6 a) se deduce la existencia de T_o, siendo evidente que "T_o (germen de t_i en 0) = clase mod $P(h_o)$ de x_i" $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Como $\hat{\&}_n = F_n$, por continuidad obtenemos $\hat{T}_o$. Por otro lado πT_o: $\&_n \longrightarrow A/M(h_o)^\infty$ tiene núcleo M^∞ por 6.7., de donde resulta un morfismo inyectivo u: $F_n \longrightarrow A/M(h_o)^\infty$.

PROPOSICION 6.11. *Con las notaciones anteriores, los morfismos* $\hat{T}_o, \alpha, u$ *son isomorfismos.*

Demostración. Notemos que α es trivialmente inyectivo; por otro lado, como $m(h_o) = \mathrm{Rad}\,(A/P(h_o))$ es generado por las clases de los x_i, $\hat{T}_o$ resulta suryectivo. Como $\alpha u = \hat{T}_o$, sigue que α es suryectivo, luego isomorfismo; ahora u inyectivo y $\hat{T}_o$ suryectivo dan la tesis.

7. Pasamos ahora a las consideraciones locales propiamente dichas; con la notación de 6.1., sea V un entorno abierto de h_o, $\overline{V} \subset U$, $\overline{V}$ compacto y tal que $h(a) = 1$ para todo $h \in \overline{V}$ (6.1 h)). Consideremos el ideal $I = \{x \in A: \hat{x}|\overline{V} = 0\} = \bigcap_{h\in\overline{V}} M(h)$, sea B el álgebra A/I; claramente $X(B)$ se identifica a $\overline{V}$ y por lo tanto B es una Q-álgebra ([12], 13.6). Para aligerar notación indicaremos con $\overline{x}$ la imagen de cada $x \in A$ en B.

LEMA 7.1. i) *Si* $x \in I$ *y* $D \in \mathrm{Der}(A)$ *entonces* $D(x) \in I$.

ii) *Si* $x \in A$, $D_iD_j(x) - D_jD_i(x) \in I$ *para todo* i,j.

Demostración. i) Si $x \in I$ entonces $\hat{x}|\overline{V} = 0$ luego $\hat{x}|V = 0$ y por 5.10 resulta $D\widehat{(x)}|V = 0$. Por continuidad se obtiene $D\widehat{(x)}|\overline{V} = 0$, luego $D(x) \in I$.

ii) Evidente por 6.1 g).

iii) En virtud de 6.9. bastará probar que si $x \in I$ entonces para todo multi-índice p se tiene $hD^p(x) = 0$ para cada $h \in \overline{V}$. Por continuidad es suficiente probar esto cuando $h \in V$. Pero en tal caso $x \in P(h)$ y basta apelar a 1.4 b).

Sigue de este resultado que se puede definir una aplicación A-lineal $D \longrightarrow \overline{D}$ de Der(A) en Der(B) vía $\overline{D}(\overline{a}) = \overline{D(a)}$. En particular será $\overline{D_i}(\overline{x_k}) = \delta_{ik}$ $(1 \leqslant i,k \leqslant n)$ por 6.1 h). Asimismo se deduce que $\overline{D}_i\overline{D}_j = \overline{D}_j\overline{D}_i$ para todo i,j lo que permite definir sin ambigüedad las derivaciones de orden $|p|$, $\overline{D^p}: B \longrightarrow B$ para todo múlti-índice p (cf. 6.5).

NOTA. De manera general se considerará, si E es un álgebra de Fréchet, a $E \hat{\otimes}_R E$ como E-módulo mediante

$$x.(a \otimes b) = (x \otimes 1)\ (a \otimes b) = xa \otimes b$$

esto es, vía el morfismo $x \longrightarrow x \otimes 1$ de E en $E \hat{\otimes}_R E$.

El siguiente resultado es esencial:

PROPOSICION 7.2. i)*El ideal generado por los elementos* $1 \otimes x_i - x_i \otimes 1$, $1 \otimes y_j - y_j \otimes 1$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ *es denso en la diagonal* Δ_A *de* $A \hat{\otimes}_R A$.

ii) $\Omega(A)$ *es generado por los elementos* dx_i, dy_j $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$.

Demostración. i) Consideremos la sucesión exacta $0 \to D_A \to A \otimes_R A \xrightarrow{\lambda} A \to 0$ donde $\lambda(\sum a_i \otimes b_i) = \sum a_i b_i$; se sabe que Δ_A es la clausura de D_A en $A \hat{\otimes}_R A$ ([6], III, 1.2) de modo que es suficiente probar que el ideal generado por los elementos en cuestión en $A \hat{\otimes}_R A$ es denso en D_A.

Ahora de manera general D_A es generado por los elementos $1 \otimes a - a \otimes 1$ $(a \in A)$; como los x_i, y_j generan una subálgebra densa en A, existe una sucesión $P_n \in R[t_1,\ldots,t_n,\xi_1,\ldots,\xi_m]$ tal que

$a = \lim_{n\to\infty} P_n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$ y por lo tanto cada $1 \otimes a - a \otimes 1$ es límite de elementos de $A \otimes A$ de la forma

$P(1 \otimes x_1,\ldots,1 \otimes x_n,\ 1 \otimes y_1,\ldots,1 \otimes y_m) - P(x_1 \otimes 1,\ldots,y_m \otimes 1)$.

Entonces es suficiente probar que un elemento de esta forma está en el ideal de $A \otimes A$ generado por los $1 \otimes x_i - x_i \otimes 1$, $1 \otimes y_j - y_j \otimes 1$. Pero se tiene

$$P(t_1,\ldots,t_n,\xi_1,\ldots,\xi_m) - P(t'_1,\ldots,t'_n,\xi'_1,\ldots,\xi'_m) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Q_i(t_1,\ldots,t_n,\xi_1,\ldots,\xi_m,t'_1,\ldots,t'_n,\xi'_1,\ldots,\xi'_m)\ (t_i - t'_i) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} S_j(t_1,\ldots,t_n,\xi_1,\ldots,\xi_m,t'_1,\ldots,t'_n,\xi'_1,\ldots,\xi'_m)\ (\xi_j - \xi'_j)$$

para convenientes polinomios Q_i, S_j (en 2n + 2m variables) y el resultado sigue entonces mediante la sustitución

$$t_i \longrightarrow 1 \otimes x_i, t'_i \longrightarrow x_i \otimes 1, \xi_j \longrightarrow 1 \otimes y_j;\ \xi'_j \longrightarrow y_j \otimes 1.$$

ii) Por i) el submódulo de $\Omega(A)$ generado por los dx_i, dy_j es denso en $\Omega(A)$; basta aplicar entonces 5.5 d).

PROPOSICION 7.3. *Con las notaciones anteriores, se tiene*

i) *La diagonal* Δ_B *de* $B \hat{\otimes}_R B$ *es generada por los elementos* $1 \otimes \overline{x}_i - \overline{x}_i \otimes 1$, $1 \otimes \overline{y}_j - \overline{y}_j \otimes 1$.

ii) $\Omega(B)$ *es un* B*-módulo libre de base* $d\overline{x}_1, \ldots, d\overline{x}_n$.

Demostración. i) Se tiene las sucesiones exactas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & D_A & \longrightarrow & A \otimes_R A & \xrightarrow{\lambda} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & D_B & \longrightarrow & B \otimes_R B & \xrightarrow{\lambda} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Como $A \longrightarrow B$ es suryectiva y como D_B es generada (como B-módulo) por los $1 \otimes b - b \otimes 1$ ($b \in B$) sigue que $D_A \longrightarrow D_B$ es un epimorfismo; por otro lado $B \otimes_R B$ es un cociente de $A \otimes_R A$ (algebraica y topológicamente). Luego D_B es cociente de D_A, algebraica y topológicamente. En consecuencia al pasar a los completados resulta $\Delta_A \longrightarrow \Delta_B$ suryectiva, y por consiguiente Δ_B es un $B \hat{\otimes}_R B$-módulo finitamente generado (por la hipótesis iv) sobre Δ_A). Ahora bastará combinar 7.2.i) con 5.5.c).

ii) Se tiene una sucesión exacta $0 \longrightarrow I.\Omega(A) \longrightarrow \Omega(A) \longrightarrow B \otimes_A \Omega(A) \longrightarrow 0$ (cf.5.6), y un epimorfismo de A-módulos $B \hat{\otimes}_A \Omega(A) \xrightarrow{j} \Omega(B)$ que verifica $j(b \otimes d_A x) = b.d_B \overline{x}$ para todo $b \in B$, $x \in A$ ([6], III. 1.4). Sigue de esto y de 7.2. ii) que los elementos $d\overline{x}_1, \ldots, d\overline{x}_n, d\overline{y}_1, \ldots, d\overline{y}_m$ generan el B-módulo $\Omega(B)$. Pero como $a.dy_i = a.\sum_{k=1}^{n} D_k(y_i)dx_k$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ por 6.1 h), como $\overline{a} = 1$, sigue que $d\overline{y}_i = \sum_{k=1}^{n} \overline{D_k(y_i)}\, d\overline{x}_k$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, luego los $d\overline{x}_i$ generan $\Omega(B)$.

Supongamos $\sum_{i=1}^{n} b_i\, d\overline{x}_i = 0$ para $b_i \in B$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; aplicando cada derivación $\overline{D}_j : B \longrightarrow B$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ y usando que $\langle \overline{D}_j, d\overline{x}_i \rangle = \overline{D}_j(x_i) = \delta_{ij}$, se obtiene $b_1 = \ldots = b_n = 0$ y todo queda probado.

Se deduce de lo anterior que existe una matriz $c = (c_{ij}) \in B^{m \times n}$ tal que

$$d\overline{y}_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk} \cdot d\overline{x}_k \qquad (1 \leqslant j \leqslant m) \qquad (11)$$

(claramente será $c_{jk} = \overline{D}_k(y_j)$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $1 \leqslant k \leqslant n$).

canónica $e_1,\ldots,e_n$, $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m$ por $e_i \longrightarrow d\overline{x}_i$, $\varepsilon_j \longrightarrow d\overline{y}_j$.

Se obtiene una sucesión exacta $0 \longrightarrow N \longrightarrow B^{n+m} \longrightarrow \Omega(B) \longrightarrow 0$.

LEMA 7.4. N *es un* B-*módulo libre de base* $\varepsilon_j - \sum_{k=1}^{n} c_{jk}\, e_k \quad (1 \leqslant j \leqslant m)$.

Demostración. Inmediata apartir de la definición.

PROPOSICION 7.5. Δ_B^2 *es cerrado en* $B \hat{\otimes}_R B$. *Por consiguiente* $\Omega(B) = \Delta_B/\Delta_B^2$.

Demostración. Ciertamente la aplicación natural
$i: \Delta_B/\Delta_B^2 \longrightarrow \Delta_B/\overline{\Delta_B^2} = \Omega(B)$ es un epimorfismo de B-módulos. Sea por otro lado $v: B^{n+m} \longrightarrow \Delta_B^2$ definida como la aplicación B-lineal tal que $v(e_i) = 1 \otimes \overline{x}_i - \overline{x}_i \otimes 1$, $v(\varepsilon_j) = 1 \otimes \overline{y}_j - \overline{y}_j \otimes 1 \quad (1 \leqslant i \leqslant n\ ,\ \ 1 \leqslant j \leqslant m)$. Se afirma que $v(N) \subset \Delta_B^2$; para ello es suficiente probar que $v(\varepsilon_j - \sum_{k=1}^{n} c_{jk}\, e_k) = 1 \otimes \overline{y}_j - \overline{y}_j \otimes 1 - \sum_{k=1}^{n} \overline{D}_k(\overline{y}_j)(1 \otimes x_t - x_t \otimes 1) \in \Delta_B^2$ para todo $j \leqslant m$. Pero $a(1 \otimes y_j - y_j \otimes 1) - a \sum_{k=1}^{n} D_k(y_j)(1 \otimes x_k - x_k \otimes 1) \in \in \Delta_A^2$ por 6.1 h) y por ser Δ_A^2 cerrado por la hipótesis iv) de 4.5). De aquí sigue inmediatamente lo dicho.

Se tiene entonces un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & B^{n+m} & \longrightarrow & \Omega(B) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow v & & \downarrow \overline{v} & & \\ 0 & \longrightarrow & \Delta_B^2 & \longrightarrow & \Delta_B & \longrightarrow & \Delta_B/\Delta_B^2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

y resulta $\overline{v}$ suryectivo; en efecto, veamos que $\Delta_B = \Delta_B^2 + \mathrm{Im}(v)$. Bastará probar que $\Delta_A = \Delta_A^2 + \mathrm{Im}(w)$ donde $w: A^{n+m} \longrightarrow \Delta_A$ es definida en forma análoga a v, esto es, $w(e_i) = 1 \otimes x_i - x_i \otimes 1$, $w(\varepsilon_j) = 1 \otimes y_j - y_j \otimes 1$. Sea entonces $x \in \Delta_A$; la imagen de x en $\Omega(A) = \Delta_A/\Delta_A^2$ se escribe en la forma $\sum_{i=1}^{n} a_i\, dx_i + \sum_{j=1}^{m} a'_j\, dy_j$ (a_i, a'_j en A) (7.2.ii)). Por consiguiente $x - \sum_{i=1}^{n} a_i(1 \otimes x_i - x_i \otimes 1) - \sum_{j=1}^{m} a'_j\,(1 \otimes y_j - y_j \otimes 1) \in \Delta_A^2$ y esto da lo afirmado y por consiguiente la suryectividad de $\overline{v}$.
Finalmente, tenemos epimorfismos $\Omega(B) \xrightarrow{\overline{v}} \Delta_B/\Delta_B^2$, $\Delta_B/\Delta_B^2 \xrightarrow{i} \Omega(B)$; de 7.3 ii) resulta entonces que $i\overline{v}$ es un isomorfismo, luego $\overline{v}$ es inyectivo, y por ende un isomorfismo. Por consiguiente i también es un isomorfismo, y concluímos.

Consideramos ahora el homomorfismo de B-álgebras graduadas (los polinomios con su graduación usual)

$$\mu: B[T_1,\ldots,T_n] \longrightarrow \mathrm{gr}_{\Delta_B}(B \hat{\otimes}_R B) = \bigoplus_{r \geq 0} \Delta_B^r/\Delta_B^{r+1} \qquad (12)$$

unívocamente definido por la condición $\mu(T_i) = 1 \otimes \overline{x}_i - \overline{x}_i \otimes 1$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

PROPOSICION 7.6. *μ es un isomorfismo de* B*-álgebras graduadas.*

Demostración. En primer lugar, como $\mathrm{gr}_{\Delta_B}(B \otimes B)_1 = \Delta_B/\Delta_B^2$ de 7.5. y 7.3 ii) sigue que $\mathrm{gr}_1(\mu)$ es isomorfismo y por lo tanto μ es seguramente un epimorfismo. Consideremos ahora un $h \in \overline{V}$, y sea i_h: $B \hat{\otimes}_R B \longrightarrow B$ el homomorfismo bien definido por la condición $i_h(x \otimes y) = h(x)y$ (o sea $i_h = h \otimes 1_B$); se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} B[T_1,\ldots,T_n] & \xrightarrow{\mu} & \mathrm{gr}_{\Delta_B}(B \hat{\otimes}_R B) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \mathrm{gr}(i_h) \\ R[t_1,\ldots,t_n] & \xrightarrow{\overline{\tau}'_h} & \mathrm{gr}_{M(h)}(B) \\ & \overline{\tau}_h \searrow \quad \mathrm{gr}_{M(h)}(A) \quad \nearrow \Pi_h & \end{array}$$

donde α es el morfismo definido por $\alpha(b) = h(b)$ $(b \in B)$, $\alpha(T_i) = t_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $\mathrm{gr}(i_h)$ es inducido por i_h (ya que $i_h(\Delta_B) = M(h)$, cf. 7.3. i) y 5.4), Π_h es definido en forma evidente vía $A \rightarrow B$, $\overline{\tau}_h$ es como en (9) y $\overline{\tau}'_h$ se define análogamente vía $t_i \rightarrow$ clase de $\overline{x}_i$ mod $M(h)^2$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Destaquemos que Π_h es un isomorfismo gracias a 7.1. iii); por consiguiente $\overline{\tau}_h'$ es isomorfismo por 6.8.

Supongamos que un cierto $P \in \mathrm{Ker}(\mathrm{gr}_m(\mu))$ $(m \geqslant 1)$, así que $P = \sum_{|p|=m} b_p T^p$ es un polinomio homogéneo de grado m, con

$\sum_{|p|=m} b_p (1 \otimes \overline{x}_1 - \overline{x}_1 \otimes 1)^{p_1} \ldots (1 \otimes x_n - x_n \otimes 1)^{p_n} = 0$; aplicando $\mathrm{gr}_m(i_h)$ queda $\sum_{|p|=m} h(b_p)(\overline{x}_1 - h(\overline{x}_1))^{p_1} \ldots (\overline{x}_n - h(\overline{x}_n))^{p_n} = 0$

Por lo dicho arriba sobre Π_h resulta que $h(b_p) = 0$ para todo multi-índice p, y como esto vale para todo $h \in \overline{V} = X(B)$, se obtiene $b_p = 0$ para todo p, de donde $P = 0$, y concluímos.

COROLARIO 7.7. *Para cada* $a \in B \hat{\otimes}_R B$ *existe una única familia* $R_p(a)$ *de elementos de* B (p *recorriendo los multi-índices* $p \geqslant 0$) *tal que*

$$a - \sum_{|p| \leq m} R_p(a)\ (1 \otimes \overline{x}_1 - \overline{x}_1 \otimes 1)^{p_1} \ldots (1 \otimes \overline{x}_n - \overline{x}_n \otimes 1)^{p_n} \in \Delta_B^{m+1}$$

para todo $m \geqslant 0$. *Además la aplicación* σ: $B \hat{\otimes}_R B \longrightarrow B[[T_1,\ldots,T_n]]$ *definida por* $\sigma(a) = \sum_{p \geq 0} R_p(a)\, T^p$ *es un morfismo de* B*-álgebras, de núcleo* $\Delta_B^{\infty} = \bigcap_{r \geq 1} \Delta_B^r$.

OBSERVACIONES 7.8. a) Es sencillo explicitar los "coeficientes" $R_p(a)$ de la serie formal asociada al elemento $a \in B \hat{\otimes}_R B$; en efecto, aplicando el morfismo i_h ($h \in \overline{V}$) y comparando con 6.10, se obtiene

$$h\, R_p(a) = \frac{h\, \overline{D}^p(i_h(a))}{p!} \qquad (14)$$

para cada $h \in \overline{V}$ y cada $p \geqslant 0$.

En particular, si $a = 1 \otimes x$, $i_h(a) = x$ para todo $h \in \overline{V}$ y por lo tanto para todo $p \geqslant 0$

$$R_p(1 \otimes x) = \frac{\overline{D}^p(x)}{p!} \qquad (15)$$

Por el contrario, si $a = x \otimes 1$, $i_h(a) = h(x)$, así que de (14) deducimos que

$$R_p(x \otimes 1) = 0 \quad \text{si} \quad |p| > 0 \quad R_o(x \otimes 1) = x \qquad (16)$$

b) De lo anterior obtenemos: para todo $x \in B$ y para todo $m \geqslant 0$ es

$$1 \otimes x - \sum_{|p| \leq m} \frac{\overline{D}^p(x)}{p!} (1 \otimes x_1 - x_1 \otimes 1)^{p_1} \ldots (1 \otimes x_n - x_n \otimes 1)^{p_n} \in \Delta_B^{m+1}$$

c) En particular, reemplazando en la fórmula anterior x por $\overline{D}^q$ y m por $m - |q|$, se obtiene

$$1 \otimes \overline{D}^q(x) - \sum_{|p|+|q| \leq m} \frac{\overline{D}^{p+q}(x)}{p!} (1 \otimes x_1 - x_1 \otimes 1)^{p_1} \ldots (1 \otimes x_n - x_n \otimes 1)^{p_n} \in$$

$$\in \Delta_B^{m+1-|q|} \qquad (17)$$

para todo $m \geqslant 0$ y todo multi-índice q con $m+1 > |q|$.

Consideramos ahora la aplicación continua η: $X(A) \longrightarrow R^{n+m}$ definida por $\eta(h) = (h(x_1), \ldots, h(x_n), h(y_1), \ldots, h(y_m))$.

Esta aplicación es inyectiva gracias al hecho que los polinomios en $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ son densos en A.

Sea $K = \eta(\overline{V})$; K es un compacto y $\eta|\overline{V} = j$: $\overline{V} \longrightarrow K$ es un homeomorfismo. Luego $j^* = : C^o(K) \longrightarrow C^o(X(B)) = C^o(\overline{V})$ es un isomorfismo, donde, por supuesto, $j^*(f) = fj$.

Utilizando la transformación de Gelfand g: $B \longrightarrow C^o(\overline{V})$ (que es inyectiva) podemos definir un morfismo (automáticamente continuo) φ: $B \longrightarrow C^o(K)$ de modo que $j^* \varphi = g$, lo que permite representar cada elemento $b \in B$ como una función continua $\varphi(b)$: $K \longrightarrow R$. Queremos probar que las funciones $\varphi(b)$ ($b \in B$) son infinitamente diferenciables, esto es: $\varphi(b)$ es la restricción a K de alguna $f \in C^\infty(R^{n+m})$. Para ello bastará ver que para todo $m \geqslant 0$ se tiene un "jet de orden m" $F = (F^k)_{|k| \leq m}$ sobre K tal que $F^o = \varphi(b)$, y de modo que $F \in \mathfrak{E}^m(K)$ (notaciones como en [11], ch. I). A tal efecto definimos un morfismo

$$F : B \longrightarrow C^o(K)\ [[t_1,\ldots,t_n,\xi_1,\ldots,\xi_m]] = J(K)$$

poniendo $$F(b) = \sum_{p\geq 0} \frac{F^p(b)}{p!}\ t^p \qquad \text{(cf. 7.7)}$$

y ponemos para cada multi-índice $p \geqslant 0$

$$F^p(b) = \begin{cases} \varphi(\overline{D}^p(b)) & \text{si } p_{n+1} = \ldots = p_{n+m} = 0 \\ 0 & \text{si algún } p_i > 0 \text{ con } n < i \leqslant n+m \end{cases} \qquad (18)$$

y entonces sólo habrá que verificar que, para cada $m \geqslant 0$, el jet así definido verifica las condiciones que definen $\mathcal{E}^m(K)$ (ver [11] ch. I, 2.2 y 2.3). Pero esto es consecuencia de las identidades (17) y del siguiente lema (comparar con [6], III, 3.1)

LEMA 7.9. *Sea* $a \in \Delta_B^r$ $(r \geqslant 1)$, $f_a : K\times K \longrightarrow R$ *la aplicación dada por* $f_a = (\varphi \otimes \varphi)(a)$. *Existe entonces una constante* $C > 0$ *tal que* $|f_a(v_1,v_2)| \leqslant C\|v_1-v_2\|^r$ *para todo* $(v_1,v_2) \in K\times K$.

Demostración. Por 7.3 i) existen elementos $c_p \in B \hat{\otimes}_R B$ (p recorriendo los multi-índices $(p_1,p_2,\ldots,p_{n+m})$) tales que

$$a = \sum_{|p|=r} c_p (1\otimes \overline{x}_1 - \overline{x}_1 \otimes 1)^{p_1} \ldots (1\otimes \overline{x}_n - \overline{x}_n \otimes 1)^{p_n} (1\otimes \overline{y}_1 - \overline{y}_1 \otimes 1)^{p_{n+1}} \ldots$$
$$\ldots (1\otimes y_m - y_m \otimes 1)^{p_{n+m}}$$

Notando que $\varphi(\overline{x}_i) = t_i|K$, $\varphi(\overline{y}_j) = \xi_j|K$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$, la tesis resulta de observar que

$$f_a((t,\xi),(t',\xi')) = \sum_{|p|=r} g_p(t,t',\xi,\xi')(t_1-t_1')^{p_1}\ldots(t_n-t_n')^{p_n}.$$
$$(\xi_1-\xi_1')^{p_{n+1}}\ldots(\xi_m-\xi_m')^{p_{n+m}} \text{ poniendo } g_p(\varphi\otimes\varphi)(c_p),\ v_1 = (t,\xi),$$
$v_2 = (t',\xi')$. (la constante C dependerá de

$$\sup_{|p|=r} \{\sup|g(t,\xi,t',\xi')| : ((t,\xi)\ ,\ (t',\xi')) \in K\times K\}).$$

NOTA. Conviene observar que si $f \in C^\infty(R^{n+m})$ corresponde a un $\varphi(b)$, esto es: $\varphi(b) = f|K$, entonces las derivadas parciales de f restringidas a K son exactamente los $F^p(b)$; la serie de Taylor formal de f sobre K coincide con F(b).

Consideramos ahora el cálculo operacional C^∞ T": $C^\infty(R^{n+m}) \longrightarrow B$ definido unívocamente por $T''(t_i) = \overline{x}_i$, $T''(\xi_j) = \overline{y}_j$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$.

COROLARIO 7.10. T": $C^\infty(R^{n+m}) \longrightarrow B$ *es un morfismo suryectivo.*

Demostración. Sea $b \in B$; por lo anterior $\varphi(b) = f|K$ para alguna

todo queda probado.

Ahora estamos en condiciones de probar el resultado siguiente:

PROPOSICION 7.11. *El morfismo* $T_o: \mathcal{E}_n \longrightarrow A/P(h_o)$ *es un isomorfismo.*

Demostración. (Para la definición de T_o ver el diagrama (10)).

Definamos el cálculo operacional $T': C^\infty(R^{n+m}) \longrightarrow A$ vía $T'(t_i) = x_i$, $T'(\xi_j) = y_j$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$; la composición de T' con el morfismo $\Pi: A \longrightarrow B$ es exactamente T", luego $T'' = \Pi T'$ es suryectivo. Como el ideal I que define a B está incluído en $P(h_o)$, el morfismo $B \longrightarrow A/P(h_o)$ es suryectivo. Por consiguiente el morfismo $C^\infty(R^{n+m}) \xrightarrow{T'} A \longrightarrow A/P(h_o)$, indicado F, es suryectivo e induce trivialmente un epimorfismo $F_o: \mathcal{E}_{n+m} \longrightarrow A/P(h_o)$. En consecuencia $A/P(h_o)$ es un álgebra diferenciable en el sentido de [11], ch. III, 2.2. Ahora si $i: R^{n+m} \longrightarrow R^n$ es $i(t_1,\ldots,t_n,\xi_1,\ldots,\xi_m) = (t_1,\ldots,t_n)$ se verifica sin dificultad que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_n & \xrightarrow{i^*} & \mathcal{E}_{n+m} \\ \downarrow = & & \downarrow F_o \\ \mathcal{E}_n & \xrightarrow{T_o} & A/P(h_o) \end{array}$$

es un diagrama conmutativo; ello significa que T_o es un morfismo de álgebras diferenciables. Como $\hat{T}_o$ es un isomorfismo (6.11), la tesis resulta de [11], ch. V, 4.4.

COROLARIO 7.12. *Con las notaciones del* §6, *existe un entorno* W *de* h_o *y* $f_j \in C^\infty(R^n)$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ *tales que* $\hat{y}_j|W = \widehat{T(f_j)}|W$ *para todo* $j \leqslant n$.

8. Estableceremos ahora el resultado fundamental de este trabajo, para lo cual utilizaremos la maquinaria desarrollada en los parágrafos 6 y 7, así como el

LEMA 8.1. *Sea* Ω *un abierto no vacío de* $\mathbf{R}^n$, A' *una subálgebra de* $C^o(\Omega)$. *Supongamos:*

1. *Las restricciones* $u_i = t_i|\Omega$ *de las funciones coordenadas están en* A' $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

2. *Para cada* $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \Omega$ *el ideal maximal* $M_\lambda = \{f \in A': f(\lambda)=0\}$ *de* A' *es generado por* $u_i - \lambda_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

3. *Existen* $\delta_i \in \mathrm{Der}(A')$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *tales que* $\delta_i(u_j) = \delta_{ij}$ *para todo* i,j.

Entonces $A' \subset C^\infty(\Omega)$ *y* $\delta_i = \partial/\partial\, t_i$ *para todo* $i \leqslant n$.

Demostración. Es una adaptación evidente de [1], lema 3,

Sea A un álgebra de Fréchet que verifica las condiciones i), ii) y v) de 4.5; bajo hipótesis algo menos restrictivas es posible definir un haz A sobre el espacio X(A), cuyas secciones globales coinciden con A.

Se considera para ello, para cada abierto $U \subset X(A)$ el conjunto multiplicativo $S_U = \{a \in A: h(a) \neq 0 \text{ para todo } h \in U\}$ y se define $A(U) = A[S_U^{-1}]$ (álgebra de fracciones de A definida por S_U). Que esto define un haz, así como que cada A(U) admite una topología que la hace un álgebra de Fréchet m-convexa formalmente real, es un hecho conocido (ver [6], I.2).
En la misma referencia se prueba que A(U) puede describirse como el conjunto de aplicaciones $f: U \longrightarrow R$ que coinciden localmente con las restricciones a U de las aplicaciones $\hat{a}$ ($a \in A$); asimismo la aplicación natural $A \longrightarrow A(U)$ (indicada según es usual, con $a \longrightarrow a/1$) induce un homeomorfismo $X(A(U)) \longrightarrow U$.

Finalmente mencionemos que para cada abierto $U \subset X(A)$ hay una aplicación A-lineal $Der(A) \longrightarrow Der(A(U))$ (indicada $D \longrightarrow D|U$) bien definida por la regla $D|U(a/b) = bD(a) - aD(b)/b^2$ para cada $a/1 \in A(U)$.

TEOREMA 8.2. *Sea* A *un álgebra que verifica las condiciones* i) *a* **vii)** *de* 4.5. *Existe entonces una única estructura de variedad diferenciable en* X(A), *tal que la transformación de Gelfand induce un isomorfismo* $g: A \longrightarrow C^\infty(X(A))$.

Demostración. La unicidad es clara por 4.3. Veamos la existencia. En primer lugar, $X_o = \{h \in X(A): \rho(h) = 0\}$ es un subespacio discreto abierto y cerrado de X(A) (cf. 5.8); no hay dificultad en proveer a X_o de una estructura de variedad diferenciable de dimensión 0. El problema reside en los puntos de $X - X_o$; evidentemente para tratar este caso puede suponerse que $X_o = \emptyset$.

Construimos el haz asociado al álgebra A como se indicó arriba. Sea $h_o \in X(A)$; por 7.12 podemos suponer que hay un entorno W de h_o y aplicaciones $f_j \in C^\infty(R^n)$ tales que $\hat{y}_j|W = \hat{f(x_1,\ldots,x_n)}|W$; sea U un entorno abierto de h_o con $\overline{U}$ compacto, $\overline{U} \subset W$, de tal forma que $\theta|U: U \longrightarrow E_\varepsilon(0)$ sea suryectiva para un cierto $\varepsilon > 0$ (cf. 6.4), $\overline{U} \subset U_o$ como en 6.2.

Notemos en primer lugar que $\theta|W$ es inyectiva; en efecto, sean h_1, h_2 en W y supongamos que $h_1(x_i) = h_2(x_i)$ para todo $i \leqslant n$. Entonces para todo $j \leqslant m$ $h_1(y_j) = h_1(f_j(x_1,\ldots,x_n)) = f_j(h_1(x_1),\ldots,h(x_n)) =$ $= f_j(h_2(x_1),\ldots,h_2(x_n)) = h_2(y_j)$; de esto y de 6.1.b) resulta que $M(h_1) = M(h_2)$ y por ende $h_1 = h_2$.

Por la hipótesis sobre U sigue que $\theta|U: U \longrightarrow E_\varepsilon(0)$ es un homeomorfis-

$V \subset U$ y $h \in V$, el ideal $M(h)$ de $A(V)$ es generado por los $x_i/1 - h(x_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Es evidente que $M(h)$ es generado por los $x_i/1-h(x_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ y los $y_j/1 - h(y_j)$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$, de modo que bastará ver que cada $y_j/1 - h(y_j)$ está en el ideal generado por los $x_i/1 - h(x_i)$. Sabemos que $y_j = T(f_j) + a$ con $\hat{a}_j|W = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$. Sea $s \in A$ tal que $sa_j = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$, $\hat{s}|\overline{U} = 1$ $\hat{s}|X(A) - W = 0$. Así $s/1 = 1$ en $A(V)$ para cualquier abierto $V \subset U$, mientras que $a_j/1 = 0$ en $A(V)$. Pongamos $\lambda = \theta(h)$; entonces $f_j - f_j(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} g_{jk}\,(t_k-\lambda_k)$, para cada $j \leqslant m$, con $g_{jk} \in C^\infty(R^n)$; por consiguiente, si $1 \leqslant j \leqslant m$, será:
$y_j-h(y_j)-a_j = T(f_j) - hT(f_j) = T(f_j) - T(f_j(\lambda)) = T(f_j-f_j(\lambda)) =$
$= T(f_j-f_j(\lambda)) = \sum_{k=1}^{n} T(g_{jk})(x_k-h(x_k))$ y lo afirmado resulta aplicando el morfismo $x \longrightarrow x/1$ de A en $A(V)$.

Sea $V \subset U$ un abierto no vacío , sea $\Omega = \theta(V)$; probaremos que θ_o^*: $C^\infty(\Omega) \longrightarrow C^o(V)$ definida por $\theta_o^*(f) = f\,\theta$ establece una biyección entre $C^\infty(\Omega)$ y $A(V)$.

Consideramos el cálculo operacional T: $C^\infty(R^n) \longrightarrow A$ definido por $T(t_i) = x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; sean S_Ω y S_V los correspondientes conjuntos multiplicativos en $C^\infty(R^n)$ y A. Evidentemente $T(S_\Omega) \subset S_V$, luego queda inducido un único morfismo T_V que hace conmutativo el diagrama (20) (se utiliza que $C^\infty(R^n)\ [S_\Omega^{-1}] = C^\infty(\Omega)$).

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(R^n) & \xrightarrow{\ T\ } & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ C^\infty(\Omega) & \xrightarrow{\ T_V\ } & A(V) \end{array} \qquad (20)$$

Sea $f \in C^\infty(\Omega)$ y representémosla en la forma f_1/f_2 con $f_1, f_2 \in C^\infty(R^n)$ y $f_2 \in S_\Omega$; se tiene para cada $h \in V = X(A(V))$:
$\widehat{T_V(f)}(h) = [\widehat{T(f_1)}/\widehat{T(f_2)}](h) = hT(f_1)/hT(f_2) = f_1(\theta(h))/f_2(\theta(h)) =$
$= f(\theta(h))$.

Esto prueba que $T_V = \theta_o^*$ y por lo tanto asegura que $\theta_o^*(C^\infty(\Omega)) \in A(V)$. Como θ^* es inyectiva, bastará probar que $\theta_o^*\ (C^\infty(\Omega)) = A(V)$. Para cada $a \in A(V)$ definimos $\varphi(a)$: $\Omega \longrightarrow R$ poniendo $\varphi(a)(\theta(h)) = h(a)$ (bien definido ya que $\theta|V$: $V \longrightarrow \Omega$ es homeomorfismo). Es inmediato que φ: $A(V) \longrightarrow C^o(\Omega)$ es un morfismo inyectivo, cuya imagen es una subálgebra de $C^o(\Omega)$ que se indicará A'. Afirmamos que A' está en las condiciones del lema 8.1.; en efecto, es claro que $\varphi(x_i/1) = t_i|\Omega$ si $1 \leqslant i \leqslant n$. Asimismo las disquisiciones previas dan enseguida la condición 2) ya

que si $\lambda = \theta(h)$ tendremos "$a \in M(h) \iff \varphi(a) \in M_\lambda$". Finalmente, si D_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ son las derivaciones de A que verifican $\widehat{D_i(x_j)}|U = \delta_{ij}$ (6.1. c)), podemos poner δ_i: A' $\longrightarrow$ A' mediante $\delta_i(\varphi(a)) = \varphi(D_i|U(a))$ y es elemental verificar que se cumple 3.

Por 8.1 tendremos $A' \subset C^\infty(\Omega)$ así que φ: $A(V) \longrightarrow C^\infty(\Omega)$ es un morfismo inyectivo; ahora si $h \in V$, $\theta_o^* \varphi(a)(h) = \varphi(a)(\theta(h)) = \hat{a}(h)$, luego $\theta_o^* \varphi = 1_{A(V)}$ y entonces sigue que θ_o^*: $C^\infty(\Omega) \longrightarrow A(V)$ es un isomorfismo. De lo probado resulta que es posible definir en X(A) una estructura de variedad diferenciable, tal que para cada abierto $X \subset X(A)$ el álgebra $C^\infty(X)$ se identifica con A(X), y entonces la tesis es evidente.

Como consecuencia de este teorema resulta que la "categoría de las C^∞-álgebras" se identifica con la subcategoría plena (de la categoría de álgebras) formada por las álgebras que verifican i) a vii) de 4.5.; los funtores $X \longrightarrow C^\infty(X)$, $A \longrightarrow X(A)$ establecen una equivalencia entre esta categoría y la categoría de variedades diferenciables.

Mencionemos que si $f:X \to Y$ es una aplicación de clase C^∞ entre variedades diferenciables y f^*: $B \longrightarrow A$ es el morfismo correspondiente de sus álgebras, la diferencial usual de f en $h \in X(A) = X$ se identifica con la aplicación lineal inducida por f,

$(M(h)/M(h)^2)^* \longrightarrow (M(h')/M(h')^2)^*$, donde $h' = hf^*$.

REFERENCIAS

[0] R. ARENS, *Dense inverse limit rings*, Michigan Math. J., 5 n°2, (1958).

[1] B. BANASCHEWSKI, *An algebraic characterization of* $C^\infty(R^n)$, Bull. de l'Acad. Pol. Sci. XVI, n°3 (1968) 169-174.

[2] N. BOURBAKI, *Éléments de mathématique, Algèbre Commutative*, Hermann.

[3] N. BOURBAKI, *Éléments de mathématique, Espaces vectoriels topologiques*, Hermann.

[4] R. BROOKS, *The structure space of a commutative locally* m*-convex algebra*, Pacific Journal of Math., vol. 25 n°3 (1968) 443-454.

[5] C. BYRNES, *Closed algebras of smooth functions*, Bull. Amer. Math. Soc. 81, n°1 (1975) 195-198.

[6] J. DIAZ, *Caracterización de las álgebras diferenciables*, Collectanea Mathematica XXIII (1972) 17-83.

[7] J. DIEUDONNÉ, *Éléments d'Analyse*, Gauthier-Villars (1970).

[8] A. GROTHENDIECK, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Memoirs AMS 16 (1955).

[9] A. GUICHARDET, *Leçons sur certaines algèbres topologiques*,

[10] B.IVERSEN, *Generic local structure in commutative algebra*, Lecture Notes in Math. 310, Springer.

[11] B. MALGRANGE, *Ideals of differentiable functions*, Oxford Univ. Press (19) (1966).

[12] B . MICHAEL, *Locally multiplicatively convex topological algebras*, Memoirs AMS 11 (1952).

[13] M. ROSENFELD, *Commutative F-algebras*, Pacific Journal of Math. 16 (1966) 159-166.

[14] R. SWAN, *Vector bundles and projective modules*, Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962) 264-277.

[15] S. TELEMAN, *Lectures on the applications of sheaves to ring theory*, Lecture notes in Math. 248, Springer (1971) 100-311.

[16] S. TELEMAN, *Representation des anneaux tauberins discrets par des faisceaux*, Rev. Roumaine de Math. XIV, n°2 (1969) 249-264.

[17] L. WALBROECK, *Topological vector spaces and algebras*, Lecture Notes in Math. 230, Springer.

Universidad de Buenos Aires.
Argentina.

Recibido en julio de 1977.

Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 29, 1979.

MEJORA FICTICIA DE LA BONDAD DE AJUSTE DEBIDO A QUE SE AJUSTA UNA FAMILIA DE MODELOS

Aldo José Viollaz

Dedicado al Profesor Luis A. Santaló

1. INTRODUCCION. Hasta no hace mucho tiempo era muy común que el estadístico enfocara el análisis de un conjunto de datos teniendo en mente un modelo preconcebido, es decir, elegido independientemente de los datos. En la actualidad y debido a la influencia del Análisis de Datos (Data Analysis) esta actitud está cambiando gradualmente y hoy es frecuente comenzar el análisis de un conjunto de datos teniendo en mente una familia de modelos, dentro de la cual, en base a los datos y de acuerdo a cierto criterio prefijado, se debe elegir el modelo más apropiado. Esta elección constituye un problema de decisión múltiple cuya solución frecuentemente implica ajustar cada uno de los modelos de la familia dada y calcular la medida de la concordancia de los datos con el modelo según cierto patrón fijado. El objeto de este trabajo es estudiar la mejora ficticia de la medida de concordancia de los datos con el modelo debido a que se ajusta una familia de modelos a los mismos datos. En este trabajo se considera el caso de variables aleatorias gaussianas que satisfacen a una familia de modelos de regresión con variables independientes no estocásticas ortogonales, y como medida de concordancia entre los datos y el modelo se usa el error cuadrático medio.

2. DEFINICIONES. Sean

$$X_{(n)} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

$$\beta_{(n)} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

donde las columnas de $X_{(n)}$ forman un conjunto de n vectores ortonorma-

Sea r entero tal que $0 \leqslant r < n$ y supongamos que el vector aleatorio $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)'$ satisface el modelo de regresión:

$$(2.3) \qquad Y = X_{(r)}\beta_{(r)} + e \quad , \quad E(e) = 0 \quad , \quad E(ee') = \sigma^2 I$$

donde $X_{(r)}$ es la matriz que se obtiene conservando las primeras r columnas de $X_{(n)}$ y $\beta_{(r)} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)'$.

Para cada entero q, $r \leqslant q < n$, sean:

$$P(q) = \{(p_1, p_2, \ldots, p_s)' : p_1 = 1,\ p_2 = 2, \ldots, p_r = r < p_{r+1} < \ldots\ p_s \leqslant q\}$$

$$Q(q) = \{(p_1, p_2, \ldots, p_s)' : p_1 = 1,\ p_2 = 2, \ldots, p_r = r,\ \{p_{r+1}, \ldots, p_s\} \subset$$

$$\subset \{r+1, r+2, \ldots, n\}\ ,\ s \leqslant q\}.$$

Sea $P = (p_1, p_2, \ldots, p_s)'$ tal que $P \in P(q)$ o $P \in Q(q)$. Defina $X_{(P)}$ como la matriz cuya i-ésima columna es la columna p_i-ésima de $X_{(n)}$. Analogamente defina $\beta_{(P)}$ como el vector cuya i-ésima componente es la p_i-ésima componente de $\beta_{(n)}$. De las definiciones de $P(q)$ y $Q(q)$ y de (2.3) se sigue que el vector $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)'$, para todo $P \in P(q)$ o $P \in Q(q)$, satisface al modelo

$$(2.4) \qquad Y = X_{(P)}\beta_{(P)} + e \quad , \quad E(e) = 0 \quad , \quad E(ee') = \sigma^2 I.$$

El estimador de Gauss-Markoff o estimador mínimo cuadrático de $\beta_{(P)}$ que denotamos por $\hat{\beta}_{(P)}$ satisface las ecuaciones normales

$$X'_{(P)}\, X_{(P)}\, \hat{\beta}_{(P)} = X'_{(P)}\, Y$$

Debido a la ortogonalidad de la matriz $X_{(P)}$ se sigue que

$$(2.5) \qquad \hat{\beta}_{p_i} = \sum_{j=1}^{n} x_{jp_i}\, Y_j$$

El correspondiente estimador insesgado de σ^2 está dado por

$$(2.6) \qquad \hat{\sigma}^2_{(P)} = \frac{1}{n-s} \sum_{k \in \overline{P}} Z_k$$

donde $Z_k = \left(\sum_{j=1}^{n} x_{jk}\, Y_j\right)^2$ y $\overline{P}$ es el complemento del conjunto cuyos elementos son las componentes del vector P, respecto del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$.

A cada vector de índices P corresponde una ecuación de regresión y viceversa. Con P denotaremos tanto al conjunto de índices como su correspondiente ecuación de regresión.

Consideremos las familias de ecuaciones de regresión $P(q)$ y $Q(q)$ y con

sideremos el procedimiento que selecciona dentro de la familia $P(q)$ (o $Q(q)$) la ecuación (o ecuaciones) de regresión que minimiza $\hat{\sigma}^2_{(P)}$. Dicha ecuación (o ecuaciones) recibe el nombre de "mejor ecuación de regresión" o "ecuación de regresión óptima" y será denotada por P_{opt}. Entonces

$$\min_{P} \hat{\sigma}^2_{(P)} = \hat{\sigma}^2_{(P_{opt})} \tag{2.7}$$

donde P varía en $P(q)$ o en $Q(q)$ según sea el caso en consideración. Para cada ecuación $P \in P(q)$ (o $Q(q)$) $E(\hat{\sigma}^2_{(P)}) = \sigma^2$. Sin embargo P_{opt} es un vector de índices aleatorios y en general

$$E(\hat{\sigma}^2_{(P_{opt})}) \neq \sigma^2 . \tag{2.8}$$

Para cada vector observado y de Y, corresponde una ecuación óptima $P_{opt(y)}$ con error cuadrático medio σ^2 el cual se estima mediante

$$\hat{\sigma}^2_{(P_{opt(y)})} .$$

Por lo tanto resulta natural definir la mejora ficticia de la bondad de ajuste inducida por el método de selección, como la razón:

$$\lambda = \frac{E(\hat{\sigma}^2_{(P_{opt})})}{\sigma^2} . \tag{2.9}$$

Sean

$$U = \min_{P \in P(q)} \hat{\sigma}^2_{(P)} \tag{2.10}$$

$$V = \min_{P \in Q(q)} \hat{\sigma}^2_{(P)} \tag{2.11}$$

En este trabajo consideramos solamente la mejora ficticia de la bondad de ajuste inducida por procedimientos de selección que consisten en minimizar el error cuadrático medio $\hat{\sigma}^2_{(P)}$ sobre ciertas familias de ecuaciones de regresión. En la Sección 3 se prueba que la variable V puede escribirse como la media aritmética de las primeras (n-q) componentes de cierto estadístico de orden (Teorema 3.1) y se encuentra una expresión asintótica para la mejora ficticia de la bondad de ajuste λ para el caso en el cual P varía en $Q(q)$. En la Sección 4 se encuentra una representación para U en función de un estadístico de orden (Teorema 4.1) y se encuentra una aproximación por exceso para λ para el caso en el cual P varía en $P(q)$. Además, se realiza un estudio exploratorio por el método de Montecarlo que parece indicar que la aproximación es muy buena. En la Sección 5 se aplican los resultados de las secciones 3 y 4 al

cual P varía sobre familias $P'(q)$ y $Q'(q)$ que son de uso frecuente en la aplicación práctica de procedimientos de selección de la ecuación de regresión óptima.

3. LA VARIABLE V. En esta sección supondremos que el vector de errores e definido en (2.3) tiene distribución normal con $E(e) = 0$, $E(ee') = \sigma^2 I$. Bajo este supuesto las variables aleatorias Z_k/σ^2 forman un conjunto de variables aleatorias independientes cada una con distribución $\chi^2_{(1)}$.

TEOREMA 3.1. *La variable aleatoria* V *definida por* (2.11) *puede expresarse como*

$$V = \frac{1}{n-q} \sum_{k=1}^{n-q} Z_{(k)} \tag{3.1}$$

donde $Z_{(1)}, Z_{(2)}, \ldots, Z_{(n-r)}$ *es el estadístico de orden correspondiente a* $Z_{r+1}, Z_{r+2}, \ldots, Z_n$.

Demostración. Sea $P = (p_1, p_2, \ldots, p_s)' \in Q(q)$. Entonces se tiene

$$\frac{1}{n-s} \sum_{k \in P} Z_k \geqslant \frac{1}{n-s} \sum_{k=1}^{n-s} Z_{(k)}$$

Por otra parte puesto que $Z_{(1)} \leqslant Z_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant Z_{(n-q)}$ se tiene $\frac{1}{n-s} \sum_{k=1}^{n-s} Z_{(k)} \geqslant \frac{1}{n-q} \sum_{k=1}^{n-q} Z_{(k)}$.

Por lo tanto $\frac{1}{n-s} \sum_{k \in P} Z_k \geqslant \frac{1}{n-q} \sum_{k=1}^{n-q} Z_{(k)}$ y entonces $V \geqslant \frac{1}{n-q} \sum_{k=1}^{n-q} Z_{(k)}$.

Por otra parte, puesto que $(n-q)^{-1} \sum_{k=1}^{n-q} Z_{(k)}$ es una de las variables de la familia sobre la cual se toma el mínimo, vale la desigualdad en el otro sentido. Esto completa la demostración.

La siguiente proposición la cual es un caso particular del Corolario 4.4 de Bickel (1967) es útil pues nos da una aproximación conveniente para $E(V)$.

PROPOSICION 3.1. *Sean* $X_1, X_2, \ldots, X_m$ *variables aleatorias independientes e identicamente distribuídas con función de distribución* G *y función de densidad* g. *Supongamos que* $E(X_1^2) < \infty$ *y que existe* A *tal que* g *es monótona para* $|x| > A$. *Definamos* V_m *mediante*

$$V_m = \frac{1}{m-p} \sum_{k=1}^{m-p} X_{(k)}$$

donde $X_{(1)},X_{(2)},\ldots,X_{(m)}$ *denota el estadístico de orden. Entonces si* $0 < \alpha < 1$

$$\lim_{m\to\infty,\,(m-p)/m\to\alpha} \sqrt{m}\,[E(V_m) - \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} G^{-1}(t)dt] = 0. \tag{3.3}$$

Sean F y f las funciones de distribución y de densidad de probabilidad de las variables Z_k, respectivamente. Bajo el supuesto de distribución gaussiana del vector de errores e se satisfacen todas las hipótesis de la Proposición 3.1. Identificando $(Z_{r-1},Z_{r-2},\ldots,Z_n)'$ con $(X_1,X_2,\ldots,X_m)$ se deduce que E(V) puede aproximarse por

$$E(V) \cong \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} F^{-1}(u)\,du \quad \text{donde} \quad \alpha = (n-q)/(n-r). \tag{3.4}$$

Puesto que

$$\sigma^2 = E(Z_k) = \int_0^1 F^{-1}(u)\,du \tag{3.5}$$

la función $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(\alpha)$ definida por

$$\tilde{\lambda}(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\int_0^{\alpha} F^{-1}(u)\,du}{\int_0^1 F^{-1}(u)\,du} \tag{3.6}$$

puede tomarse como una aproximación para λ.

Mediante el cambio de variable $u = F(t)$, $\tilde{\lambda}$ puede escribirse como

$$\tilde{\lambda}(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\int_0^{x} f(t)\,t\,dt}{\int_0^{\infty} f(t)\,t\,dt} \quad , \quad x = F^{-1}(\alpha). \tag{3.7}$$

Sin pérdida de generalidad se puede suponer $\sigma^2 = 1$ de modo que

$$f(t) = (2\pi)^{-1/2}\,t^{-1/2}\exp(-t/2) \quad , \quad t \geqslant 0 \tag{3.8}$$

$$F(t) = 2\phi(t^{1/2}) - 1 \quad , \quad t \geqslant 0.$$

donde $\phi(t) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{t} \exp(-u^2/2)\,du.$

Reemplazando (3.8) en (3.7) y resolviendo las integrales se obtiene

$$\tilde{\lambda}(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\,[\,2\phi(\sqrt{x}) - 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sqrt{x}\,\exp(-x/2)] \quad \text{donde} \quad x = F^{-1}(\alpha).$$

En la tabla 3.1 se dan los valores de $\tilde{\lambda}(\alpha)$ para α = 0.25 ; 0.50 ; 0.75;

α	0	0,25	0,50	0,75	0,90	0,99	1,00
$\tilde{\lambda}(\alpha)$	0,000	0,034	0,103	0,368	0,624	0,925	1,00

Tabla 3.1

La tabla 3.1 muestra que la magnitud de la mejora ficticia de la bondad del ajuste es importante aún para valores pequeños de la razón $\beta = 1-\alpha = (q-r)/(n-r)$. Todo el análisis precedente está basado en la hipótesis de que el vector de errores e tiene distribución gaussiana. Es de esperar que resultados análogos valgan si se cambia la hipótesis de normalidad por una hipótesis más general. Sin embargo el análisis de este caso es más difícil pues las variables Z_k no son ya independientes e idénticamente distribuídas, según se deduce de una conocida caracterización de la distribución normal (ver Feller (1966), pág. 77).

4. LA VARIABLE U. En esta sección estudiamos λ para el caso de la familia $P(q)$. Supondremos que el vector de errores e tiene distribución normal con parámetros $E(e) = 0$, $E(ee') = \sigma^2 I$.

TEOREMA 4.1. *La variable* U *definida por* (2.10) *puede representarse como:*

$$U = \min_{0\le s\le q-r} \frac{1}{n-s}\Big[\sum_{k=q+1}^{n} Z_k + \sum_{k=1}^{q-s} Z_{(k)}\Big] \tag{4.1}$$

donde $Z_{(1)}, Z_{(2)}, \ldots, Z_{(q-r)}$ *es el estadístico de orden correspondiente a* $Z_{r+1}, Z_{r+2}, \ldots, Z_q$.

Demostración. Sea $P \in P(q)$, $A(P) = \{r+1, r+2, \ldots, q\} - \{p_{r+1}, p_{r+2}, \ldots, p_s\}$. Entonces

$$\hat{\sigma}^2_{(P)} = \frac{1}{n-s}\Big[\sum_{k=q+1}^{n} Z_k + \sum_{k\in A(P)} Z_k\Big] \le \frac{1}{n-s}\Big[\sum_{k=q+1}^{n} Z_k + \sum_{k=1}^{q-s} Z_{(k)}\Big] \tag{4.2}$$

y por lo tanto

$$U \ge \min_{s} \frac{1}{n-s}\Big[\sum_{k=q+1}^{n} Z_k + \sum_{k=1}^{q-s} Z_{(k)}\Big]. \tag{4.3}$$

Por otra parte el conjunto de vectores P sobre el cual se calcula el mínimo en el segundo miembro de (4.1) es un subconjunto de $P(q)$. Por lo tanto

$$U \le \min_{s} \frac{1}{n-s}\Big[\sum_{k=q+1}^{n} Z_k + \sum_{k=1}^{q-s} Z_{(k)}\Big]. \tag{4.4}$$

De (4.3) y (4.4) se sigue la conclusión del teorema.

COROLARIO 4.1. *Si* $E|X_{(k)}| < \infty$, $k = 1,2,\ldots,n$, *entonces*

$$E(U) \leq \min_{0\leq s\leq q-r} \frac{1}{n-s} [(n-q)\sigma^2 + \sum_{k=1}^{q-s} E(Z_{(k)})] .$$

Demostración. La conclusión sigue de inmediato de (4.4).

Supongamos que el vector de errores e tiene distribución normal con parámetros $E(e) = 0$, $E(ee') = \sigma^2 I$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\sigma^2 = 1$. Entonces Z_k, $k = 1,2,\ldots,n$, tiene distribución $\chi^2_{(1)}$ cuya función de distribución denotamos por F. Una aproximación conveniente para la cota del Corolario 4.1 puede obtenerse reemplazando $\frac{1}{n-s} \sum_{k=1}^{q-s} E(Z_{(k)})$ por la aproximación, proporcionada por el Teorema 3.1, que sigue:

$$\frac{q-r}{n-s} \int_0^{(q-s)/(q-r)} F^{-1}(u)\, du$$

Así se obtiene la siguiente estimación $K(\beta)$ de la cota del Corolario 4.1

$$K(\beta) = \inf_x \frac{(1-\beta) + \beta \int_0^x F^{-1}(u)\, du}{(1-\beta) + x\beta}$$

donde $\beta = 1-\alpha = (q-r)/(n-r)$.

La Tabla 4.1 da los valores de $K(\beta)$ para $\beta = 0{,}1;\ 0{,}25;\ 0{,}50;\ 0{,}75;\ 1$.

β	1,00	0,75	0,50	0,25	0,10
$K(\beta)$	0,00	0,46	0,69	0,86	0,95

Tabla 4.1

A fin de tener alguna información acerca de la proximidad de la función $K(\beta)$ a la función $\lambda = E(U)/\sigma^2$ se ha estimado λ por el método Monte Carlo tomando 100 muestras de tamaño n = 40. Los resultados figuran en la Tabla 4.2.

β	1,00	0,75	0,50	0,25	0,00
λ	0,00	0,44	0,67	0,83	1,00

Tabla 4.2

La comparación de las tablas 4.1 y 4.2 muestra que la función $K(\beta)$ es una buena aproximación para λ.

Del examen de la Tabla 4.1 se concluye que la magnitud de la mejora ficticia de la bondad de ajuste es importante aunque sensiblemente menor

r, q sólo a través de $\beta = (q-r)/(n-r)$.

5. APLICACION AL ANALISIS DEL PROBLEMA DE SELECCION DE LA MEJOR ECUACION DE REGRESION.

El problema conocido con el nombre de "Selección de la mejor ecuación de regresión" es un problema que admite más de una solución. El concepto: *mejor ecuación de regresión* tiene en general significados diferentes, dependiendo del problema en consideración. Por otra parte la introducción de dicho concepto constituye en el mejor de los casos una simplificación del problema a fin de facilitar su solución. El juicio personal aplicado al análisis del problema en consideración es un ingrediente importante en la solución de todo problema de selección de la mejor ecuación de regresión. En consecuencia no existe un único procedimiento estadístico para resolver el problema. Entre los procedimientos empleados podemos citar:

(1) Elegir la ecuación de regresión que minimiza el estadístico C_p de Mallows (ver Daniel C. (1971), Cap. 6),

(2) Elegir la ecuación de regresión que minimiza el error cuadrático medio estimado,

(3) Procedimientos de selección de las variables regresoras basados en tests F individuales,

(4) Selección de las variables regresoras en base al coeficiente de correlación múltiple R^2.

En la solución de un problema dado, además de la aplicación de alguno de los procedimientos arriba descriptos o de algún otro, se tienen en cuenta otros factores, pero no es el momento de considerarlos aquí.

Los procedimientos conocidos con los nombres de: Eliminación progresiva, Ampliación progresiva y Regresión en etapas, pertenecen a los procedimientos definidos por (3).

El coeficiente de correlación múltiple R^2 debe emplearse con mucha precaución por cuanto R^2 no tiene en cuenta el incremento del error cuadrático medio estimado, por pérdida de grados de libertad (ver Draper and Smith (1966), pág. 63 y 118). El método (2) constituye una variante de (4) sin ese defecto. En efecto, si definimos el coeficiente de correlación múltiple corregido por grados de libertad por

$$R_c^2 = 1 - \frac{\hat{\sigma}^2_{(P)}}{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\bar{Y})^2} \qquad (5.1)$$

entonces el procedimiento (2) consiste en maximizar R_c^2.

Los resultados de las secciones 3 y 4 se refieren a procedimientos del tipo (2) los cuales, en esta sección serán extendidos a familias P'(q)

y $Q'(q)$ que son de uso frecuente en la aplicación de métodos de selección de la mejor ecuación de regresión.

En el caso del procedimiento (1) como la mejor ecuación de regresión se obtiene minimizando C_p, obviamente se produce también una mejora aparente de la bondad de ajuste de la ecuación óptima. El autor tiene en progreso un trabajo al respecto.

Un análisis cuidadoso del problema específico a resolver por regla general conducirá a la individualización de un conjunto de variables $X_1, X_2, \ldots, X_q$ que contiene todas las variables relevantes. De manera que la hipótesis de que existe un conjunto de r variables que satisfacen el modelo de regresión (2.3) es plausible. Más aún, esta hipótesis es con frecuencia asumida explicitamente en el uso de los métodos de selección de la mejor ecuación de regresión. (ver Daniel C. (1971), pág. 83).

Las familias de ecuaciones de regresión definidas por $P(q)$ y $Q(q)$, dentro de las cuales se busca la ecuación de regresión óptima, no son familias empleadas en la aplicación práctica de los métodos de selección de la mejor ecuación de regresión y su elección ha sido una cuestión de conveniencia. Sin embargo, los resultados obtenidos en las secciones 3 y 4 son esencialmente válidos para familias empleadas en la práctica y que definimos en lo que sigue.

La situación que se presenta con mayor frecuencia es aquélla en la cual después de un análisis cuidadoso del problema se ha determinado un conjunto de q variables potencialmente importantes: $X_1, X_2, \ldots, X_q$, y la familia en consideración consiste de todas las ecuaciones de regresión que se pueden construir usando un número cualquiera de estas variables, con la condición de que todas contengan un término constante, que escribiremos en la forma $\beta_1 X_1$ con $X_1 = 1$. Esta familia será denotada por $P'(q)$. Luego,

$$(5.2) \qquad P'(q) = \{(p_1, p_2, \ldots, p_s)' : 1 = p_1 < p_2 < \ldots < p_s \leqslant q\}.$$

Otra situación que puede presentarse en la práctica es aquélla en la cual se tiene un conjunto de n variables potencialmente importantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$, dentro de las cuales se desea elegir la mejor ecuación de regresión con las restricciones de que X_1 esté siempre presente y no se usen más de q variables, $q < n$. Denotaremos a esta familia por $Q'(q)$. Luego

$$(5.3) \qquad Q'(q) = \{(p_1, p_2, \ldots, p_s)' : 1 = p_1,\ 2 \leqslant p_i \leqslant n,\ i=2,\ldots,s,\ s \leqslant q\}.$$

Obviamente se tiene $P(q) \subset P'(q)$ y $Q(q) \subset Q'(q)$. Por lo tanto si λ' se define por

donde P varía en $P'(q)$ o en $Q'(q)$, según sea el caso en consideración, se tiene

$$\lambda' \leqslant \lambda.$$

Puesto que $P \in P'(q)-P(q)$ (o $P \in Q'(q)-Q(q)$) implica que se ha omitido por lo menos una variable relevante, $\hat{\sigma}^2_{(P)}$ será una variable (estrictamente) estocásticamente mayor que $\hat{\sigma}^2_{(Q)}$ para todo $Q \in P(q)$ (o $Q \in Q(q)$). De aquí se deduce que en general el número λ debe ser una buena aproximación (por exceso) para λ'. En consecuencia los resultados de las secciones 3 y 4 son válidos para el análisis del procedimiento de elección de la ecuación de regresión óptima sobre las familias $P'(q)$ y $Q'(q)$. La mejora aparente para estos casos es mayor que la que muestran las tablas 3.1 y 4.1. Aún en aquellos casos en que λ no sea una buena aproximación para λ', los resultados de las secciones 3 y 4 son útiles pues proporcionan cotas para el mínimo de la mejora ficticia, es decir, la mejora ficticia es por lo menos de la magnitud de dichas cotas.

Debe tenerse presente que todo el análisis precedente es válido bajo el supuesto de que el vector $(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)'$ tiene distribución normal y las columnas de $X_{(n)}$ forman un conjunto de n vectores ortonormales. En el caso de la familia $P'(q)$ el supuesto de ortonormalidad es requerido para las primeras q columnas de $X_{(n)}$. Las variables $X_{q+1},\ldots,X_n$ no son regresores sino que representan una partición ortogonal de la suma de cuadrados residual correspondiente al modelo que incluye las variables $X_1,X_2,\ldots,X_q$.

6. AGRADECIMIENTOS. El autor desea expresar su agradecimiento a la Lic. Zulema Cardozo quien ha realizado la simulación cuyo resultado se incluye en la Sección 4.

REFERENCIAS

[1] ANDERSON T. W. (1962), *The choice of the degree of a polynomial regresion as a multiple decision problem*, Ann. Math. Statist., Vol. 33 p. 255-265.

[2] DRAPER N. R. and SMITH H. (1966), *Applied regresion analysis*, John Wiley and Sons.

[3] FELLER W. (1966), *An introduction to Probability Theory and its applications*, Vol. II, John Wiley and Sons.

[4] GORMAN J. W. and TOMAN R. L. (1966), *Selection of variables for fitting equations to data*, Technometrics Vol. 8, p. 27-51.

[5] SCHEFFE H. (1959), *The analysis of variance*, John Wiley and Sons.

[6] BICKEL P. (1967), *Some contributions to the theory of order statistics*, Fifth Berkeley Symposium, p. 575-591.

[7] DANIEL C. and WOOD F. (1971), *Fitting Equations to Data*. Wiley-Interscience.

Instituto de Matemática
Facultad de C. Exactas y Tec.
Universidad Nacional de Tucumán
(4000) San Miguel de Tucumán
Argentina.

Recibido en julio de 1977.

Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 29, 1979.

APROXIMACION DE CONJUNTOS ESTRELLADOS COMPACTOS POR FAMILIAS ESPECIALES

Fausto A. Toranzos

Dedicado al Profesor Luis A. Santaló

ABSTRACT. It is well known that every convex compact set of R^n can be approximated, in the sense of Hausdorff-Blaschke, by members of two particular families, that of convex polytopes, and that of smooth and rotund convex bodies. The aim of this note is to generalize those results to compact starshaped sets of R^n.

1. INTRODUCCION Y DEFINICIONES BASICAS.

Una técnica de uso general en la teoría de conjuntos convexos de dimensión finita es la aproximación de un convexo compacto por miembros de una familia particular, densa en la métrica de Hausdorff-Blaschke. De tal forma, resultados fáciles de obtener para los miembros de dicha familia pueden ser extendidos "por continuidad" para cualquier convexo compacto. Esta técnica se aplica usando como familia especial la de los polítopos convexos, que tienen una estructura facial sencilla, o bien la familia de los "convexos regulares", es decir convexos compactos, suaves y rotundos. Estos últimos conjuntos tienen la particularidad de que la correspondencia (hiperplano de apoyo) $\leftrightarrow$ (punto frontera) es biyectiva. Para los correspondientes teoremas de densidad nos remitimos a los textos generales de Convexidad, por ejemplo [2], [8] ó [9].

En esta nota trataremos de generalizar tales resultados sustituyendo la convexidad del conjunto a aproximar por la condición de ser estrellado. Por supuesto, las familias aproximantes serán "polítopos estrellados" y "estrellados suaves", respectivamente. La primera de estas generalizaciones había sido enunciada en [5] para R^3, aunque no se daba allí ninguna demostración. Un esbozo de demostración para el caso de polítopos estrellados aparece en el parágrafo V.4 de [8].

Sea $A \subset R^n$, x e y dos puntos de A. Diremos que x ve a y vía A si el segmento [x;y] está incluído en A. La estrella de x en A es el conjunto st(x;A) de todos los puntos de A que ven a x vía A. Diremos que x es un punto radiante de A si st(x;A) = A, es decir si x ve a todo A. El mirador de A es el conjunto mir A de todos los puntos radiantes de A. Diremos que A es estrellado si mir $A \neq \emptyset$, es decir, si A tiene al

menos un punto radiante.

Una componente convexa de A es un subconjunto convexo maximal. Diremos que una familia de componentes convexas de A es cobertora si la unión de dicha familia es A. Es conocido que mir A es la intersección de cualquier familia cobertora de componentes convexas de A. La primera demostración de este resultado es el lema que precede al teorema 2 de [6]. Un conjunto estrellado es simple si admite una familia cobertora finita de componentes convexas. Un polítopo estrellado es un conjunto estrellado simple cuya familia cobertora finita está integrada por polítopos convexos. En otras palabras, un polítopo estrellado es la unión de una familia finita de polítopos convexos, cuya intersección sea no vacía.

Indicaremos con $\&_n$ a la familia de todos los conjuntos estrellados compactos de R^n que tengan al origen de coordenadas θ como punto interior de su mirador. Entonces, si $A \in \&_n$ cualquier semirrecta que parta del origen intersecará a A en un segmento cerrado. Si denotamos con S la superficie esférica unitaria, podemos definir la función radial de A como la función $\rho_A : S \to R^+$ tal que $\rho_A(x)$ es la longitud de la intersección de A con la semirrecta que parte de θ y pasa por x. Diremos que el conjunto estrellado A es suave si su función radial es diferenciable. Cuando tratemos convergencia de funciones continuas emplearemos la llamada "norma del supremo" o "norma de la convergencia uniforme" definida así:

$$\|f\| = \sup \{|f(x)| \mid x \in D\}$$

donde D representa el dominio de f. En particular, si dicho dominio es compacto, como en el caso de las funciones radiales, corresponde tomar máximo en lugar de supremo.

El entorno de radio ε del conjunto A es el conjunto

$$B(A;\varepsilon) = \{x \mid \text{existe } y \in A \text{ con } d(x,y) \leqslant \varepsilon\}$$

Si C y D son conjuntos compactos de R^n, la distancia de Hausdorff entre C y D es el número

$$d(C,D) = \inf \{\varepsilon > 0 \mid D \subset B(C;\varepsilon) \text{ y } C \subset B(D;\varepsilon)\}$$

Es bien conocido que la familia de los conjuntos compactos de R^n con la distancia de Hausdorff forma un espacio métrico que goza de la propiedad de Borel-Lebesgue. Más aún, la subfamilia de los convexos compactos es cerrada en este espacio (Blaschke). Recientemente, Hirose [4] ha demostrado que lo mismo vale para la subfamilia de los estrellados compactos.

2. APROXIMACION POR POLITOPOS ESTRELLADOS.

LEMA 2.1.: *Sea* P *un polítopo estrellado en* R^n. *Entonces* mir P *y* conv P *son polítopos convexos.*

Demostración. Sea $\{K_i \mid i = 1,2,\ldots,j\}$ una familia cobertora de componentes convexas de P constituída por polítopos convexos. Entonces mir P = $\bigcap_{i=1}^{j} K_i$ es un polítopo convexo. Por otra parte, sea E_i = ex K_i el conjunto de puntos extremales de K_i, y sea E la unión de los j conjuntos E_i. Es claro que E es un conjunto finito, y que además conv P = = conv E. Luego conv P es un polítopo convexo.

LEMA 2.2. *Sea* L *un conjunto estrellado y cerrado en* R^n. *Entonces existe una sucesión* $\{L_k \mid k \in N\}$ *de estrellados simples y cerrados que converge a* L *en la métrica de Hausdorff. Más aun,* L_k *converge a* L *en forma monótona creciente, mientras que* mir L_k *converge a* mir L *en forma monótona decreciente.*

Demostración. Sea A = $\{a_1; a_2; a_3; \ldots\}$ un subconjunto numerable y denso en L. Para cada $k \in N$ sea K_k una componente convexa de L que contenga al punto a_k. Una aplicación rutinaria del lema de Zorn asegura la existencia de dicha componente convexa. Entonces definamos $L_k = \bigcup_{i=1}^{k} K_i$. Es fácil verificar que la sucesión $\{L_k \mid k \in N\}$ cumple todas las conclusiones del lema.

Veamos ahora la posibilidad de aproximar estrellados simples por polítopos estrellados.

LEMA 2.3. *Sea* L *un conjunto estrellado simple y compacto en* R^n *y sea* $\varepsilon > 0$. *Entonces existe un polítopo estrellado* P *que verifica* $P \subset L \subset B(P;\varepsilon)$.

Demostración. Sea $\{K_i \mid i = 1; 2; \ldots; j\}$ una familia cobertora finita de componentes convexas de L. Por un bien conocido teorema de aproximación (ver, por ejemplo, el teorema 12.3 de [9], o bien el teorema V.1.6 de [8]) para cada i existe un polítopo convexo P_i tal que $P_i \subset K_i \subset B(P_i;\varepsilon)$. Entonces, si definimos a P como la unión de estos j polítopos, resulta que tal P satisface la tesis.

TEOREMA 2.4. *Sea* L *un conjunto estrellado compacto en* R^n, *y sea* $\varepsilon > 0$. *Existe un polítopo estrellado* P *tal que* $P \subset L \subset B(P;\varepsilon)$.

Demostración. Por el lema 2.2, existe L_o estrellado simple y compacto tal que $L_o \subset L \subset B(L_o;\varepsilon/2)$. Pero entonces, por el lema 2.3 existe un polítopo estrellado P tal que $P \subset L_o \subset B(P;\varepsilon/2)$. De ambas aproximaciones, y gracias a propiedades elementales de la métrica de Hausdorff (ver, por ejemplo, el lema V.1.1 de [8]), resulta:

$$P \subset L_o \subset L \subset B(L_o;\varepsilon/2) \subset B(B(P;\varepsilon/2);\varepsilon/2) = B(P;\varepsilon)$$

En el caso especial en que mir L tuviera interior no vacío es posible mejorar el teorema anterior para obtener simultáneamente aproximaciones de L "desde adentro" y "desde afuera" por polítopos estrellados homotéticos.

TEOREMA 2.5. *Sea* $L \in \mathfrak{E}_n$ *y* $\gamma > 1$. *Entonces existe un polítopo estrellado* P *tal que* $P \subset L \subset \gamma P$, *donde* γP *es la imagen de* P *por una homotecia de razón* γ.

Demostración. Sea $\alpha > 0$ tal que $B(\theta;\alpha) \subset$ mir L. Elegimos ε tal que $0 < \varepsilon < \alpha(\gamma-1)$. Por el teorema 2.4 existe un polítopo estrellado P tal que $P \subset L \subset B(P;\varepsilon)$. Si definimos $\gamma P = \{\gamma x \mid x \in P\}$ es fácil verificar, siguiendo las líneas del teorema 12.4 de [9], o bien del teorema V.1.9 de [8], que vale $B(P,\varepsilon) \subset \gamma P$. Es claro que γP es un polítopo estrellado, y que $\theta \in$ mir γP.

3. APROXIMACION POR ESTRELLADOS SUAVES.

La necesidad de aproximación de estrellados por polítopos se justifica fácilmente, ya que es claro que para estos últimos resulta más sencillo introducir conceptos métricos como volumen, superficie, etc. No es tan inmediato entender la necesidad de teoremas de aproximación por conjuntos estrellados suaves. Sin embargo, la geometría de conjuntos estrellados emplea frecuentemente conceptos locales, en particular la diferenciabilidad de su frontera. Por ejemplo, en [3] se obtiene una descripción del mirador de un conjunto estrellado plano cuya frontera sea diferenciable, a partir de sus puntos de inflexión, es decir de aquellos puntos en que la curvatura de la frontera cambia de sentido. En [7] se utiliza la suavidad de una figura estrellada para resolver un problema extremal sobre su perímetro.

Es bien conocido que si $A \in \mathfrak{E}_n$ su función radial es lipschitziana. En [6] se calcula la constante de Lipschitz óptima para las funciones radiales de los conjuntos de $\mathfrak{E}_n$ contenidos en la bola B_1 y tales que su mirador contiene otra bola concéntrica B_2. Recíprocamente, toda función lipschitziana $f: S \longrightarrow R^+$ da origen a un estrellado de $\mathfrak{E}_n$, como veremos en el lema siguiente.

LEMA 3.1. *Sean* A_1 *y* A_2 *elementos de* $\mathfrak{E}_n$ *con funciones radiales* ρ_1 *y* ρ_2 *respectivamente. Entonces* $d(A_1,A_2) \leqslant \|\rho_1-\rho_2\|$.

Demostración. Para cada $x \in S$ sea $x_1 = \rho_1(x).x$; $x_2 = \rho_2(x).x$. Entonces,

$$A_1 = \bigcup_{x \in S} [\theta ; x_1] \qquad ; \qquad A_2 = \bigcup_{x \in S} [\theta ; x_2]$$

Supongamos entonces que $\|\rho_1 - \rho_2\| = \alpha$, y sea $t \in A_1$, $t \neq \theta$ y denotemos con I_1 la intersección de A_1 con la semirrecta que sale del origen y pasa por t. Análogamente I_2 será la intersección de A_2 con dicha semirrecta. La diferencia entre estos dos intervalos será un segmento de longitud menor o igual a α. Entonces existe $t' \in A_2$ tal que $d(t,t') \leqslant \leqslant \alpha$. Como esto vale para todo $t \in A_1$ resulta $A_1 \subset B(A_2;\alpha)$. Análogamente $A_2 \subset B(A_1;\alpha)$. Por lo tanto, $d(A_1,A_2) \leqslant \alpha$.

TEOREMA 3.2. *Para todo* $A \in \mathfrak{K}_n$ *existe una sucesión de estrellados suaves* $\{A_j \mid j \in N\}$ *que converge a* A *en la métrica de Hausdorff.*

Demostración. Sea ρ la función radial de A. Entonces, por el clásico teorema de aproximación de Weierstrass en R^n (ver, por ejemplo,[1] teorema 7.4.1) existe una sucesión $\{p_j \mid j \in N\}$ de polinomios en n variables, tales que $\lim \|\rho - p_j\| = 0$. Para cada $j \in N$ sea A_j el conjunto estrellado suave que tiene a p_j como función radial y que se construye de la manera indicada en el lema anterior. Entonces resulta, precisamente por el lema 3.1., $\lim d(A,A_j) = 0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] DIEUDONNE, J., *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York, 1960.

[2] EGGLESTON, H.G., *Convexity*, Cambridge University Press, Cambridge, 1958.

[3] HALPERN, B., *The kernel of a starshaped subset of the plane*, Proc. Amer. Math. Soc. 23 (1969) 692-696.

[4] HIROSE, T., *On the convergence theorem for starshaped sets in* E^n, Nagoya Math. Journal 41 (1969) 209-211.

[5] MELZAK, Z.A., *A class of star-shaped bodies*, Can. Math. Bull. 2 (1959) 175-180.

[6] TORANZOS, F.A., *Radial functions of convex and starshaped bodies*, Amer. Math. Monthly 74 (1967) 278-280.

[7] TORANZOS, F.A., *Perímetro de figuras estrelladas*, a aparecer.

[8] TORANZOS, F.A. y NANCLARES, J.H., *Convexidad*, Colección Cursos, Seminarios y Tesis del Programa de Estudios Avanzados en Matemática, Universidad del Zulia, Maracaibo, 1978.

[9] VALENTINE, F.A., *Convex sets*, McGraw-Hill, New York, 1964.

Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias
Universidad del Zulia
Maracaibo, Venezuela

Recibido en mayo de 1978.

Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 29, 1979.

EXISTENCE OF A FUNCTIONAL CALCULUS OVER SOME ALGEBRAS OF PSEUDO-DIFFERENTIAL OPERATORS

Josefina Alvarez Alonso

Dedicado al Profesor Luis A. Santaló

ABSTRACT. First, we introduce a general notion of functional calculus over an algebra of operators, relative to an algebra of functions. Next, we apply this notion to the cases of certain pseudo-differential operators and certain regularizing operators. We give a functional calculus over some algebras of classes of those pseudo-differential operators, relative to $C^\infty(R)$. Also, we obtain a functional calculus over regularizing self-adjoint operators, relative to some real continuous functions.

INTRODUCTION. Let A be a bounded, linear, self-adjoint operator defined in a Hilbert space H. If **P** represents the algebra of one variable polynomials with real coefficients, it is known that the map

$$\mathbf{P} \longrightarrow L(H)$$

$$P = a_0+a_1t+\ldots+a_nt^n \longrightarrow P(A) = a_0I+a_1A+\ldots+a_nA^n$$

is continuous, if **P** is provide with the topology of uniform convergence in the compact sets of R.

Thus, we can define f(A) for any continuous function $f:R\longrightarrow R$. In this way, we determine what is usually called a functional calculus over the real sub-algebra of L(H), generated by the self-adjoint operator A.

Here, we first intend to give a more precise notion of a functional calculus over an algebra of operators. Next, we introduce some algebras of classes of pseudo-differential operators, and we study the possibility of defining a functional calculus over them, in the following way: If **K** is some of these algebras with the composition of representatives as a product, there exists a functional calculus over **K** given by

$$\mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{K}$$

$$P \longrightarrow P(A) \qquad \text{for } A \in \mathbf{K}, \text{ fixed}$$

What we do then, is to endowe **P** and **K** with adequate topologies, such

that this map is continuous, and can be extended to a reasonably wide class of functions. This is developed in Section 2.

In Section 3, we define a functional calculus over each algebra introduced. There, we find the same asymptotic expansion obtained by Strichartz in [1]. To estimate the order of each term in this expansion, we include the proof of Strichartz, adapted to our situation.

In Section 1, we study a general notion of functional calculus.

For a theory of pseudo-differential operators, see [2].

As we said above, we obtain here a functional calculus over classes of pseudo-differential operators. Using these results, it is possible to define an "exact" functional calculus. This, will be the subject of other paper, in preparation with Prof. A.P. Calderón.

1. A NOTION OF FUNCTIONAL CALCULUS.

P will always denote the algebra of one variable polynomials, with real coefficients.

DEFINITION 1.1. Let **F** be a real algebra of functions $f: R \longrightarrow R$, with the pointwise multiplication product; we suppose that **P** is contained in **F**. Let **K** denote a real algebra of operators that are defined from some topological vector space into itself, with the composition as a product.
A functional calculus over **K** with respect to **F**, is a map

$$\mathbf{F} \times \mathbf{K} \xrightarrow{\theta} \mathbf{K}$$

$$(f,A) \longrightarrow \theta(f,A) = f(A)$$

that verifies:

1) If $\underline{1}$ is the function with constant value 1 and **K** is a unitary algebra with identity I, $\theta(\underline{1},A) = I$, $\forall\, A \in \mathbf{K}$.

2) If $\underline{t}$ is the function $f(t) = t$, $\theta(\underline{t},A) = A$, $\forall\, A \in \mathbf{K}$.

3) $\theta(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, A) = \alpha_1 \theta(f_1,A) + \alpha_2 \theta(f_1,A)$, $\forall\, \alpha_i \in R$, $f_i \in \mathbf{F}$, $A \in \mathbf{K}$.

4) $\theta(f_1 . f_2, A) = \theta(f_1,A) \circ \theta(f_2,A)$, $\forall\, f_i \in \mathbf{F}$, $A \in \mathbf{K}$.

These axioms, are satisfied by the example given in the introduction; but this calculus, verifies also the following supplementary property:

$$f_1 \circ f_2(A) = f_1[f_2(A)]$$

Accordingly, we state:

5) If the algebra **F** is closed under composition, then

$\theta(f_1, \theta(f_2,A)) = \theta(f_1 \circ f_2, A)$, $\forall\, f_i \in \mathbf{F}$, $A \in \mathbf{K}$.

THEOREM 1.1. *We suppose* **F** *and* **K** *with structures of Fréchet algebras such that:* *i)* **P** *is dense in* **F**.

ii) Given $A \in \mathbf{K}$, *the map*

$$\mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{K}$$

$$P \longrightarrow P(A) \qquad \textit{is continuous.}$$

Then, there exists a unique way of extending the basic calculus P(A), *to a functional calculus* θ *over* **K** *, with respect to* **F**.
Moreover, we suppose:

iii) **F** *is closed under composition. The map*

$$\mathbf{F} \times \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{F}$$

$$(f,g) \longrightarrow f \circ g \textit{ is continuous in each variable.}$$

iv) The map

$$\mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{K}$$

$$A \longrightarrow P(A) \qquad \textit{is continuous, given } P \in \mathbf{P}.$$

Then, the functional calculus θ *is complete.*

Proof. The map $P \longrightarrow P(A)$, is linear and continuous, defined in countably semi-normed spaces; moreover, **P** is dense in **F** and **K** is complete; so, this map can be extended in a unique way to **F** .

Let θ this extension, that determines a map $\theta : \mathbf{F} \times \mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{K}$. It is not difficult, by passage to the limit, to verify that θ is a functional calculus. With respect to the completeness, we have to show that $\theta(f_1, \theta(f_2, A)) = \theta(f_1 \circ f_2, A)$, $\forall\, f_i \in \mathbf{F}$, $A \in \mathbf{K}$:

Given $f_1, f_2 \in \mathbf{F}$, let $\{P_k\}$, $\{Q_j\}$ be sequences in **P**, such that $P_k \longrightarrow f_1$, $Q_j \longrightarrow f_2$, in **F** . $\forall\, k, j \geqslant 1$, we have $\theta(P_k, \theta(Q_j, A)) = \theta(P_k \circ Q_j, A)$. For $k \geqslant 1$, $A \in \mathbf{K}$ fixed, let $j \longrightarrow \infty$. Under the hypothesis made, is

$$\theta(P_k, \theta(f_2, A)) = \theta(P_k \circ f_2, A), \quad \forall\, k \geqslant 1.$$

Now, we let $k \longrightarrow \infty$; making use again of the hypothesis, we conclude the completeness of θ.

REMARK 1.1. We replace in Theorem 1.1 the condition ii) by

ii)' The map $\mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{K}$

$P \longrightarrow P(A)$

is continuous, uniformly with respect to A on the bounded sets of **K**. Then, the functional calculus θ, is also continuous in the second variable.

In fact, given $f \in \mathbf{F}$, $A \in \mathbf{K}$, let $\{B_j\} \subset \mathbf{K}$ be a sequence such that $B_j \longrightarrow A$ in **K**. We have to show, that $\theta(f,A) = \lim \theta(f, B_j)$.
Let $\{P_k\} \subset \mathbf{P}$, with $P_k \longrightarrow f$ in **F**. If $\| \ \|$ denotes any of the semi-norms

defining the topology in $\mathbf{K}$, we have:

$$\|\theta(f,B_j) - \theta(f,A)\| \leq \|\theta(f,B_j) - \theta(P_k,B_j)\| +$$
$$+ \|\theta(P_k,B_j) - \theta(P_k,A)\| + \|\theta(P_k,A) - \theta(f,A)\| .$$

The sequence $\{B_j\}$ together with its limit A, form a bounded set in $\mathbf{K}$; so that, by ii)', we can make the first and the third term in the right member $< \varepsilon/3$, $\varepsilon > 0$ given, for $k \geq k_o(\varepsilon)$, not depending on j.

Now, if we fix $k = k_o$, we can make the second term $< \varepsilon/3$, for $j \geq j_o(\varepsilon)$, by the condition iv) of Theorem 1.1.

2. SOME ALGEBRAS OF CLASSES OF PSEUDO-DIFFERENTIAL OPERATORS.

First, we remind some definitions and basic properties from the theory of pseudo-differential operators.

For $m \in R$, let

$$S^m = \{a = a(x,\xi) \in C^\infty(R^n \times R^n) \ / \text{ for each } \alpha,\beta \in N^n,$$
$$\exists\ C_{\alpha\beta} > 0, \text{ with } |D_x^\alpha D_\xi^\beta a(x,\xi)| \leq C_{\alpha\beta}(1 + |\xi|)^{m-|\beta|}\}$$

where D_x^α denotes $(\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} \circ \ldots \circ (\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n}$.

Given $a \in S^m$, the expression

$$Af(x) = \int e^{ix\xi} a(x,\xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi \qquad , f \in C_o^\infty(R^n) ,$$

where $\hat{f}$ is the Fourier transform of f, defines a continuous linear operator $A: C_o^\infty(R^n) \longrightarrow C^\infty(R^n)$, of order $\leq m$. A is called a pseudo-differential operator of order $\leq m$.

The function $a(x,\xi)$ is determined uniquely by A and is called the symbol of the operator and denoted $\sigma(A)$.

When the distribution kernel associated to A has proper support, we shall say that A is properly supported. In this case, A maps $C_o^\infty(R^n)$ to $C_o^\infty(R^n)$.

I^m will denote the complex vector space of properly supported pseudo-differential operators of order $\leq m$.

As a particular case, I^o is closed under composition and adjunction; thus, with these operations, I^o is a self-adjoint algebra. We shall be interested on some elements of I^o ,for whose definition, we shall need the notion of sum of an asymptotic expansion:

Let $\{a_j\}$ be a sequence in S^o, such that $a_j \in S^{-j}$, for all $j \geq 0$.

$$a - \sum_{j<N} a_j \in S^{-N} \qquad \forall\ N \geq 1.$$

We shall say that $\underline{a}$ is a sum of the expansion $\sum_j a_j$, which we denote by $a \sim \sum_j a_j$.

If $S^{-\infty} = \bigcap_{j\geq 0} S^{-j}$, it is clear that the sum of $\sum_j a_j$ is determined modulo $S^{-\infty}$.

DEFINITION 2.1. Following [2], let

$$I_H = \{A \in I^o / \sigma(A) \sim \sum_{j\geq 0} a_j \text{ , with } a_j \text{ a function in } S^{-j},$$
which coincides for $|\xi| \geq 1/2$, with a function in $C^\infty(R^n x (R^n \setminus 0))$ positively homogeneous in ξ of degree $-j$, a_o real$\}$.

I_H is a real algebra, with the operations induced by I^o.

In fact, we can show that if $A,B \in I_H$, with $\sigma(A) \sim \sum_j a_j$, $\sigma(B) \sim \sum_k b_k$, then we have:

$$\sigma(A\circ B) \sim \sum_\ell \Big[\sum_{k+j+|\alpha|=\ell} \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} D_\xi^\alpha a_j \, D_x^\alpha b_k \Big]$$

The importance of this class is that, if $A \in I_H$, each term in an asymptotic expansion for $\sigma(A)$ is uniquely determined for $|\xi| \geq 1/2$.

In fact, if we suppose that $\sigma(A)$ is also an asymptotic sum of $\sum_j a'_j$ under the same conditions, we have $0 \sim \sum_j (a_j - a'_j)$.

By the definition of a sum, we have $a_o - a'_o \in S^{-1}$; thus,

$$|a_o(x,\xi) - a'_o(x,\xi)| \leq C\ (1 + |\xi|)^{-1} \text{ , for } (x,\xi) \in R^n x\ R^n.$$

By the homogeneity condition, if ξ is fixed with $|\xi| \geq 1/2$, we have

$$|a_o(x,\xi) - a'_o(x,\xi)| = \lim_{\lambda\to\infty} |a_o(x,\lambda\xi) - a'_o(x,\lambda\xi)| \leq C \lim_{\lambda\to\infty} (1+|\lambda\xi|)^{-1} = 0.$$

So that, $a_o(x,\xi) = a'_o(x,\xi)$ in $R^n \times \{|\xi| \geq 1/2\}$.

Applying the same argument to the other terms, we conclude the statement.

DEFINITION 2.2. Given $k = 1,2,\ldots$, let

$$I_H^{-k} = \{A \in I_H \ /\ a_j = 0 \quad \text{for} \quad 0 \leq j < k\}.$$

Using the results about composition, we can show that I_H^{-k} is a two-sided ideal of I_H. Thus, we can form the quotient

$$J^k = I_H/I_H^{-k}$$

and provide it with a structure of real algebra.

If $\tilde{A} \in J^k$, an operator $A \in I_H$ will be a standard representative of the class, if $\sigma(A) \sim \sum_{j=0}^{k-1} a_j$.

We can define in J^k a topological structure by the semi-norms:

$$p_h^k(\tilde{A}) = \sup_{\substack{x\in R^n, |\xi|=1 \\ |\alpha|,|\beta|\leq h}} \sum_{j=0}^{k-1} |D_x^\alpha D_\xi^\beta a_j(x,\xi)|$$

THEOREM 2.1. *With this topology, J^k is a Fréchet algebra.*

Proof: It is not difficult to show that these semi-norms define in J^k a structure of topological vector space, locally convex and separated. As the family of semi-norms is countable, it is sufficient to prove that J^k is complete by sequences, to conclude that it is a Fréchet space. Let $\{\tilde{A}_m\}$ be a Cauchy sequence with respect to all the semi-norms $\{p_h^k\}_h$. This means, that given $j = 0,1,\ldots,k-1$, and for each $\alpha,\beta \in N^n$, $\{D_x^\alpha D_\xi^\beta a_{j,m}\}_m$ is a uniform Cauchy sequence in $R^n x\{|\xi| = 1\}$. Thus, there exists a function $\tilde{a}_{j\alpha\beta}(x,\xi)$, defined and continuous in this set, such that $D_x^\alpha D_\xi^\beta a_{j,m} \xrightarrow[n]{} \tilde{a}_{j\alpha\beta}$, in $R^n \times \{|\xi| = 1\}$.

Let us consider the function $b_{j\alpha\beta}(x,\xi)$ defined in $R^n x(R^n\backslash 0)$, as:

$$b_{j\alpha\beta}(x,\xi) = \tilde{a}_{j\alpha\beta}(x,\xi/|\xi|).|\xi|^{-j-|\beta|}$$

$b_{j\alpha\beta}$ is a continuous function over $R^n x(R^n\backslash 0)$, positively homogeneous in ξ of degree $-j-|\beta|$.
Moreover, let $\tilde{a}_{j,m}(x,\xi)$ be the function of $C^\infty(R^n x(R^n\backslash 0))$ positively homogeneous in ξ of degree $-j$, with which $a_{j,m}(x,\xi)$ coincides for $|\xi| \geqslant 1/2$. By the definition of $b_{j\alpha\beta}(x,\xi)$, we have that $\{D_x^\alpha D_\xi^\beta \tilde{a}_{j,m}\}_m$ converges uniformly in $R^n x K$, for each compact set $K \subset R^n\backslash 0$, to $b_{j\alpha\beta}$: In fact,

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta \tilde{a}_{j,m}(x,\xi) - b_{j\alpha\beta}(x,\xi)| =$$

Thus, we conclude that the function $b_j = b_{j00}$ belongs to $C^\infty(R^n \times (R^n \setminus 0))$ and that $D_x^\alpha D_\xi^\beta \tilde{a}_{j,m} \underset{n}{\longrightarrow} D_x^\alpha D_\xi^\beta b_j = b_{j\alpha\beta}$, in those sets $R^n \times K$.

Now, let $\varphi \in C^\infty(R^n)$ be, such that $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, $\varphi(\xi) = \begin{cases} 1 & |\xi| \geqslant 1/2 \\ 0 & |\xi| \leqslant 1/4 \end{cases}$

The function $a_j(x,\xi) = b_j(x,\xi).\varphi(\xi)$, belongs to $C^\infty(R^n \times R^n)$ and coincides with $b_j(x,\xi)$ for $|\xi| \geqslant 1/2$. Moreover,

$D_x^\alpha D_\xi^\beta a_{j,m} \underset{n}{\longrightarrow} D_x^\alpha D_\xi^\beta a_j$ in $R^n \times \{|\xi| = 1\}$ and $a_o(x,\xi)$ is a real function. Thus, if we consider an operator $A \in I^o$ with $\sigma(A) \sim \sum_{j=0}^{k-1} a_j$, we conclude from the preceding arguments, that $A \in I_H$ and that $\{\tilde{A}_m\}$ converges to $\tilde{A}$ in J^k.

Finally, we show that the product in J^k, is continuous with respect to this topology:

Let $\tilde{A}, \tilde{B} \in J^k$ and $A, B \in I_H$ be, representatives of these classes, such that $\sigma(A) \sim \sum_{j=0}^{k-1} a_j$, $\sigma(B) \sim \sum_{h=0}^{k-1} b_h$. As we said above, $\tilde{A} \circ \tilde{B}$ is the class in J^k of an operator $C \in I_H$, with

$$\sigma(C) \sim \sum_{\ell=0}^{k-1} \Big[\sum_{j+h+|\alpha|=\ell} \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} D_\xi^\alpha a_j \, D_x^\alpha b_h \Big]$$

From this, we can show that given a semi-norm p_h^k in J^k, there exists $C_r > 0$, such that

$$p_r^k(\tilde{C}) \leqslant C_r \; p_{r+k-1}^k(\tilde{A}) \; p_{r+k-1}^k(\tilde{B})$$

This proves the continuity of the product.

DEFINITION 2.3. Following [2], we consider

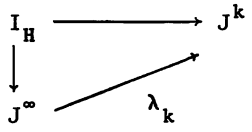
$$I^{-\infty} = \{A \in I^o \; / \; \sigma(A) \in S^{-\infty}\}.$$

Given $A \in I^{-\infty}$, if we look $\sigma(A)$ as a sum of the expansion with every term equal to zero, $I^{-\infty}$ is contained in I_H. Moreover, $I^{-\infty}$ is a two-

-sided ideal of I_H.

Thus, we can form the quotient $J^\infty = I_H/I^{-\infty}$ and provide it with a structure of real algebra,

As $I^{-\infty}$ is contained in I_H^{-k} $\forall k \geqslant 1$, there exists a unique homomorphism λ_k, making the following diagram commutative:



We consider in J^∞, the initial topology induced by the maps λ_k. This topology, is defined by the family of semi-norms $\{p_h^k\}_{k,h}$.

THEOREM 2.2. *With this topology, J^∞ is a Fréchet algebra.*

Proof: It is analogous to that of Theorem 2.1.

Until now, we have studied, essentially, the pseudo-differential operators in I_H, save some error in I_H^{-k} or $I^{-\infty}$. Now, we shall analyze these classes.

H^t denotes the Sobolev space of order t (see [2]).

As was said above, the operators in I^m are of order $\leqslant m$; so that, they can be extended to linear continuous operators from L^2 to H^{-m}, and H^m to L^2. The operators in I_H^{-k}, have order $\leqslant -k$, thus, they can be extended to linear continuous operators from L^2 to H^k, and H^{-k} to L^2.

DEFINITION 2.4. Given $k = 0,1,\ldots$, let

$$R^{-k} = \{R: C_o^\infty(R^n) \longrightarrow D'(R^n) \;/\; D^\alpha R,\ RD^\alpha \text{ can be extended to bounded linear operators from } L^2 \text{ into itself}, |\alpha| \leqslant k\}.$$

I_H^{-k} is contained in R^{-k}, but this is a strict inclusion, because all the operators in I^{-k} are in R^{-k}. What is important, is that the operators in R^{-k} have the same property that the operators of I_H^{-k}, that is, to regularize to the order k, i.e. to map continuously L^2 in H^k and H^{-k} in L^2. It is then natural, to call the operators in R^{-k}, regularizing operators of order k.

$$p_k(R) = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha R\| + \|RD^\alpha\|$$

where $\| \ \|$ means the norm in $L(L^2)$.

THEOREM 2.3. *With the composition of the operators as a product,* R^{-k} *is, with this norm, a complex, self-adjoint Banach algebra.*

Proof: It is clear that R^{-k} is a complex normed algebra. It is self-adjoint, because as linear operators in $L(L^2)$, we have

$$(D^\alpha R)^* = (-1)^{|\alpha|} R^* D^\alpha \ ; \quad (RD^\alpha)^* = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha R^*$$

With respect to the completeness, if $\{R_j\}$ is a Cauchy sequence in this space, there exists for $0 < |\alpha| \leq k$, linear continuous operators from $L(L^2)$ into itself, R, R^α, $\tilde{R}^\alpha$, such that

$$\begin{aligned} R_j &\longrightarrow R \\ D^\alpha R_j &\longrightarrow R^\alpha \qquad \text{as } j \longrightarrow \infty, \text{ in } L(L^2). \\ R_j D^\alpha &\longrightarrow \tilde{R}^\alpha \end{aligned}$$

Given $\varphi, \psi \in C_o^\infty(R^n)$, we have, in the distributions sense:

$$(R^\alpha \varphi, \psi) = \lim (D^\alpha R_j \varphi, \psi) = \lim (-1)^{|\alpha|} (R_j \varphi, D^\alpha \psi) = (D^\alpha R\varphi, \psi).$$

We proceed with $\tilde{R}^\alpha$ in the same way, obtaining in the distributions sense

$$\begin{aligned} D^\alpha R \varphi &= R \varphi \\ RD^\alpha \varphi &= \tilde{R}^\alpha \varphi \end{aligned} \qquad \forall \varphi \in C_o^\infty(R^n) \ , \ 0 < |\alpha| \leq k$$

Then, we conclude that $R \in R^{-k}$ and that $R_j \longrightarrow R$ in R^{-k}.

As we said at the beginning, we want to define a functional calculus with respect to a sufficiently wide class of functions. For this, we need to consider a sub-algebra of R^{-k}.

DEFINITION 2.5. Given a self-adjoint operator A in R^{-k}, let A^{-k} a closed real sub-algebra of R^{-k}, generated by a maximal family of commuting self-adjoint operators, containing A.

Then, A^{-k} is a Banach real algebra with the induced topology.

Moreover, if $R \in A^{-k}$, we have $\|D^\alpha R\| = \|(RD^\alpha)^*\| = \|RD^\alpha\|$.

Thus, the topology induced by that of R^{-k} in A^{-k}, is given by the

norm

$$q_k(R) = \sum_{|\alpha| \leq k} \| D^\alpha R \|$$

Now, we consider the operators in $I^{-\infty}$. These operators, can be extended to linear continuous operators from H^t to H^s , $\forall\, s,t \in R$. Thus, we define:

DEFINITION 2.6. $R^{-\infty} = \{R: C_o^\infty(R^n) \longrightarrow D'(R^n)$ / $D^\alpha R$, RD^α can be extended to bounded linear operators from L^2 into itself, $\forall\, \alpha \in N^n\}$.

The operators in $R^{-\infty}$ are called regularizing operators of infinite order.

$I^{-\infty}$ is strictly contained in $R^{-\infty}$. Moreover, $R^{-\infty}$ is a sub-algebra of R^{-k} , $\forall\, k \geqslant 1$. Thus, we can define in $R^{-\infty}$ the initial topology induced by these inclusions; this topology is defined by the filtered family of semi-norms $\{p_k\}_{k\geq 0}$.

Given a self-adjoint operator A in $R^{-\infty}$, we consider, as above, a real closed sub-algebra, $A^{-\infty}$, generated by a maximal family of commuting self-adjoint operators containing A.

$A^{-\infty}$ is a real Fréchet algebra, with the topology induced by that of $R^{-\infty}$; this topology, may be defined with the semi-norms $\{q_k\}_{k\geq 0}$.

3. EXISTENCE OF FUNCTIONAL CALCULII.

As was mentioned in the introduction, there is a functional calculus θ_k that could be called elementary, over J^k, with respect to P. θ_k is nothing else than the map resulting of the factorization of the diagram

$$\begin{array}{ccc} P \times I_H & \longrightarrow & I_H \\ \downarrow & & \downarrow \\ P \times J^k & \xrightarrow{\theta_k} & J^k \end{array}$$

That is, $\theta_k(P,\widetilde{A}) = \widetilde{P(A)}$.

In the same way, we define an elementary calculus over J^∞ , with res-

DEFINITION 3.1. Let

$$S_H = \{a \in S^o \;/\; a = \sigma(A), \text{ for some } A \in I_H\}$$

$$S_H^{-k} = \{a \in S^o \;/\; a = \sigma(A), \text{ for some } A \in I_H^{-k}\}$$

We can give to the quotient, $S^k = S_H/S_H^{-k}$, a structure of algebra, defining

$$\tilde{a} \circ \tilde{b} = \sum_{0 \le j < k} \Big[\sum_{|\alpha| + j_1 + j_2 = j} \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} D_\xi^\alpha a_{j_1} D_x^\alpha b_{j_2} \Big]$$

This is nothing else than to truncate the asymptotic product usually defining in S^o by $\sum_\alpha \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} D_\xi^\alpha a \; D_x^\alpha b$ (modulo $S^{-\infty}$).

According with which we said at the beginning of Section 2, there is defined the bijective algebra homomorphism:

$$J^k \longrightarrow S^k$$

$$A \longrightarrow \sigma(A)$$

Thus, it is the same to think about the operations in J^k in terms of operators, as to think in terms of the symbols of these operators. We can say the same thing about the elementary functional calculus that we introduced, that can be denoted:

$$P \times S^k \longrightarrow S^k$$

$$(\sum c_\ell t^\ell, \tilde{a}) \longrightarrow \sum c_\ell \tilde{a}^{(\ell)}$$

where $\tilde{a}^{(\ell)}$ denotes the ℓ-th power of $\tilde{a}$, with respect to the asymptotic product defined in S^k.

The preceding remarks, are also valid for J^∞ and $S^\infty = S_H/S^{-\infty}$.

EXAMPLES 3.1. 1) If $k = 1$, J^1 has a structure of commutative algebra, given in terms of the symbols by: $\tilde{a} \circ \tilde{b} = \widetilde{a_o b_o}$.

In this case, we have $\theta_1(P, \tilde{a}) = \widetilde{P(a_o)}$.

2) If $k = 2$, the product in J^k in terms of the symbols, is given by:

$$\tilde{a} \circ \tilde{b} = a_o b_o + \overbrace{a_o b_1 + a_1 b_o} - i \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_o}{\partial \xi_j} \frac{\partial b_o}{\partial x_j}$$

For each $\ell \geq 1$, it follows by induction that:

$$\tilde{a}^{(\ell)} = a_o^{\ell} + \ell(\ell-1)a_o^{\ell-1}\, a_1 - i\,\frac{\ell(\ell-1)}{2}\, a_o^{\ell-2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_o}{\partial \xi_j}\,\frac{\partial b_o}{\partial x_j}$$

Thus,

$$\theta_2(P,\tilde{a}) = P(a_o) + P'(a_o)a_1 - \frac{i}{2}P''(a_o) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_o}{\partial \xi_j}\,\frac{\partial a_o}{\partial x_j} \quad .$$

We can do the same, for each value of k. But as k increases, the calculations become too complicated, so that, it is useful to give a general expression for θ_k. We use for this, the asymptotic development given in [1] ; the manner in which Strichartz obtain it, does not adapt to this case, so it is necessary to give a new proof.

THEOREM 3.1. *If* $a \in S_H$, *given* $P \in \mathbf{P}$, *we have :*

$$P(a) = \sum_{j\geq 0} \sum_{\ell=0}^{j} \frac{(-1)^{\ell}}{\ell!\,(j-\ell)!} \left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{j} P(a_o)\, a_o^{\ell}\right] \circ a^{(j-\ell)} \qquad (1)$$

(modulo $S^{-\infty}$)

Proof: As each member in (1) is linear in P, it suffices to prove the equality when $P(t) = t^m$, for some $m \geqslant 1$. In this case, the second member of (1) is:

$$a_o^m + \sum_{j=1}^{m} \sum_{\ell=0}^{j} \frac{(-1)^{\ell}}{\ell!\,(j-\ell)!}\, m(m-1)\ldots(m-j+1)\; a_o^{m-j+\ell} \circ a^{(j-\ell)}$$

If for $0 \leqslant h \leqslant m$ fixed, we select in this expression the terms for which $j-\ell = h$, we should prove that their sum is $a^{(m)}$ for $h = m$ and zero for $0 \leqslant h < m$.

h is zero, when $j = \ell = 0,1,\ldots,m$. In this case, we have:

$$a_o^m + \sum_{j=1}^{m} \frac{(-1)^j}{j!}\, m(m-1)\ldots(m-j+1)\, a_o^m = a_o^m \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j}(-1)^j = 0$$

The only case in which h is m, is $j = m$, $\ell = 0$. The corresponding term is $a^{(m)}$.

If now, we fix $0 < h < m$, $j-\ell$ equals h, for the pairs of values: $j=m$, $\ell = m-h$; $j = m-1$, $\ell = m-h-1$;...; $j = h$, $\ell = 0$. The sum of the terms with these values of j and ℓ, is:

$$\sum_{\ell=0}^{m-h} \frac{(-1)^{\ell}}{\ell!\,h!}\, m(m-1)\ldots(m-\ell-h+1)\; a_o^{m-h} \circ a^{(h)} =$$

So, we have obtained the explicit formula of the functional calculus θ_∞. Clearly, we also have:

$$\theta_k(P,\tilde{a}) = \sum_{j\geq 0} \sum_{\ell=0}^{j} \frac{(-1)^\ell}{\ell!(j-\ell)!} \left[\left(\frac{d}{dt}\right)^j P(a_o)\ a_o^\ell\right] \circ a^{(j-\ell)}$$

Now, we shall consider the topologies defined in Section 2 in J^k and J^∞. Using facts about the continuity of the maps θ_k and θ_∞, and Theorem 1.1, we shall determine classes of functions to which these functional calculii can be extended. It is clear that the topologies in J^k and J^∞, are nothing else than the topologies in the corresponding spaces of symbols. We take in P the topology of uniform convergence over compact sets of R of the function and its derivatives. This topology, can be defined by the family of semi-norms:

$$p_N(P) = \sup_{\substack{|t|\leq N \\ j\leq N}} \left|\left(\frac{d}{dt}\right)^j P(t)\right| \qquad N = 1,2,\ldots$$

$(P,\{p_N\})$, is a real topological algebra, and its completion is identified with the Fréchet algebra $C^\infty = C^\infty(R)$.

To show the continuity of θ_k in the variable P, is fundamental the remark made by Strichartz in [1] . We shall include the proof here:

THEOREM 3.2. *For* $j \geq 0$ *fixed, the asymptotic expansion*

$$\sum_{\ell=0}^{j} (-1)^\ell \binom{j}{\ell} \left[\left(\frac{d}{dt}\right)^j P(a_o)\ a_o^\ell\right] \circ a^{(j-\ell)} \tag{2}$$

defines a symbol of order $\leq -j/2$.

Proof: We admit for a moment that

$$\sum_{\ell=0}^{j} (-1)^\ell \binom{j}{\ell} a^\ell \circ D_x^\beta\, a^{(j-\ell)} \tag{3}$$

has order $\leq -j/2 + |\beta|/2$.

We can write $a = a_o + b$, with $b \in S_H^{-1}$. Then,

$$a_o^\ell = (a-b)^\ell = (-1)^\ell \sum_{h=0}^{\ell} \binom{\ell}{h} (-1)^h\, a^h\, b^{\ell-h}$$

Substituting in (2), we have:

$$\sum_{\ell=0}^{j} \sum_{h=0}^{\ell} (-1)^h \binom{j}{\ell}\binom{\ell}{h} \left[\left(\frac{d}{dt}\right)^j P(a_o)\ b^{\ell-h}\ a^h\right] \circ a^{(j-\ell)}$$

If we introduce the new index $r = j-\ell+h$, where $0 \leqslant h \leqslant r$, $0 \leqslant r \leqslant j$, since $j-\ell = r-h$ and $\ell-h = j-r$, we have

$$\binom{j}{\ell}\binom{\ell}{h} = \frac{j!}{(j-\ell)!\ell!}\ \frac{\ell!}{h!(\ell-h)!} = \frac{j!\ell!\ r!}{(r-h)!\ell!(j-r)!h!r!} = \binom{j}{r}\binom{r}{h}$$

Thus, we obtain:

$$\sum_{r=0}^{j}\ \sum_{h=0}^{r}\ (-1)^h\ \binom{j}{r}\binom{r}{h}\ \left[\left(\frac{d}{dt}\right)^j P(a_o)\ b^{j-r}a^h\right] \circ a^{(r-h)}$$

Using the definition of asymptotic product, it is easy to obtain the identity:

$$(AB)\circ C = \sum_{\beta} \frac{(-i)^{|\beta|}}{\beta!}\ D_\xi^\beta A\ [B \circ D_x^\beta C] \qquad (\text{mod } S^{-\infty}).$$

We use this identity, with $A = \left(\frac{d}{dt}\right)^j P(a_o)\ b^{j-r}$, $B = a^h$, $C = a^{(r-h)}$.

One deduces that:

$$\sum_{h=0}^{r}\ (-1)^h\ \binom{r}{h}\ \left[\left(\frac{d}{dt}\right)^j P(a_o)\ b^{j-r}a^h\right] \circ a^{(r-h)} =$$

$$= \sum_{\beta} \frac{(-i)^{|\beta|}}{\beta!}\ D_\xi^\beta\ \left[\left(\frac{d}{dt}\right)^j P(a_o)\ b^{j-r}\right] \sum_{h=0}^{r}\ (-1)^h\ \binom{r}{h}\ a^h \circ D_x^\beta\ a^{(r-h)}.$$

$D_\xi^\beta\ \left[\left(\frac{d}{dt}\right)^j P(a_o)\ b^{j-r}\right]$, has order $\leqslant -j+r-|\beta|$.

Thus, according to (3), the preceding symbol has order $\leqslant -j+r-|\beta| -r/2+ + |\beta|/2$. This order is $\leqslant -j/2$.

So, to conclude the result, it remains to prove (3).

For s fixed, we seek the terms in $a^\ell \circ D_x^\beta\ a^{(j-\ell)}$, of order -s; each such term, consists of a product of at last s ξ-derivatives of some term in a^ℓ and $s+|\beta|$ x-derivatives of some term in $a^{(j-\ell)}$.

Thus, the coefficient of this term, will be a polynomial in ℓ of degree $\leqslant 2s + |\beta|$.

We assert that $\sum_{\ell=0}^{j}\ (-1)^\ell \binom{j}{\ell} f(\ell) = 0$ if f is a polynomial of degree $< j$.

$$0 = \left(\frac{d}{dt}\right)^h (t-1)^j \Big|_{t=1} = \sum_{\ell=0}^{j} (-1)^{j-\ell} \binom{j}{\ell} \ell(\ell-1)\dots(\ell-h+1) .$$

$\ell(\ell-1)\dots(\ell-h+1)$, is a polynomial in ℓ of the form $\ell^h + P_h(\ell)$, where $\deg(P_h) = h-1$.

Then, given a polynomial $f(\ell)$ of degree $< j$, since we can write $f(\ell)$ as a linear combination of $\ell^h + P_h(\ell)$, for $h \leqslant \deg(f)$, we deduce that

$$\sum_{\ell=0}^{j} (-1)^{\ell} \binom{j}{\ell} f(\ell) = 0.$$

Then, if $2s+|\beta| j-1$, the terms of order $-s$ cancel in the sum (3), and so, the order of the symbol will be $\leqslant -j/2 + |\beta|/2$.

Now, we are in position to prove the main theorem.

THEOREM 3.3. *If we consider* J^k *and* P, *provided with the topologies that we already have defined, the functional calculus* θ_k *is continuous in each variable.*

Proof: According to Theorem 3.1 and the preceding remarks, we can write:

$$\theta_k(P,\tilde{A}) = \sum_{j\geq 0} \sum_{\ell=0}^{j} \frac{(-1)^{\ell}}{\ell!(j-\ell)!} \left[\left(\frac{d}{dt}\right)^j P(a_o)\, a_o^{\ell}\right] \circ a^{(j-\ell)}$$

With a polynomial $P \in P$ of degree r fixed, we shall prove that θ_k is continuous in the second variable:

Let $\{\tilde{A}_m\}$ be a sequence, convergent in J^k to some $\tilde{A}$.

With the notation of the preceding section, this means that for each $\alpha,\beta \in N^n$, $j = 0,1,\dots,k-1$, the sequence $\{D_x^{\alpha} D_{\xi}^{\beta} a_{j,m}\}_m$ converges to $D_x^{\alpha} D_{\xi}^{\beta} a^j$, uniformly in $R^n \times \{|\xi| = 1\}$.

By the dèfinition of J^k, we have:

$$\theta_k(P,\tilde{A}_m) = \sum_{j=0}^{r} \sum_{\ell=0}^{j} \frac{(-1)^{\ell}}{\ell!(j-\ell)!} \overbrace{\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^j P(a_{o,m})\, a_{o,m}^{\ell}\right] \circ (a_{o,m}+\dots+a_{k-1,m})^{(j-\ell)}}$$

where $(a_{o,m}+\dots+a_{k-1,m})^{(j-\ell)}$, means that in the product $a_m^{(j-\ell)}$, we are only interested in the terms that involve $a_{o,m},\dots,a_{k-1,m}$.

Also, some of them will vanish when passing to the quotient S^k.

Thus, the symbol of a representative of $\theta_k(P,\tilde{A}_m)$, has an asymptotic development of the form $\sum_{j=0}^{k-1} c_{j,m}$, where $c_{j,m}$ is a linear combination of functions of the form:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^s P(a_{o,m}) \prod_{i=1}^{r+1} (D_x^{\alpha_o^i} D_\xi^{\beta_o^i} a_{o,m})^{\ell_o^i} \cdots \prod_{i=1}^{r+1} (D_x^{\alpha_{k-1}^i} D_\xi^{\beta_{k-1}^i} a_{k-1,m})^{\ell_{k-1}^i}$$

for some $0 \leqslant s \leqslant r$, $0 \leqslant \ell_o^i \ldots \ell_{k-1}^i$, $|\alpha_o^i|, |\beta_o^i|, \ldots, |\alpha_{k-1}^i|, |\beta_{k-1}^i| \leqslant$ $\leqslant \max(r+1,k)$.

Since we have

$$\sup_{x \in R^n, |\xi|=1} |D_x^\alpha D_\xi^\beta a_{j,m}(x,\xi)| \leqslant C_{j\alpha\beta}, \quad \forall\ \alpha,\beta \in N^n,$$

with $C_{j\alpha\beta} > 0$ not depending on m, we deduce that for every $h = 0,1,\ldots$

$$p_h^k(\theta_k(P,\tilde{A}_m) - \theta_k(P,\tilde{A})) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

With Theorem 3.2, we show that θ_k is also continuous in the first variable:

In fact, since for $j \geqslant 0$ fixed, $\sum_{\ell=0}^{j} \frac{(-1)^\ell}{\ell!(j-\ell)!} [(\frac{d}{dt})^j P(a_o)\ a_o^\ell] \circ a^{(j-\ell)}$

is a symbol of order $\leqslant -j/2$, the number of derivatives of the polynomial P involved by the development of the symbol for $\theta_k(P,\tilde{A})$, depends on k, but not on the degree of the polynomial.

With the preceding notation, we can then write:

$$\theta_k(P,\tilde{A}) = \sum_{j=0}^{2k} \sum_{\ell=0}^{j} \widetilde{\frac{(-1)^\ell}{\ell!(j-\ell)!} [(\frac{d}{dt})^j P(a_o)\ a_o^\ell]} \circ (a_o+\ldots+a_{k-1})^{(j-\ell)} .$$

For $\tilde{A} \in J^k$ fixed, the image by $a_o(x,\xi)$ of $R^n \times \{|\xi|=1\}$, is a bounded set in R. Thus, given a semi-norm p_h^k in J^k, we verify that there exists $C_{\tilde{A},h} > 0$ and a semi-norm p_N in P, such that:

$$p_h^k(\theta_k(P,\tilde{A})) \leqslant C_{\tilde{A},h}\ p_N(P) = C_{\tilde{A},h} \sup_{\substack{|t|\leq N \\ s\leq N}} |(\frac{d}{dt})^s P(t)| \quad , \quad \forall\ P \in P .$$

Thus, θ_k is also continuous in the first variable.

COROLLARY 3.1. *There exists a unique functional calculus θ_k over J^k, with respect to C^∞. Moreover, θ_k is complete and continuous in each variable; if $f \in C^\infty$, we have:*

Proof: We shall make use of Theorem 1.1, Theorem 3.2 and Remark 1.1: The existence of a unique functional calculus over J^k, with respect to C^∞, and its completeness, are consequences of Theorem 3.2, since P is dense in C^∞, this last space is closed under composition and the map

$$(f,g) \longrightarrow f \circ g$$

is continuous in each variable.

By Remark 1.1, to show that θ_k is also continuous in each variable, we have to prove that the map

$$P \longrightarrow J^k$$

$$P \longrightarrow P(\widetilde{A})$$

is continuous, uniformly with respect to the bounded sets in J^k.

This follows from the manner in which we proved the continuity of θ_k with respect to the variable P in Theorem 3.2. In fact, the constant $C_{\widetilde{A},h}$, in the majoration, is of the form:

$$\sum_{\alpha_\ell^i, \beta_\ell^i, m_\ell^i} C \sup_{\substack{x \in R^n \\ |\xi|=1}} \prod_i |D_x^{\alpha_o^i} D_\xi^{\beta_o^i} a_o(x,\xi)|^{m_o^i} \cdots \prod_i |D_x^{\alpha_{k-1}^i} D_\xi^{\beta_{k-1}^i} a_{k-1}(x,\xi)|^{m_{k-1}^i}$$

where the constants C, do not depend on $\widetilde{A}$.

Thus, when $\widetilde{A}$ belongs to a fixed bounded set in J^k, we can estimate this expression uniformly with respect to $\widetilde{A}$.

Finally, we obtain the asymptotic development of $\theta_k(f,\widetilde{A})$, for $f \in C^\infty$, passing to the limit in a sequence $\{P_m\}$ in P, such that $P_m \longrightarrow f$ in C^∞.

We now consider the algebra J^∞.

Its topology, is the initial one induce by the maps $\lambda_k : J^\infty \longrightarrow J^k$.

Thus, making use of Theorems 3.1 and 3.2, we have for J^∞ the analogous results to Theorem 3.3 and Corollary 3.1.

Finally, we shall analyze the classes of regularizing operators A^{-k} and $A^{-\infty}$. The case in which $k = 0$, has no interest, because it corresponds to that of the self-adjoint operators in $L(L^2)$, that was mentioned in the introduction. Then, we shall consider $k \geqslant 1$.

For these values of k, A^{-k} fails to be unitary, and the same happens with $A^{-\infty}$. We shall construct functional calculii over them, with respect to an algebra F, that does not contain non zero constants. Thus,

we have to eliminate the condition 1) in Definition 1.1.

DEFINITION 3.2. Let $P_o = \{P \in P \ / \ P(0) = 0\}$.

P_o is an ideal in P. If $P \in P_o$, there exists a unique $Q \in P$, such that we have $P(t) = tQ(t)$. Thus, given an operator R in A^{-k} or in $A^{-\infty}$, the operator $P(R) = RQ(R) = Q(R)R$, is respectively in A^{-k} or in $A^{-\infty}$. We have then defined elementary functional calculii:

$$P_o \times A^{-k} \longrightarrow A^{-k} \qquad P_o \times A^{-\infty} \longrightarrow A^{-\infty}$$

$$(P,R) \longrightarrow P(R)$$

As in the case of J^k or J^∞, we shall extend these functional calculii, using continuity arguments. We must replace in Theorem 1.1, P by P_o.
The same results are valid, with identical proofs.

DEFINITION 3.3. We introduce the spaces:

$$C = \{f:R \longrightarrow R/ \ f \text{ is continuous}\}.$$

$$C_o = \{f \in C/ \ f(t) = tg(t), \text{ for some } g \in C\}.$$

C_o coincides with $\{f \in C/ \ f(0) = 0, f \text{ has a derivative in } t = 0\}$.

Since for each $f \in C_c$, g is uniquely determined, we can consider in C_o the topology defined by the family of semi-norms:

$$p_N(f) = \sup_{|t| \leq N} |g(t)| \qquad N = 1,2,\ldots$$

THEOREM 3.4. *With the pointwise multiplication product,* C_o *is a real Fréchet algebra, that can be identified with the completion of* $(P_o,\{p_N\}_N)$.

Proof: If $f_1,f_2 \in C_o$, we can write in a unique form:

$$f_1(t).f_2(t) = t\,[tg_1(t).g_2(t)], \text{ for some } g_1,g_2 \in C.$$

Thus,

$$p_N(f_1,f_2) = \sup_{|t| \leq N} |tg_1(t).g_2(t)| \leq N\ p_N(f_1).p_N(f_2).$$

This shows that C_o is a countably semi-normed topological algebra.

$$C \longrightarrow C_o$$

$$g \longrightarrow tg$$

is a uniform homeomorphism.

From this, it follows that C_o is a complete space and that P_o is dense in C_o.

We mentioned in the introduction, the functional calculus over the self-adjoint operators in $L(L^2)$, with respect to C. We shall need some properties of this calculus, to prove the existence of functional calculii over A^{-k} and $A^{-\infty}$. These properties, will follow from the next theorem, that is also a manner of expressing the existence of this functional calculus.

THEOREM 3.5. *Let* H *be a Hilbert space and* A *be a self-adjoint operator in* L(H). *Then, for* $P \in \mathbf{P}$, *we have:*

$$\|P(A)\| \leqslant \sup_{|t| \leqslant \|A\|} |P(t)|$$

where $\| \ \|$ *means the norm in* L(H).

Proof: Let $s = \deg(P)$. For $x \in H$ fixed, we consider the subspace E^x of H, spanned by $x, Ax, \ldots, A^s x$.

In $E^x \times E^x$, we can define the symmetric bounded sesquilinear form:

$$f^x(y,z) = (Ay,z)_H$$

Then, there exists a self-adjoint operator $B^x \in L(E^x)$, that verifies

$$(B^x y,z)_H = (Ay,z)_H \quad , \quad \forall\, y,z \in E^x.$$

Let $\lambda_1^x, \ldots, \lambda_{r_x}^x$ be the eigenvalues of B^x. Then, $P(\lambda_1^x), \ldots, P(\lambda_{r_x}^x)$ are the eigenvalues of $P(B^x)$.

We can show by induction, that for $1 \leqslant j \leqslant s$, we have:

$$(A^j x,x)_H = (B^{xj} x,x)_H$$

Thus, $\|P(A)\| = \sup_{\|x\|_H=1} |(P(A)x,x)_H| = \sup_{\|x\|_H=1} |(P(B^x)x,x)_H|$.

For $x \in H$ fixed with $\|x\|_H = 1$, we have:

$$|(P(B^x)x,x)_H| \leqslant \sup_{y \in E^x, \|y\|_H=1} |(P(B^x)y,y)_H| = \|P(B^x)\| = |P(\lambda_{h_x}^x)| \ ,$$

for some $1 \leq h_x \leq r_x$.

By the definition of eigenvalue, there exists $y^x \in E^x$, $y^x \neq 0$, such that

$$B^x y^x = \lambda^x_{h_x} y^x$$

Thus, we have

$$|\lambda^x_{h_x}| = \frac{|(B^x y^x, y^x)_H|}{\|y^x\|^2_H} = \frac{|(Ay^x, y^x)_H|}{\|y^x\|^2_H} \leq \|A\|$$

Finally, we can obtain:

$$\|P(A)\| \leq \sup_{\|x\|_H = 1} |P(\lambda^x_{h_x})| \leq \sup_{|t| \leq \|A\|} |P(t)| .$$

COROLLARY 3.2. *If* $B(H)$ *denotes the real Banach algebra generated by a maximal family of self-adjoint commuting operators, containing* B, *the map:*

$$P \times B(H) \longrightarrow B(H)$$
$$(P,A) \longrightarrow P(A)$$

can be univoquely extended to a functional calculus over $B(H)$, *with respect to* C, *that is complete and continuous in each variable.*

Proof: It is easy to show that C is closed under composition and that the map $(f,g) \longrightarrow f \circ g$, is continuous in each variable. On the other hand, P is dense in C and by the preceding theorem, the map $P \longrightarrow P(A)$, is continuous from P into $B(H)$, uniformly with respect to A in the bounded subsets of $B(H)$. Moreover, if we fix $P \in P$, the map $A \longrightarrow P(A)$, is continuous from $B(H)$ into itself:

In fact, if $A_k \longrightarrow A$ in $B(H)$, given $\ell \geq 2$, we have:

$$A_o^\ell - A^\ell = \sum_{m=1}^{\ell} A_k^{\ell-m} (A_k - A) A^{m-1}$$

Thus, we can obtain:

$$\|A_k^\ell - A^\ell\| \leq \sum_{m=1}^{\ell} \|A_k\|^{\ell-m} \|A_k - A\| \|A\|^{m-1}$$

From this, we conclude that $P(A_k) \longrightarrow P(A)$ in $B(H)$.

According to Theorem 1.1 and Remark 1.1, the result follows.

THEOREM 3.6. *There exists a unique functional calculus* φ_k *over* A^{-k}, *with respect to* C, φ_k *is complete and the map*

$$C_o \times A^{-k} \longrightarrow A^{-k}$$
$$(f,R) \longrightarrow \varphi_k(f,R)$$

is continuous in each variable.

Proof: We shall verify the hypothesis of Theorem 1.1 and Remark 1.1, with $\mathbf{P}_o$ in the place of $\mathbf{P}$.

Let $P(t) = tQ(t) \in \mathbf{P}_o$, $R \in A^{-k}$ be. For $|\alpha| \leq k$, we have, from Theorem 3.5:

$$\|D^\alpha P(R)\| = \|D^\alpha R.Q(R)\| \leq \|D^\alpha R\| . \|Q(R)\| \leq \|D^\alpha R\| \sup_{|t| \leq \|R\|} |Q(t)|$$

This shows that the map $P \longrightarrow P(R)$ is continuous from P_o to A^{-k}, uniformly with respect to R in the bounded subsets of A^{-k}.

Moreover:

The algebra C_o is closed under composition: In fact, if $tf_1(t), tf_2(t)$ belong to C_o, their composition is $tf_2(t).f_1\ tf_2(t)$, that belongs also to C_o. We can show, with easy calculations that we shall omit, that this composition is continuous in each variable.

Finally, given $P(t) = tQ(t) \in P_o$, $R, R_1 \in A^{-k}$ and $|\alpha| \leq k$, we have:

$$\|D^\alpha RQ(R) - D^\alpha R_1 Q(R_1)\| \leq \|D^\alpha R\| . \|Q(R) - Q(R_1)\| + \|D^\alpha R - D^\alpha R_1\| . \|Q(R_1)\| .$$

Making use of Corollary 3.2, we conclude that the map

$$A^{-k} \longrightarrow A^{-k}$$
$$R \longrightarrow P(R)$$

is continuous, for $P \in \mathbf{P}_o$, fixed.

Thus, we are under the hypothesis of Theorem 1.1, and we can conclude the existence and uniqueness of the complete functional calculus φ_k, continuous in the first variable. On the other hand, it follows from Remark 1.1 that φ_k is also continuous in the second variable.

We can obtain in an identical form, a unique complete functional calculus φ_∞ over $A^{-\infty}$, with respect to C_o, continuous in each variable.

REFERENCES

[1] STRICHARTZ, R., *A functional calculus for elliptic pseudo-differential operators*, Am. J. of Math., vol. 94 n°3,(1972), pp 711-722.

[2] CALDERON, A.P., *Lectures notes on pseudo-differential operators and elliptic boundary value problems, I*, Cursos de matemática, 1, Instituto Argentino de Matemática.

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad de Buenos Aires
Argentina.

Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 29, 1979.

A REMARK ON TERRIBLE POINTS

Orlando E. Villamayor[1] and Orlando Villamayor (h)[2]

Dedicado al Profesor Luis A. Santaló

In the study of curves in a projective plane over a field of characteristic zero, it is well known that, given any point P in the plane, there are only a finite number of tangents to the curve through P.

This result is not true in the case of fields of characteristic $p \neq 0$ (see, for instance [2], Appendix). For instance, there is an infinite number of tangents to the curve defined by $x^{p+1}-y^pz = 0$ through the point (0,1,0). These are the so called terrible points.

The object of this note is to extend this concept to higher dimensional varieties and to give a computational method to determine the terrible points.

In all this note p will be the characteristic of the field k and $Fx = x^p$ the Frobenius morphism.

1. DIEUDONNÉ DERIVATIVES.

DEFINITION 1.1. If A is a commutative K-algebra with unit, K a commutative ring with unit, and M is an A-module, then a K-linear map $\delta: A \longrightarrow M$ is called an nth-order derivation if it satisfies

$$\delta(x_0,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}[\sum_{j_1} \cdots {}_{j_i} x_{j_1} \cdots x_{j_i} \delta(x_0,\ldots,\hat{x}_{j_1},\ldots,\hat{x}_{j_i},\ldots,x_n)]$$

and $\delta(1) = 0$.

Clearly, a 1-derivation is a standard derivation.

NOTATION. Let A, K as before and let $\mu: A \otimes_k A \longrightarrow A$ denote the multiplication map (i.e., $\mu(x \otimes y) = xy$). We will set $I = \operatorname{Ker} \mu$, and let $T: A \longrightarrow I$ denote the K-linear map defined by $T(x) = 1 \otimes x - x \otimes 1$.

1 This work was partially supported by NSF Grant MCS 76-06934.

2 This work was partially supported by a postdoctoral fellowship of the Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (Argentina).

The following result is trivial.

LEMMA 1.2. *If* δ: A $\longrightarrow$ M *is an* n^{th}*-order derivation and if* γ: M $\longrightarrow$ N *is an* A*-linear map, then the composite* $\gamma\delta$: A $\longrightarrow$ N *is an* n^{th}*-order derivation.*

DEFINITION 1.3. The map $A \xrightarrow{\varepsilon} A \otimes A$ given by $\varepsilon(x) = x \otimes 1$ gives an A-module structure to I. Call $D_n(A/k)$ the A-module I/I^{n+1}, which will be called the module of nth-order differentials. Call d_n: A $\longrightarrow$ $D_n(A/k)$ the composite of T: A $\longrightarrow$ I with the canonical projection $I \longrightarrow I/I^{n+1} = D_n(A/k)$.

LEMMA 1.4. *If* δ: A $\longrightarrow$ M *is an* n^{th}*-order derivation and* $a \in A$, *the map* $a\delta$: A $\longrightarrow$ M *defined by* $(a\delta)(x) = a\delta(x)$ *is an* n^{th}*-order derivation, hence the set* $\mathrm{Der}(A,M)$ *of* n^{th}*-order derivations from* A *to* M *has a natural* A*-module structure.*

LEMMA 1.5. *The map* d_n: A $\longrightarrow$ $D_n(A/k)$ *is an* n^{th}*-order derivation, which induces (by composition) an* A*-isomorphism* d_n^*: $\mathrm{Hom}(D_n(A/k),M) \cong \cong \mathrm{Der}_n(A,M)$. *Hence* $(d_n, D_n(A/k))$ *is universal for* n^{th}*-order derivations.*

For the proof of this lemma, see [5] or [6].

DEFINITION 1.6. It is well known ([5], [6]) that, for $A = k[x_1,\ldots,x_n]$, $D_n(A/k)$ is a free A-module freely generated by the monomials in $d_n x_i$ of degree at most n. For $n = p^e$ we define a $(p^e)^{th}$ order derivation $\frac{\partial}{\partial F^e x_i}$: A $\longrightarrow$ A as the element of the dual basis which is one on $d_n(F^e x_i)$.

Since k has characteristic p, this derivation can not be obtained as a composite of lower order derivations, and it will be called a Dieudonné derivative of order p^e with respect to the variable x_i.

These derivatives have been studied by Dieudonné in [1].

LEMMA 1.7. *Let* $A = k[x_1,\ldots,x_n]$ *where* k *is a field of characteristic* $p \neq 0$. *Call* A^{p^s} *to* $k[F^s x_1,\ldots,F^s x_n]$. *If* $f \in A^{p^e}$ *and* $\frac{\partial f}{\partial (F^e x_i)} = 0$ *for* $i = 1,\ldots,n$, *then* $f \in A^{p^{e+1}}$.

Proof. Because $f \in A^{p^e}$, $f = \sum_\alpha c_\alpha (F^e x_1)^{\alpha(1)} \ldots (F^e x_n)^{\alpha(n)}$ with $c_\alpha \in 1$ and $\alpha = (\alpha(1),\ldots,\alpha(n))$.

If $f = 0$, then $f \in A^{p^{e+1}}$. Hence we need to show that for each α for which $c_\alpha \neq 0$, $\alpha(i)$ is a multiple of p for $i = 1,\ldots,n$.

Now $\frac{\partial f}{\partial (F^e x_i)} = \sum_\alpha c_\alpha \alpha(i) (F^e x_1)^{\alpha(1)} \ldots (F^e x_i)^{\alpha(i)-1} \ldots (F^e x_n)^{\alpha(n)}$ and

for all i when $c_\alpha \neq 0$ and hence $\alpha(i) = p\,\beta(i)$. Thus

$$f = \sum_\alpha c_\alpha (F^e x_1)^{p\beta(1)} \ldots (F^e x_n)^{p\beta(n)} = \sum_\alpha c_\alpha (F^{e+1} x_1)^{\beta(1)} \ldots (F^{e+1} x_n)^{\beta(n)},$$

that is, $f \in A^{p^{e+1}}$

REMARK 1.8. The same argument shows that if
$f \in k[x_1,\ldots,F^e x_i,\ldots,x_n]$ and $\dfrac{\partial f}{\partial (F^e x_i)} = 0$, then
$f \in k[x_1,\ldots,F^{e+1} x_i,\ldots,x_n]$.

LEMMA 1.9. *If* $A = k[x_1,\ldots,x_n]$, *then the derivation* $\dfrac{\partial}{\partial F^s x_i}$ *is determined by the following properties:*

a) $\dfrac{\partial}{\partial F^s x_i}$ *is a* k*-linear map* $A \longrightarrow A$.

b) $\dfrac{\partial fg}{\partial F^s x_i} = f \dfrac{\partial g}{\partial F^s x_i} + g \dfrac{\partial f}{\partial F^s x_i}$ *if* $f \in k[F^s x_1,\ldots,F^s x_n]$.

c) $\dfrac{\partial x_j^r}{\partial F^s x_i} = 0$ *for* $r < p^s$.

d) $\dfrac{\partial F^s x_j}{\partial F^s x_i} = \delta_{ij}$.

2. DIFFERENTIAL IDEALS.

LEMMA 2.1. *Let* I *be an ideal in* $k[x_0,\ldots,x_n]$ *where* k *is a field of characteristic* p, *then* I *is closed under the derivation* $\partial/\partial x_0$ *if and only if it has a set of generators* $\{f_i\}$ *with* $f_i \in k[x_0^p,x_1,\ldots,x_n]$.

Proof. Let $g_1,\ldots,g_r$ be a set of generators for I and write $g_i = \sum_{j=0}^{p-1} h_{ij} x_0^j$, $h_{ij} \in k[x_0^p,x_1,\ldots,x_n]$. Now, by taking

$(\dfrac{\partial}{\partial x_0})^{p-1} g_i = (p-1)!\,h_{i,p-1}$ and, since I is closed under $\dfrac{\partial}{\partial x_0}$ we have $h_{i,p-1} \in I$; hence $\sum_{j=0}^{p-2} h_{ij} x_0^j \in I$ and we continue, so, all $h_{ij} \in I$ and they obviously generate I.

The converse follows from the fact that $\dfrac{\partial}{\partial x_0} f_i = 0$, hence if $\sum \ell_i f_i \in I$, we have $\dfrac{\partial}{\partial x_0} (\sum \ell_i f_i) = \sum \dfrac{\partial \ell_i}{\partial x_0} f_i \in I$, so, I is closed under $\dfrac{\partial}{\partial x_0}$.

LEMMA 2.2. *Let* I *be an ideal in* $k[x_0,x_1,\ldots,x_n]$ *where* k *is a field of*

characteristic p. *Then* I *is closed under the derivations* $\partial/\partial x_0$, $\partial/\partial Fx_0,\ldots,\partial/\partial F^{e-1}x_0$ *if and only if it has a set of generators* $\{f_i\}$ *with* $f_i \in k[F^e x_0, x_1,\ldots,x_n]$.

Proof. We will proceed by induction on e. For e = 1 we are reduced to the previous lemma. Assume it is true for e = r - 1. Then I has generators $g_1,\ldots,g_r \in k[F^{r-1}x_0,x_1,\ldots,x_n]$. Now, write $g_i = \sum_{j=0}^{p-1} h_{ij}(F^{r-1}x_0)^j$ and apply $\partial/\partial F^{r-1}x_0$ p-1 times, and the reasoning follows as in Lemma 2.1.

REMARK 2.3. Lemma 2.1 can be restated for characteristic zero as follows:

If I is an ideal in $k[x_0,\ldots,x_n]$ where k is a field of characteristic zero, then I is closed under the derivation $\partial/\partial x_0$ if and only if it has a set of generators $\{f_i\}$ with $f_i \in k[x_1,\ldots,x_n]$.

3. TANGENTS.

Let V be an algebraic variety, L a line and Q a point in $L \cap V$. If Q is a regular point in V then L is tangent to V at Q if and only if the intersection multiplicity is bigger than one.

By using an affine chunk containing Q, then the ideal of V gives an ideal J in k[t] where t is a parameter for L and the coordinate a of Q in L is a root for J. The intersection multiplicity is the multiplicity of the root a in J.

Let now V be a projective (irreducible) variety $V \subseteq P_n(k)$, defined by a (homogeneous) ideal I, P a rational point in $P_n(k)$ and Q a rational point in V, $Q \neq P$. We want to study the intersection multiplicity of $PQ \cap V$ at Q.

Choose a coordinate system such that $P = (1,0,\ldots,0)$, $Q = (a_0,a_1,\ldots,a_n)$. Since $Q \neq P$ at least one $a_i \neq 0$ $(i \neq 0)$. Let $a_n \neq 0$, then we consider the affine part U of $P_n(k)$ defined by $x_n \neq 0$. By restricting everything to U, the line PQ has parametric equations

$$x_0 = t \qquad x_i = a_i/a_n \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1.$$

If the ideal I of V is generated by $f_1,\ldots,f_r \in k[x_0,\ldots,x_n]$ then a_0 is a zero of $J = \{f_i(t,a_1,\ldots,a_n)\} \in k[t]$, but J is a principal ideal $J = (f)$.

The following result is well known:

LEMMA 3.1. *The intersection multiplicity of* $PQ \cap V$ *at* Q *is bigger than*

COROLLARY 3.2. *The conditions above imply that* $(a_0,\ldots,a_n)$ *is a root for* $\frac{\partial f_i}{\partial x_0}$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ *and conversely.*

Proof. In fact, using the notation above, $f(x_0) = \sum g_i f_i(x_0,a_1,\ldots,a_n)$, $g_i \in k[x_0]$ and $f_i(x_0,a_1,\ldots,a_n) = h_i f(x_0)$, $h_i \in k[x_0]$. Since $\frac{\partial f_i}{\partial x_0}(x_0,a_1,\ldots,a_n) = \frac{\partial (f_i(x_0,a_1,\ldots,a_n))}{\partial x_0}$ we have that, if Q is a multiple root, then so is a_0 in f, hence a_0 is a root of $\frac{\partial f}{\partial x_0}$ and, since $\frac{\partial f_i(x_0,a_1,\ldots,a_n)}{\partial x_0} = h_i \frac{\partial f}{\partial x_0} + \frac{\partial h_i}{\partial x_0} f$, then $\frac{\partial h_i}{\partial x_0}(a_0,a_1,\ldots,a_n) = 0$.

The converse is obvious.

4. TERRIBLE POINTS.

DEFINITION 4.1. Let V be a projective (irreducible) variety $V \subseteq P_n(k)$ and P a rational point in $P_n(k)$, then P is called a terrible point for V if the set of rational points $Q \in V$ such that PQ is tangent to V at Q is not contained in a proper subvariety of V.

THEOREM 4.2. *Let* V *be a projective (irreducible) variety in* $P_n(k)$, P *a rational point in* $P_n(k)$, *where* k *is a field of characteristic zero. Then* P *is a terrible point for* V *if and only if* V *is a cone with vertex* P.

Proof. Take a coordinate system such that $P = (1,0,\ldots,0)$ and I is the (prime) ideal of V. Let I_0 be the ideal generated by I and the derivatives $\frac{\partial f}{\partial x_0}$ for all $f \in I$ (If $f_1,\ldots,f_r$ is a set of generators for I, then I_0 is generated by $f_1,\ldots,f_r, \frac{\partial f_1}{\partial x_0},\ldots,\frac{\partial f_r}{\partial x_0}$), so $I_0 \supseteq I$.

If $I_0 \neq I$, since I is prime, it defines a proper subvariety of V.
If $Q \in V$ and PQ is tangent to V at Q then Q is a zero for I_0 (Cor.3.2), hence if P is a terrible point the set of zeros of I_0 is not contained in a proper subvariety of V, so $I_0 = I$, hence I is closed under $\frac{\partial}{\partial x_0}$, which means (in characteristic zero) that I has a set of generators f_i with f_i independent of x_0.
But this is equivalent to the fact that V is a cone with vertex P.
The converse is trivial.

THEOREM 4.3. *Let* V *be a projective (irreducible) variety in* $P_n(k)$, P *a rational point in* $P_n(k)$, *where* k *is a field of characteristic* $p \neq 0$, *and suppose we have a coordinate system such that* $P = (1,0,\ldots,0)$ *and*

I *is the (prime) ideal of* V. *Then* P *is a terrible point for* V *if and only if* I *has a set of generators* $\{f_i\}$ *with* $f_i \in k[x_0^p, x_1, \ldots, x_n]$.

Proof. As in the previous theorem, if $Q \in V$ and PQ is tangent to V at Q, then Q is a zero of I_0. If $I \neq I_0$ it defines a proper closed subset of V, hence P is not terrible. So $I = I_0$, i.e., I is closed under $\frac{\partial}{\partial x_0}$, and the theorem follows from Lemma 2.1.

5. POLARIZATION.

In [3] and [4], Hipps, Mount and Villamayor defined and studied the polarization map, extending to fields of positive characteristic the classical polarization of a homogeneous polynomial.

In this section we will summarize their construction and apply it to the terrible points.

Let U be a vector space over a field k and U* its dual. Call $O^r U^*$ the r-fold symmetric product of U*. If $e_0, \ldots, e_n$ is a basis for U, call $x_0, \ldots, x_n$ its dual basis in U*, so $O^r U^*$ has as a basis all monomials of degree r in the x_i's. Then, the rational points of $P_n(k)$ are the one dimensional subspaces of U.

DEFINITION 5.1. Let w be a homogeneous polynomial of degree r. Then the polarization map $\mathrm{Pol}_0(w)\colon U \longrightarrow O^{r-1}U^*$ is the linear map defined by $\mathrm{Pol}_0(w)(e_i) = \frac{\partial w}{\partial x_i}$.

Call $\mathrm{vertex}_0 w = \mathrm{Ker}(\mathrm{Pol}_0(w))$.

Suppose $\mathrm{Pol}_{i-1}(w)$ and $\mathrm{vertex}_{i-1}(w)$ have been defined, then we can define $\mathrm{Pol}_i(w)|_{\mathrm{vertex}_{i-1}(w)}$ by the following properties

a) $\mathrm{Pol}_i(w)(x+y) = \mathrm{Pol}_i(w)(x) + \mathrm{Pol}_i(w)(y)$ for $x,y \in U$.

b) $\mathrm{Pol}_i(w)(kx) = F^i k \ \mathrm{Pol}_i(w)(x)$ for $k \in k$, $x \in U$.

c) If $e_1, \ldots, e_s$ is a basis for $\mathrm{vertex}_{i-1}(w)$, $e_1, \ldots, e_n$ a basis for U and $x_1, \ldots, x_n$ its dual basis

$$\mathrm{Pol}_i(w)(e_j) = \frac{\partial w}{\partial F^i x_j} \quad \text{for} \quad e_j \in \mathrm{vertex}_{i-1}(w).$$

LEMMA 5.2. *The map* $\mathrm{Pol}_i(w)$ *is independent of the basis.* ([4], Lemma 2.2).

DEFINITION 5.3. If I is an ideal in $k[x_1, \ldots, x_n]$ generated by homogeneous polynomials $\omega_1, \ldots, \omega_m$ of the same degree, call $\mathrm{vertex}_s(I) =$

THEOREM 5.4. *Let* V *a projective variety* $V \subseteq P_n(k)$ *defined by an ideal* I *generated by forms* w_i *all of the same degree. Then a rational point* $P \in P_n(k)$ *is a terrible point for* V *if and only if* $P \in \text{vertex}_0(I)$. *Here we are identifying the points of* $P_n(k)$ *with the one dimensional subspaces of* U.

Proof. It follows from Th. 4.3 and [4] Th. 6.4.

6. A GENERALIZATION.

If V is a projective variety $V \subseteq P_n(k)$ over a field of characteristic $p \neq 0$, P is a terrible point for V and $Q \in V$, then the intersection multiplicity of $PQ \cap V$ at Q is always a multiple of p.

This fact suggests the idea of searching if the set of points Q such that the intersection multiplicity is bigger than p has properties similar to the set of points Q such that PQ is tangent to V at Q.

We can use the results of [4] to extend the definition of terrible points in the following way.

DEFINITION 6.1. If V is a projective (irreducible) variety $V \subseteq P_n(k)$ where k is a field of characteristic $p \neq 0$ and P is a rational point in $P_n(k)$, then P is called e-terrible for V if the set of rational points $Q \in V$ such that the intersection multiplicity $PQ \cap V$ at Q is a multiple of p^e bigger than p^e, is not contained in a proper closed subset of V.

Then, following the reasonings of §3 and §4, we can prove:

THEOREM 6.2. *Let* V *be a projective (irreducible) variety in* $P_n(k)$, $P \in P_n(k)$, *where* k *is a field of characteristic* $p \neq 0$, *and assume there is a coordinate system such that* $P = (1,0,\ldots,0)$ *and* I *is the ideal of* V. *Then* P *is* e*-terrible for* V *if and only if* I *has a system of generators* $\{f_i\}$ *with* $f_i \in k[F^{e+1}x_0, x_1, \ldots, x_n]$.

THEOREM 6.3. *Let* V *be a projective variety in* $P_n(k)$ *defined by an ideal* I *generated by forms* w_i *all of the same degree. Then a rational point* $P \in P_n(k)$ *is an* e*-terrible point for* V *if and only if* $P \in \text{vertex}_e(I)$.

REFERENCES

[1] DIEUDONNÉ, Jean, *Le calcul differentiel dans les corps de caractéristique* $p > 0$. Proc. Internacional Congress of Math. 1954, Amsterdam (1957), 240-252.

[2] FULTON, W., *Algebraic Curves*, W.A. Benjamín, Inc., New York, 1969.

[3] HIPPS, N., MOUNT, K.R., VILLAMAYOR, O.E., *Sur la polarisation des polinômes homogènes en caractéristique* $p \geqslant 0$. C.R. Acad. Sci. Paris, 284 (1977), 1433-34.

[4] HIPPS, N., MOUNT, K.R., VILLAMAYOR, O.E., *Vertices and polarizations for homogeneous polynomials*, To appear.

[5] MOUNT, K.R., VILLAMAYOR, O.E., *Taylor series and higher derivations*. Dpto de Matemática, Univ. Buenos Aires, N° 18 (1969).

[6] NAKAI, Y., SUZUKI, S., *On M-adic differentials*, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser A. 24 (1960), 459-476.

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad de Buenos Aires
Argentina

Recibido en Junio de 1978.

Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 29, 1979.

EL MODELO DE CRECIMIENTO DE VON NEUMANN PARA UN CONJUNTO ARBITRARIO DE NACIONES O ECONOMIAS

Ezio Marchi

Dedicado al Profesor Luis A. Santaló

INTRODUCCION. El modelo de crecimiento de von Neumann [9], en el cual se estudia la existencia de factores y equilibrio de expansión en una economía cerrada, o de una sola economía, ha sido en los últimos años la base de muchos estudios y publicaciones. Primeramente Kemeny - Morgenstern y Thompson en [4] han removido una condición no deseable del punto de vista económico. Posteriormente muchos autores han extendido el modelo primitivo de von Neumann, por ejemplo Thompson [11] y Gale [3].

Muy recientemente se han publicado un considerable número de trabajos en esta área de la economía matemática, por ejemplo [1]. En tal publicación hay un trabajo de Morgenstern y Thompson [8], el cual es una continuación de varios otros estudios [6] y [7], realizados por los mismos autores incluyendo consumo privado y público, sobre todo para economías abiertas. Aquí se considera la existencia de un mercado internacional.

Nosotros en el presente trabajo generalizaremos el modelo de crecimiento de von Neumann para un número arbitrario de economías, sin que haga falta la existencia de un mercado internacional. El comercio se considera entre todas las respectivas naciones entre sí. Esto resulta más natural desde el punto de vista económico.

Se mostrará que la existencia de un equilibrio de expansión es equivalente a la existencia de un punto de equilibrio de un juego con funciones de pago racionales, el cual está estrechamente ligado al modelo económico. Ahora, bien, la existencia de un punto de equilibrio de un juego con funciones racionales ha sido ya investigada por el autor en [5].

Aquí en la primera parte del trabajo presentaremos otra demostración de tal existencia. En la segunda parte expondremos como hemos mencionado anteriormente el modelo de expansión para un número arbitrario de economías.

1. PUNTOS DE EQUILIBRIO PARA JUEGOS CON FUNCIONES DE PAGO RACIONALES.

En este parágrafo, introduciremos juegos con funciones de pago racionales y estudiaremos la existencia de sus puntos de equilibrio. Este estudio servirá de base para la generalización del modelo de crecimiento de von Neumann para un número arbitrario de economías o países.

Dado un juego n-personal $\Gamma = \{\Sigma_i, F_i; i \in N\}$ donde $N = \{1,\ldots,n\}$ es el conjunto de jugadores, Σ_i sus conjuntos de estrategias no vacías. Sus funciones de pago son F_i. Diremos que Γ es un juego racional si las funciones de pago F_i son de la forma G_i/H_i con $H_i > 0$. Dado un tal juego racional Γ, diremos que un punto $(\bar{\sigma}_1,\ldots,\bar{\sigma}_n) \in \underset{j\in N}{X}\ \Sigma_j$ es punto de equilibrio de Γ, si se cumple:

$$(\bar{\sigma}_1,\ldots,\bar{\sigma}_n) \in \underset{j\in N}{X}\ \Sigma_j: \quad \frac{G_i(\bar{\sigma}_1,\ldots,\bar{\sigma}_n)}{H_i(\bar{\sigma}_1,\ldots,\bar{\sigma}_n)} \geqslant \frac{G_i(\bar{\sigma}_1,\ldots,\bar{\sigma}_{i-1},\sigma_i,\bar{\sigma}_{i+1},\ldots,\bar{\sigma}_n)}{H_i(\bar{\sigma}_1,\ldots,\bar{\sigma}_{i-1},\sigma_i,\bar{\sigma}_{i+1},\ldots,\bar{\sigma}_n)}$$

para todo $i \in N$ y todo $\sigma_i \in \Sigma_i$.

Ahora introduciremos el teorema principal sobre la existencia de puntos de equilibrio para juegos racionales, el cual ya ha sido considerado por el autor en el trabajo [5]. Aquí presentaremos el mismo resultado pero con una demostración distinta.

TEOREMA 1. *Todo juego racional* $\Gamma = \{\Sigma_i, G_i/H_i, i \in N\}$ *donde los* Σ_i *son compactos y convexos en un espacio euclidiano, con funciones continuas* G_i *cóncavas y* H_i *convexas en* $\sigma_i \in \Sigma_i$ *para cada* $(\sigma_1,\ldots,\sigma_{i-1},\sigma_{i+1},\ldots,\sigma_n) \in \underset{j\neq i}{X}\ \Sigma_i$ *respectivamente, tiene un punto de equilibrio.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos considerar que para $i \in N$: $F_i = G_i/H_i \geqslant h_i > 0$, ya que sumando una constante positiva a las funciones de pago, no se altera el conjunto de puntos de equilibrio.

Dado $(\sigma_1,\ldots,\sigma_{i-1},\sigma_{i+1},\ldots,\sigma_n)$ y un número real $c > 0$, sea

$$L_i^c(\sigma_1,\ldots,\sigma_{i-1},\sigma_{i+1},\ldots,\sigma_n) = \{\sigma_i \in \Sigma_i : \frac{G_i(\sigma_1,\ldots,\sigma_{i-1},\sigma_i,\sigma_{i+1},\ldots,\sigma_n)}{H_i(\sigma_1,\ldots,\sigma_{i-1},\sigma_i,\sigma_{i+1},\ldots,\sigma_n)} \geqslant c\}$$

$$= \{\sigma_i \in \Sigma_i : G_i(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) - c\,H_i(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \geqslant 0\}$$

Este conjunto para cada c es convexo y cerrado por ser G_i cóncava y H_i convexa en $\sigma_i \in \Sigma_i$ respectivamente y ambas continuas.

Definamos para cada $(\sigma_1,\ldots,\sigma_{i-1},\sigma_{i+1},\ldots,\sigma_n)$ y cada $i \in N$ el conjunto:

$$\phi_i(\sigma_1,\ldots,\sigma_{i-1},\sigma_{i+1},\ldots,\sigma_n) = \{\sigma_i \in \Sigma_i : F_i(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) = \max_{\zeta_i \in \Sigma_i} F_i(\sigma_1,\ldots,\sigma_{i-1},\zeta_i,\sigma_{i+1},\ldots,\sigma_n)\}$$

el cual es no vacío, convexo y cerrado, ya que los L_i^c lo son. Entonces el conjunto

$$\phi(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) = \underset{i\in N}{X} \phi_i(\sigma_1,\ldots,\sigma_{i-1},\sigma_{i+1},\ldots,\sigma_n) \subset \underset{i\in N}{X} \Sigma_i$$

determina una función multivaluada $\phi: \underset{i\in N}{X} \Sigma_i \longrightarrow \underset{i\in N}{X} \Sigma_i$ tal que cada imagen es no vacía, convexa y cerrada. Además el gráfico de ϕ es cerrado por ser las funciones de pago continuas. Por lo tanto el teorema de puntos fijos de Kakutani asegura la existencia de un punto fijo: $\bar{\sigma} \in \phi(\bar{\sigma})$. Un tal punto es un punto de equilibrio del juego Γ. (CQD).

Dado un juego racional finito $\Gamma = \{\Sigma_i, A_i/B_i; i \in N\}$ con $B_i > 0$, donde el número de estrategias $|\Sigma_i|$ para cada jugador es finito, podemos definir su extensión $\bar{\Gamma} = \{\tilde{\Sigma}_i, D_i/E_i, i \in N\}$ donde $\tilde{\Sigma}_i$ es el conjunto de todas las probabilidades definidas sobre Σ_i . D_i y E_i son las esperanzas matemáticas de A_i y B_i respectivamente.

Por lo tanto la extensión $\bar{\Gamma}$ es un juego racional. Entonces del Teorema anterior se obtiene inmediatamente el siguiente resultado:

COROLARIO 2. *La extensión* $\bar{\Gamma} = \{\tilde{\Sigma}_i, D_i/E_i; i \in N\}$ *de un juego racional finito* $\Gamma = \{\Sigma_i, A_i/B_i; i \in N\}$, *donde* $B_i > 0$, *posee un punto de equilibrio.*

Demostración. Como las funciones D_i y E_i son multilineales y $E_i > 0$, entonces aplicando el Teorema anterior al juego $\bar{\Gamma}$, el resultado resulta claro. (CQD).

Queremos mencionar que un punto de equilibrio de un juego racional $\Gamma = \{\Sigma_i, G_i/H_i; i \in N\}$ es un punto $\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_1,\ldots,\bar{\sigma}_n)$ tal que cumple si y sólo si:

$$\emptyset_\Gamma(\bar{\sigma},\bar{\sigma}) = \max_{\sigma \in \underset{i\in N}{X}\Sigma_i} \emptyset_\Gamma(\sigma,\bar{\sigma})$$

donde

$$\emptyset_\Gamma(\sigma,\zeta) = \sum_{i\in N} J_i^\Gamma(\sigma_i,\zeta)$$

con

$$J_i^\Gamma(\sigma_i,\zeta) = H_i(\zeta)\, G_i(\zeta_1,\ldots,\zeta_{i-1},\sigma_i,\zeta_{i+1},\ldots,\zeta_n) - G_i(\zeta)\, H_i(\zeta_1,\ldots,\zeta_{i-1},\sigma_i,\zeta_{i+1},\ldots,\zeta_n)$$

Este resultado puede verse en la demostración de la existencia de puntos de equilibrio dada por el autor [5].

Usando estos resultados, tenemos que

PROPOSICION 3. *Dados los juegos racionales*

$$\Gamma = \{\Sigma_i,\ G_i/H_i;\ i \in N\}\ ,\quad \Gamma^* = \{\Sigma_i,\ G_i/(H_i \pm G_i);\ i \in N\}$$

bajo las condiciones $H_i > 0$, $H_i \pm G_i > 0$, *poseen los mismos puntos de equilibrio.*

Demostración. Nos hace falta ver que $\emptyset_\Gamma = \emptyset^*_\Gamma$. Consideremos

$$J_i^{\Gamma^*} = [H_i(\xi) \pm G_i(\xi)]\, G_i(\xi_1,\ldots,\xi_{i-1},\sigma_i,\xi_{i+1},\ldots,\xi_n) -$$

$$- G_i(\xi)[H_i(\xi_1,\ldots,\xi_{i-1},\sigma_i,\xi_{i+1},\ldots,\xi_n) \pm G_i(\xi_1,\ldots,\xi_{i-1},\sigma_i,\xi_{i+1},\ldots,\xi_n)]$$

y simplificando tenemos

$$J_i^{\Gamma^*}(\sigma_i,\xi) = H_i(\xi)G_i(\xi_1,\ldots,\xi_{i-1},\sigma_i,\xi_{i+1},\ldots,\xi_n) -$$

$$- G_i(\xi)H_i(\xi_1,\ldots,\xi_{i-1},\sigma_i,\xi_{i+1},\ldots,\xi_n) = J_i^{\Gamma}(\sigma_i,\xi)$$

Por lo tanto $\emptyset_\Gamma = \emptyset^*_\Gamma$ (CQD).

Queremos hacer notar que este mismo resultado vale también si solamente para algunos k se tiene $G_i/H_i \pm G_i$ como función de pago.

2. GENERALIZACION DEL MODELO DE CRECIMIENTO DE VON NEUMANN.

Nosotros al generalizar el famoso modelo de expansión económica de von Neumann, supondremos que el lector conozca tal modelo. Como referencias para este modelo damos los excelentes libros de Burger [2] y el de Nikaido [10].

Ahora presentaremos una tal generalización. Sea $K = \{1,\ldots,m\}$ el conjunto de naciones o economías, las cuales, sin perder generalidad asúmimos que poseen un número igual de procesos o actividades económicas $I = \{1,\ldots,n\}$. Además se tiene el conjunto total de bienes de consumo $J = \{1,\ldots,q\}$.

Los insumos del bien j que vienen del país k del proceso $i \in I$ al país ℓ está determinado por la matriz $n \times m$: $A^{k\ell}(i,j)$. Todas estas matrices son non-negativas. Similarmente $B^{k\ell}(i,j) \geqslant 0$ es el producto del país k que va al país ℓ del proceso i del bien j. Llamaremos a las matrices $A^{k\ell}$ y $B^{k\ell}$, insumo y productos respectivamente.

Como es usual, adoptaremos la normalización de las intensidades, es de-

sea $$x^k \in \{z \in R^n: z_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} z_i = 1\}$$

Similarmente, el vector precio para la nación k será $p^k = (p_1^k,\ldots,p_q^k)$, el cual es normalizado.

Si cada nación k opera con la intensidad x^k, entonces $x_i^\ell A^{\ell k}(i,j)$ representa el porcentaje del proceso i de la nación ℓ que va a la nación k del bien j. Luego

$$\sum_{i=1} \sum_{\ell=1} x_i^\ell A^{k\ell}(i,j)$$

representa el total del insumo o demanda sobre todas las naciones y bienes. Por lo tanto si α_k es el coeficiente de expansión, la cantidad

$$\alpha_k \sum_{i=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{m} x_i^\ell A^{\ell k}(i,j)$$

es la oferta total de lo exportado e interno en la nación k, lo cual debe cubrir por lo menos la demanda para la próxima etapa. De aquí, tenemos una primera desigualdad de las cantidades

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^k \sum_{\ell=1}^{m} B^{k\ell}(i,j) \geqslant \alpha_k \sum_{i=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{m} x_i^\ell A^{\ell k}(i,j) \qquad (1)$$

para cada j y cada k. Esto tiene en cuenta el balance de cantidades internas, de importación y externas.

Para considerar la parte financiera se tiene que

$$\sum_{j=1}^{q} p_j^k \sum_{\ell=1}^{m} B^{k\ell}(i,j)$$

es el precio total del producto interno y exportado del proceso i en la nación k. Por otro lado

$$\sum_{j=1}^{q} \sum_{\ell=1}^{m} p_j^\ell A^{\ell k}(i,j)$$

es el precio pagado por el proceso i por la nación k. Luego si β_k es el factor de interés en la nación k, se tiene que tener, por un análogo argumento que en el modelo de von Neumann

$$\sum_{j=1}^{q} p_j^k \sum_{\ell=1}^{m} B^{k\ell}(i,j) \leqslant \beta_k \Big(\sum_{j=1}^{q} \sum_{\ell=1}^{m} p_j^\ell A^{\ell k}(i,j) + \varepsilon \Big) \qquad (2)$$

para todo proceso i y nación k, donde $\varepsilon > 0$ es pequeño. La introducción del ε es debido a cuestiones técnicas las cuales resultarán claras más adelante.

En el precedente modelo, con matrices insumo $A^{k\ell} \geqslant 0$ y de producto $B^{k\ell} \geqslant 0$, un ε-equilibrio de expansión consiste por los vectores $\overline{x}^k, \overline{p}^k$,

$k \in K$ y coeficientes $0 < \bar{\alpha}_k < \infty$, $0 < \bar{\beta}_k < \infty$ los cuales cumplen

$\alpha)$ $\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i^k \sum_{\ell=1}^{m} B^{k\ell}(i,j) \geq \bar{\alpha}_k \sum_{i=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{m} \bar{x}_j^\ell A^{\ell k}(i,j)$ para todo j y cada k.

$\beta)$ $\sum_{j=1}^{q} \bar{p}_j^k \sum_{\ell=1}^{m} B^{k\ell}(i,j) \leq \bar{\beta}_k \left(\sum_{j=1}^{q} \sum_{\ell=1}^{m} \bar{p}_j^\ell A^{\ell k}(i,j) + \varepsilon \right)$

$\gamma)$ $\bar{p}_j^k = 0$ si $\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i^k \sum_{\ell=1}^{m} B^{k\ell}(i,j) > \bar{\alpha}_k \sum_{i=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{m} \bar{x}_i^\ell A^{\ell k}(i,j)$

$\delta)$ $\bar{x}_i^k = 0$ si $\sum_{j=1}^{q} \bar{p}_j^k \sum_{\ell=1}^{m} B^{k\ell}(i,j) < \bar{\beta}_k \left(\sum_{j=1}^{q} \sum_{\ell=1}^{m} \bar{p}_j^\ell A^{\ell k}(i,j) + \varepsilon \right)$

La tercera condición expresa el hecho que si la producción de un bien excede al consumo, entonces su correspondiente precio es cero. Analogamente para la última desigualdad, si un bien no es ganancial entonces $\bar{x}_i^k = 0$.

Ahora veremos como un tal modelo de expansión y sus ε-equilibrios poseen una vinculación íntima con los juegos racionales entre n personas. Con tal motivo sea X el simplex unitario para los x y P el simplex unitario para los precios p.

Definamos las siguientes funciones

$$M^k(x^k,p^k) = \sum_i \sum_j p_j^k x_i^k \sum_\ell B^{k\ell}(i,j)$$

$$N^k(x^1,\ldots,x^m,p^k) = \sum_i \sum_j \sum_\ell x_i^\ell p_j^k A^{\ell k}(i,j)$$

y finalmente

$$O_\varepsilon^k(x^k,p^1,\ldots,p^m) = \sum_i \sum_j \sum_\ell x_i^k p_j^\ell A^{\ell k}(i,j) + \varepsilon = O^k(x^k,p^1,\ldots,p^m) + \varepsilon.$$

Teniendo estas funciones, introduciremos un juego racional ficticio de 2 m personas:

$$\Gamma_\varepsilon = \{P,\ldots,P,X,\ldots X;\ -M^1/_{N^1+M^1},\ldots,-M^m/_{N^m+M^m};M^1/_{O_\varepsilon^1+M^1},\ldots,M^m/_{O_\varepsilon^m+M^m}\}$$

el cual está definido si se cumple la condición

a) $$A^{\ell k}(i,j) + \sum_{\ell=1}^{m} B^{k\ell}(i,j) > 0$$

para todos ℓ, k, i, y j.

Con una tal condición todos los denominadores son positivos. La última

delo de von Neumann. Como es sabido tal condición ha sido cambiada por otra, por ejemplo por Kemeny-Morgenstern y Thompson en [6], Thompson [11], Gale en [3], y otros. Pero por brevedad y simplicidad, nosotros usaremos la condición ya mencionada.

Por otro lado, es claro que cada proceso consuma algún bien; es decir: para cada k hay un ℓ tal que para cada i hay un j: $A^{\ell k}(i,j) > 0$. Condición que llamaremos b). Finalmente cada bien es producido por algún proceso: para cada k y j hay un i y un ℓ tal que $B^{k\ell}(i,j) > 0$, la cual designamos como condición c).

Ahora introduciremos el resultado principal de este trabajo.

TEOREMA 4. *Dado el modelo de expansión cumpliéndose las condiciones adicionales* a), b), y c), *entonces* $\bar{x}^k$, $\bar{p}^k$, $0 < \bar{\alpha}_k < \infty$, $0 < \bar{\beta}_k < \infty$ *es un* ε*-equilibrio de expansión si y sólo si* $(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^m,\bar{p}^1,\ldots,\bar{p}^m)$ *es un punto de equilibrio del juego asociado* Γ_ε, *con*

$$\bar{\alpha}_k \; N^k(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^m,\bar{p}^k) = M^k(\bar{x}^k,\bar{p}^k)$$

y

$$\bar{\beta}_k \; O^k_\varepsilon(\bar{x}^k,\bar{p}^1,\ldots,\bar{p}^m) = M^k(\bar{x}^k,\bar{p}^k).$$

Demostración. Tomemos la desigualdad α) que multiplicaremos por p^k_j y sumamos sobre j. De aquí

$$M^k(\bar{x}^k,p^k) \geqslant \bar{\alpha}_k \; N^k(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^m,p^k).$$

En virtud de γ), para $p^k = \bar{p}^k$ tenemos una igualdad. Llamemos

$$\bar{\alpha}_k = \frac{\bar{\gamma}_k}{1-\bar{\gamma}_k}$$

consecuentemente $0 < \bar{\gamma}_k < 1$. Reemplazando en la desigualdad anterior este coeficiente y multiplicando la correspondiente ecuación, se tiene

$$\frac{-M^k(\bar{x}^k,p^k)}{N^k(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^m,p^k) + M^k(\bar{x}^k,p^k)} \leqslant -\bar{\gamma}_k$$

la cual está bien definida por la propiedad a) que asegura que el denominador es siempre positivo. De nuevo, en virtud de la condición γ), se tiene

$$\frac{-M^k(\bar{x}^k,p^k)}{N^k(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^m,p^k)+M^k(\bar{x}^k,p^k)} \leqslant \frac{-M^k(\bar{x}^k,\bar{p}^k)}{N^k(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^m,\bar{p}^k)+M^k(\bar{x}^k,\bar{p}^k)} = \bar{\gamma}_k$$

Analogamente teniendo en cuenta las desigualdades β), δ) y a), se obtiene

$$\frac{M^k(x^k,\bar{p}^k)}{O_\varepsilon^k(x^k,\bar{p}^1,\ldots,\bar{p}^m) + M^k(x^k,\bar{p}^k)} \leqslant \frac{M^k(\bar{x}^k,\bar{p}^k)}{O_\varepsilon^k(\bar{x}^k,\bar{p}^1,\ldots,\bar{p}^m) + M^k(\bar{x}^k,\bar{p}^k)} = \bar{\delta}_k$$

donde $\bar{\beta}_k = \dfrac{\bar{\delta}_k}{1-\bar{\delta}_k}$ y $0 < \bar{\delta}_k < 1$. Por lo tanto un ε-equilibrio de expansión es un punto de equilibrio de Γ_ε.

Inversamente, sea $(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^m,\bar{p}^1,\ldots,\bar{p}^m)$ un punto de equilibrio del juego Γ_ε, cuyas funciones de pago son no negativas con denominador positivo, debido a la condición a). Un tal punto de equilibrio existe por el teorema 1, ya que nuestras funciones son multilineales y suma de ellas son también multilineales. Entonces, por una parte tenemos

$$\frac{-M^k(\bar{x}^k,p^k)}{N^k(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^m,p^k) + M^k(\bar{x}^k,p^k)} \leqslant \frac{-M^k(\bar{x}^k,\bar{p}^k)}{N^k(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^m,\bar{p}^k) + M^k(\bar{x}^k,\bar{p}^k)}$$

Llamando $\bar{\gamma}_k$ al segundo término multiplicado por menos uno, se tiene

$$\frac{M^k(\bar{x}^k,p^k)}{N^k(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^m,p^k) + M^k(\bar{x}^k,p^k)} \geqslant \bar{\gamma}_k \qquad (*)$$

para todo p^k.

Queremos ver que $0 < \bar{\gamma}_k < 1$. Claramente $0 \leqslant \gamma_k \leqslant 1$. Si fuese $\bar{\gamma}_k = 1$ entonces de la última desigualdad, tendríamos

$$N^k(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^m,\ p^k) \leqslant 0$$

para todo p^k. Por lo tanto

$$\sum_i \sum_\ell \bar{x}_i^\ell \, A^{\ell k}(i,j) \leqslant 0$$

para cada j. Sea $\bar{x}_{\bar{i}}^{\bar{\ell}} > 0$ donde $\bar{\ell}$ es el de la condición b) entonces por ella existe un $\bar{j}$ tal que $A^{\bar{\ell}k}(\bar{i},\bar{j}) > 0$. De aquí

$$0 < \bar{x}_{\bar{i}}^{\bar{\ell}} A^{\bar{\ell}\bar{k}}(\bar{i},\bar{j}) \leqslant \sum_i \sum_\ell \bar{x}_i^\ell \, A^{\ell k}(i,j)$$

lo que es absurdo.

Queremos ver que $\bar{\gamma}_k \neq 0$. Para ello consideramos las otras desigualdades del punto de equilibrio de Γ_ε que están dadas por:

$$\frac{M^k(x^k,\bar{p}^k)}{O_\varepsilon^k(x^k,\bar{p}^1,\ldots,\bar{p}^m) + M^k(x^k,\bar{p}^k)} \leqslant \frac{M^k(\bar{x}^k,\bar{p}^k)}{O_\varepsilon^k(\bar{x}^k,\bar{p}^1,\ldots,\bar{p}^m) + M^k(\bar{x}^k,\bar{p}^k)} = \bar{\delta}_k$$

Inmediatamente se ve que $0 \leqslant \bar{\delta}_k \leqslant 1$. Es claro que $\bar{\delta}_k \neq 0$, ya que si

$0. < \bar{\delta}_k$. Ahora tenemos que

$$\bar{\gamma}_k = \frac{M^k(\bar{x}^k, \bar{p}^k)}{N^k(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^m, \bar{p}^k) + M^k(\bar{x}^k, \bar{p}^k)}$$

y si $\bar{\gamma}_k = 0$ entonces $M^k(\bar{x}^k, \bar{p}^k) = 0$. Pero si vale esto último tendríamos $\bar{\delta}_k = 0$, lo cual es imposible. Entonces $\bar{\gamma}_k > 0$.

Supongamos ahora que $\bar{\delta}_k = 1$ entonces

$$O^k_\varepsilon(x^k, \bar{p}^1, \ldots, \bar{p}^m) \leqslant 0$$

lo cual es imposible porque

$$O^k_\varepsilon(x^k, \bar{p}^1, \ldots, \bar{p}^m) \geqslant \varepsilon > 0.$$

Entonces $0 < \delta_k < 1$ y por lo tanto

$$M^k(x^k, \bar{p}^k) \leqslant \bar{\beta}_k \; O^k_\varepsilon(x^k, \bar{p}^1, \ldots, \bar{p}^m)$$

donde $0 < \bar{\beta}_k = \dfrac{\bar{\delta}_k}{1-\bar{\delta}_k} < \infty$.

De aquí se tiene

$$\sum_j \bar{p}^k_j \sum_\ell B^{k\ell}(i,j) \leqslant \bar{\beta}_k \left[\sum_j \sum_\ell \bar{p}^\ell_j \, A^{\ell k}(i,j) + \varepsilon \right]$$

para cada i y k, lo cual es β). El cumplimiento de δ) es claro. Si no fuese cierto, entonces tampoco (*) no sería cierto.

Finalmente, como se tiene $0 < \bar{\alpha}_k = \dfrac{\bar{\delta}_k}{1-\bar{\delta}_k} < \infty$, entonces (*) se puede escribir de la siguiente forma:

$$M^k(\bar{x}^k, p^k) \geqslant \bar{\alpha}_k \; N^k(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^m, p^k)$$

para todo k y p^k, y de aquí

$$\sum_i \bar{x}^k_i \sum_\ell B^{k\ell}(i,j) \geqslant \bar{\alpha}_k \sum_i \sum_\ell \bar{x}^\ell_i \, A^{\ell k}(i,j)$$

para todo j y k, lo cual es α). La condición γ) se obtiene análogamente como δ).

De aquí un punto de equilibrio es un ε-equilibrio de expansión. (CQD).

Es interesante notar que para cada ε, uno posee un ε-equilibrio de expansión o un punto de equilibrio del juego asociado Γ_ε. Uno está tentado de hacer $\varepsilon \longrightarrow 0$, pero en tal caso aparecerá por lo menos un punto de

BIBLIOGRAFIA

[1] BRUCKMANN G. y WEBER W. Ed., *Contributions to the von Neumann Growth Model*, Springer Verlag 1971.

[2] BURGER E., *Introduction to the Theory of Game*, Prentice Hall 1963.

[3] GALE D., *The Closed Linear Model Introduction in Linear Inequalities and Related Systems*, (Eds. H.W. Kunh and A.W. Tucker) Princeton 1956.

[4] KEMENY, J.G., O. MORGENSTERN y G.L. THOMPSON, *A generalization of the von Neumann Model of a expanding economy*, Econométrica 24, 115-135 (1956).

[5] MARCHI E., *Equilibrium points of rational n-person games*, Journal Math. Anal. and Appl. vol. 54 n° 1, 1-4 (1976).

[6] MORGENSTERN O. y G.L. THOMPSON, *Private and public consumption and savings in the von Neumann model of an expanding economy*, Kyklos 20 , 387-409, 1967.

[7] MORGENSTERN O. y G.L. THOMPSON, *An open expanding economy model*, Naval Res. Log. Quart. 16 443-457, 1969.

[8] MORGENSTERN O. y G.L. THOMPSON, *Further consideration of an open expanding economy model*, en [1].

[9] v. NEUMANN, *A model of general economic equilibrium*, Rev. of Econ. Studies 12, 1-9, 1945-1946.

[10] NIKAIDO H., *Convex structures and economic theory*, Acad. Press. (1968).

[11] THOMPSON G.L., *On the solution of a game theoretic problem. In Linear Inequalities and Related Systems*, (Eds. H.W. Kuhn y A.W. Tucker) Princeton pp. 275-284, 1956.

IMECC, UNICAMP , Campinas, S.P.
Brasil.

y Universidad Nacional de San Luis
Argentina.

Recibido en abril de 1978.

Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 29, 1979.

XXVIII REUNION ANUAL DE LA U.M.A.

Auspiciada por la Universidad Nacional de La Pampa, entre los días 18 y 20 de setiembre de 1978 se realizó la XXVIII Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina, en la ciudad de Santa Rosa (La Pampa).Esta reunión contó también con el apoyo del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.

La sesión inaugural tuvo lugar el día 18 a las 19 horas, en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa. Usaron de la palabra el Señor Gobernador de la Provincia de La Pampa, General de brigada (RE) Eladio E. Aguirre, el Señor Rector de la Universidad Nacional de La Pampa, Profesor Vicente Marquina y en representación de la U.M.A. su vicepresidente 1°, Prof. Eduardo Gaspar. Posteriormente se dictó la conferencia "Julio Rey Pastor", que en esta oportunidad estuvo a cargo del Ing. O. Villamayor, quien disertó sobre "Singularidades de Variedades algebraicas".

Durante el desarrollo de la Reunión fueron pronunciadas las siguientes conferencias: "Diferenciación a través de medias esféricas lacunares", a cargo del Dr. Calixto Calderón"; "Estructura local de las acciones diferenciables de grupos de Lie compactos", a cargo del Dr. Christian Sánchez; "La noción de residuo en varias variables complejas", a cargo del Dr. Miguel Herrera; "Problemas de la actualización de la enseñanza de la matemática", a cargo del Dr. César Trejo.

Las sesiones de comunicaciones, cuyos resúmenes aparecen a continuación, tuvieron lugar el día 18 en horas de la tarde y el día 19 en horas de la mañana y de la tarde. El día 20 se realizó una sesión referida a problemas de la enseñanza de la matemática, con comunicaciones y discusiones sobre el tema.

La Asamblea General Ordinaria de la U.M.A. se realizó el día 20 a las 19,30 horas. Luego de la aprobación de la Memoria y Balance correspondiente al período vencido, se procedió a la elección de la nueva Junta Directiva de la U.M.A., la que quedó integrada de la siguiente manera: Presidente: Orlando Villamayor; Vicepresidente 1°: Mario Castagnino; Vicepresidente 2°: Juan A. Tirao; Secretario: Carlos G. Gregorio; Prosecretario: Nicolás Patetta; Tesorera: Ana E. Blangino; Protesorera: Graciela S. Birman; Director de Publicaciones: Darío J. Picco. Posteriormente la Asamblea recibió los votos para la elección de los vocales regionales, resultando electos los siguientes: Centro: H. Alaggia; Cuyo: María Rosa Berraondo; Nordeste: Héctor Tamburini; Sur: María L. Gurmendi; Noroeste: Roberto Ovejero; Litoral: C. Meritano; Capital y La Plata: J.J. Martínez.

Finalmente se agradeció a la Universidad Nacional de La Pampa el auspicio otorgado a la XXVIII Reunión Anual de la U.M.A., y al Departa-

RESUMENES DE LAS COMUNICACIONES PRESENTADAS A LA XXVIII REUNION ANUAL DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

CORACH, G. (U.N.B.A.): *Sobre el número de generadores de una* C^∞*-álgebra.*

Un subconjunto S de un álgebra topológica A genera topológicamente a A si el conjunto de polinomios en elementos de S es denso en A. Si existe un tal S finito, A es topológicamente finitamente generada. Dada un álgebra C^∞ A su espectro X(A) tiene una estructura de variedad diferenciable de modo tal que se inmerge regularmente en algún R^m. Dado $h \in X(A)$ llamamos $d_h(A)$ a la dimensión de X(A) en h. Definimos también $i(A) = \text{mín}\{m: X(A) \text{ se inmerge regularmente en } R^m\}$ y g(A) = número mínimo de generadores topológicos de A.

TEOREMA. Si A es una C^∞-álgebra $d_h(A) \leqslant g(A) = i(A) \quad \forall\, h \in X(A)$.

COROLARIO 1. Si A es una C^∞-álgebra, $d_h(A) = g(A) = n \quad \forall\, h \in X(A)$ si y sólo si X(A) es difeomorfo a un abierto de R^n.

COROLARIO 2. Si X es una subvariedad de R^{n+1} de dimensión n entonces $g(C^\infty(X)) = n$ ó $n+1$.

GATTO, A. B. E. (U.N.B.A.): *Descomposición atómica de distribuciones en espacios* H^p *parabólicos.*

Se obtiene una descomposición en átomos de las distribuciones pertenecientes a cualquier espacio H^p parabólico de Calderón-Torchinsky, $0 < p \leqslant 1$. Esta descomposición es obtenida extendiendo el método usado por A.P. Calderón en el caso diagonizable. El resultado obtenido es el siguiente: Si $f \in H^p$, $0 < p \leqslant 1$, $k \geqslant \gamma/p-1$, existe una sucesión de k-átomos α_j tales que $f = \sum \alpha_j$ en H^p, o sea $\|f - \sum_1^N \alpha_j\|_{H^p} \to 0$ para $N \to \infty$, y determinada una norma en H^p y el valor de k existe una constante c tal que $c^{-1} \|f\|^p_{H^p} \leqslant \sum \|\alpha_j\|^p_{(p)} \leqslant c \|f\|^p_{H^p}$.

Un k-átomo es una función acotada, con soporte compacto y momentos nulos hasta el orden k. Se define $\|\alpha\|_{(p)} = \|\alpha\|_\infty (\inf |B|^{1/p})$ donde $|B|$ denota la medida de una bola en la métrica parabólica que contiene al soporte de α; γ = traza de P, donde P es el generador infinitesimal del grupo de dilataciones mediante el cual se define H^p.

GUTIERREZ, C. E. (U.N.B.A.): *Sobre integrales singulares y espacios de Orlicz.*

Se determina a qué espacios de Orlicz L_ϕ puede pertenecer el núcleo de

un operador integral singular para que éste resulte continuo en $L^2(R^n)$. El resultado es el siguiente:
Sean $k(x,y)$ una función homogénea de grado -n en y ($\forall\, x \in R^n$) con valor medio cero sobre la esfera unitaria Σ de R^n y ϕ una función de Young tal que $\phi(x)/x^2$ es no creciente. Entonces si $\forall\, x \in R^n$, $k(x,.) \in L_\phi(\Sigma)$ y

$$\sup_{x \in R^n} \|k(x,.)\|_\phi \leq C ,$$

se tiene que el operador K con núcleo k satisface:

$$\|Kf\|_2 \leq C(n,\phi).\ \sup_{x \in R^n} \|k(x,.)\| \ .\ \|f\|_2 \qquad \forall\, f \in L^2(R^n) ,$$

a condición que ϕ satisfaga:

$$\int_1^\infty \frac{1}{\phi(t^{n/2(n-1)})}\, dt < \infty .$$

SPINADEL de, V. W. (U.N.B.A.): *Optimalidad de juegos diferenciales con la ecuación de difusión.*

Se trata de extender la condición de optimalidad de Isaacs para juegos diferenciales ordinarios al caso de un juego diferencial parcial, en particular, al caso de un juego diferencial en el cual el sistema físico está descripto por una ecuación diferencial del tipo de la del calor o de difusión.

Los métodos utilizados, tales como la discretización de la ecuación diferencial parcial o el desarrollo de Fourier de las funciones de control y la función incógnita, permiten llegar a un principio similar al de Isaacs para juegos diferenciales parciales.

TORANZOS, F. A. (U.N.B.A.): *Los puntos de no-convexidad local de un conjunto estrellado.*

Hace 50 años que Tietze demostró que un conjunto conexo y cerrado de R^n, sin puntos de no-convexidad local, es convexo. Desde entonces el concepto de punto de no-convexidad local ha sido una herramienta importante en la geometría de conjuntos convexos y no convexos. Demostramos acá que cada componente convexa de un conjunto cerrado y conexo S en un espacio vectorial topológico localmente convexo contiene puntos de no-convexidad local de S, a menos que S sea convexo. La generalización de Klee del teorema de Tietze antes mencionado resulta como corolario. Luego caracterizamos el mirador de un conjunto S como intersección de los "conos internos" en los puntos de no-convexidad local de S, generalizando un resultado previo de F. Valentine. Finalmente introducimos la noción de "mayor visibilidad" en un conjunto estrellado y demostramos un teorema tipo Krassnosselsky, donde también juegan un rol

TORANZOS, F. A. (U.N.B.A.) y NANCLARES, J. H. (Ministerio de Planeamiento): *Inscripción de símplices en cuerpos convexos.*

Es bien conocida la posibilidad de inscribir en un óvalo (figura convexa suave y rotunda) triángulos equiláteros en cualquier posición. Tratamos aquí de generalizar este resultado a dimensiones superiores.

TEOREMA 1. Sea K un cuerpo convexo suave y rotundo en E^n y sea T un n-simplex regular. Existe un n-simplex regular T' inscripto en K y similarmente situado que T.

TEOREMA 2. Sea K un cuerpo convexo suave y rotundo en E^n, y sea $p \in$ front K. Existe un n-simplex regular inscripto en K que tiene a p como vértice.

Se investigó la unicidad (con resultado negativo en ambos casos) y la generalización a símplices no regulares (resultado positivo en el Teor. 1 y negativo en el Teor. 2).

BUSTOS, O. H. (U.N. San Luis): *Estimación robusta en procesos autorregresivos contaminados.*

Sea $(Y_t)_t$ un proceso estacionario y ergódico de la forma $Y_t = V_t Z_t + (1-V_t)X_t$ siendo $(V_t)_t$ una familia de v.a.i.i.d. con $V_0 \in Bi(\epsilon,1)$ ($\epsilon > 0$ conocido); $(Z_t)_t$ otra familia de v.a.i.i.d.; $(X_t)_t$ un AR(p) de la forma $X_{t+p} = \mu + \tilde{X}_{t+p-1}\underline{\theta}' + U_t$ (donde $\tilde{X}_{t+p-1} = (X_t,\ldots,X_{t+p-1})$, $\underline{\theta}'$ la traspuesta de $\underline{\theta}$) con $(U_t)_t$ proceso del tipo φ-mixing satisfaciendo $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n)^{1/2} < \infty$, $EU_0 = 0$, σ parámetro de escala de U_0; para cada $n = 1,2,\ldots$ sean $\hat{\mu}_n$, $\hat{\underline{\theta}}_n$, $\hat{\sigma}_n$ estimadores de μ, $\underline{\theta}$, σ respectivamente basados en muestras de tamaño n de $(Y_t)_t$ definidos por

$$(1/n) \sum_{t=0}^{n-1} \psi(H(t,n))\, w(J(t)) = 0$$

$$(1/n) \sum_{t=0}^{n-1} \psi(H(t,n))\, J(t)\, w(J(t)) = \underline{0}$$

$$(1/n) \sum_{t=0}^{n-1} \chi(H(t,n)^2) = 0$$

donde $H(t,n) = (Y_{t+p} - \hat{\mu}_n - \tilde{Y}_{t+p-1}\hat{\underline{\theta}}_n')/\hat{\sigma}_n$: $J(t) = \tilde{Y}_{t+p-1}$.

Bajo condiciones bastante generales se obtienen: consistencia fuerte y normalidad asintótica de estos estimadores, incluso para el caso de presencia de un parámetro de posición y otro de escala de las observaciones que se estiman previamente. Se define y prueba robustez cualitativa de $(\hat{\underline{\theta}}_n)$ bajo $\mu = 0$ y σ conocido. Finalmente se muestran propiedades numéricas de muestras finitas para el caso p=1 usando métodos de Montecarlo.

VARGAS, J. (I.M.A.F.): *Fórmulas explícitas para caracteres de representaciones de cuadrado integrable de grupos de Lie semisimples.*

Sea G un grupo de Lie semisimple no compacto con centro finito. Una representación unitaria irreducible π de G se llama de cuadrado integrable si alguno de sus coeficientes matriciales es de cuadrado integrable con respecto a la medida de Haar en G.

Sea π una representación de cuadrado integrable de G y sea Θ_π el caracter de π. Es bien conocido que Θ_π es una función analítica real y central en un abierto denso de G, que está localmente dada por una fórmula análoga a la de Weyl para los grupos compactos. En esta comunicación proveemos fórmulas explícitas para los caracteres Θ_π cuando π tiene la propiedad de Borel-de Siebenthal.

AGUILERA, N. E. y HARBOURE, E. O. (U.N.B.A.): *Sobre multiplicadores en espacios de Hölder globales.*

Se consideran operadores invariantes por traslaciones entre clases de Hölder globales como las tratadas por N. M. Riviere. Dichas clases Λ^p_α están definidas de la siguiente manera:

$$\Lambda^p_\alpha = \{f \in S' \ (R^n \setminus \{0\}) : \sup_{a>0} \|f * \check{\phi}_a\|_p \, a^{-\alpha} < \infty\}$$

donde

$$\phi \in C_0^\infty \ (R^n) \ , \ \text{sop } \phi \subset \{x/1/4 < |x| < 2\} \text{ y tal que si}$$

$$\phi_a(x) = \phi(ax) \ , \ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_{2^k}(x) = 1 \quad \text{para } x \neq 0.$$

Se obtienen los siguientes resultados:

Si $T: \Lambda^p_\alpha \longrightarrow \Lambda^q_\beta$, $\beta > \alpha$ y T es invariante por traslaciones, entonces:

a) $T: L^r \longrightarrow L^s$ donde $1 < r, s < \infty$, $\frac{1}{s} - \frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} - \frac{\beta-\alpha}{n}$ si

$$p \geqslant 2, \ \frac{1}{r} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} > \frac{\beta-\alpha}{n} \ , \ s > p'$$

b) $T: L^m \longrightarrow BMO$ si $\frac{1}{m} = \frac{\beta-\alpha}{n} + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ si $q > \frac{n}{p-\alpha}$

Estos resultados pueden considerarse como una generalización de los obtenidos por Stein y Zygmund en "Boundedness of translation invariant operators on Hölder and L^p-spaces". (Ann. of Math. 85 (1967) págs. 337-349).

ALVAREZ ALONSO, D. (U.N.B.A.): *Construcción de un cálculo funcional sobre operadores regularizantes.*

Sea $R_k = \{R: C_0^\infty \longrightarrow D'/RD^\alpha$, $D^\alpha R$ se extienden a operadores lineales y acotados de L^2 en sí mismo para $0 \leqslant |\alpha| \leqslant k\}$. $D^\alpha = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} \circ \ldots \circ (\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n}$.

Se consideran procesos aleatorios de variedades compactas $Q(\rho)$ de dimensión r, dependientes de un parámetro positivo ρ, tales que dos variedades con el mismo valor de ρ sean congruentes. Suponiendo que $A = A^q$ es una variedad fija, tal que $r+q-n \geq 0$, se considera la variable aleatoria $V_{r+q-n}(A) = \sum \sigma_{r+q-n}(A \cap Q)$, donde σ_{r+q-n} significa el volumen (r+q-n)-dimensional y la suma se extiende a todos los conjuntos Q del proceso. Se calcula el valor medio EV_{r+q-n}. Si r=q=n, se considera la variable aleatoria $X(A) = \sum \chi(A \cap Q)$, donde χ significa la característica de Euler-Poincaré y se calcula también su valor medio. El caso de procesos de Poisson es analizado con detalle. Se considera también la generalización a "procesos mixtos".

BIRMAN, G. S. (U.N.B.A.): *Sobre densidad de pares de elementos.*

Sea $P_3(C)$ el espacio complejo hermitiano elíptico de dimensión 3, con métrica dada por $\cos \frac{d}{2} = |(x,y)|$ donde d es la distancia entre x e y.

En este espacio se generalizan algunas densidades de pares y ternas de elementos, tales como: pares de puntos, recta y punto, recta y plano, pares de planos, ternas de puntos, pares de rectas, punto y plano; a partir de lo hecho por H. Rohde (Unitäre Integralgeometrie, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 13 (1940)(295-318)) para el plano proyectivo complejo y por O. Varga (Crofton's formula in E_3, Math. Z., 40 (1935) (387-405)). Cabe también, la generalización de densidades de pares de cadenas uni-, bi- y tridimensionales y de éstas con puntos, rectas y planos.

MILASZEWICZ, J. P. (U.N.B.A.): *Generalización de un teorema de Kahan.*

Sean L y U matrices cuadradas con sus términos no negativos; con $\rho(\ )$ indicamos el radio espectral de matrices.

TEOREMA. Sea $\rho(L) < 1$; las siguientes proposiciones son equivalentes: (i) $0 < \rho((I-L)^{-1}U)$; (ii) $\{\rho(L+tU)/t \geq 0\}$ es no acotado; (iii) Existe t_1 tal que $\rho(L+t_1U) = 1$.

El teorema que se generaliza considera como hipótesis suplementarias que L y U sean respectivamente triangulares inferior y superior estrictas. De esta generalización se obtienen algunos corolarios vinculados al Teorema de Stein-Rosenberg.

BUSCH, J. R. (U.N.B.A.): *Interpolación de tipo Hermite por polinomios en* R^n.

Mediante el estudio de las propiedades de ciertos ideales de polinomios en n variables, naturalmente asociados a un problema de interpolación, se obtiene por aplicación del teorema chino del resto una ca-

Dado $A \in R_k$, sea A_k el álgebra real generada por una familia maximal de operadores autoadjuntos en R_k que conmutan entre sí y con A.

Sea $C_0 = \{f: R \longrightarrow R \ / \ f$ es continua, $f(0) = 0$, f es derivable en $t=0\}$.

Se prueba entonces que existe un cálculo funcional completo sobre A_k relativo a C_0, entendiendo por ello, que hay una aplicación

$C_0 \times A_k \xrightarrow{\varphi_k} A_k$, $(f,R) \longrightarrow \varphi_k(f,R) = f(R)$ cumpliendo:

1. Si $\underline{X}$ es la función $f(x) = x$, $\varphi_k(\underline{X},R) = R \quad \forall R \in A_k$.
2. $\varphi_k(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, R) = \alpha_1 \varphi_k(f_1,R) + \alpha_2 \varphi_k(f_2,R) \quad \forall \alpha_i \in R$, $f_i \in C_0$, $R \in A_k$.
3. $\varphi_k(f_1 . f_2, R) = \varphi_k(f_1,R) \circ \varphi_k(f_2,R) \quad \forall f_i \in C_0$, $R \in A_k$.
4. $\varphi_k(f_1, \varphi_k(f_2,R)) = \varphi_k(f_1 \circ f_2, R) \quad \forall f_i \in C_0$, $R \in A_k$.

Sobre $R_\infty = \bigcap_k R_k$ es posible obtener un resultado análogo.

VIOLLAZ, A. J. (U. N. Tucumán): *Tests de hipótesis basados en combinaciones lineales de cuadrados de componentes ortogonales del estadístico de Cramer-Von Mises.*

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a. independientes e identicamente distribuídas en el intervalo unidad. La j-ésima componente ortogonal se define como $V_{nj} = n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} d_j(X_i)$ donde $\{1, d_1, d_2, \ldots\}$ es una base ortonormal para $L_2[0,1]$. Se consideran tests basados en combinaciones lineales de los V_{nj}^2, para el problema de docimar una hipótesis simple frente a una alternativa simple. Se determina la combinación lineal para la cual el correspondiente test es, aproximadamente, localmente óptimo.

DIEULEFAIT, C. E. (U.N. Rosario): *Una observación en algunos cálculos de residuos.*

Bajo las condiciones expuestas en los textos corrientes, (ver por ejemplo: Jean Dieudonné, Calcul Infinitésimal pág. 242) la expresión:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{a_k} f(z)$$

debe escribirse, como resultado efectivo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0$$

ello como consecuencia directa de una propiedad sencillamente expuesta en el texto de esta comunicación.

FAVA, N. y SANTALO, L. A. (U.N.B.A.): *Procesos aleatorios de variedades en* R^n.

racterización de la P-unisolvencia de un conjunto de interpolación. Mediante la obtención de fórmulas explícitas para el 1, que expresan el hecho de ser estos ideales coprimos entre sí, se obtienen métodos recurrentes para hallar funciones de base asociadas al problema de interpolación. La condición $P_k \subset P$, esencial para el análisis del error de interpolación de funciones por polinomios, se expresa en términos de los generadores de estos ideales.

CARRIZO, E. C. (U.N.B.A.): *Propiedades del espectro de matrices cíclicas.*

Usando un sencillo resultado se generaliza un teorema de Romanovsky sobre propiedades del espectro de matrices particionadas en bloques dispuestos según una permutación cíclica y al mismo tiempo se obtiene una demostración diferente de un teorema de Frobenius sobre la estructura del espectro de matrices irreducibles no negativas cíclicas de índice k.

TRIONE, S. E. (U.N.B.A. y I.A.M.): *Sobre una generalización de una fórmula de representación de Bogoliubov-Parasiuk.*

En esta nota daremos una fórmula de representación de las soluciones elementales (causal y anticausal) del operador n-dimensional de Klein-Gordon, iterado k veces, $G_{\alpha=2k}(P\mp io,m,n)$ (1) por medio de una integral simple (simbólica) de Fourier. El caso particular n=4, k=1, importante en teoría cuántica de campos, ya que $G_2(P - io,m,4)$ da una expresión útil del propagador causal de Feynman, fue establecido por Bogoliubov y Parasiuk (cf. Uber die Multiplication der Kausal-funktionen in der Quanten-theorie der Felder, Acta Mathematica, 97, 227-266, especialmente, p. 233, 1957) y desempeña un papel esencial en la teoría de la multiplicación de distribuciones causales, debida a estos autores.

(1) $G_\alpha(P\mp io,m,n) \stackrel{\text{def}}{=\!=} A_\alpha(m,n)(P\mp io)^{\frac{1}{2}(\frac{\alpha-n}{2})} K_{\frac{n-\alpha}{2}}\{\sqrt{m^2(P\mp io)}\}$, donde

$P = P(x) = x_1^2+\ldots+x_p^2-x_{p+1}^2-\ldots-x_{p+q}^2$, p,q enteros ≥ 0, $p+q = n$, $\alpha \in \mathbf{C}$, $m > 0$, $x = (x_1,\ldots,x_n) \in R^n$, $n \geq 0$,

$$A_\alpha(m,n) = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\alpha}\, 2^{1-\frac{\alpha}{2}}\, e^{\mp i\frac{\pi}{2}q}\, (m^2)^{\frac{1}{2}(\frac{\alpha-n}{2})}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\, \Gamma(\frac{\alpha}{2})},$$

$(P\mp io)^\lambda = \lim_{\varepsilon\to 0}\{P\mp i\varepsilon\,|x|^2\}^\lambda$, $\varepsilon > 0$, $\lambda \in \mathbf{C}$, $|x|^2 = x_1^2+\ldots+x_n^2$ y K es la función modificada de Bessel de tercera especie definida, cuando ν no es un número entero, por la fórmula

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2 \operatorname{sen} \nu\pi} \{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)\} ,$$

donde $$I_\nu(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(\frac{z}{2})^{\nu+2\mu}}{\nu!\ \Gamma(\nu+\mu+1)} .$$

GONZALEZ DOMINGUEZ, A. (U.N.B.A. y CONICET): *Sobre algunos productos distribucionales multiplicativos heterodoxos.*

Sean S y T dos distribuciones. Definiremos su producto multiplicativo por la fórmula

$$S \cdot T = \lim_{n\to\infty} \{S * g_n(x)\} \cdot \{T * g_n(x)\} ,$$

si el límite existe para todo modificador $g_n(x) = n\, g(nx)$, $(-\infty < x < \infty)$, donde el símbolo * significa, como de costumbre, "convolución" y la función g(x) tiene las propiedades siguientes:

a) $g(x) \in C_0^\infty$; b) $g(x) \geqslant 0$; c) $g(x) = g(-x)$; d) $\operatorname{sop.} g(x) = [-1,1]$; e) g(x) es creciente para $-1 \leqslant x \leqslant 0$ y decreciente para $0 \leqslant x \leqslant 1$; f) $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, dt = 1$. Esta definición es una leve modificación de la definición de Mikusinski. Utilizando esta definición evaluamos numerosos productos multiplicativos "heterodoxos". Nos limitaremos a consignar dos de nuestras fórmulas:

a) $$\delta^{[k]} \cdot \{vp\ x^{-1}\}^{[m]} + \delta^{[m]} \cdot \{vp\ x^{-1}\}^{[k]} = (-1) \frac{k!m!}{(k+m+1)!} \delta^{k+m+1}$$

en esta fórmula k y m son dos enteros no negativos y las letras "vp" significan, como de costumbre, "valor principal".

b) Sea S una distribución de soporte compacto (esta hipótesis puede generalizarse). Vale entonces la fórmula

$$\{vp\ x^{-1}\}^{[k]} \cdot \{vp\ x^{-1}\}^{[m]} \pi^2 \{\delta^k \cdot \delta^m\} = (-1)^{k+m}\, k!m!\ pf\ x^{-k-m-2} .$$

En esta fórmula k y m son dos enteros no negativos y las letras "pf" significan, como de costumbre, "parte finita".

Las dos fórmulas que preceden admiten generalizaciones multidimensionales (esféricas, cónicas e hiperbólicas). Estas fórmulas generalizadas aparecen en la teoría cuántica de campos y en la electrodinámica no lineal de Yang-Mills.

BONESANA, N. D. (C.N.E. Atómica) y D'ATTELLIS, C. E. (I.A.M.): *Regulación óptima de plantas nucleares.*

Las plantas nucleares plantean problemas de regulación multidimensionales y estocásticos. Se aplican en este trabajo las teorías del regu

do los resultados sobre una simulación de un modelo que considere las ecuaciones cinéticas del reactor y las de temperatura.

CORTINA, E. (U.N.B.A.): *Sobre representaciones a la Darlington de funciones matriciales j-expansivas.*

Para una función matricial A(z) de orden 2n j-expansiva; es decir que satisface a la condición $A^*(z)jA(z) - j \geqslant 0$ para $|z| < 1$, donde

$$j = \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

se obtuvo una representación de la forma

$$A(z) = [\alpha(z)\varepsilon + \beta(z)][\gamma(z)\varepsilon + \delta(z)]^{-1} ,$$

donde ε es una matriz constante j-expansiva y la matriz de coeficientes

$$W(z) = \begin{pmatrix} \alpha(z) & \beta(z) \\ \gamma(z) & \delta(z) \end{pmatrix}$$

de orden 4n, satisface a la condiciones

$W^*(z)JW(z) - J \geqslant 0$ para $|z| < 1$, $W^*(e^{it})JW(e^{it}) - J = 0$ para casi todo t $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, donde

$$J = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix} .$$

El interés de la representación obtenida consiste en que, a base de ella, puede establecerse un método de síntesis de n-puertos de matriz de transferencia prefijada.

CHIAPPA, R. A. (U.N.S.): *Determinación de sucesiones de De Bruijn binarias.*

Se da un algoritmo que permite construir cualquiera de las sucesiones de De Bruijn que se pueden determinar con dos símbolos.

Ellas se obtienen como circuito euleriano de un grafo de J. Good. A tal efecto se representa cada uno de sus arcos por un entero $0 \leqslant j < 2^m$, y por sucesivas extensiones y concatenaciones de los caminos obtenidos a partir de los arcos pares se determinan los circuitos en cuestión.

AUSLANDER, M. (Brandeis University, U.S.A.), PLATZECK, M.I. (U.N.S.) y REITEN, I. (Trondheim University, Noruega): *Funtores de Coxeter sin diagramas.*

Se desarrolla primeramente una generalización de la noción de funtor de Coxeter parcial, conocida para diagramas, a ciertos tipos de ani-

llos y álgebras de artin, utilizando la teoría de sucesiones casi escindibles. Sea D la dualidad ordinaria para álgebras de artin y Tr M la traspuesta del módulo M. Se prueba para álgebras de artin hereditarias que una composición de funtores de Coxeter parciales es el funtor D Tr. Luego se estudia la conexión entre los distintos funtores de Coxeter existentes para diagramas, así como para álgebras y anillos de artin.

WEIDENBACH, R.J. (U.N. del Centro): *La matemática en la prehistoria.*

Los presuntos primeros conocimientos; su análisis. La matemática de los babilonios. La matemática de los egipcios; su aporte. La matemática de los indios, de los chinos y de los mayas; herencia dejada. Aporte griego.

KEILHAUER, G. : *Horoesferas en variedades de Hadamard.*

Por una variedad de Hadamard entendemos una variedad de Riemann M de dimensión ($\geqslant 2$) conexa y simplemente conexa y curvatura seccional $K_\sigma \leqslant 0$ para todo plano tangencial σ de M. Si v es un vector unitario, la función de Busemann $b_v : M \longrightarrow R$ se define por

$b_v(q) = \lim_{\substack{s\to+\infty \\ s>0}} (d(q,c_v(s))-s)$ donde d denota la distancia inducida por la métrica, y C_v el rayo geodésico con dirección inicial v.

El conjunto $H_v = b_v^{-1}(0)$ se define como la horoesfera determinada por v.

En (1) se probó que b_v es de la clase C^1, y en (2) que la normal a H_v, definida vía la noción de rayos asintóticos, es de la clase C^1.

Como consecuencia de (2) probamos que la variedad M es C^1 difeomorfa a $\mathbf{R} \times H_v$.

Por otro lado, la combinación de los resultados de (1) y (2) implica la diferenciabilidad C^2 de b_v (hecho que aparentemente no ha sido notado). Utilizando este resultado, probamos que en el caso dim $M \geqslant 3$ y K_σ, acotado por debajo por $-r^2$ ($r > 0$ fijo), para todo plano tangencial σ de M se verifica la siguiente acotación para las curvaturas seccionales K_σ^v de la hipersuperficie H_v como así también para la curvatura media H^v computada en la dirección dada por grad b_v.

(a) para todo $q \in H_v$ es $0 \leqslant H^v(q) \leqslant r$

(b) para todo plano tangencial σ a H_v es $|K_\sigma^v - K_\sigma| \leqslant r^2$

Observaciones:

i) Las acotaciones (a) y (b) son válidas para cualquier horoesfera de M, pues v es arbitrario.

ii) Es un hecho conocido que, si $K_\sigma = -r^2$ para todo σ, entonces $K_\sigma^v = 0$ (es decir, H_v es isométrico a un espacio euclideano), y $H^v \equiv r$.

(1) Eberlein P., O'Neill B.: Visibility Manifolds, Pacific J. of Mathematics, 46 (1973), 45-105.

(2) Eschenburg J.H.: Stabilitätverhalten des geodätischen Flusses Riemannscher Mannigfaltigkeiten, Thesis, Bonn 1975.

CALDERON, C. P. (University of Illinois, Chicago Circle, I.A.M., U.N.B.A.): *Regularidad focal y global de funciones.*

Sea $\omega(t)$ el módulo L^1 de continuidad de una función periódica de período 2π , a saber:

$$\omega(t) = \sup_{h,|h|<t} \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)| \, dx \ .$$

Sea $\phi(t)$ una función continua, creciente tal que $\phi(0) = 0$. Supongamos en $\omega(t)$ la siguiente condición de integrabilidad:

(i) $$\int_0^1 \phi(t) \, \frac{dt}{t} = \infty \quad ; \quad \int_0^1 \omega(t) \ \phi(t) \, \frac{dt}{t} < \infty \ .$$

Entonces para cada $\lambda > 0$ f admite la siguiente descomposición:

TEOREMA. $$f = f_1 + f_2$$

(i) $$\frac{1}{|I|} \int_I |f_1(x) - f_1(y)| \, dy < C[\phi(|I|)]^{-1} . \ \lambda$$

donde I es un intervalo arbitrario centrado en x. La constante C no depende de x, f o λ , y $\Phi(t)$ viene expresada por:

$$\Phi(t) = \int_t^1 \phi(s) \, \frac{ds}{s} \qquad 0 < t < 1$$

(ii) f_2 satisface

a) f_2 vive en una unión de intervalos $\bigcup_1^\infty I_k$ tal que

$$\sum_1^\infty |I_k| < \frac{C_1}{\lambda} \left[\int_0^1 \omega(t) \ \phi(t) \, \frac{dt}{t} + \|f\|_1 \right]$$

b) $$\sum_1^\infty \Phi(|I_k|) \int_{I_k} |f_2| \, dt \leqslant C_2 \left[\int_0^1 \omega(t) \ \phi(t) \, \frac{dt}{t} + \|f\|_1 \right]$$

C_1 y C_2 no dependen de f o λ.

TARAZAGA, P. and MARCHI, E. (U.N. San Luis): *Two steps transportation model.*

In this paper we present a transportation model which introduces a new variant in transportation theory. We study a model with two steps. The

merchandise goes from a port to a destination but passes through a deposit where accumulation is not allowed. Constraints on the amount of merchandise passing through a deposit are also considered. Moreover, different results simplifying the computation of the corresponding programming problems are also studied.

COLEFF, N. (U.N. de La Plata): *Descripción de una familia de puntos singulares de superficies.*

Sea C una curva regular compacta (superficie de Riemman) y consideremos un fibrado tangente T. C admite una inmersión canónica como sección nula de T.

Si el género de C es mayor que 1, C está negativamente situada en T y por un teorema de Grauert sabemos que existe el blowing - down de C a un punto singular normal de una superficie.

Se trata de describir la familia de puntos singulares así obtenidos y calcular sus caracteres numéricos (multiplicidad, dimensión de embedding, etc). Se considera únicamente el caso en que C sea hiperelíptica.

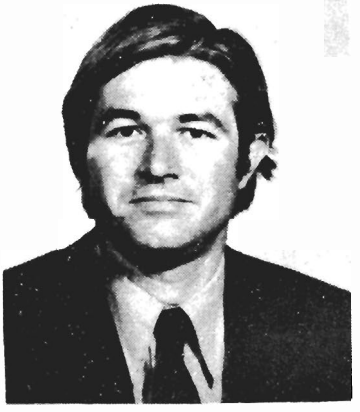
El problema analizado se encamina a producir ejemplos de inmersiones de curvas en superficies que no son equivalentes pero tienen primer grado de equivalencia.

Este trabajo fue realizado en colaboración con James Morrow.

MARCHI, E. and CESCO, J. (U.N. San Luis): *Generalizing von Neumann growth model.*

In this paper we introduce consumption, labour, wages, saving and loans in the von Neumann growth model and study different models.Differently of other authors we introduce the new concepts accordingly from a competitive point of view. Thus relation with equilibrium points of a suitable game is obtained. We apply an existence theorem of equilibrium points for games with rational pay offs already formulated by the first author.

NESTOR MARCELO RIVIÈRE



Mes plus grands deuils en sont passés.
VILLON, Le Testament, XCI.

Néstor Marcelo Rivière nació el 10 de junio de 1940 en Buenos Aires y vivió en Ramos Mejía hasta 1963, cuando se trasladó a Chicago, Estados Unidos. Desde 1966 residió en Minneapolis hasta su muerte el 3 de enero de 1978 a los 37 años de edad. Se casó el 23 de febrero de 1962 con su gran compañera Marisa y en 1974 nació su hija Melisa que ha heredado mucho de la singular mirada de su padre.

Es muy fácil descubrir que la virtud principal de Rivière fue su valiente franqueza. Actuó siempre directamente en el contacto con amigos, colegas y discípulos y sus prontas aprobaciones o disentimientos fueron estímulo esperado por todos ellos. Esto, acompañado de su agudeza superior, lo hacían un formidable camarada (sobre todo de empresas imposibles) que contagiaba fuerza y corage. En su apropiada perspectiva, estas reflexiones se aplican también a su actividad matemática.

Un matemático comienza su carrera cuando empieza a *hacer* matemáticas (es decir, a ocuparse de la matemática que él cree que todavía no está descubierta); es claro entonces que al terminar la enseñanza media ya era Rivière un matemático de carrera. Y debe decirse como homenaje a las escuelas secundarias que el mucho tiempo que dejan libre permite a sus alumnos hacer uso inteligente de su ingenio. Tanto más, en casos como éste, cuando se trata de personalidades independientementes y curiosas. Así es que durante su adolescencia se enteró sin duda de algunos de los grandes problemas de la matemática (en obras de divulgación, encontradas por casualidad) y se preocupó, como era de esperar, por cuestiones elementales de teoría de números, signo inequívoco de su inclinación.

Es con estos antecedentes que comenzó la primer etapa de su vida adulta ingresando en 1957 a la Facultad de Ciencias, en Buenos Aires. Allí empezaron sus veinte años de "hacer matemáticas".

Desde el primer momento trabajó Rivière con vigor. No solamente en los cursos que tomaba sino también durante las muchas horas que pasaba en el Departamento de Matemáticas o en los cafés de la zona. Lo más singular de su comportamiento, sin embargo, era que todo problema, o duda, o sospecha matemática que le llegara se transformaba inmediatamente en el objeto principal de su esfuerzo. Y tanto mejor si se **trataba** de un tema completamente nuevo y eran las dos de la mañana.

Esta fue, creo, su cualidad característica por entonces, y con esa actitud continuó hasta recibirse de Licenciado en Matemáticas en 1961. Debo aclarar, sin embargo, que esa exaltada curiosidad no le impidió cumplir con sus obligaciones académicas y que sus calificaciones muestran a las claras el éxito que tuvo en los cursos. En *todos* los cursos.

Durante su permanencia en Ciencias Exactas como alumno, fue uno de los beneficiarios de la cuidadosa dedicación de un grupo de autorizados profesores que supieron alentar este tipo de comportamiento al permitir generosamente que los estudiantes se extraviaran por cuanto tema descubrían en la biblioteca y desarrollaran vivos e interminables torneos en los que afilaban su imaginación, comparaban sus conocimientos matemáticos y combatían la ignorancia colectiva. Es seguro que en un ambiente más opresivo no hubiera despuntado tan rapidamente su poderosa personalidad matemática y su obra futura habría sido menos original. Muchas veces se ha señalado la gratitud que Rivière y sus camaradas sintieron siempre por los que aceptaron que este peripatético consorcio se comportara como lo hizo, y maestros y alumnos quedaron así asociados como responsables solidarios de la que Santaló llama "la generación de 1961" (Evolución de las Ciencias en la República Argentina, 1923-1972, Tomo I, Sociedad Científica Argentina, 1972). Rivière es el primer caído de este grupo; fue también de los primeros en remontarse, y más alto.

Su carrera como investigador (llamo investigador matemático a quien produce regularmente cosa publicable en revista de buen nivel) comenzó a fines de 1960 en Bariloche cuando Monteiro le propuso algunos problemas sobre reticulados distributivos. La necesidad de manejar largas series de casos hizo que Rivière se interesara por la computación automática. Así es que fue Programador en el Instituto de Cálculo durante los últimos seis meses de 1961, lo que le permitió progresar en el problema sobre reticulados (su contribución apareció en 1968 en Journal of Combinatorial Theory).

En esos meses participó también en un seminario sobre topología algebraica. Desde enero hasta junio de 1962 ofreció cursos de análisis en el Instituto de Física de Bariloche y al volver a Buenos Aires comenzó a dictar un curso de Teoría de Galois. Aunque está bien claro que su prin

lidad de temas que lo interesaron y con los que pudo contribuir seriamente desde sus cátedras. Puedo también señalar para mayor abundancia de prueba de esta versatilidad, que fue coautor del artículo de álgebra que aparece en Fundamenta Mathematica, Volumen 71, páginas 193 a 198, de 1971.

Su viaje a Chicago en 1963 es el comienzo de su segunda etapa, que duró hasta 1966 cuando recibió su Doctorado en Matemáticas en la Universidad de Chicago con una tesis dirigida por Calderón. Sin duda estos años fueron muy importantes para su formación definitiva ya que a partir de entonces se dedicó exclusivamente al análisis clásico (aunque no me habría sorprendido que, de vivir los otros treinta años que razonablemente le hubieran correspondido, hubiera también dedicado esfuerzos a otros temas - el álgebra; tal vez la biología matemática).

Por último en su tercer etapa, de joven madurez, trabajó en la Universidad de Minnesota donde llegó a ser Profesor Titular. En esa función dictó cursos superiores, dirigió varias tesis y produjo numerosas publicaciones y un libro sobre medida e integración que salvo detalles editoriales dejó listo para publicar (proyecto que ha prometido completar su colaborador de años y entrañable amigo, Eugene B. Fabes).

Con respecto a su obra, un detalle cuidadoso y técnico aparecerá en el volumen que la American Mathematical Society dedicará al Harmonic Analysis Summer Institute, Williamstown, 1978. En forma vaga, he aquí una lista de temas: interpolación, ecuaciones parabólicas, integrales singulares, multiplicadores, problemas de fronteras libres.

Finalmente, los viajes. Su creciente prestigio internacional lo llevó a visitar centros de alto nivel (Universidad de Paris, Instituto Mittag-Leffler, Scuola Normale Superiore de Pisa, Weisman Institute) por los que fue invitado y adonde llegó muchas veces con teoremas nuevos. Como miembro de la American Mathematical Society organizó varias reuniones y participó en muchas otras en los Estados Unidos y también intervino en varias reuniones de la Unión Matemática Argentina como expositor y activo participante. En 1969 y en 1970 visitó la Argentina donde dictó seminarios y en 1971 ganó por concurso un cargo de Profesor Titular Ordinario en el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Exactas, en Buenos Aires. Esto, que lo enorgulleció mucho, respondía a su plan de trabajar una parte de cada año en Argentina según un formato establecido y de probada eficacia (baste recordar que el mismo Rey Pastor usó este artificio casi inmediatamente después de su primera visita en 1917). Desgraciadamente, el inadecuado tratamiento que hizo la Facultad del aspecto administrativo de este plan resultó en la pérdida de un prestigioso visitante regular. Así es como su foja de servicios se extiende desde el 3 de enero de 1959 hasta el 19 de febrero de 1971, cuando se lo designa Profesor Titular Ordinario.

Creo que Rivière hubiera aprobado que se me encargara su necrología, pero el producto le parecería demasiado serio para ser de mi mano. La pro

funda y al parecer inagotable tristeza que su muerte me produjo es sin duda la causa de este paréntesis de estilo que el Vasco, espero, me perdonará.

Con la prematura desaparición de Néstor Marcelo Rivière la comunidad matemática ha perdido a un original creador y sus muchos amigos al querido "Vasco", siempre alerta, sorprendente y polémico, las más veces acertado, e invariablemente franco.

Horacio Porta.
Urbana, Julio de 1978.

NORMAS PARA LA PRESENTACION DE ARTICULOS

Los artículos que se presenten a esta revista no deben haber sido publicados o estar siendo considerados para su publicación en otra revista.

Cada trabajo deberá ser enviado en su forma definitiva, con todas las indicaciones necesarias para su impresión. No se envían pruebas de imprenta a los autores.

Cada artículo debe presentarse por duplicado, mecanografiado a doble espacio. Es deseable que comience con un resumen simple de su contenido y resultados obtenidos. Debe ponerse especial cuidado en distinguir índices y exponentes; distinguir entre la letra O y el número cero, la letra l y el número uno, la letra i y ι (iota.), ϛ y Є, etc. Los diagramas deben dibujarse en tinta china. Los símbolos manuscritos deben ser claramente legibles. Salvo en la primera página, deben evitarse en lo posible notas al pie.

El artículo deberá acompañarse de una lista completa de los símbolos utilizados en el texto.

La recepción de cada trabajo se comunicará a vuelta de correo y en su oportunidad, la aceptación del mismo para su publicación.

Los trabajos deben enviarse a cualquiera de las dos direcciones siguientes:

Revista de la U.M.A.
Instituto de Matemática
Universidad Nacional del Sur
8000 Bahía Blanca
Argentina.

Revista de la U.M.A.
Facultad de Ciencias Exactas
y Naturales
Universidad Nacional de La Pampa
6300 Santa Rosa
Argentina.

NOTES FOR THE AUTHORS

Submission of a paper to this journal will be taken to imply that it has not been previously published and that it is not being considered elsewhere for publication.

Papers when submitted should be in final form. Galley proofs are not sent to the authors.

Papers should be submitted in duplicate, neatly typewritten, double spaced. It is desirable that every paper should begin with a simple but explicit summary of its content and results achieved. Special care should be taken with subscripts and superscripts; to show the difference between the letter O and the number zero, the letter l and the number one, the letter i and ι (iota), ϛ and Є , etc. Diagrams should be drawn with black Indian ink. Symbols which have been inserted by hand should be well spaced and clearly written. Footnotes not on the first page should be avoided as far as possible.

A complete list of the symbols used in the paper should be attached to the manuscript.

Reception of a paper will be acknowledged by return mail and its acceptance for publication will be communicated later on.

Papers should be addressed to any of the following two addresses:

Revista de la U.M.A.
Instituto de Matemática
Universidad Nacional del Sur
8000 Bahía Blanca
Argentina.

Revista de la U.M.A.
Facultad de Ciencias Exactas
y Naturales
Universidad Nacional de La Pampa
6300 Santa Rosa
Argentina.

INDICE

VOLUMEN 29, NUMEROS 1 y 2, 1979

Dedicatoria del Volumen 29 al Prof. Luis A. Santaló

Algebras de funciones diferenciables
Gustavo Corach y Angel R. Larotonda 1

Mejora ficticia de la bondad de ajuste debido a que se ajusta una familia de modelos
Aldo J. Viollaz 38

Aproximación de conjuntos estrellados compactos por familias especiales
Fausto A. Toranzos 49

Existence of a functional calculus over some algebras of pseudo-differential operators
Josefina Alvarez Alonso 55

A remark on terrible points
Orlando E. Villamayo y Orlando Villamayor (h) 77

El modelo de crecimiento de von Neumann para un conjunto arbitrario de naciones o economías
Ezio Marchi 85

XXVIII Reunión Anual de la U.M.A. 96

Resúmenes de las comunicaciones presentadas 97

Necrológica 109

Reg. Nac. de la Prop.
Int. Nº 1.434.189
1979

Correo Argentino
Bahía Blanca, Correo Central (Bs. As.) y Suc. 60 (Bs. Aires)

TARIFA REDUCIDA
CONCES. Nº 1/Dto. 21

FRANQUEO PAGADO
CONCES. Nº 25/Dto. 21

AUSTRAL IMPRESOS
VILLARINO 739 - B.B.