

GINO LORIA

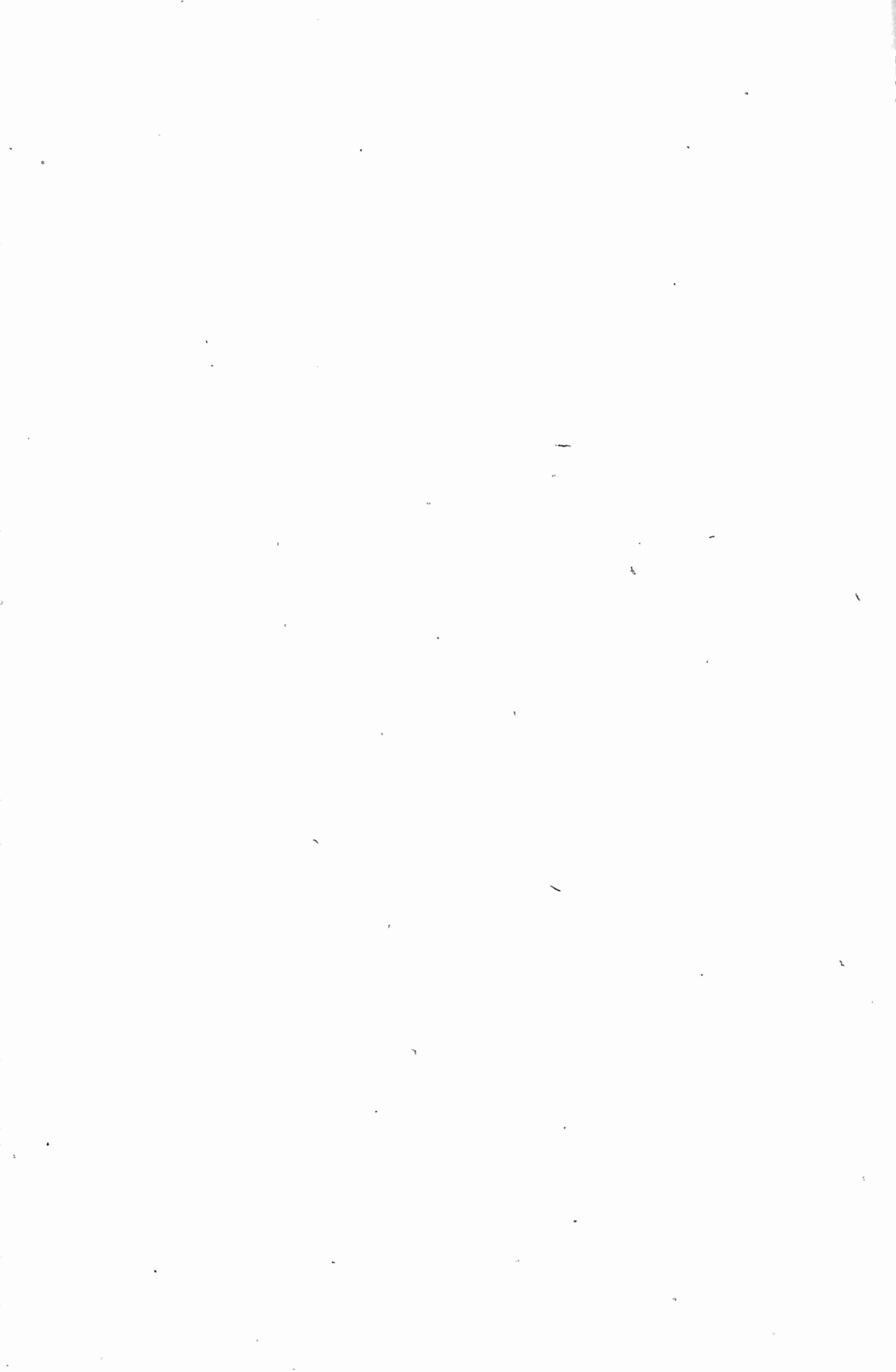
**Le Matematiche in Ispagna
e in Argentina**

UNIÓN MATEMÁTICA ARGENTINA

Publicación núm. 1

BUENOS AIRES

1938



GINO LORIA

**Le Matematiche in Ispagna
e in Argentina**

alla vigilia della guerra civile spagnuola

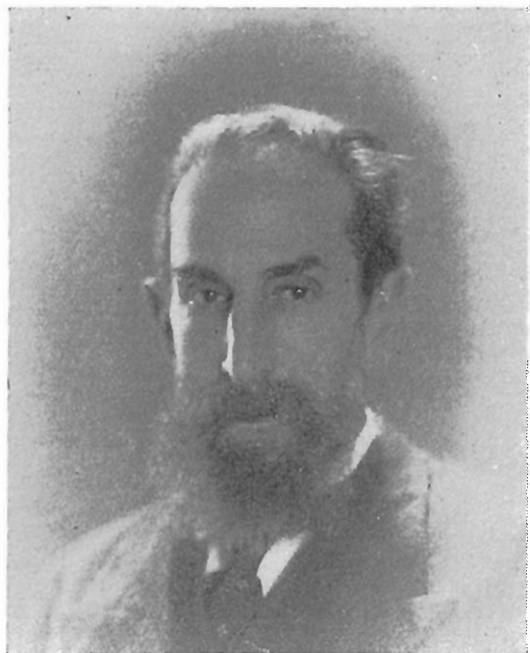
UNIÓN MATEMÁTICA ARGENTINA

Publicación núm. 1

BUENOS AIRES

1938





Profesor Gino Loria

Nació en Mantova (Italia) el 19 de mayo de 1862. Doctor en Matemática en 1883. Laureado por la Academia de Ciencias de París en 1907 y 1921. Miembro de la R. Accademia dei Lincei, de la R. Accademia delle Scienze di Torino, de la R. Accademia Virgiliana de Mantova, de la R. Accademia di Modena, de la Accademia Pontaniana de Nápoles, de la K. Deutsche Akademie de Halle, de la Böhmsche Gesellschaft de Praga, etc. Presidente de la sección ligur de la "Mathesis". Director de la sección histórico-geográfica del "Bolletino di Matematica". Miembro titular, correspondiente y honorario de numerosas asociaciones de diversos países. Profesor jubilado de la Universidad y de la Escuela de Ingeniería Naval de Génova.



GINO LORIA

Gino Loria, el eminente historiador de la ciencia, honra hoy nuestra Revista con el trabajo que publicamos a continuación.

No es ésta la primera vez que el nombre de Gino Loria se asocia a la ciencia hispano-americana. Baste recordar que ya en 1902, su conocido tratado sobre las curvas planas mereció el premio ofrecido por la Academia de Ciencias de Madrid y que posteriormente, en 1919, publicó varios artículos en "Scientia" dedicados a la evolución de la matemática en la península ibérica. Son ellos: *Le matematiche in Portogallo; ciò che furono e ciò che sono* (Las matemáticas en Portugal, lo que fueron y lo que son); *Le matematiche in Ispagna: ieri ed oggi. I. Dal secolo XVI alla metà del XIX. II. I matematici moderni* (Las matemáticas en España: ayer y hoy. I. Desde el siglo XVI hasta mediados del siglo XIX. II. Los matemáticos modernos), y de los cuales, el artículo que hoy publicamos puede considerarse su natural continuación.

Gino Loria, profesor en la Universidad de Génova, miembro de la Academia Internacional de Historia de las ciencias y de otras corporaciones académicas, ha adquirido un amplio renombre y un sólido prestigio, cimentados por su vasta y profunda labor en el campo de la historia de las ciencias exactas, por sus investigaciones en matemática pura y por sus trabajos sobre cuestiones metodológicas, pedagógicas, etc.

Sería imposible reseñar la extraordinaria labor de Loria en el campo de la historia de las ciencias, en especial de la matemática. Citemos únicamente sus principales libros: *Il passato e il presente delle principali teorie geometriche*, 1896, (El pasado y el presente de las principales teorías geométricas), traducido a varios idiomas; *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, 1914, (Las ciencias exactas en la antigua Grecia), quizá el libro más conocido de Loria, caudal inagotable de conocimientos relativos a la historia de la Aritmética, Geometría, Astronomía y Física durante los nueve siglos de cultura helénica y helenística; *Storia della Geometria Descrittiva*, 1921, (Historia de la Geometría Descriptiva) y su reciente historia de las matemáticas en tres volúmenes: *Storia delle matematiche*. Vol. I. *Antichità. Medio Evo. Rinascimento*, 1929; Vol. II. *I secoli XVI e XVII*, 1931; Vol. III. *Dall'alba del secolo XVIII al tramonto del secolo XIX*, 1933; (Historia de las matemáticas. Vol. I. Antigüedad. Edad Media. Renacimiento; Vol. II. Los siglos XVI y XVII; Vol. III. Desde el nacimiento del siglo XVIII hasta el final del siglo XIX). Citemos además que en 1898 fundó Loria un "Boletín de bibliografía e historia de las ciencias matemáticas" y que es autor de una "Guía para el estudio de la historia de las matemáticas". De las numerosas memorias sobre historia de las ciencias solo queremos mencionar los dos artículos aparecidos en "Scientia": *Les contributions des*

différents peuples au développement des mathématiques. I. Événements mémorables et hommes représentatifs dans l'histoire des mathématiques. II. Le caractère international de la pensée mathématique (Las contribuciones de los diferentes países al desarrollo de las matemáticas. I. Sucesos memorables y hombres representativos en la historia de las matemáticas. II. El carácter internacional del pensamiento matemático) que formaban parte de una serie de artículos destinados a mostrar la colaboración internacional en el campo de las ciencias, en un afán de reanudación de relaciones científicas después de la guerra.

En el campo de la matemática pura Loria se ha destacado en el capítulo de las curvas y a él se debe el estudio de ciertas curvas trascendentes, por él clasificadas como panalgebricas. Fruto de tales estudios son sus dos libros: *Spezielle algebraische und Transzendenten ebene Kurven. Theorie und Geschichte*, 1902, (Curvas planas especiales algebraicas y trascendentes. Teoría e historia); *Curve sghembe speciali algebriche e trascendenti*, 1925, (Curvas alabeadas especiales algebraicas y trascendentes). También se ocupó Loria de Geometría Descriptiva publicando dos volúmenes de la colección "Hoepli" sobre esta ciencia y sus métodos.

A la metodología general consagró Loria otro volumen de esa misma colección: *Metodi matematici. Essenza. Tecnica. Applicazioni*, 1935; (Métodos matemáticos. Esencia. Técnica. Aplicaciones), reseñando los métodos de carácter general y algunos especiales de la Geometría y de la Aritmética.

De otro tema, muy importante y sin embargo poco tratado, se ha ocupado Loria en varios de sus trabajos; nos referimos al estudio de las modalidades psíquicas que acompañan al matemático y a su obra creadora. Pertenecen, por ejemplo, a este tipo de estudios los artículos y conferencias: *Psicologia dei matematici*, (Psicología de los matemáticos); *Matematici nella vita pubblica*, (Matemáticos en la vida pública); *Donne matematiche*, (Mujeres matemáticas).

Por último, debemos a Loria algunos trabajos relacionados con cuestiones pedagógicas, bastándonos citar a este respecto el informe general presentado a la Comisión Internacional de Enseñanza matemática: *La preparation théorique et pratique des professeurs de Mathématiques de l'Enseignement secondaire dans les divers pays*, (La preparación teórica y práctica de los profesores de matemática de la enseñanza secundaria en los distintos países).

Tal es, a grandes rasgos, la labor del eminente hombre de ciencia italiano cuya colaboración en esta Revista vivamente agradecemos.

J. B.

LE MATEMATICHE IN ISPAGNA E IN ARGENTINA ALLA VIGILIA DELLA GUERRA CIVILE SPAGNUOLA

por GINO LORIA (Génova)

Nella chiusa di un mio scritto che conta ormai vent'anni di vita ⁽¹⁾, io ebbi a rilevare come la ricerca matematica in Ispagna aveva assunto di recente un andamento che dava adito alle più fondate speranze intorno al suo avvenire: le parole di coloro che io raccolsi sotto il nome generico di "triade dei seminatori" avevano finalmente trovato ascoltatori pronti e disposti a seguirne le sagge esortazioni e gli elevati consigli, onde tutto facere credere nella comparsa di una valorosa "schiera di mietitori". La previsione sembrò essere confermata, tanto che, in principio del 1936, la Società matematica avente la propria sede a Madrid pensò di solennizzare il proprio primo quarto di secolo di vita redigendo un bilancio di quanto i cultori delle scienze esatte avevano recentemente compiuto nella soleggiata penisola e pregò chi scrive di aggiungere al precitato lavoro una succinta esposizione della matematica spagnuola nel successivo ventennio; specialmente fù l'opera di giovani che perfezionarono i loro studi in università tedesche, incoraggiati a far ciò dal prof. J. Rey Pastor che tanto frutto aveva ritratto da soggiorni specialmente a Gottinga. Va però notato che durante il suindicato periodo il Rey Pastor aveva ripartita la propria opera d'insegnante fra la Spagna e la Repubblica Argentina: in conseguenza ai discepoli che egli annoverava in patria, altri e valorosi se ne aggiunsero al di là dell'Atlantico; perciò nel redigere la rassegna si è giudicato che sarebbe stato far opera manca ed incompleta escludere i contributi dati alla matematica da alumni dell'Università argentina ⁽²⁾.

La memoria commemorativa trovavasi già pronta per la stampa a Madrid quando scoppiò la guerra che tuttora insanguina quella nobile terra, onde la pubblicazione di essa non potè venire neppure iniziata. Tuttavia parve che, ben lungo dall'aver perduta la sua ragione di essere, essa acquistasse maggiore importanza, affinchè fosse esattamente fissato il punto dal quale —quando il cannone avrà finalmente cessato di far udire la sua

terribile voce— i matematici spagnuoli dovranno prendere le mosse per riprendere il cammino forzatamente interrotto.

Appunto nell'anno 1919, data del nostro precedente articolo, la Rivista organo della Società matematica spagnuola ampliava la propria sfera di azione sì da comprendere anche l'America latina; ciò era senza dubbio dovuto all'influenza del direttore —il Rey Pastor— il quale esponeva i criteri a cui avrebbe informata la propria azione in alcune pagine (coraggiose al pari di altre precedenti dello stesso autore), che giova qui riprodurre:

“E'impresa difficile la pubblicazione di una Rivista matematica in un paese senza seria tradizione scientifica nè ambiente propizio a questo genere di studi; però la cordiale accoglienza che ci accordò il pubblico degli specialisti assetato di nuove cognizioni, ricompensa l'improbabile compito da noi assunto.

“Una rivista scientifica è un organo per una funzione già esistente (3) nella quale si raccoglie la produzione di una collettività. Ma in Spagna noi abbiamo proceduto sempre in ordine inverso; abbiamo copiato gli organi, la nomenclatura, tutti gli aspetti esterni della cultura europea, prima di creare la funzione, l'ambiente, i contributi originali.

“Questa mancanza di linfa scientifica, la cui trasfusione è ben più difficile della copia servile delle apparenze, è la causa fondamentale della penuria di cui soffrono le Riviste, le Accademie, le Università, le Società scientifiche, il cui freddo funzionamento entro il quadro angusto dei regolamenti scientifici, non è che un'imitazione di vita.

“La cura di questa inveterata anemia non può essere opera di una sola generazione; essa esige un trattamento continuo, forse tanto lento quanto la stessa infermità, ed il necessario intenso lavoro non può compiersi con la modesta opera di divulgazione di una rivista.

“Tuttavia, benchè è certo che nessun organo può creare una funzione inesistente, viceversa un adeguato apparecchio ortopedico può servire almeno a correggere un funzionamento anormale. Quest'opera di orientamento e di educazione giustifica la pubblicazione di una Rivista anche se non richiesta dalla somma della produzione originale spagnuola. Indicando le fonti a cui i lettori possono ricorrere per rinnovare ed ampliare le proprie cognizioni matematiche, rettificando le inesattezze aventi corso, distruggendo in germe il virus delle idee sbagliate, la Rivista può disimpegnare una funzione assai utile.

“Venti nazioni americane di nostra stirpe sono nate a vita scientifica (4) e si va sviluppando in esse un'attitudine per la ricerca delle verità di scienza pura. Una rivista atta a servire di guida nella ricerca matematica per l'opera ammiranda di quei pochi uomini isolati che lottano per incorporare i loro popoli nel movimento scientifico europeo, presenta un'incontestabile utilità. Un'osservazione superficiale che si limiti a leggere i regolamenti delle nostre corporazioni scientifiche, che esamini i programmi dei nostri centri d'istruzione, che assista alle solennità accademiche od ai congressi scientifici ed ascolti i molti elogi tributati in discorsi pieni di soddisfazione ed ottimismo, acquisterà l'intimo convincimento che, se anche in noi si avvertono alcune *deficienze*, si tratta di esagerazioni pessimiste, di lamenti di pochi uomini che, avendo studiata a fondo la cultura europea, hanno potuto rendersi conto della nostra triste situazione nel mondo.

“In particolare è la stessa impressione che avranno ricevuta i membri della Società matematica spagnuola a cui era diretto l'articolo-programma intitolato *Ai nostri lettori* con cui la defunta *Revista* iniziò un cambiamento di attitudine prima di morire.

“ Non è opportuno entrare qui in questa vecchia polemica fondata sopra termini imprecisi e vaghi. Questo è il momento dell'azione, non di discussioni verbali. L'unico mezzo efficace per finirla con queste vecchie discussioni, tanto puerili, sopra la maggiore o minor distanza che ci separa dalla coltura matematica moderna, è di cominciare a conoscere questa. Offrire al pubblico ispano-americano una visione della matematica attuale, mediante articoli introduttori appositamente redatti, ecco il nostro programma. Per svolgerlo chiederemo l'aiuto di tutte le persone che ne abbiano la capacità, solleciteremo la collaborazione di matematici stranieri, riprodurremo articoli; mentre trarremo forza dall'apoggio del pubblico matematico, non risparmieremo alcun sacrificio per raggiungere il nostro scopo”.

L'attuazione di questo bel programma s'inizia sin dai primi fascicoli della *Revista hispano-americana*; infatti vi troviamo versioni spagnuole delle conferenze di Hilbert *Axiomatisches Denken*, e *Probleme der Grundlegung der Mathematik*; del Klein *Precisions - Mathematik und Approximations - Mathematik*, poi articoli del Rey Pastor intesi a far conoscere la nuova aritmetica transfinita ed altre teorie ad essa collegate. Articoli di Hadamard, Montessus de Ballore, Miller, Gomes Teixeira, ... mostrano come insigni matematici stranieri non negarono un fattivo apoggio ad una rivista che si presentava con un programma tanto serio ed elevato (5).

Non va taciuto che nello stesso tempo l'Accademia delle scienze di Madrid proseguiva nella sua funzione in pro della coltura scientifica. Infatti mentre continuava la pubblicazione della *Revista* iniziata sino dal 1904, dava in luce volumi di *Memorias*, fra cui, per lo scopo nostro, vanno soltanto ricordati quelli contenenti una esposizione del *Calculo de las probabilidades* (T. XXVIII, 1920) di M. Velasco de Pando, la memoria del Rey Pastor: *Teoría geométrica de la polaridad en las figuras de primera y segunda categoría* (II Ser. T. VIII, 1929) e finalmente quello in cui si trovano notizie preziose sopra opere che furono forse preda alle fiamme, chè concernono *Las matemáticas en la Biblioteca del Escorial* (Ser. II, T. VII, 1929). Finalmente va ricordato come a partire dal 1932 cominciò ad uscire una nuova rivista, quella intitolata *Matemática elemental*, organo di un Circolo matematico di studenti, violentemente troncata nei primi mesi del 1936 dallo scoppio della guerra civile; e che quattro anni prima veniva creato a Buenos Aires un periodico di analoghe tendenze (il *Boletín Matemático*), per opera di B. I. Baidaff, che tuttora lo pubblica col concorso di studiosi indigeni ed esotici.

Questi mezzi di pubblicità esistenti in Ispagna vennero validamente aiutati dal periodico organo del Seminario Matemático

Argentino; quanto seppero di approfittare i matematici viventi nell'antica e nella nuova Spagna, risulterà dalla Bibliografia che chiude la presente memoria.

In essa il posto d'onore spetta di diritto al Rey Pastor la cui meravigliosa produzione scientifica abbraccia tutti i campi della matematica; infatti vi si trovano scritti relativi alla branche seguenti:

Aritmetica elementare e teoria dei numeri, Algebra classica e moderna, Analisi algebrica e infinitesimale, Teoria delle serie e degli integrali (serie di potenze, serie divergenti, serie particolari), Teoria generale delle funzioni e studio di funzioni speciali, Calcolo delle differenze finite, Rappresentazione conforme, Teoria degli insiemi, Geometria elementare (in particolare Geometria del triangolo), Geometria proiettiva, Geometria non euclidea, Cubiche piane, Topologia, Probabilità, Spazi astratti, Fisica matematica, Filosofia e storia ⁽⁶⁾.

Questa poliedricità dà ragione del fatto che fra coloro che compongono la scuola del Rey Pastor vi sono cultori di tutti i rami delle matematiche pure. Lo mostra infatti la semplice ispezione della citata Bibliografia, nella quale s' incontrano matematici di ogni specie. Cosicchè da essa non trarrebbsi riposta a chi volesse trarne qualche conseguenza riguardo all'attitudine degli Spagnoli e degli Argentini abitanti sulle due sponde dell'Atlantico per l'una o l'altra delle due grandi diramazioni della matematica. Infatti, senza escludere le sempre rinovantesi indagini intorno ai fondamenti della geometria, vi troviamo scritti sulla geometria proiettiva sia dello spazio ordinario che degli spazi superiori e aggiungerebbero la geometria integrale, ove non si trattasse di un ramo di matematica che di geometria non ha che il nome, giacchè si occupa quasi esclusivamente del calcolo di integrali suggerite da quella che un tempo chiamavasi "probabilità geometrica". Nel campo proprio dell'analisi le serie furono coltivate con impegno, dai più moderni punti di vista, quali quelli suggeriti dal Borel, quanto quelli che portarono al nuovo concetto di "iperconvergenza"; ne si omise di occuparsi della teoria degli spazi astratti, per avventura la più elevata a cui finora giunse il pensiero matematico. D'altronde, un tema le cui origini sono coeve ai primordi del calcolo infinitesimale, la teoria delle differenze finite, ottenne dai matematici di cui ci occupiamo notevoli migliore. Anche la teoria delle probabilità (e la sua compagna la statistica matematica), la disciplina in cui l'umanità da

tempo spera (ma finora indarno!) qualche segno premonitore di avvenimenti futuri, fu coltivata vuoi in Ispagna che nella Repubblica Argentina, quasi a mostrare che mentre ivi ci s'interessava a studi di pura logica, si aveva l'occhio alle applicazioni che le scienze esatte possono trovare alla vita sociale.

Questo ed altro che emerge da un'attenta ispezione della seguente Bibliografia, induce a concludere che durante quest'ultimo ventennio i matematici di cui ragioniamo, seppero uscire dall'isolamento in cui avevano vissuto i loro padri, aiutati a raggiungere tale intento da soggiorni fatti a Parigi, a Vienna, ad Amburgo; cosicchè quando l'invocata giusta pace sorriderà sulla penisola iberica, i matematici di quella nobile terra non saranno costretti a cercare affannosamente il mezzo per essere incorporati nella brillante coorte di pensatori che da secoli cerca e scopre nuovi fenomeni collegati alla contemplazione dei numeri e delle figure: essi non avranno che seguire le tracce dei loro immediati predecessori.

Genova, nel giorno di Colombo del 1938.

BIBLIOGRAFIA

Malgrado la cura e la diligenza spiegate, l'autore non s'illude che il seguente elenco sia completo, dubbio tanto più giustificato giacchè le raccolte periodiche poste a sua disposizione presentano non poche lacune. Tuttavia è da ritenere che esso sia sufficiente agli scopi che si propone la presente pubblicazione.

Gli autori i cui nomi sono contrassegnati con un asterisco sono argentini.

J. REY PASTOR

— 1918 —

1.—Un teorema erróneo en la Geometría del Triángulo.—Contribución al estudio de las Ciencias.—La Plata. Vol. II (1918), núm. 38.

2.—Teoría de las funciones analíticas y sus aplicaciones Físicas.—Un volumen de 112 págs.—Buenos Aires, 1918.

3.—Systématisation de la Géométrie au moyen de la Théorie des groupes.—Scientia.—Revista di Scienza.—Milano, 1918, pag. 411.

— 1919 —

1.—La investigación matemática.—Boletín de Galdeano, 1919.

2.—Notas críticas.—Boletín de Galdeano, 1919.

3.—La Aritmética trasfinita.—Revista mat. Hisp-amer., págs. 25, 33, 89, 94, 128, 218, 223 del vol. de 1919.

— 1920 —

- 1.—Transformation conforme des aires infinies sur le plan ouvert.—Congrès international des Mathématiciens.—Strasbourg, 1920.
- 2.—El ultracontinuo.—Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, 1920.
- 3.—Contribución de España a las Ciencias matemáticas.—Reseña histórica de la aportación de España en todos los siglos.—Enciclopedia Universal Espasa. Volumen *España*, 1920.
- 4.—Variables independientes reales.—Revista Matemática Hisp.-amer. (1920), pág. 233.

— 1921 —

- 1.—Cálculo infinitesimal.—Curso autografiado de las lecciones en la Universidad de Buenos Aires.—Un vol. en folio de 310 págs. Buenos Aires, 1921.

— 1922 —

- 1.—Resumen del curso de Cálculo infinitesimal dictado en la Facultad de Ingeniería de Buenos Aires.—Rev. del C. E. I. Núm. 235 y sig.—Un vol. de 332 págs. Buenos Aires, 1922.
- 2.—Elementos de Análisis algebraico. 2ª edición considerablemente modificada.—Un vol. de 480 págs. Madrid. 1922.— (Reseña: Rev. Mat. Hisp.-Amer., vol. V (1923), pág. 83).

— 1924 —

- 1.—Sobre las fórmulas fundamentales de la Relatividad especial.—Revista matemática. Vol. I (1924-25).
- 2.—Lecciones de Álgebra.—Un vol. de 144 págs. Madrid, 1924.
- 3.—Curso cíclico de matemáticas.—Vol. I.—Un vol. de 344 págs. Buenos Aires, 1924. (Reseña Rev. Hisp.-Amer., vol. VI, 1924, pág. 21).
- 4.—Teoría de las funciones de variable real.—Parte II, Madrid 1924. (Reseña en Rev. Mat. Hisp.-Amer., vol. VI, 1924, pág. 185).

— 1925 —

- 1.—Sobre la equivalencia de poliedros.—Rev. mat. Hisp.-Amer., 1925, página 255.
- 2.—Sobre la aproximación de raíces cuadradas.—Rev. Mat. Hisp.-amer., 1925, pág. 53.
- 3.—Sobre la ecuación de Pell.—Rev. mat. Hisp.-Amer., 1925, pág. 149.
- 4.—Los matemáticos españoles del siglo XVI.—Un vol. de 160 pgs., Madrid, 1925.

— 1926 —

- 1.—Series e integrales D. Curso autografiado de las lecciones dictadas en las Universidades de Madrid y Buenos Aires, 1926.
- 2.—Notas de Análisis y de Geometría.—Asociación Española para el progreso de las Ciencias, 1926.

— 1927 —

- 1.—Notas de Análisis.—Congreso de Cadiz, 1927.
- 2.—Sobre los óvalos.—Contribución al estudio de las Ciencias, 1927.
- 3.—Nota sobre los óvalos.—Revista Mat. Hisp.-Amer., Vol. IX, 1927, pág. 305.

— 1928 —

1.—Geometría no euclidiana de las figuras de primera categoría.—Boletín del Seminario Matemático argentino. Núm. 1 (1928), pág. 1.

2.—Sobre las curvas orbiformes y multipolares.—Boletín del Seminario Matemático argentino. Núm. 1 (1928), pág. 9.

3.—Podarias de las curvas multipolares.—Bol. Sem. Mat. arg. Vol. I, Núm. 1 (1928), pág. 11.

4.—Funciones cíclicas de orden n .—Bol. Sem. Mat. arg. Núm. 1 (1928), página 13.

5.—Prolongación analítica y sumación de series divergentes.—Atti del Congresso Internazionale dei Matematici. Bologna, 3-10 settembre 1928.

6.—Cálculo de diferencias.—I y II-Revista de la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid, 1928. pág. 482.

7.—Sobre el óvalo de oscilación.—Comunicación al Seminario Matemático argentino (18 mayo de 1928). Suplemento al Boletín del Seminario Matemático. Vol. I. (1928-29). Dic. 1929.

8.—Cuestiones de Geometría diferencial.—Idem 23 de mayo de 1928.

9.—Sobre la accesibilidad simple.—Idem 1º de junio de 1928.

10.—Algoritmos lineales de convergencia.—Idem 8 de junio de 1928.

11.—Expresión analítica de las curvas convexas.—Idem, 15 de junio de 1928.

12.—Convexidad infinitesimal. Idem, 22 de junio de 1928.

13.—Una aplicación de los algoritmos de convergencia.—Idem, 29 de junio de 1928.

14.—Una generalización de las funciones asociadas.—Idem, 1º de agosto de 1928.

15.—Ampliación de la estrella de Borel.—Idem, 17 de agosto de 1928.

16.—Hiperplanos de apoyo en los recintos convexos.—Idem, 31 de agosto de 1928.

17.—Un algoritmo lineal de prolongación analítica.—Idem, 7 de septiembre de 1928.

18.—Sobre los bari-centros ordinarios y de curvatura.—Idem, 14 de septiembre de 1928.

19.—Sobre las integrales curvilíneas.—Idem, 21 de septiembre de 1928.

— 1929 —

1.—Teoría geométrica de la polaridad.—Obra premiada por la Academia de Ciencias de Madrid. Un vol. de 294 págs. Madrid, 1929.

2.—Singularidades de la derivada. Nota sobre la cuestión 83.—Revista Mat. Hisp.-amer., pág. 195.

3.—Un modelo de celda bidimensional sin puntos singulares cuyo contorno es el anillo de Moebius.—Seminario matemático argentino. Sesión del 6 de julio de 1929. Suplemento al Boletín del Seminario matemático. Vol. I. Diciembre 1929.

4.—Teorema topológico sobre el orden de accesibilidad.—Idem, 14 de oct. de 1929.

5.—Demostración de la inexactitud de una afirmación de Brouwer.—Idem., 28 de octubre de 1929.

6.—Relación entre los métodos de sumación y de convergencia de Borel.—Idem, 4 de nov. de 1929.

- 7.—Una aplicación de los algoritmos lineales.—Idem, 4 de nov. de 1929.
- 8.—Polinomios correlativos de los de Bernoulli.—Boletín del Seminario Matemático argentino. Vol. I (1928-29), Núm. 3, pág. 3.
- 9.—Mínimos de ciertos tipos de integrales.—Idem, pág. 13.
- 10.—Sur la transformation linéaire.—Boletín del seminario Matemático argentino. Núm. 4 (1929).
- 11.—Un algoritmo general de convergencia.—Revista Matemática Hisp.-americana (1929), pág. 273.
- 12.—Teoría de las funciones cíclicas.—Boletín del Seminario Matemático argentino (1929). Núm. 4, págs. 9-29.
- 13.—Análisis correlativo de series e integrales.—Bol. Sem. Mat. Arg. Vol. I. Núm. 5 (1929), pág. 1.
- 14.—Sul differenziale esatto ed il teorema di Morera.—Bollettino dell'Unione Matematica italiana (1929).
- 15.—Curso de Topología.—Apuntes de las lecciones dictadas en Madrid y Buenos Aires, 1929.
- 16.—Curso cíclico de matemáticas.—Vol. II. (un volumen de 312 págs.) Madrid, 1929.
- 17.—Las probabilidades y su aplicación.—Centro estudiantes de ingeniería (24-9-29). Un folleto autografiado.

— 1930 —

- 1.—Sulla equiconvergenza delle successioni di funzioni.—Bollettino dell'Unione Matematica italiana. Vol. IX (1930), pág. 242.
- 2.—Sobre los algoritmos lineales de convergencia.—Comunicación al Seminario Matemático argentino (11 abril 1930). Suplemento al Bol. del Sem. Mat. arg. Vol II (1930-1931), pág. 1.
- 3.—Sobre una inecuación funcional.—(18 de abril de 1930). Idem.
- 4.—Exposición de resultados sobre series diluídas.—(11 de noviembre 1930). Idem, pág. 2.
- 5.—Une méthode de convergence par des moyennes.—Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris. Séance de 15 de Septiembre 1930. t. 191, página 452.

— 1931 —

- 1.—Une propriété caractéristique des variétés de Jordan.—Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris. 5 Janvier, 1931. t. 192, pág. 27.
- 2.—Un método de sumación de series.—Rediconti del Circolo matematico di Palermo, t. LV (1931), pág. 450.
- 3.—Teoría de los algoritmos lineales de convergencia y de sumación.—Un vol. de 176 págs. Buenos Aires, 1929-1931.
- 4-6.—Representación de los espacios no euclidianos. - Distancia orientada de conjuntos. - Teoría de la convergencia de conjuntos.—(Comunicaciones al Seminario Matemático durante el curso 1931). Suplemento al Boletín del Seminario Matemático argentino. Vol. II (1930-1931), págs. 2-6.
- 7.—Su due punti della teoria analitica delle funzioni razionali.—Rend. Istituto Lombardo di Scienze ed Lettere. Vol. LXIV. pág. 1293 (1931).
- 8.—Las crisis de la Matemática.—Curso en el Colegio de estudios superiores dictado en 1931.
- 9.—Lecciones de Algebra. 2ª ed. ampliada. Parte I.—Un vol. de 150 páginas. Madrid, 1931.

— 1932 —

- 1.—Notas de Geometría.—Asociación española para el progreso de las Ciencias.—Congreso de Porto (sesión de 19-5-32).
- 2.—Zur Theorie der divergenten Reihen.—The Tohoku Mathematical Journal. Vol. 36 (1932), págs. 73-77.
- 3.—Sulla Topologia dei domini di uno spazio ad n dimensioni.—Atti Accademia Lincei. Vol. XV (1932), págs. 542-527.
- 4.—Distancia orientada de conjuntos.—Boletín del Seminario Matemático. Vol. III (1932-33), págs. 29-31.

— 1933 —

- 1.—Un semplice algoritmo di convergenza e sommazione.—Periodico di Matematiche. Vol. XIII. págs. 153-160.
- 2.—Sur l'application de la méthode de Borel aux séries qui ont des termes nuls.—Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris. Vol. 197, pág. 973.
- 3.—Sulle funzioni regolari all'infinito.—Giornale di Matematiche di Battaglini. Vol. 71, págs. 155-163.
- 4.—Aplicaciones de los algoritmos lineales de convergencia y de suma.—Rendiconti Seminario Matematico di Milano. Vol. VII, págs. 191-222.
- 5.—Esquema de una teoría geométrica de las singularidades de las funciones analíticas.—Boletín del Seminario Matemático Argentino. Vol. III (1932-33), págs. 157-162 y Rev. Mat. Hisp.-amer. Vol. VIII (1933), pág. 225.
- 6.—Una généralisation élémentaire de la convergence.—Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège. Núm. 4, págs. 90-93. Bol. Sem. Mat. Arg. Vol. III (1932-33). Núm. 13, págs. 142-146.
- 7.—Observaciones sobre las series de potencias cuyos coeficientes son funciones algebraicas enteras.—Bol. Sem. Mat. Arg. Vol. III (1932-33), págs. 174-180.
- 8.—Sobre ciertos desarrollos en serie.—Idem, págs. 193-196.
- 9.—Sobre un programa de ecuaciones diferenciales.—Contestación al discurso de ingreso del Prof. Esteban Terradas en la Academia de Ciencias de Madrid, 1933.
- 10.—Series e integrales D .—Curso en la Universidad de Madrid, 1932-33.
- 11.—Comunicaciones varias.—Bol. Sem. Mat. Arg. Vol. III (1932-33).

— 1934 —

- 1.—Cumulanti multipli.—Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. Vol. XIX (1934), pág. 772-777.
- 2.—Sopra qualche generalizzazione delle serie ricorrenti.—Rendiconti R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. (Adunanza del 5 luglio 1934). Vol. LXVII, págs. 813-823.
- 3.—Observaciones sobre las series de potencias cuyos coeficientes son funciones algebraicas enteras. (Nota ampliada). Rev. Mat. Hisp.-amer. Ser. II. vol. IX (1934), págs. 7-14.
- 4.—La investigación matemática. (Nota ampliada).—Rev. Mat. Hisp.-amer. vol. IX (1934), págs. 19-33.
- 5.—Una teoría de la integración de funciones de cualquier número de variables.—Comunicación al Seminario Matemático argentino (4-5-34). Bol. Sem. Mat. Arg. Vol. IV, núm. 15, pág. 1.—Rev. Mat. Hisp.-amer. 2ª Ser. vol. IX, pág. 216.

6.—Desarrollos de funciones en series de primitivas.—Idem (sesión de 11 de mayo de 1934). Bol. Sem. Mat. Vol. IV, núm. 15 (1934), pág. 3.—Rev. Mat. Hisp.-amer. Ser. II. vol. IX (1934), pág. 218.

7.—Algunas propiedades polares de las cúbicas planas.—Idem (sesión de 18 de mayo de 1934). Bol. Sem. Mat. Vol. IV, núm. 15, pág. 5.—Rev. Mat. Hisp.-amer., Ser. II. vol. IX, pág. 220.

8.—Teoría geométrica de las transformaciones eulerianas y seudo-eulerianas de series.—Idem (sesión de 6 de abril de 1934). Bol. Sem. Mat., Vol. IV, núm. 16, págs. 17-20.—Rev. Mat. Hisp.-amer. vol. X, págs. 17-20.

9.—La transformación de Pincherle y la sumación de series divergentes.—Idem (sesión de 17 de agosto de 1934).—Bol. Sem. Mat. Vol. IV, núm. 16, págs. 26-29.—Rev. Mat. Hisp.-amer. Ser. II. vol. X, págs. 26-29.

10.—Algunas orientaciones modernas en la teoría de las series.—Congreso de Santiago de Compostela (1934).

11.—Sobre los algoritmos de convergencia de integrales.—Idem.

12.—La Matemática del siglo XX. La Integral.—Las Ciencias, Año I, núm. 1, Madrid, 1934, págs. 13-24.

13.—Ciencia y Técnica en la época de los descubrimientos geográficos.—Académie Internationale d'histoire des Sciences.—Publ. núm. 1, págs. 1-30.

14.—Sulle quaterne di Salmon nelle cubiche piane di genere uno.—Rend. della R. Accad. dei Lincei. Vol. XIX (1934), pág. 459-462.

— 1935 —

1.—Séries d'intégrales d'ordres successives d'une fonction.—Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris. Vol. 200 (1935), pág. 622.

2.—Sulla convergenza quasi-continua di successioni di funzioni.—Rendiconti della R. Accad. Nazionale dei Lincei. Vol. XXI (1935), págs. 481-484.

3.—Sobre las singularidades algebraico-logarítmicas de las funciones analíticas.—Bol. Sem. Mat., Vol. IV, núm. 17 (1935), págs. 41-46.

4.—Teoría general de funciones.—Curso dictado en la Universidad de Buenos Aires. Vol. I (Autografiado). Buenos Aires, 1935.

5.—Elementos de Geometría proyectiva.—Fasc. I. Madrid, 1935.

6.—Lecciones de Algebra. 2ª edición muy ampliada.—Un vol. de 250 páginas. Madrid, 1935.

7.—Teoría general de los espacios abstractos.—Curso dictado en las Universidades de Madrid y Buenos Aires (Autografiado).

8.—Curso de geometría algebraica.—Vol. I (Autografiado).

— 1936 —

1.—Funciones complejas de variable binaria.—Bol. Sem. Mat. Vol. IV, núm. 19 (1936), pág. 101-116.

2.—Esquema de una teoría geométrica de las singularidades de las funciones analíticas.—Idem, pág. 117.

3.—Funciones topológicas y seudo-analíticas.—Idem, pág. 121.

4.—Sobre un tipo de ecuaciones diferenciales lineales.—Idem, (1936), págs. 71-74; Bol. Sem. Mat. Vol. IV, núm. 201.

5.—Métrica e integración en los espacios abstractos.—Revista de la Unión Matemática Argentina. Vol. I, (1936), pág. 39; Bol. Sem. Mat., Vol. IV, núm. 21, págs. 155-162.

6.—Algunas relaciones entre los algoritmos de convergencia y sumación.—Revista Matemática Hispano-americana. Vol. XI, (1936), pág. 67-70.

7.—Teoría general de funciones.—Vol. II (Autografiado).

8.—Una teoría dell'integrazione negli spazi astratti.—Conferenza nella Mathesis. Génova, 6 Marzo 1936.

9.—Nuovi indirizzi nell Calcolo funzionale.—Conferenza nell'Seminario Matematico della R. Università di Padova, 10 marzo 1936.

10.—Integrazione e funzionali negli spazi astratti.—Comunicazione al Seminario Matematico della R. Università di Roma, 12 Marzo 1936.

F. ALBARRAN

Sobre una generalización del eje radical. *Rev. Hisp. Amer.*, T. X, 1935, p. 177-190.

G. ANCOCHEA

1.—Las derivaciones covariantes y las identidades de Ricci en los espacios de Finsler. *Rev. Hisp. Amer.*, II Ser. T. VIII, 1933, p. 261-264.

2.—Invariantes de un hilado triple. *Rev. Hisp. Amer.*, II Ser. T. IX, 1934, p. 54-63.

* J. BABINI

1.—Sobre la función Γ incompleta. *Bol. Sem. Arg.*, T. I., 1929, p. 23-30.

2.—Sobre un dispositivo mecánico para el cálculo de algunas funciones y ecuaciones. *Rev. Hisp. Amer.*, T. VI, 1924, p. 112-118.

3.—Sobre la interpolación lineal. *Rev. Hisp. Amer.*, II Ser. T. I, 1926, p. 1-10.

4.—Resolución de sistemas lineales por un método de falsa posición. *Rev. Hisp. Amer.*, II Ser. T. II, 1927, p. 8-11.

5.—Sobre el desarrollo en fracción continua de los números aproximados. *Rev. Hisp. Amer.*, II Ser. T. IV, 1929, p. 3-5.

6.—Tabulación de la función Θ_3 de Jacobi de argumento nulo. *Bol. Sem. Arg.* T. III, 1929, p. 11-17.

7.—Sobre el comportamiento de la función Theta de Jacobi de argumento nulo en el contorno del círculo de convergencia. *Bol. Sem. Arg.* T. I, 1939, p. 11-17.

8.—Sobre los ceros de las funciones cíclicas. *Bol. Sem. Arg.*, T. I, 1930.

9.—Representación de las funciones cíclicas de tercer orden. *Bol. Sem. Arg.*, T. I, 1930.

10.—Sobre la extracción aproximada de la raíz cúbica por la fórmula de Heron. *Matem. elem.*, T. I, 1931, p. 1.

11.—Sobre una familia de series deducidas de la serie armónica. *Rev. Hisp. Amer.* II Ser., T. VII, 1932, p. 182-195.

12.—Un problema sobre las saetas de un reloj. *Matem. elem.*, T. II, p. 4, 1933.

13.—Sobre los ceros de las series de potencias cuyos coeficientes son polinomios. *Bol. Sem. Arg.*, 1933, p. 197-199.

14.—Sobre las series de potencias cuyos coeficientes son polinomios. *Bol. Sem. Arg.*, 1933, p. 163-173.

15.—Una familia de series deducidas de la serie armónica. *Bol. Sem. Arg.*, 1933, p. 93-104.

16.—Polinomios generalizados de Bernoulli y sus correlativos. *Bol. Sem. Arg.*, 1934, p. 23-25.

17.—Nota sobre la ecuación $y_m = z y'_{m-1}$. Rev. Hisp. Amer., II Ser. T. IX, 1933, p. 202-215.

18.—Polinomios generalizados de Bernoulli y sus correlativos. Rev. Hisp. Amer., II Ser., T. X, 1935, p. 23-25.

19.—Sobre el símbolo $\frac{\Delta z^{(n,k)}}{h^r}$. Rev. Hisp. Amer., II Ser. T. XI, 1936, p. 30-33.

B. I. BAIDAFF

Derivadas sucesivas generalizadas. Anales de la Soc. Cient. Argentina, T. 103, 1927.

O. F. BAÑOS

Algunas nociones de análisis situs. Rev. Hisp. Amer., T. I, 1919, p. 252-258.—(7).

J. BARINAGA

1.—Sobre una extensión del concepto de $\varphi(N)$. Rev. Hisp. Amer., II Ser. T. III, 1928, p. 68-72.

2.—Sobre los ejemplos de Fr. Juan de Ortega. Rev. Hisp. Amer., II Ser., T. VII, 1932, p. 193-207, 236-245.

4.—Sobre algunas funciones definidas por ecuaciones en diferencias. Rev. Hisp. Amer., II Ser. T. IX, 1934, p. 96-100.

3.—Nota sobre interpolación. Rev. Hisp. Amer., II Ser. T. VIII, 1933, p. 84-85.

5.—Sobre problemas lineales de contorno para la ecuación de Sturm-Liouville. Rev. Acad. Madrid, T. XXXI, 1934, p. 120-136.

6.—Solución a un problema del D. M. V. Rev. Hisp. Amer., II Ser., T. VIII, 1933, p. 11-15; T. IX, 1934, p. 15.

7.—(con F. J. FERRERO). Solución a dos problemas del J. D. V. Rev. Hisp. Amer. II Ser., T. IX, 1934, p. 113-127.

* C. BIGGERI

1.—Varios criterios de convergencia para integrales simples y algunos teoremas sobre integrales dobles. Rev. Hisp. Amer., II Ser., T. VII, 1932, p. 118-136.

2.—Una acotación de integrales. Bol. Sem. Arg., N. 10, 1932, p. 32-33.

3.—Generalización de un teorema de Cesàro para integrales divergentes. Bol. Sem. Arg., N. 10, 1932, p. 34.

4.—Varios criterios de convergencia para integrales simples y algunos teoremas sobre integrales dobles. Bol. Sem. Arg., N. 11, 1932, p. 45-63.

5.—Algunas propiedades de las funciones determinantes. Abscisas de convergencia. Bol. Sem. Arg., N. 11, 1932, p. 65-70.

6.—Singularidades de funciones definidas por integrales D . Bol. Sem. Arg., N. 11, 1932, p. 70-73.

7.—Sobre las series e integrales dobles de Dirichlet. Rev. Acad. Madrid, T. XXX, 1935, p. 9-51.

* C. BULA

Ajustamiento de una tabla de mortalidad por los métodos de Gompertz-Makcham y Gram-Charlier. Tesis. Fac. Cienc. Econ. Rosario, 1934.

P. PI CALLEJA

1.—Sobre un ejemplo de desarrollo de Teixeira. Rev. Hisp. Amer., II Ser., T. VII, 1932, p. 241-243. Bol. Sem. Arg., N. 12, 1933, p. 115-117.

2.—Contribución a la teoría geométrica de la polaridad. Rev. Hisp. Amer., II Ser., T. VIII, 1933, p. 78-83.

3.—Notas críticas sobre algunas obras. Rev. Hisp. Amer., T. VIII, 1933, p. 19-25.

4.—Über die Konvergenzbedingungen der komplexen Form des Fourierschen Integrals. Math. Zeitschrift. Vol. 40. 1935, págs. 349-374.

S. CAMARA

1.—Principios de la teoría de la correlación múltiple en general. Rev. Hisp. Amer., II Ser., T. VI, 1931, p. 249-262, T. VII, 1932, p. 71-77, 97-112.

2.—Enlace estocástico entre dos caracteres casuales. Rev. Hisp. Amer., II Ser., T. VIII, 1933, p. 58-77. Supl.

3.—Parábolas medias o baricéntricas de un conjunto de puntos del plano. Rev. Hisp. Amer., II Ser., T. IX, 1935. p.

* C. DIEULEFAIT

1.—Determinación de una ley de probabilidad sobre la base de sus momentos.—Anales Soc. Cient. Arg., 1931.

2.—Sobre una nueva introducción de los polinomios de Legendre.—Anales Soc. Cient. Arg., 1932.

3.—Generalización de las curvas del prof. K. Pearson.—Anales Soc. Cient. Arg., 1933.

4.—Sobre una nueva generación de polinomios ortogonales.—Anales Soc. Cient. Arg., 1933.

5.—Sur les développements des fonctions de fréquences en séries de fonctions orthogonales.—Metron, 1934.

6.—Généralisation des courbes de K. Pearson.—Metron, 1935.

7.—Sobre la representación de una función de variable real en serie de funciones ortogonales.—Publicación Fac. C. Matemáticas, 1935.

* A. DURAÑONA

1.—Sobre producto de series sumables Borel.—Contrib., La Plata, T 4; 1928; Boletín del Seminario Matemático Argentino, T. I, 1928-29.

2.—Sobre el producto de una integral sumable por una integral absolutamente convergente.—Bol. Sem. Arg., T. I, 1928-29, p. 15-22.

3.—Una demostración de un teorema de Lebesgue del Cálculo Integral.—Bol. Un. Mat., it., T. VII.—Contrib. La Plata, T. 4, 1928, p. 453.

4.—Un teorema sobre integrales sumables C^δ . - Sobre producto de integrales sumables C^δ .—Contrib. La Plata, T. 4, 1928, p. 297 y 303.

* A. DURAÑONA y A. SAGASTUME

1.—Una teoría de las integrales entre límites infinitos, paralela a la de las series.—Contrib., La Plata, T. 5, 1929.

2.—Algunas propiedades de las integrales de potencias.—Contrib., La Plata, T. 5, 1929.

L. M. FERNANDEZ

Algunas aplicaciones del Cálculo diferencial absoluto a la Hidrodinámica. Rev. Acad. de Madrid, T. XXXIV, 1929, p. 353-368, 502-513.

A. DE MIRA FERNANDEZ

Curvatura riemanniana lineal de las superficies. Rev. Acad. Madrid, T. XXXVIII, 1932, p. 340-342.

A. I. FLORES

1.—Ueber n -dimensionale Komplexe, die im R_{2n+1} absolut verschlungen sind. Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, Heft VI, Wien, 1933, p. 4-6.

2.—Ueber die Existenz n -dimensionaler Komplexe, die nicht in den R_{2n+1} einbettbar sind. Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, Heft V, Wien, 1933, p. 17-24.

3.—Notas topológicas. Bol. Sem. Arg., N. 12, 1933, p. 118-123.

4.—Sobre la orientabilidad del espacio proyectivo. Rev. Hisp. Amer., II Ser., T. VIII, 1933, p. 16-17.

5.—Sobre la caracterización del espacio euclídeo n -dimensional y cuestiones que se relacionan. Rev. Acad. Madrid, T. XL, 1935 p. (8).

D. GARCIA

Clasificación sistemática de las propiedades lógicas. Rev. Hisp. Amer., II Ser., T. VIII, 1933, p. 114-145.

* F. L. GASPAR

1.—La ortogonalidad en el caso de varias variables y generalización de la superficie de Bravais. An. Soc. Cient. Arg., 1935.

2.—La función de primera aproximación y la definición analítica de las superficies de frecuencias experimentales.—Anal. Soc. C. Arg., 1936.

* A. GONZALEZ DOMINGUEZ

Aplicación de la teoría de las integrales singulares a la demostración de una fórmula de Stieltjes. Bol. Sem. Arg., N. 10, 1932, p. 35-38.

* F. LA MENZA

1.—Sobre el cálculo de las funciones simétricas simples de las raíces de una ecuación. Rev. Hisp. Amer., II Ser., T. VII, 1932, p. 231-34. Bol. Sem. Arg., N. 12, 1933, p. 111-114.

2.—Sistemas funcionales de inecuaciones lineales. Bol. Sem. Arg., N. 16, 1934, p. 30-33.

F. DE A. NAVARRO BORRAS

Extensión a las series de potencias de algunas propiedades de las series simples de potencias. *Rev. Acad. Madrid*, T. XXVI, 1930, p. 223-266.

J. OÑATE

Nota sobre una generalización de la teoría de las figuras homológicas. *Rev. Hisp. Amer.*, II Ser., T. VII, 1932, p. 235-39.

JOSE M. ORTS

1.—Sobre una fórmula de transformación de las series alternadas. *Rev. Hisp. Amer.*, II Ser., T. I, 1926, p. 68-71.

2.—Nota sobre las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. *Rev. Hisp. Amer.*, II Ser., T. IX, 1934, p. 128-131.

3.—Iteración de funciones simétricas. *Rev. Hisp. Amer.*, II Ser., T. IX, 1934, p. 1-6.

4.—Volumen del tetraedro en función de sus aristas. *Matem. elem.*, T. IV, 1935, p. 7.

5.—Complemento a una nota sobre las ecuaciones diferenciales de primer orden. *Rev. Hisp. Amer.*, II Ser., T. X, 1935, p. 7-8.

6.—Una clase especial de series sumables. *Matem. elem.* T. IV, 1935, p. 117.

7.—Sobre la función generatriz de los polinomios de Laguerre. *Rev. Hisp. Amer.*, II Ser., T. XI, 1936, p. 98-100.

P. PINEDA

1.—La afinidad en el plano como producto de un movimiento y una homología. *Bol. Sem. Arg.*, N. 9, 1932, p. 10-12.

2.—Sobre curvas algebraicas situadas en una cuádrica alabeada que cortan a las generatrices de un sistema en cuaternas armónicas. *Bol. Sem. Arg.*, N. 9, 1932, p. 13-15.

P. M. GONZALEZ QUIJANO

Leyes de probabilidad. *Rev. Hisp. Amer.*, II Ser., T. VI, 1931, p. 263-281, T. VII, p. 1-6.

R. P. ROMANA

Notas sobre el concepto de coordinación. *Rev. Hisp. Amer.*, II Ser., T. V, 1930, p. 120-133.

S. RIOS

1.—Sobre una generalización del algoritmo de convergencia de Euler. *Rev. Hisp. Amer.*, T. VI, 1932, p. 37-41.

2.—Sur l'ensemble singulier d'une classe de séries de Taylor qui présentent des lacunes. *C. R. de l'Acad.*, París, 1933, T. 197, p. 1170-1172, *Rev. Hisp. Amer.*, II Ser. T. VIII, 1933, p. 221-224.

3.—Estado actual de la teoría de la hiperconvergencia. *Las Ciencias*, T. I, N. 3, Madrid, 1934.

- 4.—Sopra l'ultraconvergenza delle serie di Dirichlet. Rend. Acc. Lincei, Ser. VI, Vol. XX, 1934, p. 158-161.
- 5.—Algunos resultados relativos a la hiperconvergencia en las series de Dirichlet. Rev. Hisp. Amer., II Ser., T. IX, 1934, p. 132-136.
- 6.—Sobre un teorema de M. Mandelbrojt. Rev. Hisp. Amer., II Ser., T. VIII, p.
- 7.—Observación a la nota "Sobre un teorema de M. Mandelbrojt". Rev. Hisp. Amer., II Ser., T. IX, 1935, p. 175-176.
- 8.—Problemas de hiperconvergencia. Rev. Acad. Madrid, 1935.
- 9.—La hiperconvergencia en las integrales de Laplace-Stieltjes. Bol. Sem. Arg., N. 17, 1935, p. 47-50.
- 10.—Las series de polinomios exponenciales y la hiperconvergencia de las series de Dirichlet. Bol. Sem. Arg., N. 17, 1935, p. 51-54.
- 11.—Un teorema sobre las singularidades de integrales de Laplace. Rev. Hisp. Amer., II Ser., T. XI, 1936, p. 26-29.

M. SALES BOLL

- Aplicación del cálculo de matrices al estudio de las cónicas. Rev. Hisp. Amer., II Ser., T. X, 1935, p. 191-196.

* A. SAGASTUME

- 1.—Sobre las soluciones de una ecuación diferencial.—Contrib., La Plata, T. 4, 1928.
- 2.—Una generalización del teorema de Pitágoras.—Bol. Mat. Buenos Aires, T. 6, 1933.

* E. SAMATAN

- 1.—Sobre sumación de progresiones. Bol. Sem. Arg., N. 14, 1933, p. 181-192. Rev. Hisp. Amer., II Ser., T. VIII, 1933, p. 249-260.
- 2.—Sur une méthode de sommation de Rey Pastor. Rend. Istituto Lombardo di scienze e lettere, T. 67, 1934, p. 227-232.
- 3.—Sobre sumación de un tipo particular de progresiones y de series. Rev. Acad. Madrid, T. XXXII, 1935, p. 230-247.

R. SAN JUAN

- 1.—Sobre el análisis correlativo de series e integrales. Rev. Hisp. Amer., II Ser., T. V, 1930, p. 97-119.
- 2.—Las ecuaciones de monogeneidad para derivadas laterales. Rev. Hisp. Amer., II Ser., T. V, 1930, p. 227-232.
- 3.—Aproximación asintótica de algunas series. Matem. elem., T. I, 1931, p. 5.
- 4.—Algoritmos de sumación correlativos de la integral de Laplace y del algoritmo de Stieltjes. Bol. Sem. Arg., N. 9, 1932, p. 17-24.
- 5.—Sumación de series de radio nulo y prolongación semianalítica. Rev. Acad. Madrid, 1933.
- 6.—Una solución del problema de los momentos de Stieltjes. Rev. Hisp. Amer., Ser. II, T. IX, 1934, p. 161-73.
- 7.—Sur le problème des moments. C. R. Acad. Paris, 1934, T. 198, p. 1838-40.
- 8.—Sobre un problema de Carleman. Rev. Hisp. Amer., Ser. T. X, 1935, p. 265-67.

9.—Sumación de series de radio nulo y prolongación semianalítica. *Rev. Acad. Madrid*, T. XXX, 1935, p. 122-193.

10.—Formación de series divergentes y aproximación asintótica óptima — Presentata nel 1935 all'Accademia di Madrid.

11.—Compléments à la méthode de Gräffe pour la résolution des équations algébriques. *Bull. sciences mathém.*, II Ser., T. LIX, 1935; *Bol. Sem. Arg.*, N. 17, 1935, p. 55-58.

12.—El algoritmo de Euler y la transformación correlativa de la integral de Laplace. *Rend. Ist. Lombardo*, II Ser., T. LVIII, 1935, p. 619-624.

L. A. SANTALÓ

1.—Unos problemas de combinatoria. *Matm. elem.*, T. III, 1934, p. 21.

2.—Area engendrada por un segmento que se mueve conservándose normal a una línea y describiendo una superficie desarrollable. *Rev. Hisp. Amer.*, II Ser., T. IX, 1934, p. 101-107.

3.—Una fórmula integral para las figuras en el plano y en el espacio. *Rev. Hisp. Amer.*, II Ser., T. X, 1935, p. 202-216.

4.—Algunas propiedades de las curvas esféricas y una característica de la esfera. *Rev. Hisp. Amer.*, II Ser., 1935, p. 5-12.

5.—Unos problemas referentes a probabilidades geométricas. *Rev. Hisp. Amer.*, II Ser., T. XI, 1936, p. 87-97.

6.—Geometría integral. 4. Sobre la medida cinemática en el plano. *Abh. aus dem Seminar Hamburg*, T. XI, p. 222-236.

7.—Integralgeometrie. 5. Ueber das kinematisches Mass im Raum. *Actualités scientifiques et industrielles*, París, 1936.

8.—Geometría integral. 7. Nuevas aplicaciones del concepto de medida cinemática en el plano y en el espacio. *Rev. Acad. Madrid* ⁽⁹⁾.

E. TERRADAS

1.—Le Problème de la figure d'équilibre d'une masse fluide homogène en rotation.—Bologna "Scientia", 1918.

2.—Conferencias sobre estabilidad geométrica de estructuras elásticas publicadas por la Escuela de Ingenieros de Caminos.—Madrid, 1927.

3.—Conferencias de Física teórica sobre teoría de la Relatividad y de los Cuanta en la Universidad de Buenos Aires, 1927.

4.—Teoría de la Elasticidad con aplicación a los problemas de pandeo de superficies.—Curso en la Universidad de Buenos Aires, 1927.

5.—Estabilidad y Economía.—Inst. de Ingenieros Civiles de Lima, 1927.

6.—Curso sobre temas elegidos de Hidrodinámica en la Facultad de Ingeniería de Montevideo, 1927.

7.—Conferencia sobre cálculo simbólico de Heaviside, publicada por los ingenieros de Telecomunicación, 1930.

8.—Curso de Estadística Matemática en la Universidad de Madrid (Facultad de Ciencias), 1931.

9.—Ecuaciones de variación y soluciones asintóticas y periódicas.—Universidad de Madrid, 1932.

10.—Teoría mecánica de tierras (sedimento, filtración y contracción en arcillas).—Laboratorio matemático de Madrid, 1932.

11.—Sobre el método de cálculo de Heaviside.—*Rev. Acad. Madrid*, II Ser., T. XI, 1935, p. 193-226.

* F. TORANZOS

1.—Sobre la inecuación funcional $f(x)+f(y)\leq f(x+y)$. Rev. Hisp. Amer., II Ser., T. VIII, 1933. p. 109-113. Bol. Sem. Arg., N. 13, 1933, p. 137-141.

2.—Sobre clasificación de las curvas de Jordan del plano proyectivo. Bol. Sem. Arg., N. 15, 1933. Rev. Acad. Madrid, T. XXXII, 1935, p. 218-229. Rev. Hisp. Amer., II Ser., T. X, 1935, p. 21-23.

NOTE

(1) Le matematiche in Spagna ieri ed oggi ("Scientia", Rivista di scienza, Maggio e Giugno 1919)

(2) Questo sistema è, più che consigliato, imposto dal fatto che il periodico organo della Società matematica ha di recente assunto come titolo "Revista matemática hispano-americana".

(3) Essa però può risvegliare funzione sopite; una rivista scientifica, con l'assicurare la possibilità di far conoscere i frutti dei propri lavori, incoraggia indubbiamente allo studio gl'investigatori più timidi, spaventati dalla prospettiva dell'inedito; se non c'inganniamo, appunto la Spagna offre una prova di un siffatto modo di vedere.

(4) Una prova è offerta dalla "Revista de ciencias" che da quarant'anni viene pubblicata per cura dell'Università di Lima (Perù).

(5) La collaborazione straniera non mancò mai anche negli anni successivi come risulta dal seguente elenco: Adam, Agronomof, Bouligand, Broggi, Cajori, Cartan, Cisotti, Eddington, Einstein, Enriques, Fayet, Fréchet, Germa, Godeaux, Haussner, Julia, Koschmieder, Kryloff, Landau, Lebesgue, Levi-Civita, Loria, Palatini, Pierpont, Pincherle, Pingitzer, Scheffers, Schwatt, Segre B., Severi, Sierpinski, Slouginoff, de Vries, Weyl, Zariski.

Va anche notato che nella Revista si trovano anche pregevoli articoli storici di cui soltanto per amore di brevità non si è fatto cenno.

(6) Alcuni lavori di Rey Pastor sono citati ed in parte riprodotti in libri matematici e filosofici di Amodeo, Doetsch, Fayet, Moore, Pineda, Rougier, Seifert, Severi, Vossler,...

Molti lavori sono citati e di altri si trovano applicazioni negli articoli di Babini, W. Bernstein, Blumenthal, Broggi, Chielini, Knoll, Koebe, Madhava, Mersmann, Natucci, Raff, Rios, Samatan, San Juan,... (Amer. Math. Month., T. 36, 1929; Math Zeits, 1933; Atti Accad. Lincei, S. V. T. XI, 1935; Bull. Amer. Math. Soc., T. 44, 1938; Deutsche Math., T. 1, 1936; Bull. Math. France, T. LXVI, 1938; Rend. Ist. Lombardo, T. LXIV, 1931; T. LXVI, 1933; T. XLVIII, 1935; T. XLIX, 1936; Schola et Vita, T. XV, 1932; Half Yearly, J. Mysore Univ., T. 8, 1935;...).

(7) Un importante lavoro geometrico di questo autore venne da me già ricordato nella memoria di Scientia.

(8) I primi due fra questi lavori sono citati nell'articolo del Menger: Sul l'indirizzo di idee e sulle tendenze principali del Colloquio matematico di Vienna (Annali della Scuola norm. di Pisa, Vol. IV, p. 332). Del secondo si trovano applicazioni nei lavori di C. Chojnacki, Ueber wesentlich unplättbare Kurven im dreidimensionalen Raume (Fundamenta mathematica, T. XXIII, p. 135-142), e S. Ellenberg, Remarques sur un théorème de M. Hurewicz (Id. Vol. XXIV, p. 157), Cfr. G. Nöbelin nel Jahrb. der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1934, II Parte, p. 47.

(9) Notizie intorno a questi lavori si trovano nell'opuscolo del Blaschke, Integralgeometrie, inserito nella collezione di Actualités scientifiques (Paris, 1935). V. anche W. Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie, I Heft.

LAS MATEMATICAS EN ESPAÑA Y EN ARGENTINA A PRINCIPIOS DE LA GUERRA CIVIL ESPAÑOLA

(Versión castellana resumida)

En un artículo mío, escrito hace veinte años, destacaba cómo el ritmo adoptado por la investigación matemática española permitía cifrar las más fundadas esperanzas acerca de su porvenir, y cómo las palabras de aquellos que incluí bajo el nombre genérico de “triada de sembradores” habían finalmente encontrado eco en oyentes dispuestos a seguir sus elevados consejos, de manera que todo hacía suponer la aparición de una valiente “legión de cosechadores”. Tal previsión pareció confirmarse, tanto que en 1936, al cumplirse los 25 años de vida de la Sociedad matemática con asiento en Madrid, se solicitó al autor de este trabajo que agregara al artículo citado una sucinta exposición de la matemática española durante los veinte años transcurridos; obra en especial de los jóvenes que, alentados por el Prof. J. Rey Pastor, fueron a Alemania a perfeccionar sus estudios. Debe notarse que durante ese período Rey Pastor había repartido su actividad docente entre España y Argentina, de manera que al redactar esa reseña, para no realizar una obra incompleta, debían incluirse en ella las contribuciones aportadas a la matemática por los alumnos de las Universidades argentinas.

Precisamente en 1919, fecha de mi artículo citado, la Revista de la Sociedad matemática española ampliaba la propia esfera de acción a fin de abarcar en ella la América latina, lo que se debía sin duda a la influencia de su director Rey Pastor, quien exponía los criterios a que obedecería su propia acción, en algunas páginas (valientes como otras del mismo autor) que conviene reproducir.

(El autor reproduce a continuación, traducido, el artículo que con el título: *A nuestros lectores de España y América* apareció en la Revista Matemática Hispano-Americana, tomo I, pág. 45, Madrid, 1919).

El cumplimiento de este hermoso programa de la Revista se inicia desde los primeros números con versiones españolas de conferencias de Hilbert y de Klein y con artículos de Rey Pastor destinados a hacer conocer la nueva Aritmética trasfinita y otras teorías vinculadas con ella. Artículos de Hadamard, Montessus de Ballore y Gomes Teixeira muestran cómo insignes matemáticos extranjeros no negaron su efectivo apoyo a una revista que se presentaba con un programa tan serio y elevado. Ha de agregarse que mientras tanto la Academia de Ciencias de Madrid, continuando con la publicación de la Revista iniciada en 1904, daba a luz volúmenes de *Memorias* en las que se publicaron trabajos matemáticos de M. Velasco de Pando, Rey Pastor y otros. Debe recordarse, finalmente, que desde 1932, apareció una nueva revista titulada *Matemática elemental*, órgano de un Círculo matemático de estudiantes y que cuatro años antes se había creado en Buenos Aires un periódico de tendencia semejante: el *Boletín Matemá-*

tico, por obra de B. I. Baidaff. Estos medios de publicidad fueron eficazmente ayudados por el órgano periódico del Seminario Matemático Argentino.

El provecho que de estas publicaciones supieron extraer los matemáticos actuales se desprende de la Bibliografía que cierra la presente memoria; en ella el puesto de honor corresponde de derecho a Rey Pastor, cuya maravillosa producción científica abarca todos los campos de la Matemática, lo que explica el hecho de que entre los que componen la escuela de Rey Pastor existen cultores de todas las ramas de las matemáticas puras. Lo comprueba, en efecto, la simple observación de la bibliografía citada, en la que se encuentran matemáticos de toda especie, de tal modo que no puede encontrarse en ella respuesta para quien quisiera extraer alguna consecuencia respecto a las aptitudes de los españoles y de los argentinos por una u otra de las dos grandes ramificaciones de la Matemática.

Este y otros hechos que emergen de una atenta observación de la bibliografía que sigue induce a concluir que durante estos últimos veinte años los matemáticos de quienes hablamos supieron salir del aislamiento en el que habían vivido sus antecesores ayudándose, en estas tentativas, con estadas en París, Viena y Hamburgo, de manera que, cuando la deseada paz sonría a la península ibérica, los matemáticos de aquel noble suelo no estarán obligados a buscar afanosamente los medios para ser incorporados a la brillante legión de pensadores que desde hace siglos busca y descubre nuevos fenómenos surgidos de la contemplación de los números y de las figuras: bastará que ellos sigan los rastros de sus inmediatos predecesores.

(Versión de J. Babini).

A. González Domínguez

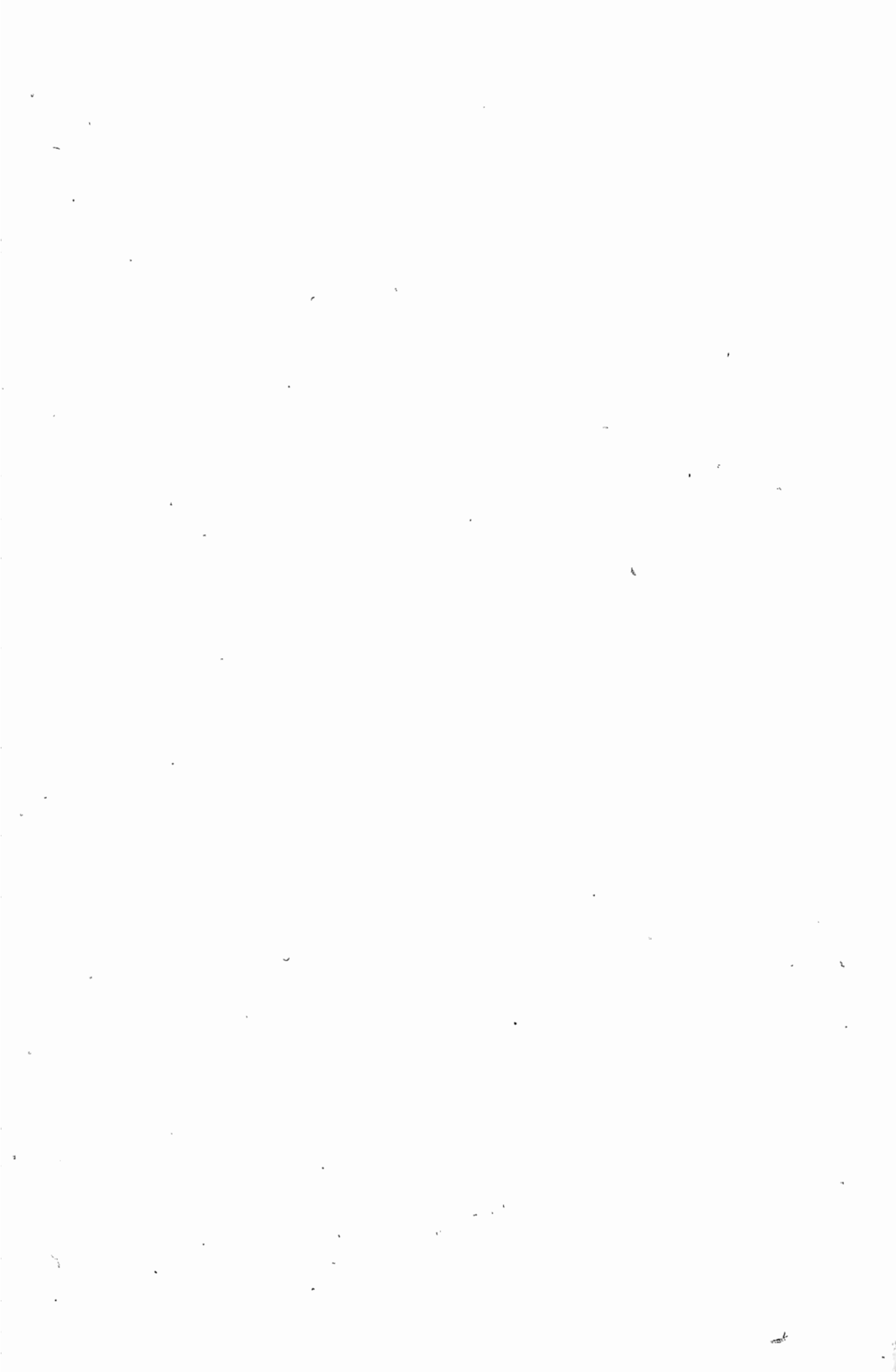
**SOBRE LAS SERIES
DE FUNCIONES DE HERMITE**

UNIÓN MATEMÁTICA ARGENTINA

Publicación núm. 2

BUENOS AIRES

1938



SOBRE LAS SERIES DE FUNCIONES DE HERMITE (*)

por ALBERTO GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ

Llamaremos serie de Hermite a toda serie de la forma

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(x),$$

siendo las $\psi_n(x)$ las funciones de Hermite:

$$(2) \quad \psi_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2}}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}}$$

Como es bien sabido, estas funciones constituyen un sistema ortonormal en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Llamaremos *desarrollo* de Hermite de una función $f(t)$, perteneciente a una cierta categoría, a toda serie de la forma (1), cuyos coeficientes a_n tengan la forma (**)

$$(3) \quad a_n = \int f(t) \psi_n(t) dt.$$

El desarrollo se llamará de Hermite-Stieltjes, si los coeficientes a_n vienen dados por las fórmulas

$$(4) \quad a_n = \int \psi_n(t) d\alpha(t),$$

siendo $\alpha(t)$ una función de variación acotada en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

(*) Este trabajo ha sido realizado en el Seminario de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, que dirige el Prof. Julio Rey Pastor, y es para nosotros un agradable deber expresarle aquí nuestro agradecimiento.

(**) Las integrales que no llevan indicación de extremo se entienden extendidas entre $-\infty$ y $+\infty$; y las sumatorias, de 0 a ∞ .

Para las series de Hermite valen, como es bien sabido, los teoremas de Parseval y de Riesz-Fischer.

Teorema de Parseval.—Dada una función $f(x) \in L^2$, cuyos coeficientes vengan dados por las fórmulas (3), se verifica:

$$(4') \quad \sum a_n^2 = \int [f(x)]^2 dx.$$

Teorema de Fischer-Riesz.—Dados números $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, tales que la serie $\sum a_n^2$ sea convergente, existe una función $f(x)$, perteneciente a L^2 , tal que se verifican las fórmulas (3).

La validez de los teoremas de Parseval y Riesz-Fischer, permite enunciar inmediatamente la siguiente proposición: Condición necesaria y suficiente para que una serie de Hermite sea un desarrollo de Hermite, de una función de L^2 , es que los coeficientes cumplan la condición

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty.$$

El teorema anterior resuelve completamente, para las funciones de L^2 , el problema de saber *cuándo un desarrollo es una serie*. En el presente trabajo abordamos el mismo problema para otras categorías de funciones: sumables, acotadas, de variación acotada, de variación acotada y continuas, y monótonas no decrecientes acotadas. Damos, finalmente, una expresión del salto de una función, dada por su desarrollo de Hermite-Stieltjes.

Los resultados originales de este trabajo están constituidos por los teoremas 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7, la fórmula 10', y el teorema cuyas hipótesis son las fórmulas 46.

I.—Antepondremos algunos teoremas que utilizaremos a menudo en lo que sigue.

Teorema A⁽¹⁾.—Para $|t| < 1$ se verifica

$$(5) \quad K(x, r, t) = \sum r^n \psi_n(x) \psi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-r^2)}} \exp \left\{ \frac{x^2 - t^2}{2} - \frac{(x-rt)^2}{1-r^2} \right\}.$$

La función $K(x, t, r)$ es evidentemente simétrica respecto a x y a t ; es además positiva, y goza de las propiedades siguientes, que hacen de ella un *núcleo positivo de una integral singular*.

$$(6) \quad \int K(x, t, r) dt = \sqrt{\frac{2}{1+r^2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{1-r^2}{1+r^2} x^2 \right) \rightarrow 1 \text{ para } r \rightarrow 1$$

⁽¹⁾ Ver Wiener, (1), pág. 64 y 65; ver también Watson, 1. Ver asimismo Titchmarsh, (1), pág. 28.

Análogamente

$$(7) \int K(x, t, r) dx = \sqrt{\frac{2}{1+r^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{1-r^2}{1+r^2} t^2\right).$$

$$(8) \lim_{r \rightarrow 1} K(x, t, r) = 0,$$

uniformemente para todo x y todo t tal que $|x - t| > \varepsilon$.

Se verifica también, para $r \rightarrow 1$:

$$(9) \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} K(x, t, r) dt = 0,$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x+\varepsilon}^{\infty} K(x, t, r) dt = 0.$$

Sea $f(t)$ una función perteneciente a L^1 . Se verifica, para $r \rightarrow 1$,

$$(10') \lim \int K(r, x, t) f(t) dt = f(x)$$

en todo punto en el que se verifique

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) - f(x)| dt = 0.$$

Estos resultados nos serán muy útiles, sobre todo para la demostración del teorema 7.

Otro resultado que utilizaremos repetidamente en lo que sigue es el siguiente:

TEOREMA 1.—*Los coeficientes de una serie de Hermite o de Hermite-Stieltjes, tienden a cero para $n \rightarrow \infty$.*

La demostración es inmediata; tomemos el caso de una función de L^1 :

$$(10'') a_n = \int \psi_n(x) f(x) dx$$

Utilizando la conocida acotación

$$H_n(x) = O\left[e^{\frac{x^2}{2}} \sqrt{2^n n!} n^{-\frac{1}{4}}\right]$$

(2) Kogbetliantz, p. 153.

resulta, para las funciones de Hermite, en virtud de 2, la acotación siguiente:

$$(11) \quad \psi_n(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right).$$

Como la función $f(x)$ es sumable, y por lo tanto absolutamente sumable, resulta fácilmente, dividiendo el intervalo de integración en $10''$ en 3 partes, y utilizando (11), que $a_n \rightarrow 0$, para $n \rightarrow \infty$. El razonamiento es válido para coeficientes de un desarrollo de Fourier-Stieltjes:

$$a_n = \int \psi_n(x) d\alpha(x),$$

siendo la función $\alpha(x)$ de variación acotada en $(-\infty, \infty)$.

II.—Condiciones características para que una serie de Hermite sea el desarrollo de Hermite-Stieltjes de una función de variación acotada en $-\infty, \infty$.

TEOREMA 2.—*La condición necesaria y suficiente para que una serie de Hermite cuyos coeficientes tienden a cero, sea el desarrollo de Hermite-Stieltjes de una función de variación acotada en $(-\infty, \infty)$, es que se verifique:*

$$(12) \quad \int |\sigma(r, x)| dx < M \quad (0 \leq r < 1)$$

$$(13) \quad \text{con } \sigma(r, x) = \sum a_n \psi_n(x) r^n \quad (0 \leq r < 1)$$

Demostración.—La condición es necesaria. En efecto, si

$$(14) \quad \sum a_n \psi_n(x)$$

es un desarrollo de Hermite-Stieltjes de una función $\alpha(x)$ de variación acotada en $(-\infty, \infty)$, esto es, si verifican las infinitas igualdades

$$(15) \quad a_n = \int \psi_n(t) d\alpha(t), \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

se verifica también

$$(16) \quad \sigma(r, x) = \int K(r, x, t) d\alpha(t)$$

siendo $K(r, x, t)$ el núcleo de Hermite, cuyas propiedades hemos estudiado en la introducción.

Se verificará, pues:

$$(17) \quad |\sigma(r, x)| \leq \int |K(r, x, t)| d\alpha(t).$$

Integrando esta desigualdad entre límites *finitos* a $y = a$, obtenemos

$$(18) \quad \int_{-a}^a |\sigma(r, x)| dx \leq \int_{-a}^a dx \int K(r, x, t) d\alpha(t)$$

Es fácil ver que en el segundo miembro es lícito invertir el orden de integración. Para ello basta observar que, en virtud de la forma exponencial del núcleo $K(r, x, t)$, las dos integrales

$$\int_{-a}^a dx \int_N^\infty K(r, x, t) d\alpha(t), \quad \text{y} \quad \int_{-a}^a dx \int_{-\infty}^{-N} K(r, x, t) d\alpha(t)$$

pueden hacerse tan pequeñas como se quiera eligiendo $|N|$ suficientemente grande. En la integral

$$(19) \quad \int_{-a}^a dx \int_{-N}^N K(r, x, t) d\alpha(t),$$

siendo la función $K(u)$ continua, y los límites de integración finitos, no hay ningún inconveniente para invertir el orden de integración, y obtenemos así

$$(20) \quad \int_{-a}^a |\sigma(r, x)| dx \leq \int_{-a}^a |d\alpha(t)| \int K(r, x, t) dx$$

Tomando ahora límites para $|a| \rightarrow \infty$, obtenemos

$$(21) \quad \int |\sigma(r, x)| dx \leq \int |d\alpha(t)| \int K(r, x, t) dx$$

En virtud de la acotación uniforme de la integral

$$\int |K(r, x, t)| dx,$$

indicada en la Introducción (fórmula 7), obtenemos de (21)

$$(22) \quad \int |\sigma(r, x)| dx \leq c \int |d\alpha(t)|, \quad (0 \leq r < 1),$$

con lo que queda demostrada la necesidad de la condición.

La condición es *suficiente*. Consideremos, en efecto, la función

$$(23) \quad F(r, x) = \int_{-\infty}^x \sigma(r, x) dx.$$

Las funciones $F_r(x)$ son, en virtud de la hipótesis, de variación uniformemente acotada con respecto a r , y por lo tanto constituyen, en virtud de un conocido teorema de Helly ⁽³⁾, un conjunto *compacto*; es decir, que existe una sucesión parcial $F_{r_j}(x)$, tal que

$$(24) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} F_{r_j}(x) = g(x),$$

donde $g(x)$ es una función de variación acotada, y la igualdad se verifica en todos los *puntos de continuidad* de $g(x)$.

Consideremos ahora las integrales

$$(25) \quad \int \psi_m(x) dF_{r_j}(x) \quad [j = 1, 2, \dots]$$

Aplicando un clásico teorema de Helly ⁽⁴⁾ sobre paso al límite bajo el signo de integral, resulta

$$(26) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \int \psi_m(x) dF_{r_j}(x) = \int \psi_m(x) dg(x).$$

Por otra parte

$$(27) \quad \int \psi_m(x) dF_{r_j}(x) = \int \psi_m(x) \sigma_{r_j}(x) dx,$$

en virtud de (23), y la segunda integral es igual a

$$(28) \quad \int \psi_m(x) \left[\sum a_n \psi_n(x) r_j^n \right] dx.$$

(3) Helly, 1.

(4) Helly, 1.

Demostremos que es lícito integrar esta expresión término a término, es decir, que es exacta la igualdad

$$(29) \quad \int \psi_m(x) \left[\sum a_n \psi_n(x) r_j^n \right] dx = \sum \left[a_n r_j^n \int \psi_m(x) \psi_n(x) dx \right].$$

Para ello es condición suficiente, en virtud de un clásico teorema, que converja la serie de *módulos*, es decir, que se verifique

$$(30) \quad \sum (|a_n| r_j^n \int |\psi_m(x)| |\psi_n(x)| dx) < \infty.$$

Acotemos la integral que figura dentro del signo Σ .

Aplicando la acotación de Kogbetliantz ⁽⁵⁾, consignada en la introducción, o aun la menos precisa de Cramer ⁽⁶⁾:

$$(31) \quad |H_n(x)| < K \sqrt{n!} 2^{\frac{n}{2}} e^{\frac{x^2}{2}},$$

o lo que es lo mismo

$$(32) \quad |\psi_n(x)| < \frac{K}{\sqrt[4]{\pi}} (K = 1,086435, \text{ ver Charlier }^{(7)}),$$

resulta

$$(33) \quad \int |\psi_m(x)| |\psi_n(x)| dx < K \pi^{\frac{1}{4}} \int |\psi_m(x)| dx = C.$$

En la segunda integral, m es fija, y la integral es por lo tanto convergente, dado que ψ_m es el producto de un polinomio por el factor $e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Resulta pues,

$$(34) \quad \Sigma (|a_n| r_j^n \int |\psi_m(x)| |\psi_n(x)| dx) < C \Sigma |a_n| r_j^n$$

Como por hipótesis los coeficientes $|a_n|$ tienden a cero, y $r_j < 1$, también por hipótesis, la serie de potencias del segundo miembro es convergente, y por lo tanto también es convergente la serie del primer miembro, con lo que queda demostrada nuestra aserción, y por consiguiente la exactitud de la fórmula (29). Volvamos a considerar esta misma fórmula. En el segundo miembro de la misma figura la integral

$$(35) \quad \int \psi_m(x) \psi_n(x) dx,$$

(5) Kogbetliantz, 1, p. 153.

(6) Cramer, 1. — Ver Charlier, pp. 52 y 57.

(7) Charlier, 1, pp. 52 y 57.

que, en virtud de la ortogonalidad y normalidad de las funciones de Hermite, es igual a *cero* para $m \neq n$, y a *uno* para $m = n$. La fórmula (29) nos da, pues

$$(36) \quad \int \psi_m(x) [\sum a_n \psi_n(x) r_j^n] = \sum (a_n r_j^n \int \psi_m(x) \psi_n(x) dx) = a_m r_j^m.$$

Substituyendo este valor en la fórmula (26), obtendremos:

$$(37) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \int \psi_m(x) dF_{r_j}(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} a_m r_j^m = a_m = \int \psi_m(x) dg(x),$$

$$(38) \quad a_m = \int \psi_m(x) dg(x),$$

con lo que queda demostrada la segunda parte de nuestro teorema.

TEOREMA 3.—*Condición necesaria y suficiente para que un desarrollo de Hermite cuyos coeficientes tienden a cero, sea la serie de Hermite-Stieltjes de una función monótona no decreciente y acotada en $(-\infty, \infty)$, es que se verifique*

$$(39) \quad \begin{aligned} \sigma(r, x) &\geq 0 & 0 \leq r < 1, \\ \int \sigma(r, x) |dx| &< M & [0 \leq r < 1]. \end{aligned}$$

Este teorema es fácil corolario del anterior.

Las condiciones son necesarias. En efecto, si

$$(40) \quad \sum a_n \varphi_n(x)$$

es una serie de Hermite-Stieltjes de una función acotada no decreciente, se verifica

$$(41) \quad \sigma(r, x) = \int K(r, x, t) d\alpha(t).$$

Siendo $K(r, x, t)$ positivo, y la función $\alpha(x)$ no decreciente, el integrando es positivo, y obtenemos

$$(42) \quad \sigma(r, x) \geq 0.$$

La segunda condición se verifica también, en virtud del teorema anterior, pues $\alpha(x)$, monótona no decreciente, y acotada, es de variación acotada.

Las condiciones son suficientes. En efecto, todos los razona-

mientos que hemos hecho para demostrar el teorema anterior subsisten. Pero, en el caso actual, las funciones

$$(43) \quad F(r, x) = \int_{-\infty}^x \sigma(r, x) dx,$$

dado que el integrando es positivo, son, no sólo de variación uniformemente acotada, sino también *no decrecientes, y uniformemente acotadas*. La función límite $g(x)$, que en el teorema anterior resultaba de variación acotada, es en este caso *no decreciente y acotada*. Repitiendo todos los pasos del razonamiento anterior, se demuestra finalmente que

$$(44) \quad a_m = \int \psi_m(x) dg(x)$$

con $g(x)$ acotada no decreciente, con lo que queda demostrada la segunda parte del teorema.

TEOREMA 4.—*Condición necesaria y suficiente para que un desarrollo de Hermite cuyos coeficientes tienden a cero sea la serie de Hermite-Stieltjes de una función continua de variación acotada, es que se verifique*

$$(45) \quad \begin{aligned} & \text{a) } \int |\sigma(r, x)| dx < M \quad 0 \leq r < 1 \\ & \text{b) } \lim_{r \rightarrow 1} \pi^{1/2} (1 - r^2)^{1/2} \sigma(r, x) = 0 \quad (r \rightarrow 1) \end{aligned}$$

Este teorema es fácil corolario del teorema (3). En efecto, la condición (a) nos dice que la serie dada es el desarrollo de Hermite-Stieltjes de una función de variación acotada. Veremos que la condición b, determina que esa función de variación acotada, es continua. Para ello, nos valdremos del siguiente teorema, muy análogo a un teorema de Khintchine ⁽⁸⁾.

Sea una función $S(x, r, t)$, que satisfaga a las condiciones

$$(46) \quad \begin{aligned} & 1) \quad |S(x, r, t)| < M \\ & 2) \quad \lim_{r \rightarrow 1} S(x, r, t) = 0, \text{ para todo } x \text{ tal que } |x - t| > \delta \\ & 3) \quad \lim_{r \rightarrow 1} S(x, r, t) = 1 \quad \text{para } x = t. \end{aligned}$$

(8) Khintchine, 1.

Se verificará, entonces, para $r \rightarrow 1$:

$$\lim \int S(r, x, t) d\alpha(t) = \alpha(x+0) - \alpha(x-0)$$

siendo $\alpha(t)$ de variación acotada en $(-\infty, \infty)$.

Comprobemos que la expresión

$$(47) \quad \pi^{1/2} (1-r^2)^{1/2} K(r, x, t)$$

satisface a las condiciones del teorema anterior.

La condición 1) se satisface evidentemente, en virtud de la fórmula (5). También está satisfecha la condición 2), pues

$$(48) \quad \pi^{1/2} (1-r^2)^{1/2} K(r, x, t) = \exp \left(-\frac{x^2 - t^2}{2} - \frac{(x - rt)^2}{1-r^2} \right)$$

Para $|x - t| > \delta$, el exponente tiende a $-\infty$, para $r \rightarrow 1$, y por lo tanto,

$$(49) \quad \lim_{r \rightarrow 1} \pi^{1/2} (1-r^2)^{1/2} K(r, x, t) = 0, \text{ para } |x - t| > \delta.$$

Para $x = t$, la expresión (48) se reduce a

$$(50) \quad \pi^{1/2} (1-r^2)^{1/2} K(r, x, x) = \exp \left(-\frac{x^2 (1-r)^2}{1-r^2} \right) = \\ = \exp \left(-\frac{x^2 (1-r)(1+r)}{(1-r)(1+r)} \right) \rightarrow 1.$$

Se verificará, pues, en virtud del teorema recién enunciado:

$$(51) \quad \lim_{r \rightarrow 1} \pi^{1/2} (1-r^2)^{1/2} \int K(r, x, t) d\alpha(t) = \lim_{r \rightarrow 1} \pi^{1/2} (1-r^2)^{1/2} \sigma(r, x) = \\ = \alpha(x+0) - \alpha(x-0).$$

Si en todo punto x se verifica que $\alpha(x+0) - \alpha(x-0) = 0$, quiere decir que la función $\alpha(x)$ es *continua*, ya que su salto es nulo para todo x .

La validez de la condición a) de 45, nos aseguraba que la función $\alpha(t)$ es de variación acotada. Acabamos de ver que el verificarse de la condición b), de (45), es necesario y suficiente

para que la función $\alpha(t)$, de variación acotada, sea continua. El teorema 5 queda así completamente demostrado.

TEOREMA 5.—*Condición necesaria y suficiente para que una serie de Hermite cuyos coeficientes tienden a cero; sea el desarrollo de Hermite de una función de L^p , ($p \geq 2$), es que se verifique*

$$(52) \quad \int |\sigma(r, x)|^p dx < M \quad (0 \leq r < 1)$$

La condición es necesaria. En efecto, si la serie

$$(53) \quad \sum a_n \psi_n(x)$$

es el desarrollo de Hermite de una función $f(t) \in L^p$, se verificará:

$$(54) \quad a_n = \int \psi_n(t) f(t) dt,$$

$$(55) \quad \sigma(r, x) = \int K(r, x, t) f(t) dt$$

siendo $K(r, x, t)$ el varias veces mencionado núcleo de Hermite.

Aplicando la clásica desigualdad de Hölder a la fórmula (55), obtenemos:

$$(56) \quad |\sigma(r, x)| \leq \left[\int |K(r, x, t)|^p |f(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int K(r, x, t) dt \right]^{\frac{1}{p'}},$$

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right).$$

Elevemos ambos miembros a la potencia p e integremos:

$$(57) \quad \int |\sigma(r, x)|^p dx \leq \int dx \left[\left\{ \int K(r, x, t) |f(t)|^p dt \right\} \times \left\{ \int K(r, x, t) dt \right\}^{\frac{p}{p'}} \right].$$

Pero

$$(58) \quad \left(\int K(r, x, t) dt \right)^{\frac{p}{p'}} < A^{\frac{p}{p'}} \quad (0 \leq r < 1),$$

en virtud de la fórmula (10) varias veces citada de la introducción. De (57) y (58) deducimos

$$(59) \quad \int |\sigma(r, x)|^p dx \leq A^{\frac{p}{p'}} \int dx \int K(r, x, t) |f(t)|^p dt$$

La integral doble del segundo miembro (de integrando positivo), cumple las condiciones del clásico teorema de Fubini, y por

lo tanto es lícito invertir el orden de integración, con lo que obtenemos:

$$(60) \quad \int dx \int K(r, x, t) |f(t)|^P dt = \int |f(t)|^P dt \int K(r, x, t) dx \leq$$

$$(61) \quad \leq A \int |f(t)|^P dt.$$

Substituyendo este resultado en la fórmula (59), obtenemos en definitiva:

$$(61) \quad \int |\sigma(r, x, t)|^P dx \leq A \left(\frac{P}{P'} + 1 \right) \int |f(t)|^P dt = BA^{\frac{P}{P'} + 1} = M,$$

con lo que queda demostrada la primera parte del teorema.

La condición es *suficiente*. Supongamos, en efecto, que se cumpla la hipótesis, esto es

$$(62) \quad \int |\sigma(r, x)|^P dx < M \quad (0 \leq r < 1).$$

Entonces, en virtud de un clásico teorema de Riesz ⁽⁹⁾, el conjunto de funciones $\sigma_r(x)$ contiene una sucesión parcialmente convergente $\sigma(r_j, x)$; es decir, tal que para toda función $g(t) \in L^{P'} \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{P'} = 1 \right)$, se verifica:

$$(63) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \int \sigma(r_j, x) g(t) dt = \int f(t) g(t) dt,$$

siendo $f(t)$ una función de L^P . Ahora bien, las funciones $\psi_n(x)$ son acotadas e integrables en $(-\infty, \infty)$, y por lo tanto pertenecen a la categoría L^P , cualquiera que sea $p \geq 1$. Por lo tanto

$$(64) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \int \psi_m(x) \sigma(r_j, x) dx = \int \psi_m(x) f(x) dx$$

Una vez en posesión de este resultado, el resto es fácil. En efecto, sólo queda por demostrar que la integral del primer miembro de la igualdad anterior es igual a $a_m r_j^m$. Pero los razonamientos que hemos hecho para demostrar idéntico resultado en el teorema (3), siguen siendo válidos sin modificación alguna en el caso actual. Nos queda, pues

$$(65) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \int \psi_m(x) \sigma(r_j, x) dx = \lim_{j \rightarrow \infty} a_m r_j^m = a_m = \\ = \int \psi_m(x) f(x) dx$$

con lo que queda demostrada la 2ª parte del teorema.

(9) Riesz, 1.

TEOREMA 6.—*Condición necesaria y suficiente para que una serie de Hermite*

$$(66) \quad a_n \sum \psi_n(x)$$

cuyos coeficientes tienden a cero, sea el desarrollo de Hermite de una función acotada e integrable en $(-\infty, \infty)$, es que se verifique

$$(67) \quad |\sigma(r, x)| < M \quad 0 \leq r < 1$$

La condición es necesaria. En efecto, razonando como en los teoremas anteriores, resulta que si el desarrollo (66) es la serie de Hermite de una función acotada, se verifica

$$(68) \quad \sigma(r, x) = \int K(r, x, t) f(t) dt$$

Ahora bien, como por hipótesis, $|f(t)| < K_1$, se verificará

$$(69) \quad |\sigma(r, x)| < M \int K(r, x, t) dt < M A,$$

en virtud de la propiedad fundamental del núcleo de Hermite, que tantas veces hemos utilizado. La necesidad de la condición queda así demostrada.

La condición es *suficiente*. El razonamiento es idéntico que en los teoremas anteriores. En el caso actual, la hipótesis

$$(70) \quad |\sigma(r, x)| < M,$$

nos permite asegurar, en virtud de otro conocido teorema de Riesz ⁽¹⁰⁾, que el conjunto de funciones $\sigma_r(x)$ contiene una sucesión parcial débilmente convergente.

Una vez asegurado este punto fundamental de la demostración, la parte restante es idéntica a la de los teoremas anteriores.

TEOREMA 7.—*Condición necesaria y suficiente para que una serie de Hermite,*

$$(71) \quad \sum a_n \psi_n(x)$$

cuyos coeficientes tienden a cero, sea el desarrollo de Hermite de una función sumable, es que se verifique para $r \rightarrow 1$, $q \rightarrow 1$:

$$(72) \quad \lim \int |\sigma(r, x) - \sigma(q, x)| dx = 0$$

(10) Riesz, 1.

La condición es suficiente. En efecto, si la hipótesis se verifica, existe, en virtud del teorema fundamental sobre convergencia en promedio, debido a Riesz ⁽¹²⁾, una función $g(x)$ tal que para $j \rightarrow \infty$:

$$(73) \quad \lim \int |\sigma(r_j, x) - f(x)| dx = 0.$$

Pero, según es bien sabido, la convergencia fuerte lleva aparejada la convergencia débil ⁽¹¹⁾; por lo tanto se verificará para $j \rightarrow \infty$:

$$(74) \quad \lim \int g(x) \sigma(r_j, x) = \int g(x) f(x) dx$$

para toda función $g(x)$ sumable acotada, y, en particular

$$(75) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \int \psi_m(x) \sigma(r_j, x) dx = \int \psi_m(x) f(x) dx.$$

La demostración de la suficiencia sigue ahora idénticamente que en casos anteriores.

La condición es necesaria. En efecto, si la serie

$$(76) \quad \sum a_n \psi_n(x)$$

es el desarrollo de Hermite de una función sumable, se verifica

$$(77) \quad \sigma(r, x) = \int K(r, x, t) f(t) dt.$$

Recordando las propiedades 6, 7, 9, 10, y 10' del núcleo $K(x, t, r)$, consignadas en la introducción, se comprueba que el mismo satisface a todas las condiciones del siguiente teorema de Hahn ⁽¹²⁾.

Sea $\varphi(\xi, x, n)$ medible en todo el plano ξ, x , para todo n . Sea $\varphi(\xi, x, n)$ integrable con respecto a ξ , en $(-\infty, \infty)$, para todo x , con excepción cuando más de un conjunto de medida nula; igualmente sea integrable con respecto a x en $(-\infty, \infty)$, para todo ξ , con excepción cuando más de un conjunto de medida nula; además satisfaga $\varphi(\xi, x, n)$ a las siguientes condiciones:

1) Existe un M tal que, para casi todo x y todo n , se verifica

$$\int |\varphi(\xi, x, n)| d\xi < M;$$

(11) Riesz, 1.

(12) Hahn, 1, pág. 667.

2) Existe un M tal que, para casi todo ξ y todo n se verifica

$$\int |\varphi(\xi, x, n)| dx < M;$$

$$3) \quad f(x) = \lim \int \varphi(\xi, x, n) f(\xi) d\xi$$

para $n \rightarrow \infty$, en todo punto donde se verifique para $h \rightarrow 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) - f(x)| dt = 0.$$

4) Para todo $h > 0$ y todo ξ se verifica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\xi-h} |\varphi(\xi, x, n)| dx = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\xi+h}^{\infty} |\varphi(\xi, x, n)| dx = 0.$$

Entonces se verifica, para toda función $f(x)$ sumable en $(-\infty, \infty)$, la relación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f(x) - \int \varphi(\xi, x, n) f(\xi) d\xi| dx = 0.$$

Del anterior teorema de Hahn, aplicado a nuestro caso, se deduce:

$$(78) \quad \lim_{r \rightarrow 1} \int |f(x) - \sigma(r, x)| dx = 0.$$

es decir, que la función $\sigma(r, x)$ converge en promedio de primer orden, hacia $f(x)$. En virtud del teorema fundamental sobre convergencia en promedio, se verificará también, en virtud de la relación anterior:

$$(79) \quad \lim \int |\sigma(q, x) - \sigma(r, x)| dx = 0$$

para $r \rightarrow 1, q \rightarrow 1$.

Nuestro teorema queda así finalmente demostrado.

BIBLIOGRAFIA

- 1) *Charlier C. V. L.*—Les aplications de la théorie des probabilités aux sciences mathématiques et aux sciences physiques; application de la théorie des probabilités á l'astronomie. - Paris, 1930; pp. 52 y 57.
 - 2) *Cramer H.*—Valeurs Maxima des Polynomes d'Hermite. (Ver Charlier, pp. 50-53).
 - 3) *Hahn H.*—Über die Darstellung gegebener Funktionen durch singuläre Integrale. Denkschriften der Kais. Akad. der Wissenschaften, Math. Naturwissenschaftliche Klasse. Tomo 93. - Viena, 1916.
 - 4) *Helly E.*—Über lineare Funktionaloperationen. Wiener Berichte, 121, (1912), pp. 265-297.
 - 5) *Khintchine A.*—The Method of sepectral reduction in classical dynamics. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 19, pp. 567-573, (1933).
 - 6) *Kogbetliantz E.*—Recherches sur la sommabilité des series d'Hermite. Annales de l'École Normale Supérieure, 49, (1932), pp. 136-221.
 - 7) *Riesz F.*—Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen. Math. Ann. 69, (1910), pp. 449-497.
 - 8) *Titchmarsh, E. C.*—Introduction to the Theory of Fourier integrals.—Oxford, 1937.
 - 9) *Watson, G. N.*—Notes on generating functions of polynomials. II, Hermite polynomials. - Journal of the London Math. Soc., 8, 194-199, (1933).
 - 10) *Wiener, N.*—The Fourier Integral and some of its applications. - Cambridge, 1933.
-

MICHEL PETROVICH

Remarques arithmetiques
sur une
équation différentielle du premier ordre

UNIÓN MATEMÁTICA ARGENTINA

Publicación núm. 3

BUENOS AIRES

1938



REMARQUES ARITHMETIQUES SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE

por MICHEL PETROVICH (BEOGRAD)

1. L'objet de la présente Note est l'équation différentielle du premier ordre

$$(1) \quad y' = f(x, y)$$

ou f est polynôme en x, y à coefficients nombres entiers (positifs ou négatifs).

Considerons le point M_k sur l'axe des y , ayant pour l'ordonnée un nombre entier k (positif ou négatif).

L'intégrale y de (1), passant par un point M_k , est développable en série convergente au voisinage de $x=0$:

$$(2) \quad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

dont le coefficient de x^n est multiple entier du coefficient de x^n dans le développement taylorien de e^x ; le rapport de ces deux coefficients est un entier ne croissant pas, en valeur absolue, plus vite que n^n .

En effet, le second membre de (1) étant holomorphe au voisinage de $x = 0, y = k$, l'intégrale y passant par le point M_k est développable en série (2) ou $a_0 = k$ et

$$(3) \quad a_n = \frac{1}{n!} [f_{n-1}]$$

les f_i étant les termes de la suite indéfinie de fonctions de x, y

$$(4) \quad f_1, f_2, f_3, \dots$$

définies par la relation de récurrence

$$(5) \quad f_i = \frac{\partial f_{i-1}}{\partial x} + f \frac{\partial y}{\partial f_{i-1}}$$

avec

$$f_0 = f(x, y) \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

où, d'une manière générale, $[\varphi(x, y)]$ désigne le nombre obtenu en faisant $x = 0, y = k$, dans $\varphi(x, y)$.

Les fonctions (4) définies de cette manière sont des polynômes en x, y à coefficients nombres entiers. Les nombres (f_i) sont des entiers, de sorte que

$$(6) \quad A_n = \mu_n$$

D'autre part, le rayon de convergence de la série (2) étant différent de zéro, la lim. sup. de $\sqrt[n]{|a_n|}$ pour n augmentant indéfiniment est finie, ce qui montre que $\sqrt[n]{|\mu_n|}$, n'augmente pas plus vite que $\sqrt[n]{n!}$ c'est à dire que n . Il s'en suit que la valeur absolue de μ_n n'augmente pas plus vite que n^n , comme il fallait montrer.

La formule (6) met également en évidence le fait suivant:

Réduit à sa plus simple expression, le coefficient taylorien a_n de l'intégrale y est un nombre rationnel dont le dénominateur n'a pour diviseur aucun nombre premier supérieur à n .

Une série taylorienne, dont un ou plusieurs coefficients sont des nombres irrationnels, ou bien rationnels, mais dont le dénominateur est divisible par un nombre premier supérieur au rang du coefficient, ne peut, pour aucune équation différentielle (1), représenter le courbe intégrale passant par un point M_0 .

On peut aussi remarquer que dans le cas où y est une fonction entière de x , l'entier μ_n ou bien n'augmente pas, ou bien augmente moins vite que n^n . Car dans ce cas $\sqrt[n]{|a_n|}$ tend vers zéro lorsque x augmente indéfiniment.

2. Envisageons le cas où l'intégrale y est fonction algébrique de x . L'entier μ_n jouit alors de la propriété arithmétique suivante:

Il existe un nombre entier fixe λ rattaché à l'équation (1), tel que l'entier μ_n sera divisible par le produit de tous les entiers ne surpassant pas n et ne coïncidant avec une puissance d'aucun diviseur premier de λ .

Pour le faire voir, rappelons que, y étant fonction algébrique à coefficients a_n commensurables, il existe un entier fixe λ (l'entier d'Eisenstein) tel que le produit

$$(7) \quad a_n \lambda^n = \frac{\mu_n \lambda^n}{n!}$$

soit un nombre entier pour tout indice $n = 1, 2, 3 \dots$

Or, λ^n n'est jamais divisible par $n!$, car dans cette factorielle il y a toujours au moins un facteur nombre premier qui n'y entre qu'une seule fois, tandis que dans λ^n il figurerait n fois. Mais λ^n peut avoir des diviseurs communs avec $n!$. La fraction (7) devant se réduire à un nombre entier, μ_n doit être divisible par le produit de tous les entiers figurant comme facteurs dans $n!$, après y avoir supprimé ces diviseurs communs, ce qui démontre l'assertion précédente.

Le théorème d'Eisenstein conduit également à la conclusion suivante:

Le coefficient de x^n de l'intégrale y , pour $n = 1, 2, 3 \dots$ est multiple entier du coefficient de x^n dans le développement de la fonction

$$\frac{x}{\alpha - x}$$

α étant un entier convenablement déterminé; le rapport de ces deux coefficients est un entier ne croissant pas, en valeur absolue, plus vite que la n -ième puissance d'un nombre fixe.

Car le produit $a_n \lambda^n$ étant un nombre entier h_n on a

$$a_n = \frac{\lambda^n}{h_n}$$

h_n étant le coefficient de x^n de la fonction $\frac{x}{\lambda - x}$. D'autre part, le rayon de convergence de y au voisinage de $x = 0$ étant différent de zéro, l'expression

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\lambda} \sqrt[n]{|h_n|}$$

et par suite aussi la lim. sup de $\sqrt[n]{|h_n|}$ est finie, ce qui montre que h_n ne croît pas, en valeur absolue, plus vite que la n -ième puissance d'un nombre fixe.

On en conclut, d'après un théorème que j'ai démontré dans un travail antérieur ⁽¹⁾ que l'intégrale y appartient à la classe de fonctions qui se laisse déterminer sans ambiguïté par la seule valeur numérique d'une certaine intégrale définie rattachée à la fonction, la valeur de cette intégrale étant un nombre absolu.

3. Considérons maintenant la valeur inverse $\frac{1}{y}$ de l'intégrale y de l'équation (1), passant par un point M_k . En posant

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

$$\frac{1}{y} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$$

on a la suite connue de relations déterminant les b_n au moyen des a_n .

Pour le point M_1 le coefficient a_0 est égal à 1 et l'on a

(1) M. Petrovitch: *Théorème sur les fonctions algébriques à coefficients tayloriens commensurables* (Revue mathématique de l'union interbalcanique t. I. fasc. 1, 1936.)

$$\begin{aligned}
 b_0 &= 1 \\
 b_1 &= -a_1 \\
 b_2 &= -a_2 + a_1^2 \\
 (8) \quad b_3 &= -a_3 + 2a_2a_1 - a_1^3 \\
 b_4 &= -a_4 + 2a_3a_1 + a_2^2 - 3a_2a_1^2 + a_1^4 \\
 b_5 &= -a_5 + 2a_4a_1 + 2a_3a_2 - 3a_3a_1^2 - 3a_2^2a_1 + 4a_2a_1^3 - a_1^5
 \end{aligned}$$

où l'on a les lois suivantes de formation :

1° b_n se compose de tous les termes de poids n que l'on peut former avec les a_i jusqu'à a_n inclusivement ;

2° ces termes sont positifs ou négatifs selon que le nombre de leurs facteurs est pair ou impair ;

3° le coefficient de chaque terme est le coefficient polynomial que ce terme aurait en égard au nombre des facteurs qu'il contient et à leurs exposants.

Pour un point quelconque M_k on ramène le cas à celui du point M_1 en remplaçant a_n par $\frac{a_n}{k}$ et divisant par $a_0 = k$ le résultat obtenu. Donc :

Le premier coefficient b_0 étant égal à $\frac{1}{K}$, le coefficient b_n s'obtient en formant la même expression pour ce coefficient que dans le cas du point M_1 , en la rendant de degré n à l'aide du facteur $a_0 = k$ et en la divisant ensuite par $a_0^{n+1} = k^{n+1}$. Par exemple on aura

$$b_5 = \frac{1}{K^6} (-a_5k^4 + 2a_4a_1k^3 + 2a_3a_2k^3 - 3a_3a_1^2k^2 - 3a_2^2a_1k^2 + 4a_2a_1^3k - a_1^5)$$

Si l'on y remplace a_i par son expression (6), on obtient le coefficient b_n sous la forme d'une fraction rationnelle dont le dénominateur est le produit de k^{n+1} par diverses factorielles

$$1!, 2!, 3!, \dots n!$$

ayant comme exposants des nombres entiers ne surpassant pas n . Il s'en suit que :

Réduit à sa plus simple expression, le coefficient de x^n de l'inverse $\frac{1}{y}$ de l'intégrale y de (1), passant par un point M_k , est un nombre rationnel dont le dénominateur n'a pour diviseur aucun nombre premier plus grand que n ne coïncidant pas avec un diviseur de k .

On voit également que le dénominateur de chaque terme composant b_n , avant la réduction de la fraction rationnelle à sa plus simple expression, est le produit de puissances de diverses factorielles

$$i!, j!, h!, \dots$$

des entiers $i, j, h, \dots$ égaux aux indices des a_k dont provient ce terme, chacune de ces factorielles figurant avec un exposant égal à celui de a_k correspondant. De plus,

1° la puissance d'une factorielle étant comptée comme facteur autant de fois que l'indique son exposant, le nombre de ces facteurs est égal à n ;

2° la somme $i + j + k + \dots$ d'entiers dont les factorielles figurent dans ce dénominateur est également égale à n .

Il s'en suit qu'une factorielle $m!$ ne peut figurer au dénominateur de b_n plus de fois qu'il y a d'unités dans la partie entière du nombre $\frac{n}{m}$. Ceci permet d'assigner une limite supérieure au nombre indiquant combien de fois un nombre premier peut figurer comme diviseur dans ce dénominateur.

Je terminerai en faisant remarquer que l'équation de Riccati (avec ses dégénérescences) est la seule équation (1) qui par le changement $y = \frac{1}{z}$ se transforme en une équation (1). Pour l'intégrale y d'une telle équation, passant par le point M_1 , le coefficient de x^n du développement non seulement de l'intégrale elle-même, mais aussi du celui de son inverse $\frac{1}{y}$, est un nombre rationnel dont le dénominateur, réduit à sa plus simple expression, n'a pour diviseur aucun nombre premier supérieur à n ; son numérateur est un entier qui ne croît pas plus vite que n^n . On en tire aussi des conclusions analogues aux précédentes pour le cas des intégrales algébriques d'une telle équation différentielle.

BEOGRAD, Université, 25. dec. 1937.

A. González Domínguez

**Una nueva demostración
del teorema límite del Cálculo
de Probabilidades**

**Condiciones necesarias y suficientes
para que una función sea una
Integral de Laplace**

UNIÓN MATEMÁTICA ARGENTINA

Publicación núm. 4

BUENOS AIRES

1938

UNA NUEVA DEMOSTRACION DEL TEOREMA LÍMITE DEL CÁLCULO DE PROBABILIDADES. *

por ALBERTO GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ

I. *Teorema.*—Sea una sucesión de leyes de probabilidad $g_n(t)$, y una ley $g(t)$. Para que se verifique

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t) = g(t)$$

en todo punto de continuidad de $g(t)$, es necesario y suficiente que se cumpla la igualdad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d g_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d g(t).$$

Este teorema, generalización del clásico teorema límite de P. Lévy ⁽¹⁾, ha sido recientemente demostrado por V. Glivenko ⁽²⁾. Posteriormente han dado de él nuevas demostraciones el mismo Lévy en su reciente libro (*Théorie de l'addition des variables aleatoires*, pág. 49), y por Cramer (*Random variables and probability distributions*, Cambridge, 1937, pág. 29, y pág. 121).

En esta nota damos una nueva demostración del teorema de Glivenko, que, aunque es menos directa que la de Lévy, Cramer, y el mismo Glivenko, es tanto o más breve que la de esos autores, y tiene, a nuestros ojos, la ventaja de que hace resaltar la íntima razón de ser del teorema, al ponerlo en relación con un campo muy estudiado, a saber, las series de Fourier de las funciones monótonas.

II. En el año 1920 demostró Carathéodory ⁽³⁾ el siguiente teorema:

Sea $g_k(t)$, $0 \leq t < 2\pi$, una sucesión de funciones no decrecientes uniformemente acotadas, y $g(t)$ una función mo-

* Una versión francesa, abreviada, de esta nota, ha aparecido en los "Comptes Rendus", de la Academia de Ciencias de París, Vol. 203, 1936.

(1) P. Lévy, *Calcul des Probabilités*, París, 1925.

(2) *Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari*, 1936, pp. 160-167.

(3) Carathéodory C.: *Über die Fourierschen Koeffizienten monotoner Funktionen*, Sitzungsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften, 30, 1920, pp. 559-573.

nótona no decreciente. La condición necesaria y suficiente para que se verifique, para $k \rightarrow \infty$.

$$g_k(t) \rightarrow g(t)$$

en todo punto de continuidad de $g(t)$, es que, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, y $k \rightarrow \infty$, se cumplan las igualdades

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} F_k(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} F(t) dt. \quad [1]$$

Como se ve, el teorema de Lévy-Glivenko no es otra cosa que el correlativo del teorema de Carathéodory, para integrales de Fourier-Stieltjes.

Carathéodory utiliza en su demostración (luminosa y profunda, como toda la producción de este ilustre matemático, que hace honor a su ascendencia helénica), tres instrumentos fundamentales: 1º un teorema de selección de Helly (⁴). Este teorema es el siguiente:

Dada en un intervalo $a \leq x \leq b$ una sucesión de funciones $[F_n(x)]$ de variación uniformemente acotada, o bien existe una sucesión parcial uniformemente acotada $[F_k(x)]$, que converge en todos los puntos hacia una función $F(x)$ de variación acotada, o bien $[F_n(x)]$ diverge uniformemente a ∞ , para $n \rightarrow \infty$;

2º) el conocido teorema de paso al límite bajo el signo de integral, debido a Lebesgue;

3º) el teorema de unicidad de las series trigonométricas.

Si se quiere demostrar el teorema de Glivenko siguiendo las huellas de Carathéodory, es natural buscar correlativos, para el intervalo infinito, de los tres teoremas anteriores.

Estos correlativos existen efectivamente.

El primer teorema subsiste sin modificación. El segundo tiene el siguiente correlativo, debido a Bochner (⁵):

Teorema 2'.—Sea $[F_n(t)]$ una sucesión de leyes de probabilidad que convergen hacia una ley de probabilidad $F(t)$ en todos los puntos de continuidad de esta última: si se verifica, para $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_n(t) = A(x)$$

(⁴) Helly E., *Über lineare Funktionaloperationen*; Wiener Berichte, 121, (1912), pp. 265-297.

(⁵) Bochner S.—*Vorlesungen über Fourierschen Integrale*, Leipzig, 1932, pág. 71.

siendo $A(x)$ una función continua, también será posible pasar al límite bajo el signo de integral:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(t).$$

El tercer teorema (de unicidad) admite el siguiente correlativo, también debido a Bochner.⁽⁶⁾:

Teorema 3'.—Condición necesaria y suficiente para que se verifique

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dg(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dh(t)$$

es que las respectivas funciones de probabilidad sean iguales:

$$g(t) \equiv h(t).$$

III. Una vez en posesión de estos tres correlativos, el teorema límite puede demostrarse siguiendo paso a paso la demostración de Carathéodory.

La condición es necesaria. Esta parte de la demostración no ofrece ninguna novedad con respecto a las conocidas, y por lo tanto la omitimos.

La condición es suficiente. Supongamos, en efecto, que se verifique, y que exista un punto a , de continuidad de $g(t)$, y en el cual $g_n(a)$ no converja hacia $g(a)$. Existirá entonces una sucesión parcial $[g_k(t)]$, tal que, para $k \rightarrow \infty$,

$$\lim g_k(a) = L \neq g(a).$$

De acuerdo con el teorema de Helly, enunciado en la pág. 2, se podrá extraer de la sucesión $[g_k(t)]$ una sucesión parcial $[g_s(t)]$, que converge hacia una función acotada no decreciente $h(t)$, en todos los puntos de continuidad de esta última. Es bien sabido que la función $h(t)$ puede normalizarse de manera de tener

$$h(t) = \frac{1}{2} \{ h(t+0) + h(t-0) \}.$$

La sucesión de funciones características

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dg_s(t),$$

(6). Bochner, loc. cit. (5), pág. 67.

tiende, en virtud de la hipótesis, hacia una función continua (a saber, la función

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d g (t) .$$

Esta sucesión cumple las condiciones exigidas por el teorema 2' de Bochner, de donde se deduce, para $s \rightarrow \infty$:

$$\lim \int e^{itx} d g_s (t) = \int e^{itx} d h (t) = \int e^{itx} d g (t) .$$

Por lo tanto, apelando al teorema 3' de unicidad, se deduce que

$$g (t) \equiv h (t) .$$

Se tendrá, pues, para $s \rightarrow \infty$,

$$\lim g_s (t) = g (t)$$

en todo punto de continuidad de $g (t)$, y, en particular,

$$\lim g_s (a) = g (a) .$$

Pero, como $[g_s (t)]$ es una sucesión parcial de $[g_k (t)]$, se tendrá también

$$\lim_{s \rightarrow \infty} g_s (a) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k (a) = L \neq g (a) .$$

Pero esta igualdad es incompatible con la anterior, y el teorema queda, pues, demostrado.

IV. Como acabamos de ver, el teorema límite se demuestra de manera sumamente sencilla, utilizando las ideas fundamentales de Carathéodory. Pero hay más. La demostración más general conocida (y en cierto sentido definitiva), que han dado recientemente los señores Fréchet-Shoat ⁽⁷⁾ del llamado Segundo Teorema Límite del Cálculo de Probabilidades de Chebicheff-Liapunoff coincide, esencialmente, con la de Carathéodory. La diferencia estriba en que, en vez de utilizar el teorema de unicidad para integrales de Fourier-Stieltjes, exigen, para asegurar la unicidad, que un cierto problema de momentos esté determinado. Y también pueden demostrarse fácilmente, con el método de Carathéodory, las versiones del teorema límite da-

(7) Fréchet-Shoat.—A generalized statement of the second Limit-theorem of the theory of Probability. - Transact. Amer. Math. Soc., 1931

das por Jacob ⁽⁸⁾, según demostraremos con todo detalle en otro lugar.

De todo lo anterior se deduce que la idea de Carathéodory permite demostrar de manera simple, uniforme y general las diferentes versiones del segundo teorema límite, y que aunque no haya expresado su idea en términos de Cálculo de Probabilidades, es justo asociar su nombre al de los grandes promotores de esta disciplina.

(8) Jacob, Comptes Rendus, 188, (1929), p.p. 541-543, y 754-757.

CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES PARA QUE UNA FUNCION SEA UNA INTEGRAL DE LAPLACE.

por ALBERTO GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ

I. INTRODUCCION

Widder ⁽¹⁾ y Doetsch ⁽²⁾, han establecido condiciones necesarias y suficientes para que una función $F(x)$ sea representable por una integral de Laplace:

$$F(z) = \int e^{-zt} g(t) dt, \quad [1]$$

o por una integral de Laplace-Stieltjes:

$$F(z) = \int e^{-zt} d^{(3)}g(t) \quad [2]$$

con $g(t)$ de variación acotada en $[0, \infty]$.

El original método de Widder se basa en la introducción del operador

$$L_{k,t}(F(x)) = \frac{(-1)^k}{k!} F^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right) \left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} \quad [k = 1, 2, \dots]$$

el cual, si $F(x)$ tiene la forma (1), es una *integral singular*:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L_{k,t}[F(x)] = g(t).$$

El método de Doetsch se basa en la consideración de las propiedades de la integral de Fourier, (las integrales 1 y 2 se convierten en integrales de Fourier, para $z = ix$), y es aplicable sólo a integrales de la forma 1.

En este trabajo abordamos el problema por un nuevo método, cuya idea fundamental exponemos a continuación. Si en la

(1) Widder, 1. (Ver la bibliografía al final).

(2) Doetsch, 1.

(3) Las integrales que no llevan indicación de extremos deben suponerse extendidas entre 0 y ∞ ; y las sumatorias, de 0 a ∞ .

integral 2 ponemos $e^{-t} = s$, $g(t) = -f(e^{-t})$, él toma la forma

$$F(z) = \int_0^1 s^z df(s).$$

Así transformada la integral 1, se advierte en seguida que el problema de la representabilidad de funciones por integrales de Laplace es el correlativo continuo, del *problema de los momentos para intervalo finito*, resuelto por Hausdorff ⁽⁴⁾, que consiste, como es sabido, en establecer las condiciones necesarias y suficientes a que debe satisfacer una sucesión de números $[c_n]$, para que se verifique

$$c_n = \int_0^1 s^n df(s), \quad [n = 0, 1, 2, \dots].$$

Ahora bien, los teoremas establecidos por Hausdorff, en un apéndice a su citada memoria ⁽⁵⁾, (apéndice que por ser tal y por estar las demostraciones muy condensadas no ha recibido quizás la atención que merecía), permiten llegar sin mayor esfuerzo a la siguiente conclusión: el problema de los momentos es equivalente al siguiente:

Dada una serie de polinomios de Legendre

$$\sum c_n P_n(x),$$

¿cuál es la condición necesaria y suficiente para que se verifique:

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(x) f(x) dx?$$

Es decir, que el problema de los momentos de Hausdorff, es esencialmente equivalente al problema de las clases para la serie de polinomios de Legendre.

Esta equivalencia, y el hecho, anteriormente apuntado, de la correlación entre el problema de los momentos y la representabilidad de una función por medio de integrales de Laplace, nos llevó a pensar que *este último problema debía ser equivalente al problema de las clases para las series de funciones de Laguerre*, que constituyen un sistema ortonormal en $[0, \infty]$. Efectivamente, así sucede, como luego demostraremos. Comenzaremos por re-

⁽⁴⁾ Hausdorff, 1.

⁽⁵⁾ Loc. cit. 4, *Zusätze bei der Korrektur*, p.p. 246-248.

solver el problema de las clases para las series de funciones de Laguerre, apoyándonos para ello en los teoremas de la teoría general de las series ortogonales.

Todos los teoremas de este trabajo han sido enunciados en una nota publicada en los *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* de París (ver en la bibliografía: González Domínguez, 1).

II. EL PROBLEMA DE LAS CLASES

1) Sea la serie de funciones de Laguerre

$$\sum a_n \varphi_n(t) \quad [3]$$

donde

$$\varphi_n(t) = e^{-\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-t)^k}{k!}.$$

es la función de Laguerre de orden n , y

$$|a_n| < C \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Introduzcamos la función

$$g(r, t) = \sum a_n \varphi_n(t) r^n \quad (0 \leq r < 1).$$

Se verifican entonces los teoremas siguientes, que resuelven el problema de las clases para las categorías de funciones consideradas.

Teorema I.—Para que los coeficientes de la serie [3] tengan la forma

$$a_n = \int \varphi_n(t) f(t) dt \quad (n = 0, 1, \dots), \quad [4]$$

con $f(t)$ sumable en $[0, \infty]$, es necesario, y suficiente que se verifique, para $r \rightarrow 1$, $r' \rightarrow 1$:

$$\lim \int |g(r, t) - g(r', t)| dt = 0. \quad [5]$$

Teorema II.—Para que los coeficientes de la serie [3], tengan la forma [4], con $f(t)$ de enésima potencia sumable ($n > 1$) en $(0, \infty)$, es necesario y suficiente que se verifique

$$\int |g(r, t)|^n dt < M \quad (0 \leq r < 1) \quad [6]$$

Teorema III.—Para que los coeficientes de la serie [3] tengan la forma

$$a_n = \int \varphi_n(t) df(t) \quad [7]$$

con $f(t)$ de variación acotada en $(0, \infty)$, es necesario y suficiente que se verifique

$$\int |g(r, t)| dt < M \quad (0 \leq r < 1). \quad [8]$$

Teorema IV.—Para que los coeficientes de la serie [3] tengan la forma [7], con $f(t)$ de variación acotada y continua, es necesario y suficiente que se verifique la condición [8], y además la siguiente:

$$\lim_{r \rightarrow 1} 2(\pi t)^{1/2} (1-r)^{1/2} g(r, t) = 0.$$

Teorema V.—Para que los coeficientes de la serie [3] tengan la forma [7], con $f(t)$ monótona no decreciente en $(0, \infty)$, es necesario y suficiente que se verifique la condición [8] y además la siguiente:

$$g(r, t) \geq 0 \quad (0 \leq r < 1).$$

2) Los teoremas I—V se demuestran utilizando idéntico procedimiento al que hemos seguido en otro lugar ⁽⁶⁾ para demostrar análogos resultados para las series de funciones de Hermite. Como allí hemos dado las respectivas demostraciones con todo detalle, no volveremos a repetirlas ahora, y nos limitaremos a consignar los resultados fundamentales correlativos a los utilizados en nuestra memoria citada.

Al teorema A y siguientes de nuestra memoria (6), corresponden, en las demostraciones de los teoremas I—V, los teoremas siguientes.

Teorema VI ⁽⁷⁾.—Se verifica:

$$\begin{aligned} & \Sigma \varphi_n(x) \varphi_n(t) = \\ & = (1-r)^{-1} I_0 \left(2(xtr)^{1/2} (1-r)^{-1} \right) \cdot \exp \left(-\frac{(x+t)}{2} (1+r)/(1-r) \right) \quad [9] \end{aligned}$$

donde $I_0(s)$ es la función de Bessel de orden 0, de variable imaginaria, igual a $J_0(is)$.

⁽⁶⁾ González Domínguez, 1.

⁽⁷⁾ Este teorema es de Watson, 1.

Teorema VII.—La función positiva

$$k(t, x, r) = \sum \varphi_n(x) \varphi_n(t) r^n$$

goza de las siguientes propiedades, que hacen de ella un núcleo positivo de una integral singular.

$$\int k(t, x, r) dt = \frac{2}{1+r} \exp \left\{ -\frac{x}{2} \left(\frac{1-r}{1+r} \right) \right\}, \quad [10]$$

y análogamente

$$\int k(t, x, r) dx = \frac{2}{1+r} \exp \left\{ -\frac{t}{2} \left(\frac{1+r}{1-r} \right) \right\} \quad [11]$$

Para $r \rightarrow 1$ se verifica

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{x-\delta} k(t, x, r) dt = 0, \quad [12]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{\infty} k(t, x, r) dt = 0 \quad [13]$$

La propiedad [10] (y su análoga la [11]) se demuestra fácilmente recurriendo a la siguiente fórmula de Gegenbauer ⁽¹⁰⁾:

$$\int J_0(ay) \exp(-p^2 y^2) y dy = (2p^2)^{-1} \exp(-a^2/4 p)^2 \quad [14]$$

Si hacemos en esta fórmula el cambio de variable $y = \sqrt{t}$, y elegimos los parámetros p y a de la siguiente manera:

$$p = \sqrt{\frac{1+r}{2(1-r)}}, \quad a = \frac{2i\sqrt{xr}}{1-r}, \quad [15]$$

se obtiene la fórmula [10], y por permutación de x con t , la [11]. Estas fórmulas son probablemente nuevas, y juegan papel fundamental en la demostración de nuestros teoremas.

Las propiedades [12] y [13] se demuestran fácilmente, utilizando la acotación

$$I_0(2\sqrt{t}) < t^{-1/4} \exp(2\sqrt{t})$$

de manera análoga a como lo hace Wigert ⁽¹¹⁾, para un fin semejante. La demostración es casi idéntica a la de Wigert, y por lo tanto la omitimos.

⁽¹⁰⁾ Ver Watson, 2, pág. 395.

⁽¹¹⁾ Wigert, 1., pág. 114.

Teorema VIII.—Sea $f(t)$ una función sumable en $(0, \infty)$. Se verifica, para $r \rightarrow 1$,

$$\lim \int k(r, x, t) f(t) dt = f(x) \quad [16]$$

en todo punto en el que se verifique, para $h \rightarrow 0$,

$$\lim \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) - f(x)| dt = 0.$$

Este teorema es consecuencia del hecho que el núcleo $k(x, t, r)$ satisface a todas las condiciones de un teorema general de Titchmarsh ⁽¹²⁾ sobre integrales singulares.

Teorema VIII.—Los coeficientes de una serie de Laguerre, o de Laguerre-Stieltjes, están acotados, para $n \rightarrow \infty$.

Este teorema trivial, es consecuencia inmediata de la conocida acotación de Szegö ⁽¹³⁾:

$$|\varphi_n(t)| \leq 1 \quad (t \geq 0).$$

III. REPRESENTABILIDAD DE FUNCIONES POR INTEGRALES DE LAPLACE.

Una vez resuelto el problema de las clases para series de Laguerre, el problema de la representabilidad de funciones, por integrales de Laplace, queda también resuelto en pocas líneas, pues es en el primero dónde reside la dificultad. Veamos cómo.

Sea $F(z)$ ($z = x + iy$), una función analítica para $x > 0$, real para z real. Calculemos sus derivadas $F^{(n)}(x)$, en el punto $x = \frac{1}{2}$, y formemos las expresiones

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{F^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right)}{k!}, \quad [17]$$

$$g(r, t) = \sum a_n \varphi_n(t) r^n \quad [18]$$

Teorema IX.—La condición necesaria y suficiente para que $F(z)$ sea una integral de Laplace-Stieltjes de una función de variación acotada

$$F(z) = \int e^{-zt} dg(t), \quad [19]$$

⁽¹²⁾ Titchmarsh, 1, pág. 28.

⁽¹³⁾ Szegö, 1.

es que se verifique

$$\int |g(r, t)| dt < M \quad (0 \leq r < 1). \quad [20]$$

La condición es necesaria. En efecto, si se cumple la [19], se verifica, evidentemente,

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{F^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right)}{k!} = \int \varphi_n(t) dg(t). \quad [21]$$

Es decir, que los a_n son los coeficientes de Laguerre-Stieltjes de una función de variación acotada. Por lo tanto, en virtud del Teorema III, se verificará la fórmula [20].

Las condiciones son suficientes. En efecto, supongamos que $F(z)$ cumpla las condiciones enunciadas, y que se verifique la [20]. En virtud nuevamente del teorema III, existirá una función $g(t)$, de variación acotada en $[0, \infty]$, tal que

$$a_n = \int \varphi_n(t) dg(t). \quad [22]$$

Pero teniendo en cuenta la expresión [17] de a_n , se advierte inmediatamente que la [22] implica

$$F^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^n \int t^n e^{-\frac{t}{2}} dg(t) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad [23]$$

Ahora bien, la función

$$G(z) = \int e^{-zt} dg(t)$$

es analítica para $x > 0$, y se verifica

$$G^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) = F^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad [24]$$

Luego, en virtud del teorema de identidad de las funciones analíticas, debe verificarse

$$F(z) \equiv G(z),$$

con lo que nuestro teorema queda demostrado.

De idéntica manera se demuestran los teoremas siguientes.

Teorema X.—Condición necesaria y suficiente para que $F(z)$

sea la integral de Laplace de una función sumable en $(0, \infty)$, es que se verifique, para $r \rightarrow 1$, $r' \rightarrow 1$,

$$\lim \int |g(r, t) - g(r', t)| dt = 0.$$

Teorema XI.—Condición necesaria y suficiente para que $F(z)$ sea la integral de Laplace de una función de n -ésima potencia sumable, es que se verifique

$$\int |g(r, t)|^n dt < M \quad (0 \leq r < 1). \quad [25]$$

Teorema XII.—Condición necesaria y suficiente para que $F(z)$ sea la integral de Laplace-Stieltjes de una función de variación acotada y continua en $[0, \infty]$, es que se cumpla [25], y además la siguiente:

$$\lim_{r \rightarrow 1} 2(n+1)^{1/2} (1-r)^{1/2} g(r, t) = 0.$$

Teorema XIII.—Condición necesaria y suficiente para que $F(z)$ sea la integral de Laplace-Stieltjes de una función no decreciente y acotada, es que se cumpla la condición [25], y, además, la siguiente:

$$g(r, t) \geq 0 \quad (0 \leq r < 1).$$

BIBLIOGRAFIA

Doetsch G.—Bedingungen für die Darstellbarkeit einer Funktion als Laplace Integral. — Math. Zeitschrift, 1937.

González Domínguez, A.—1) Sur les intégrales de Laplace, Comptes Rendus, vol. 205, p. 1035, 1937. - 2) Sobre las series de funciones de Hermite, Rev. de la Unión Matemática Argentina, vol. II, 1938.

Hausdorff, F.—Momentprobleme für ein endliches Intervall. Math. Zeitschrift, 1923.

Szegő, G.—Ein Beitrag zur Theorie der Polynome von Laguerre und Jacobi. Math. Zeitschrift, vol. I, (1918), pág. 341.

Titchmarsh, E. C.—Introduction to the Theory of Fourier Integrals. Oxford, 1937.

Watson, G., 1.—Notes on Generating Functions of Polynomials I. - Laguerre Polynomials. - Journal London Mathematical Society, pp. 189-192, 1933.

Watson, G., 2.—Theory of Bessel Functions, Cambridge, 1922.

Wigert, S.—Contribution a la théorie des polynomes d'Abel-Laguerre.

Arkiv fuer Mathematik, Astronomi och Fysik, vol. 15, 1921.

NIKOLA OBRECHKOFF

**Sur la sommation absolue
par la transformation d'Euler
des séries divergentes**

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Publicación Nº 5

B U E N O S A I R E S

1939

SUR LA SOMMATION ABSOLUE PAR LA TRANSFORMATION D'EULER DES SÉRIES DIVERGENTES

NIKOLA OBRECHKOFF (Sofia)

D'après K. Knopp ⁽¹⁾ la série

$$[1] \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

est sommable par la transformation d'Euler d'ordre k , bref sommable E_k , si la série

$$[2] \quad \sum_{n=0}^{\infty} a'_n, \quad a'_n = \frac{1}{(q+1)^{n+1}} \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} q^{n-v} a_v, \quad q=2^k-1, k>0,$$

est convergente. La série [1] est absolument sommable d'ordre k , bref sommable $|E_k|$, si la série [2] est absolument convergente.

Dans cette note nous étudions la sommation absolue $|E_k|$ et complétons ainsi les résultats de K. Knopp.

I. Si la série [1] est absolument convergente, elle sera sommable $|E_k|$ pour chaque $k > 0$.

En effet on a

$$\begin{aligned} |a'_n| &\leq \frac{1}{(q+1)^{n+1}} \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} q^{n-v} |a_v|, \\ \sum_{n=0}^N |a'_n| &\leq \sum_{n=0}^N \frac{1}{(q+1)^{n+1}} \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} q^{n-v} |a_v| = \\ &= \sum_{v=0}^N |a_v| \sum_{n=v}^N \frac{1}{(q+1)^{n+1}} \binom{n}{v} q^{n-v} \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \sum_{n=v}^N \frac{1}{(q+1)^{n+1}} \binom{n}{v} q^{n-v} &< \sum_{n=v}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^{n+1}} \binom{n}{v} q^{n-v} = \\ &= \frac{1}{(q+1)^{v+1}} \frac{1}{\left[1 - \frac{1}{(q+1)}\right]^{v+1}} = 1 \end{aligned}$$

⁽¹⁾ K. Knopp-Über das Eulersche Summierungsverfahren, Mathematische Zeitschrift, t. 15, 1922, p. 227-263; t. 18, 1923, p. 125-156,

Donc on aura

$$\sum_{n=0}^N |a'_n| < \sum_{n=0}^N |a_n|$$

et le théorème est démontré.

II. Si la série [1] est sommable $|E_k|$ elle est aussi sommable $|E_{k_1}|$ pour chaque $k_1 > k$.

Ce théorème découle immédiatement du théorème I parce que la transformée $E_{k+\delta}$ ($\delta > 0$) de la série [1] est égale à la transformée E_δ de la série transformée E_k de [1].

III. Si la série

$$[3] \quad a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

est sommable $|E_k|$, la série

$$[4] \quad 0 + a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

sera aussi sommable $|E_k|$ et réciproquement.

Désignons par $\Sigma a'_n$ la série transformée E_k de la série [3] et par $\Sigma a''_n$ la transformée de la série [4]. Alors on a ($q=2^k-1$)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{z}{q+1-qz} \right)^{n+1} &= \sum_{n=0}^{\infty} a'_n z^{n+1}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \left(\frac{z}{q+1-qz} \right)^{n+1} &= \sum_{n=0}^{\infty} a''_n z^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où l'on obtient facilement

$$[5] \quad \frac{1}{q+1-qz} \sum a'_n z^{n+1} = \sum a''_n z^n.$$

De cette relation il suit la formule

$$[6] \quad a''_n = \frac{1}{q+1} \sum_{\nu=0}^{n-1} a'_\nu \left(\frac{q}{q+1} \right)^{n-1-\nu}$$

De [6] nous aurons

$$\sum_{n=0}^N |a''_n| \leq \frac{1}{q+1} \sum_{\nu=0}^N \sum_{n=0}^{n-1} |a'_\nu| \left(\frac{q}{q+1} \right)^{n-1-\nu} =$$

$$= \frac{1}{q+1} \sum_{\nu=0}^{N-1} |a'_\nu| \sum_{n=\nu+1}^N \left(\frac{q}{q+1} \right)^{n-1-\nu} <$$

$$< \frac{1}{q+1} \sum_{\nu=0}^{N-1} |a'_\nu| \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{q}{q+1} \right)^\mu = \sum_{\nu=0}^{N-1} |a'_\nu|$$

et la première partie du théorème est démontrée. De [5] on obtient

$$a'_n = (q+1) a''_{n+1} - q a''_n,$$

d'où découle immédiatement la partie inverse.

IV. Supposons que les séries $\sum_0^\infty a_n$, $\sum_0^\infty b_n$, soient sommables

$|E_k|$. Alors la série produit de Cauchy $\sum_0^\infty c_n$,

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0,$$

est aussi sommable $|E_k|$.

En désignant par $\Sigma a'_n$, $\Sigma b'_n$, $\Sigma c'_n$ les séries transformées correspondantes on a ⁽²⁾ la formule

$$c'_n = (q+1)(a'_0 b'_n + \dots + a'_n b'_0) - q(a'_0 b'_{n-1} + \dots + a'_{n-1} b'_0),$$

d'où il suit tout de suite que la série $\Sigma |c'_n|$ est convergente puisque les séries $\Sigma |a'_n|$, $\Sigma |b'_n|$ sont convergentes.

V. Si la série [1] est sommable $|E_k|$ elle est aussi sommable $|B|$.

On sait ⁽³⁾ qu'une série $\sum_0^\infty a_n$ est absolument sommable par la méthode de M. Borel, bref sommable $|B|$, si les intégrales

$$[7] \quad \int_0^\infty e^{-x} |u^{(\lambda)}(x)| dx, \quad u(x) = \sum_0^\infty \frac{a_n x^n}{n!}$$

sont convergentes quel que soit l'indice de dérivation λ . Posons

$$S_n^{(k)} = \frac{1}{(q+1)^n} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} q^{n-\nu} s_\nu, \quad s_\nu = a_0 + a_1 + \dots + a_\nu,$$

(2) Voir K. Knopp, II, p. 131.

(3) Emile Borel.—Leçons sur les séries divergentes, II—ème édition, Paris, 1928, p. 128.

on a

$$e^{-(q+1)x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n^{(k)}}{n!} [(q+1)x]^n = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n x^n}{n!} = h(x),$$

d'où l'on obtient par la transformation $(q+1)x = y$, la formule

$$e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n^{(k)}}{n!} x^n = e^{-\frac{x}{q+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n!} \frac{x^n}{(q+1)^n} = g(x).$$

En dérivant on obtient

$$e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^{(k)}}{n!} x^n = g'(x), \quad a_n^{(k)} = S_n^{(k)} - S_{n-1}^{(k)},$$

$$|g'(x)| \leq e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n^{(k)}|}{n!} x^n.$$

Donc nous aurons

$$\begin{aligned} \int_0^A |g'(x)| dx &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n^{(k)}|}{n!} \int_0^A e^{-x} x^n dx < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n^{(k)}|}{n!} \int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(k)}|, \end{aligned}$$

et parce que

$$\int_0^{\infty} |g'(x)| dx = \frac{1}{q+1} \int_0^{\infty} |h'(x)| dx$$

on conclut que l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1} x^n}{n!} \right| dx$$

est convergente. Mais d'après le théorème III on peut augmenter ou diminuer le rang des termes de la série [1] par un nombre arbitraire. Donc du précédent il suit que les intégrales [7] sont convergentes et le théorème est démontré,

RICARDO SAN JUAN

Derivación e Integración
de
Series Asintóticas

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Publicación Nº 6

BUENOS AIRES

1939

RICARDO SAN JUAN

Derivación e Integración
de
Series Asintóticas

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Publicación Nº 6

BUENOS AIRES

1939

DERIVACION E INTEGRACION DE SERIES ASINTOTICAS

por R. SAN JUAN (Madrid)

I.—Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ el desarrollo asintótico de una función $f(z)$ en un recinto R , siendo z_0 un punto del contorno. Escribiremos esto así:

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Como es sabido, la definición de desarrollo asintótico resulta equivalente a que los productos $|z - z_0|^{-m} |f(z) - \sum_{n=0}^{m-1} a_n (z - z_0)^n|$ se conserven acotados para cada m en un entorno de z_0 y dentro de R , es decir, que sea

$$\left| \frac{f(z) - \sum_{n=0}^{m-1} a_n (z - z_0)^n}{(z - z_0)^m} \right| < M_m$$

en la interferencia de R con un entorno de z_0 .

En particular, para $m = 1$, se tiene:

$$|f(z) - a_0| < M_1 |z - z_0|$$

de donde, para $z \rightarrow z_0$ sobre R , resulta:

$$\lim f(z) = f(z_0) = a_0,$$

si $f(z)$ es continua en z_0 sobre R . Análogamente, de

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - a_1 \right| < M_2 |z - z_0|$$

resulta $f'(z_0) = a_1$ si definimos esta derivada en z_0 para $z \rightarrow z_0$ sobre R .

Pero la derivada segunda ya no resulta, por paso al límite, de la función, sino de la derivada primera, de suerte que para obtener la expresión general de los coeficientes mediante las derivadas en z_0 habrá que estudiar si $f'(z)$ y, por tanto, las derivadas sucesivas $f^n(z)$ tienen como desarrollos asintóticos los obtenidos derivando término a término.

Supongamos, para esto, que $f(z)$ es holomorfa en R y expresemos su valor en un punto z de R mediante la integral de Cauchy sobre una circunferencia $c(z)$ de centro z y radio $R(z)$ igual a la semidistancia de z_0 al contorno C de R ; expresando

análogamente el polinomio $\sum_{n=0}^{m-1} n a_n (z - z_0)^{n-1}$, se tiene:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{f'(z) - \sum_{n=0}^{m-1} n a_n (z - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^{m-1}} \right| &= \frac{1}{2\pi |z - z_0|^{m-1}} \left| \int_{c(z)} \frac{f(t) - \sum_{n=0}^{m-1} a_n (z - z_0)^n}{(t - z)^2} dt \right| \leq \\
 &\leq \frac{1}{2\pi |z - z_0|^{m-1}} \int_{c(z)} \frac{M_m |t - z_0|^m}{|t - z|^2} |dt| \leq \\
 &\leq \frac{1}{2\pi |z - z_0|^{m-1}} \frac{M_m \left(|z - z_0| + \frac{d(z)}{2} \right)^m}{\left(\frac{d(z)}{2} \right)^2} 2\pi \frac{d(z)}{2} = \\
 &= 2 M_m \left(1 + \frac{d(z)}{2 |z - z_0|} \right)^m \frac{|z - z_0|}{d(z)} < 2^{m+1} M_m \frac{|z - z_0|}{d(z)}
 \end{aligned}$$

pues $d(z) \leq |z - z_0|$; y si además hay un subconjunto R' de R en el que se conserva acotado este cociente:

$$\frac{|z - z_0|}{d(z)} < k \quad \text{o brevemente: } |z - z_0| = O[d(z)] \quad [1]$$

la cota anterior es $< k 2^{m+1} M_m$, y en este subconjunto R' vale, por tanto, el desarrollo:

$$f'(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} n a_{n-1} (z - z_0)^{n-1}.$$

El subconjunto R' existe seguramente si el contorno C de R es una curva en el entorno de z_0 , y éste un punto ordinario de ella; o un punto anguloso con tangentes distintas; e incluso un punto de retroceso con tangente única si en él es *cóncavo* el recinto, esto es, si la prolongación del rayo tangente por z_0 tiene un segmento $z_0 A$ dentro de R (*). En estos casos sencillos R contiene un ángulo, o más exactamente, un sector circular, de vértice z_0 , y los puntos de éste cumplen la condición [1]. Recordemos, en efecto, qué por la definición de rayo tangente, dado un contorno angular de la tangente única, o sendos entornos de las semitan-

(*) Si este segmento no pertenece a R , el recinto se dice *convexo* en z_0 . Nótese que el segmento de la semi-tangente $z_0 B$ opuesto al $z_0 A$ no sirve para caracterizar la concavidad ni la convexidad, pues puede pertenecer indistintamente a R o al complementario, quedando en distinto o en el mismo conjunto que el $z_0 A$ según que la tangente atravesase o no la curva. Como también puede caracterizarse la concavidad y la convexidad incluso para puntos no cuspidales, es utilizando todo el contorno mediante el teorema I d'), según que el incremento del argumento sea menor o mayor que π ; y no es difícil comprobar que estas condiciones coinciden con las anteriores cuando el incremento es cero ó $\pm 2\pi$.

gentes, hay un entorno circular del punto z_0 tal que los puntos de C interiores a este dan cuerdas contenidas en aquellos; y quedan, por lo tanto, uno o dos sectores circulares en el contorno de z_0 que, conteniendo puntos de C (*), pertenecen en bloque a R o al complementario. Excluido el caso trivial del punto cuspidal o de retroceso, en que el sector pertenece necesariamente a R por la condición de concavidad impuesta, un sector es interior a R y el otro es exterior. Para demostrarlo, elijamos entre las intersecciones de la curva con el contorno de dicho entorno, las P y A contiguas a z_0 por uno y otro lado sobre la curva, y el arco PA que determinan divide al entorno en dos partes conexas, que necesariamente pertenecen una a R y otra al complementario; pero existiendo puntos de ambas partes en los dos entornos de las semitangentes, las curvas de conexión que dentro del entorno circular unen entre sí estos puntos de R (y del complementario) tienen que pasar necesariamente por un sector y la otra por el opuesto.

Para ver finalmente que los puntos del sector interior satisfacen, en efecto, la condición [1], basta observar que si ampliamos éste por ambos lados en una amplitud ϵ bastante pequeña para que todavía no alcance a las semitangentes, y elegimos un entorno de z_0 que no contenga puntos de la curva dentro del ángulo ampliado, en el sector común a este entorno y al ángulo primitivo se verifica:

$$\left| \frac{z - z_0}{d(z)} \right| < \frac{1}{\operatorname{sen} \epsilon}.$$

En estos casos sencillos $f(z)$ admite derivadas angulares en z_0 que valen:

$$f^n(z_0) = a_n \cdot n!;$$

y en el caso general estas igualdades subsisten si definimos las derivadas para $z \rightarrow z_0$ sobre R , como anteriormente.

Resumiendo las conclusiones obtenidas, podemos enunciar:

a) *Dado el desarrollo asintótico de una función*

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

(*) Claro es que la definición de tangentes se refiere exclusivamente a los puntos de C donde C es curva; pero por hipótesis C es curva en un entorno de z_0 y esto significa que hay un entorno plano de z_0 donde todos los puntos de C forman curvas. Si no se refiere esto al entorno plano, sino al lineal sobre la curva misma, subsiste lo anterior, eligiendo el entorno plano menor que la distancia de z_0 al resto de C .

en un recinto R y para un punto z_0 del contorno, si $f(z)$ es holomorfa en R , sus derivadas sucesivas admiten los desarrollos obtenidos derivando término a término:

$$f^{(m)}(z) \sim \sum_{n=m}^{\infty} n^{(m)} (z - z_0)^{n-m}$$

en todo subconjunto R' de R caracterizado por la condición

$$|z - z_0| = O[d(z)] \quad [1]$$

donde $d(z)$ designa la distancia de z al contorno C de R .

b) Y si definimos las derivadas para $z \rightarrow z_0$ sobre R' , se verifica

$$f^{(m)}(z_0) = a_m \cdot m! \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

incluso para $m = 0$ si $f(z)$ es continua en z_0 sobre R .

Esto permite escribir el desarrollo asintótico como serie de Taylor así:

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

y la función queda determinada por este desarrollo cuando es la aproximación asintótica óptima y se cumple la condición de Carleman (*).

Hemos visto además que

c) Las cotas del desarrollo asintótico de la derivada $f'(z)$ en R' son las mismas salvo un factor exponencial que las M_n de la función $f(z)$ en R , y por tanto, si esta satisface en R la condición de Watson-Nevanlinna, las de Denjoy, o la de Carleman generalizada por Ostrowski, esto es, si es

$$M_n < k^n \cdot n! ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{M_n}} = \infty ; \quad \int_1^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{M_n^2} \frac{dx}{x^2} = \infty$$

respectivamente (**), la misma condición verifican las derivadas en R' .

(*) R. SAN JUAN.—Sumación de series divergentes y aproximación asintótica óptima (en prensa. Memoria premiada por la Academia de Ciencias de Madrid en el concurso de tema prefijado de 1935).

R. SAN JUAN.—Sur le problème de M. Watson de la Théorie des séries asymptotiques et solution à un problème de M. Carleman de la Théorie des fonctions quasianalytiques. (Congrès International de Mathématiciens. Oslo, 1936).

(**) N. WATSON.—A theory of asymptotic series (Trans. of the Royal Society of London. Serie A, vol. 221, p. 279-313).

F. NEVANLINNA.—Zur Theorie des asymptotischen Potenzreihen. (Akademische Abhandlung. Helsingfors, 1916).

T. CARLEMANN.—Les fonctions quasianalytiques. (Gauthier-Villars, París, 1926, pág. 21 y 7).

A. OSTROWSKI.—Über quasianalytische Funktionen und Bestimmtheit asymptotischer Entwicklungen. (Acta Mathematica B. 53 S 181-266).

d) Este subconjunto R' existe seguramente y es un sector circular de vértice z_0 , si el contorno C es una curva de Jordan en el entorno de z_0 , y éste un punto ordinario de ella; o un punto anguloso con tangentes distintas e incluso un punto de retroceso con tangente única, si en este es cóncavo el recinto, esto es, si la prolongación de la semitangente por z_0 tiene un segmento $z_0 A$ dentro del mismo.

d') Cuando todo el contorno C es una curva cerrada de Jordan y en z_0 tienen rayos tangentes los dos arcos contiguos, la condición necesaria y suficiente para que el recinto interior R contenga un sector circular de vértice z_0 (donde se cumple la condición [1]) es que el argumento del vector $z_0 z$, que proyecta desde z_0 un punto variable z de la curva C , experimente un incremento distinto de cero, cuando z recorre la curva a partir de z_0 .

Hemos visto que elegidos sendos entornos angulares, no ram-pantes de cada rayo tangente, o un solo entorno si estos coinciden, existe un entorno plano de z_0 que, no conteniendo puntos de C fuera de estos ángulos, tiene un par de sectores o uno solo que pertenecen en bloque a R o al complementario; y basta, por tanto, considerar uno solo P de sus puntos para decidir la situación de todo el sector. Pero es sabido que si P es interior a R , el vector Pz experimenta en su argumento un incremento de 2π al recorrer z la curva, y este argumento no resulta incrementado si P es exterior. Ahora bien, cuando el argumento de $z_0 z$ experimenta un incremento $\alpha > 0$, los argumentos de $z_0 z_1$ y $z_0 z_2$ difieren entre sí en más de $\alpha - \varepsilon$, si elegimos z_1 y z_2 sobre las curvas suficientemente próximas a z_0 ; y análogamente, los argumentos de $P z_1$ y $P z_2$, difieren también en menos de ε de los valores inicial y final del argumento de $P z$ si tomamos z_1 y z_2 bastante cercanas a z_0 . Pero fijadas así z_1 y z_2 con ambas condiciones, los argumentos de $z_0 z_1$ y $P z_1$ así como los de $z_0 z_2$ y $P z_2$, cuyas diferencias vienen representadas por los ángulos en z_1 y z_2 , de los triángulos $P z_0 z_1$ y $P z_0 z_2$ respectivamente, también diferirán en menos de ε si tomamos P dentro de los entornos angulares de las semirectas $z_0 z_1$ y $z_0 z_2$ con semiamplitud ε ; y comparando los tres resultados vemos que los argumentos inicial y final de $P z$ se diferencian entre si en más de $2\alpha - 3\varepsilon > 0$; luego P no puede ser exterior y no perteneciendo a la curva, es interior. En cambio, si el argumento de $z_0 z$ experimenta incremento nulo, resulta con idéntico razonamiento que el de $P z$ experimenta incremento $< 2\varepsilon$, luego también es nulo, y es, por tanto, P punto exterior.

II.—Para estudiar la integración del desarrollo asintótico $\sum a_n (z - z_0)^n$ entre z_0 y un punto z del recinto, construyamos primero el camino, eligiendo en R una sucesión de puntos $z_n \rightarrow z_0$, y uniendo cada dos consecutivos por su quebrada de conexión dentro de R , obtenemos una sucesión de quebradas que pueden no constituir curva (*), esto es, conjunto de puntos homeomorfo con un segmento cerrado, pero que aun entonces permiten definir la integral de $f(z)$ entre z_0 y z_1 por paso al límite de la integral entre z y z_i para $z_i \rightarrow z_0$.

Determinada así la integral, $\int_{z_0}^z f(z) dz$ veamos cuando

admite como desarrollo asintótico el obtenido integrando término a término, es decir, cuando es:

$$\int_{z_0}^z f(z) dz \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$$

En efecto:

$$\left| \frac{\int_{z_0}^z f(z) dz - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}}{(z - z_0)^{m+1}} \right| \leq \frac{\int_{z_0}^z |f(z) - \sum_{n=0}^{m-1} a_n (z - z_0)^n| |dz|}{|z - z_0|^{m+1}} \leq M_m \frac{\int_{z_0}^z |z - z_0|^m |dz|}{|z - z_0|^{m+1}}$$

y basta que para cada m este cociente se conserve acotado en el entorno de z_0 . Prescindiendo además de las restricciones inútiles sobre la función $f(z)$ y sobre el campo R , que conservábamos de los teoremas precedentes, resulta:

(*) Esto acontece solamente cuando z_0 es accesible, esto es, puede unirse con los puntos de R mediante arcos de Jordan contenidos en el recinto. Pero esta restricción, innecesaria como hemos visto, es además insuficiente, pues habría que suponer tales curvas rectificables o al menos que permitan definir la integral.

Un ejemplo de punto accesible solo mediante arcos no rectificables, incluso siendo el contorno C una curva de Jordan, puede obtenerse como sigue: Elegido un ángulo arbitrario AOB , por ejemplo de 10° , tracemos sus arcos centrales $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3, \dots$ de radios $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ y unámoslos entre sí con los segmentos intermedios tomados alternativamente de uno y otro lado, para formar así un trazo continuo $A_1 B_1 B_2 A_2 A_3 B_3 \dots$, que es una curva de Jordan, pues cada trozo arco-segmento $A_1 B_1 B_2, B_2 A_2 A_3, \dots$ se representa sobre el segmento del otro lado $A_1 A_2, B_2 B_3, \dots$ proyectándole. De esta curva se deduce también otra con longitud también infinita, sustituyendo cada par de arcos $A_1 B_1$ y $A_2 B_2$;

a) Dado el desarrollo asintótico de una función cualquiera

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

en un conjunto R (no necesariamente recinto), si éste contiene caminos de integración que permiten definir la integral de $f(z)$ desde z_0 a los puntos de z de R (como acontece cuando R es un recinto y z_0 un punto de contorno), esta integral admite como desarrollo asintótico el obtenido integrando término a término:

$$\int_{z_0}^z f(z) dz \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z-z_0)^{n+1} \quad (**)$$

en todo subconjunto R_1 de R donde se conservan acotados para cada n los cocientes

$$\frac{1}{|z-z_0|^n} \int_{z_0}^z |z-z_0|^{n-1} |dz| < k_n.$$

b) Esto acontece seguramente en un sector circular de vértice z , pues siendo rectilíneo el camino, es decir:

$$z - z_0 = x + i y \quad y = \alpha x$$

se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|z-z_0|^n} \int_{z_0}^z |z-z_0|^{n-1} |dz| &= \frac{1}{(\sqrt{1+\alpha^2}x)^n} \int_0^x (\sqrt{1+\alpha^2}x)^{n-1} 2\sqrt{1+\alpha^2} dx = \\ &= \frac{2}{n}; \end{aligned}$$

$A_3 B_3$ y $A_4 B_4, \dots$ unidos por segmentos $B_1 B_2, B_3 B_4, \dots$ de un mismo lado, por otros intermedios $A'_1 B'_1$ y $A'_2 B'_2, A'_3 B'_3$ y $A'_4 B'_4, \dots$ de modo que se conserve la suma de longitudes, lo cual puede lograrse, por ejemplo, con radios $1 - \varepsilon_1$ y $\frac{1}{2} + \varepsilon_1, \frac{1}{3} - \varepsilon_3$ y $\frac{1}{4} + \varepsilon_3, \dots$ siendo $\varepsilon_{2k+1} \leq \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) : 4$.

La curva $A'_1 B'_1 B'_2 A'_2 A'_3 B'_3 \dots$ análogamente formada con estos arcos se separa de la anterior sin cortarla mediante un giro alrededor de O de 1° , por ejemplo en sentido de $O B_1$ a $O A_1$, y queda así entre ambas un recinto en que O es punto de contorno accesible mediante cualquier posición intermedia de la curva girada, pero inaccesible por curvas de longitud finita, pues cualquier curva intermedia tiene arcos de longitud mayor que las cuerdas $A'_1 B'_1, A'_2 B'_2, A'_3 B'_3, A'_4 B'_4, \dots$. Podría partirse de la curva $y = x \operatorname{sen} \frac{\pi}{2^k}$ pero resulta menos clara la comprobación de que toda curva intermedia tiene longitud finita.

(**) El desarrollo de otra primitiva se obtendrá sumando a éste la constante de integración.

y si la paralela al eje y por z_0 pertenece al sector, basta tomar $x = \beta$ y a ambos lados de ésta ($-\varepsilon \leq \beta \leq \varepsilon$).

Combinando esta conclusión con la obtenida para la derivada I, c), podemos demostrar el siguiente teorema de trascendental importancia en la teoría de la aproximación asintótica óptima.

c) Si una función holomorfa $f(z)$ es aproximación asintótica óptima de una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ en un sector circular de vértice z_0 , esto es, si las cotas L_n de su desarrollo asintótico en éste son ordenadamente menores que las homólogas M_n de cualquier otra, salvo un factor exponencial K^n ; (*)

$$L_n < K^n M_n$$

su derivada $f'(z)$ y su primitiva son, respectivamente, la aproximación asintótica óptima en el mismo sector de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} \text{ o de la } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1} \text{ obtenidas de-}$$

rivando o integrando término a término.

Pues según I a) la serie $\sum n a_n (z - z_0)^{n-1}$ tiene como aproximación asintótica $f'(z)$, cotas $K^n \cdot L_n$; y si tuviese otra aproximación asintótica $f_1(z)$ con cotas N_n algunas menores que las correspondientes $K^n \cdot L_n$, salvo un factor exponencial K_1^n , es decir, $N_n < K_1^n \cdot K^n \cdot L_n$ para algunos valores de n , la primitiva de esta $f_1(z)$ admitiría como desarrollo asintótico el dado con cotas $K_2^n N_n < K_2^n \cdot K_1^n \cdot K^n \cdot L_n$ para algunas n , contra la condición de aproximación óptima de las L_n .

III.—Estas conclusiones pueden aplicarse al punto del infinito mediante la sustitución $z' = \frac{1}{z}$, pero es preferible establecerlas directamente. Así, pues, para la derivación, tendremos:

(*) En nuestros dos trabajos citados definimos la aproximación asintótica óptima con la condición restringida $L_n < M_n$, pero todas sus propiedades subsisten con la introducción del factor exponencial. Como es sabido, en las aplicaciones de las condiciones de Watson, Denjoy y Carleman, dos sucesiones L_n y M_n son equivalentes cuando su cociente $\frac{L_n}{M_n}$ tiene crecimiento exponencial; y así resulta que ambas definiciones son las mismas cuando se cumplen estas condiciones.

$$\begin{aligned}
 |z|^{m+1} \left| f'(z) - \sum_{n=1}^{m-1} n \frac{a_n}{z^{n+1}} \right| &= \frac{|z|^{m+1}}{2\pi} \left| \int_{c(z)} \frac{f(t) - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{a_n}{t^n}}{(t-z)^2} dt \right| < \\
 &< \frac{|z|^{m+1}}{2\pi} \int_{c(z)} \frac{M_n}{|t|^m} \frac{|dt|}{R(z)^2} < \frac{|z|^{m+1}}{2\pi} \frac{M_m}{||z| - R(z)|^m} \frac{2\pi R(z)}{R(z)^2} < \\
 &< M_n \frac{1}{\left| 1 - \frac{R(z)}{|z|} \right|^m} \frac{|z|}{R(z)}
 \end{aligned}$$

y habremos de tomar el radio $R(z)$ de modo que se conserve acotado superiormente $\frac{|z|}{R(z)}$ e inferiormente $1 - \frac{R(z)}{|z|}$; pero al mismo tiempo ha de ser $R(z) < d(z)$; luego elegiremos como radio $R(z)$ el menor de los dos números $\frac{|z|}{2}$ o $\frac{d(z)}{2}$ y entonces la cota anterior es, respectivamente, menor que

$$M_m \cdot 2^m \cdot 2 \text{ o bien } < M_m \cdot 2^m \cdot 2 \cdot \frac{|z|}{d(z)}$$

y si en un subconjunto R' de R se conserva acotado

$$\frac{|z|}{d(z)} < K \text{ o brevemente } |z| = O[d(z)] \quad [2]$$

esta segunda cota es $< M_m \cdot 2^{m+1} \cdot K$, valor que supera también a la primera si tomamos $K > 1$. Es decir:

a) Si una función $f(z)$ holomorfa en un recinto R admite en este el desarrollo asintótico

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n},$$

sus derivadas sucesivas $f^m(z)$ admiten los desarrollos obtenidos derivando término a término:

$$f^m(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m (n+m-1)^{(m)} \frac{a_n}{z^{n+m}}$$

en todo subconjunto R' de R definido por la condición

$$|z| = O[d(z)].$$

b) Las cotas de estos desarrollos asintóticos de las derivadas en R' son las mismas salvo un factor exponencial que las de la función en R y, por tanto, si esta satisface en R la condición de Watson-Nevanlinna, la de Denjoy o la de Carleman-Ostrowski, lo mismo acontece a aquella en R' .

Sobre la existencia del conjunto R' vamos a establecer conclusiones análogas a los teoremas d y d' . Considerando la proyección sobre la esfera, con el mismo razonamiento del plano se demuestran estos teoremas d y d' sobre la existencia en R de un sector limitado por dos meridianos y un paralelo; pero la comprobación de la condición métrica [2] exige naturalmente volver al plano; y, en efecto, la proyección de dicho sector es la prolongación de un sector circular de vértice O , cuyos puntos cumplen la condición $\frac{|z|}{d(z)} < \frac{1}{\operatorname{sen} \varepsilon}$ en un entorno del ∞ , determinado a condición que no contenga puntos del contorno C en el ángulo obtenido ampliando el anterior en ε por ambos lados sin alcanzar las proyecciones de las tangentes en el polo P . La proyección de un arco de Jordan terminado en P es, como se sabe, una curva infinita en el plano, esto es, un conjunto no acotado homeomorfo con una semirecta y sin puntos propios de acumulación fuera del mismo; y recíprocamente. La existencia de tangente en P a dicho arco se traduce sobre el plano en que la semirecta que proyecta desde el origen los puntos z de la curva infinita tiende a una posición límite, cuando $z \rightarrow \infty$ sobre la curva, esto es, que dado un entorno angular de dicha semirecta límite, todos los semirayos proyectantes quedan en este ángulo cuando los puntos de la curva están en cierto entorno del ∞ . Interpretadas así sobre el plano las hipótesis y conclusiones de la esfera, podemos enunciar:

c) *El conjunto R' existe seguramente y es la prolongación de un sector circular de vértice O cuando en el entorno del ∞ el contorno C se compone de dos curvas infinitas (conjuntos no acotados cerrados en el plano euclideo y homeomorfos con una semirecta) y las semirectas oz que proyectan desde el origen los puntos de estos arcos tienden, para $z \rightarrow \infty$ sobre cada curva, a posiciones límites distintas, o que si coinciden, lo hacen en una semirecta cuya opuesta tiene un segmento OA dentro del recinto.*

d) *Cuando el contorno es una curva cerrada en el ∞ del plano complejo (esto es, se compone de dos curvas infinitas con extremo propio común ^(*)) y las semirectas que proyectan sus*

(*) Nótese la diferencia esencial entre este concepto de curva infinita cerrada en el plano complejo con punto del infinito único y el de curva cerrada en el plano proyectivo donde hay infinitos puntos impropios. En el plano complejo se unen en el infinito todas las curvas infinitas, mientras que en el proyectivo solo las que tienen paralelas sus direcciones asintóticas, existiendo algunas que carecen de éstas y no se consideran cerradas.

puntos desde O tienen posiciones límites para $z \rightarrow \infty$ sobre cada arco, la condición necesaria y suficiente para que el recinto contenga la prolongación de un sector circular de vértice O, que será un conjunto R' , es que el argumento de la semirecta o z que proyecta un punto de la curva, experimente un incremento distinto de cero al pasar de una posición límite a la otra cuando z recorre la curva.

IV.—La integración se efectúa lo mismo que para el punto propio sobre la sucesión de quebradas que unen en R cada dos puntos consecutivos de los $z_1 \rightarrow \infty$ (*), pero el paso al límite que allí aparecía como complemento de generalidad, constituye aquí la definición misma de la integral, y vamos a estudiar cuando es válido el desarrollo

$$F(z) = - \int_z^\infty \left[f(z) - a_0 - \frac{a_1}{z} \right] dz \sim \frac{a_2}{z} + \frac{a_3}{2z^2} + \frac{a_4}{3z^3} + \dots,$$

incluyendo los dos términos a_0 y $\frac{a_1}{z}$ en el primer miembro, como es costumbre por no tener integral finita.

Siendo:

$$\begin{aligned} |z|^m \left| F(z) - \sum_{n=1}^{m-1} n \frac{a_{n+1}}{z^n} \right| &= |z|^m \left| - \int_z^\infty \left[f(z) - a_0 - \frac{a_1}{z} \right] dz + \int_z^\infty \sum_{n=1}^{m-1} \frac{a_{n+1}}{z^{n+1}} dz \right| = \\ &= |z|^m \left| \int_z^\infty \left[f(z) - \sum_{n=0}^m \frac{a_n}{z^n} \right] dz \right| < M_m |z|^m \int_z^\infty \frac{|dz|}{|z|^{m+1}} \end{aligned}$$

resulta:

(*) Esta sucesión de quebradas forman evidentemente un conjunto homeomorfo con una semirecta y no acotado, pero puede no ser cerrado, en el plano euclidiano, es decir, no contener todos sus puntos de acumulación propios (el ∞ no pertenece a dicho plano), y, por consiguiente, puede no ser curva en el sentido topológico de conjunto compacto, conexo y cerrado de una dimensión. Recintos en que ninguna de las sucesiones de tales quebradas sea curva o brevemente; en que el ∞ sea punto inaccesible del contorno, se obtienen sin más que aplicar la transformación $z' = \frac{1}{z}$ a cualquier recinto en que el origen sea punto inaccesible del contorno. Mediante segmentos rectilíneos puede limitarse un recinto de este tipo con el semieje $+\infty$, el segmento $(0, 1)$, del eje, y una sucesión de segmentos horizontales de alturas $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ y ex-

a) Dado el desarrollo asintótico

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

en un conjunto R (no necesariamente recinto), si éste contiene caminos de integración que hacen convergente la integral

$$\int_z^{\infty} \left[f(z) - a_0 - \frac{a_1}{z} \right] dz$$

desde los puntos z de R (como acontece cuando R es un recinto no acotado y $f(z)$ continua en R), es válido el desarrollo

$$F(z) = - \int_z^{\infty} \left[f(z) - a_0 - \frac{a_1}{z} \right] dz \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{nz^n}$$

en todo subconjunto R_1 de R donde se conservan acotados para cada n los productos

$$|z|^n \int_z^{\infty} \frac{|dz|}{|z|^{n+1}} < M_n.$$

b) Si $f(z)$ satisface en R la condición de Watson-Nevanlinna, la de Denjoy o la de Carleman-Ostrowski, $F(z)$ satisface la misma en el subconjunto de R_1 donde se conserva acotada con independencia de n la raíz n -ésima:

$$|z| \sqrt[n]{\int_z^{\infty} \frac{|dz|}{|z|^{n+1}}} < \sqrt[n]{M_n} < K.$$

c) Esto se verifica, en particular, en la prolongación de un sector circular de vértice 0 (*), como puede verse con cálculo

tremos de abscisas 0 y 1, $\frac{1}{2}$ y 2; $\frac{1}{4}$ y 3, ... respectivamente, cerrando el recinto por la derecha con los segmentos verticales que proyectan cada extremo de un segmento horizontales sobre el siguiente. En este recinto, todas las quebradas que unen $z_i \rightarrow \infty$, tienen como puntos de acumulación inevitables 0 e ∞ .

(*) Este teorema contiene como caso particular el clásico de interpretación en el campo real. Véase por ejemplo, BOREL.—*Leçons sur les séries divergentes*.—París, Gauthier-Villars, 2ª ed., 1926.

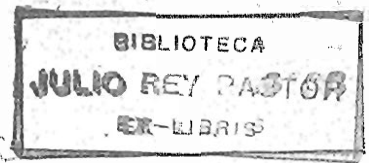
análogo al del propio punto; y con idéntico razonamiento que entonces, resulta:

Si una serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ admite aproximación asintótica óptima holomorfa $f(z)$ en la prolongación de un sector circular de vértice 0, las series derivada y primitiva $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n a_n}{z^{n+1}}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{a_{n+1}}{n z^n}$ tienen aproximación asintótica óptima en el mismo campo, que son, respectivamente, la derivada $f'(z)$ y la integral $F(z) = -\int_z^{\infty} \left[f(z) - a_0 - \frac{a'_0}{z} \right] dz$.

SOMMAIRE

Ce mémoire contient des théorèmes généraux sur la dérivation et sur l'intégration des développements en série asymptotique, et des applications à l'approximation asymptotique optimum.

(Original recibido en Mayo de 1938).



Resolución adoptada
por la
Unión Matemática Argentina

en la cuestión promovida por el

Dr. Carlos Biggeri

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Publicación Nº 7

BUENOS AIRES

1939



Resolución adoptada
por la
Unión Matemática Argentina
en la cuestión promovida por el
Dr. Carlos Biggeri

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Publicación Nº 7

BUENOS AIRES

1939

**RESOLUCION ADOPTADA
POR LA UNION MATEMATICA ARGENTINA
EN LA CUESTION PROMOVIDA POR EL
Dr. CARLOS BIGGERI**

Es costumbre en las revistas científicas que sus directores no se hagan solidarios de las afirmaciones contenidas en los trabajos de sus colaboradores; pero esta libertad de expresión tiene, como es lógico, límites infranqueables en toda publicación que desee adquirir o conservar un mínimo de prestigio, o siquiera de decoro.

No siempre es fácil precisar esa frontera en las disciplinas morales y políticas, donde no existe un criterio indiscutible de certeza, ni aun siquiera en las ciencias experimentales, en que la verdad de los resultados expuestos debe quedar sujeta a la responsabilidad del autor que afirma haberlos obtenido; pero en las ciencias matemáticas hay por fortuna un criterio objetivo que impera en todas las revistas serias consagradas a esta ciencia. La Dirección examina ante todo la exactitud de los teoremas expuestos, cuando vienen acompañados de su demostración, rechazando los trabajos en que se notan errores o faltas de rigor y también aquellos otros que, aun siendo correctos, no contienen novedad digna de nota. Esta segunda comprobación es naturalmente mucho más difícil, por la inmensa cantidad de publicaciones que aparecen en todos los países, y por la falta en el país de especialistas en muchas teorías, a los cuales se pueda confiar el examen de las memorias recibidas para su publicación.

Hemos procurado, dentro de lo posible, adoptar para la revista de la UMA este sano criterio, que es el corriente en todas las revistas serias de muchos países; y quien haya leído el aviso impreso en la cubierta desde el primer número se habrá dado cuenta de la diferencia de normas con las de otras acreditadas publicaciones argentinas, que prefieren respetar en absoluto la libertad de sus colaboradores, aun cuando salten a la vista graves errores y sea evidente la falta de novedad y hasta de buena fe en los resultados expuestos.

Sin entrar a analizar las ventajas o inconvenientes de uno y otro sistema, y respetando ambos, solamente nos interesa esta conclusión evidente: *cuando se ha adoptado el criterio de la corresponsabilidad de la dirección, queda ésta obligada a señalar a los autores sus posibles errores; y si se notan una vez impresos, está obligada a rectificarlos públicamente, so pena de hacerse solidaria de ellos.*

Estas consideraciones generales son aplicables, en particular, a dos memorias y una pequeña nota complementaria del Dr. Carlos Biggeri publicadas en la Revista de la Unión Matemática Argentina.

La curiosa actitud del distinguido profesor del Colegio Militar, que el acta adjunta ilustra suficientemente, queda bien aclarada para quien la lea con toda atención y sobreentienda lo que en ella no puede decirse; pero la Dirección debe a su vez explicar su actuación en este desagradable asunto, así como la Secretaría documenta a continuación las afirmaciones contenidas en el acta, para que cada lector pueda formar su juicio desapasionado.

1º La Dirección estaba obligada a publicar el complemento a la memoria del Sr. Biggeri aparecida en esta Revista con el mismo título y que su autor consideraba indispensable. No hacerlo era exponerse a una acusación de mutilación; y lo acaecido demuestra que tal temor no estaba infundado. Como puede verse en la carta escrita de puño y letra del mismo, se ofrecía a llevar personalmente el original a la imprenta, quizás para estar seguro de su publicación (Documento N° 2, pág. 3).

2º El citado complemento no pudo incluirse en el número 2 de la Revista, como deseaba su autor, por haber ocupado su segunda memoria aparecida en dicho número 2 una página más de lo calculado por la imprenta; y fué necesario, por tanto, reservarlo para el número siguiente de la Revista, donde, efectivamente, se publicó (Documento N° 4).

3º La aparición de este número *tercero* de la Revista (no es cuarto, pues el suplemento tiene otro carácter meramente informativo y elemental, llevando paginación independiente) se demoró por causas totalmente ajenas a la Dirección, siendo la fundamental el cambio de imprenta y la necesidad de esperar la llegada al país de los signos matemáticos necesarios.

Cuando se compuso la nota del Sr. Biggeri éste se encontraba en París; y aun estando aquí, tampoco se le habrían enviado las pruebas; pues para evitar la indefinida demora en la impresión de los trabajos, la revisión se encomienda siempre a persona competente, que cuida la coincidencia con el original, salvo advertencia especial del autor, que desea corregir o agregar algo; lo cual no aconteció en este caso, pues el Sr. Biggeri no hizo indicación ninguna, escrita ni verbal, desde el envío del original, a pesar de la amistosa relación que revela el Documento N° 5.

4º El involuntario retraso ya explicado en la aparición del tercer número de la Revista, no era causa bastante para omitir la publicación, a que la Dirección estaba obligada; ni ocasionaba perjuicio ninguno de prioridad a su autor, puesto que mucho antes de la fecha 28 de enero de 1937 de su carta, el Sr. Biggeri

había remitido su teorema, enunciado en lengua italiana (sin darnos noticia de esta duplicidad) al *Bollettino de l'Unione Matematica Italiana*, donde apareció en el número que lleva la fecha del 15 de diciembre de 1936 (Documento N° 3). Se trataba, pues, simplemente, de que la memoria publicada en la Revista de la U.M.A. no quedara sin el complemento que su autor juzgaba necesario, a pesar de haber sido ya publicado el citado teorema en el *Bollettino*.

5° La omisión de la tercera condición que el autor dice *esencial y fundamental* para la validez del teorema (en verdad no lo es, pues puede sustituirse por otras) es la misma omisión cometida en su citada publicación en el número del 15 de diciembre de 1936 del *Bollettino* (Documento N° 3) muy posterior como se ve a la del 14 de septiembre de 1936 (*) que es la fecha de la sesión de la Academia en que dice haber presentado las tres condiciones (**).

Desde el punto de vista psicológico y para juzgar de la seriedad del autor resulta curiosa esta insistencia en omitir la citada tercera condición, tanto en su nota al *Bollettino*, como en la enviada para nuestra revista, meses después de haberla enunciado correctamente; pero no espere el lector que nos detengamos en ella, pues nada tiene que ver con las graves observaciones (no solamente de orden científico) que la Dirección se ve obligada a hacer sobre las memorias del Sr. Biggeri y que oportunamente aparecerán en la Revista de la U.M.A.

A pesar de no hacerse la Dirección solidaria de lo publicado, como ya se le hizo notar verbalmente y por escrito, se admitieron con estas deficiencias sus trabajos por ser tan escasa la producción publicable y por considerar buena obra el estímulo a quienes, como el Sr. Biggeri, trabajan intensamente

(*) En verdad apareció su nota en los *Comptes rendus* del 4 de enero de 1937. No interesa conocer las causas del retraso de varios meses, que no es corriente, como saben muy bien todos los jóvenes que han publicado notas en los *Comptes rendus*. Tampoco importa averiguar si notó su error antes de que lo descubriera Perron en su nota del *Bollettino* (abril 1937); ni sería justo dar importancia a tal omisión o descuido. Todos los que hacen trabajos de Matemáticas saben por experiencia cuan frecuentes son tales casos y solamente quienes nunca trabajaron pueden ser intolerantes.

Sin embargo, como la hábil forma en que el Sr. Biggeri cita los nombres de matemáticos extranjeros en su nota de los Anales, puede quizás desorientar al lector, es preciso, en honor de la verdad, citar exactamente el comentario del profesor Perron, quien después de reproducir el "*teorema che il Biggeri enuncia senza dimostrarlo*", agrega: "*Ma questo teorema é erroneo*". Y a continuación da un ejemplo contundente, que demuestra el error.

(**) Observe el lector que habiendo aparecido el citado número del *Bollettino* bastante después de su fecha impresa, y habiendo sido escrito el original de la nota enviada a París con la necesaria anterioridad a la fecha del 14 de septiembre en que fué presentada, la distancia entre una y otra fecha se dilata más todavía.

en el campo de las Matemáticas superiores, prescindiendo de otras consideraciones que habrían inducido a eliminarlo.

Este mismo criterio indujo a publicar el breve complemento apenas fué posible; y esto a pesar de su evidente falta de interés y de novedad, puesto que ya había aparecido en la revista italiana. Lo mismo aconteció con su primera nota, que envió simultáneamente al *Bolletino* y a la *Revista*, sin dar cuenta de tal duplicidad a ésta ni a aquél; no siendo la única vez que ha seguido tal proceder, el cual no queremos calificar.

6º El día 19 de agosto celebró asamblea la U.M.A.; una vez demostrada patentemente la falsedad de la acusación del Sr. Carlos Biggeri, gracias a la providencial aparición de su propia carta, tras laboriosa búsqueda (Documento N° 2), fué expulsado por el voto unánime de los catorce profesionales que asistieron, más el de un distinguido consocio que envió su espontánea adhesión (Documento N° 1).

7º Muy pocos días después ha aparecido en los *Anales de la Sociedad científica argentina* un escrito del mismo Sr. Biggeri que afortunadamente desvanece por sí mismo el menor asomo de duda que alguien pudiera tener sobre la justicia de aquella fuerte resolución (Documento N° 10).

Animado quizás por la aparente inacción de la U.M.A. que esperó pacientemente durante tres meses la prometida contestación a sus cartas (Documentos N° 7 y 9) y sin sospechar la para nosotros feliz aparición de esta oportuna carta que suple con evidente ventaja a la desaparecida copia a máquina, se lanza por fin el Sr. Biggeri a formular categóricamente la acusación que aparecía cautamente velada en el telegrama dirigido al Ing. Guitarte (Documento N° 8).

Dejando de lado la extrañeza que ha causado el proceder de la Dirección de los Anales de la benemérita Sociedad Científica Argentina, a la que tanto debe la cultura del país y que siempre procedió con tino y corrección, tal publicación ha venido muy oportunamente a confirmar la exactitud absoluta de la comunicación del señor González, quien transmitió al secretario las afirmaciones del Sr. Biggeri (Documento N° 6).

No corresponde a esta Dirección, tras el relato de los hechos, deducir conclusiones; ni se molestará en iniciar ante la justicia competente acción ninguna contra el autor o autores de tales maquinaciones, que por una rara casualidad no han logrado el éxito esperado. El más alto tribunal es el formado por todas las personas honradas y ellas pronunciarán su fallo inapelable.

LA DIRECCION

DOCUMENTO Nº 1

**Acta de la Asamblea de la Unión Matemática Argentina
celebrada el día 19 de agosto de 1939**

En la ciudad de Buenos Aires a diez y nueve días del mes de agosto de mil novecientos treinta y nueve, reunidos en el local de la Unión Matemática Argentina, bajo la presidencia del Ing. Manuel Guitarte, los miembros de la misma: Dr. L. Allende Lezama, Dra. Clotilde A. Bula, Sr. José Ebin, Sra. Yanny Frenkel, Srta. Esther Ferrari, Dr. Alberto González Domínguez, Dr. Fernando L. Gaspar, Ing. J. Kervor, Srta. Elba Raimondi, Dr. J. Rey Pastor, Ing. Enrique Samatan, Dr. Máximo Valentinuzzi y Prof. Antonio Valeiras, se entró a considerar la denuncia formulada, verbalmente, el día dos de mayo de 1939 por el consocio Dr. Carlos Biggeri, al miembro de la J. D. Dr. Alberto González Domínguez. El Dr. Biggeri manifestó extraordinaria extrañeza de que hubiera aparecido en el número cuatro de la Revista de la U.M.A., un trabajo, con su firma, intitulado "Sobre los puntos singulares de las funciones analíticas" diciendo que dicho trabajo había sido fraguado en perjuicio suyo o que, en último caso, los originales habrían sido mutilados segregando una condición fundamental para la validez de su teorema. El Dr. González Domínguez dió cuenta de esta denuncia en carta dirigida a nuestro Secretario con fecha tres de mayo de 1939, de conformidad con los deseos del Dr. Biggeri.

Nuestro Secretario escribió al Dr. Biggeri, con fechas 9 y 17 de mayo de 1939, solicitándole una rectificación o ratificación. Las dos cartas certificadas fueron recibidas por el Dr. Biggeri quien manifestó, con posterioridad, al Dr. González Domínguez, que contestaría, pero, hasta hoy, no lo ha hecho. En cambio ha dirigido, con fecha 9 de mayo de 1939 un telegrama a nuestro Presidente el Ing. Manuel Guitarte, en el que dice lo siguiente: "He visto con sorpresa trabajo con mi firma en último número Revista Unión Matemática Argentina cuya publicación no he autorizado ni corregido jamás las pruebas. Protesto formalmente ante V. en su carácter Presidente Unión y espero de su caballerosidad exija rectificación al responsable de este hecho. Respetuosos saludos. Colaciónese.— Carlos Biggeri".

En esta situación examinan los presentes una carta en que el Dr. Biggeri solicita la publicación, en la Revista de la U.M.A., del trabajo que a continuación transcribe y firma al final.

Cotejado este documento manuscrito, de puño y letra del Dr. Biggeri y firmado por el mismo, con la publicación efectuada, se comprueba que son iguales.

Con ello se pone en evidencia la inexactitud calumniosa de la denuncia hecha por el Dr. Biggeri y por el voto unánime de todos los presentes se resuelve expulsar al Dr. Carlos Biggeri de la Unión Matemática Argentina, haciendo constar además que adeuda las cuotas de los años 1937, 1938 y 1939.

Se deja también constancia de dos hechos muy sugestivos por la significación que puedan tener para ulteriores investigaciones:

1º El doctor Biggeri manifestó haber sido informado de la publicación de su artículo en la Revista de la U.M.A., por el Sr. José Varela Gil y en la fecha 2 de mayo en que el Dr. Biggeri formuló su denuncia, ese número no había sido aún distribuido, encontrándose los paquetes en el Seminario de Matemáticas de la Fac. de C. Exactas, local en que el Sr. Varela Gil entra casi a diario, ignorándose con qué autorización.

2º El original utilizado para la impresión, que era una copia a máquina del original contenido en la carta manuscrita y firmada por el Dr. Biggeri, desapareció del cajón sin llave donde, en el mismo Seminario, habitualmente se guardan dichos originales.

No habiendo más asuntos que tratar, se levantó la sesión siendo las veinte horas y treinta minutos.

El Secretario Dr. Gaspar hace constar que el Vicepresidente Ing. José Babini, no pudiendo concurrir a la reunión le ha autorizado a expresar su opinión en el sentido de que la resolución que corresponde adoptar, en el caso, es la aprobada. (Siguen las firmas).

(1)

Buenos Aires - Enero 28 de 1937.

Dr. J. Ray Pastor.

Estimado Doctor:

Le envío la siguiente comunicación (continuación de mi nota del 1.º número de la R. U. M. A.), la cual, según habíamos convenido, aparecía en el 2.º número.

Comunicación.

Por Carlos Buggeri (Buenos Aires).

El teorema demostrado en mi nota "Sobre los puntos singulares de las funciones analíticas" (R. U. M. A.; Nº 1, Vol. 1, pag. 5) se puede generalizar a las funciones analíticas definidas por series generales de Dirichlet, a saber: Teorema I). Si se verifican las dos condiciones siguientes:

1º) la parte real del coeficiente a_n de la serie de Dirichlet:

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$$

no es negativa (a partir de un valor fijo de n en adelante);

2º) el valor principal, φ_n , del argumento de a_n (para los valores de n tales que $a_n \neq 0$), es tal que:

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos \varphi_n} = 1 ;$$

(2)

entonces, el punto real de la recta de convergencia de la serie (1), es singular para la función analítica que define dicha serie.

Este teorema generaliza los teoremas de Fekete (C. R., t. 150, 1910 y t. 151, 1910) y de Landau (Math. Ann., t. 61, 1905).

La condición (2) es susceptible de una pequeña ampliación.

El lema enunciado en mi nota anterior puede servir para generalizar algunos teoremas ya clásicos. Una generalización interesante es la que hemos logrado del teorema enunciado por Leconu (C. R., t. 104, 1887, p. 349-352) y demostrado por Fabry (Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, 3^e série, t. XIII, 1896). En efecto: si llamamos p_n y q_n al módulo y al argumento, respectivamente, del coeficiente a_n de la serie:

$$(3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

y R al radio de convergencia de dicha serie, el teorema de Leconu-Fabry asegura que si se verifican las dos hipótesis siguientes:

a) este límite ordinario, para $n \rightarrow \infty$, del cociente $\frac{p_n}{p_{n+1}}$;

b) este límite ordinario, para $n \rightarrow \infty$, de la diferencia $q_n - q_{n+1}$; entonces el punto $z = R$ es singular. Para $f(z)$.

(3)

Ahora bien, mediante el lema hemos conseguido ver que Teorema II). Para la validez de la conclusión del teorema de Lecornu-Fabry, no es necesaria la hipótesis a), es suficiente la hipótesis b).

Estos dos teoremas así como la generalización del II a las series de Dirichlet, los demostraremos en notas próximas.

Si Ud. lo juzga conveniente, para evitar pérdida de tiempo, la llevo ya a la imprenta y efectúo la corrección de pruebas...

Le agradecería que si Ud. juzga necesario otra corrección en mi nota del 2.º N.º, distinta de la que señalé ayer, me la indicara.

Espero su contestación. Saludos.

Carlos Dirichlet

DOCUMENTO N° 3

Facsimil tomado fotográficamente de la nota del Sr. Carlos Biggeri titulada: *Sulle singolarità delle funzioni analitiche* - Bollettino della Unione Matematica Italiana - Vol. XV, 1926, Publicada en el Núm. 5 (15 Diciembre 1936).

In un'altra Nota dimostreremo che questo teorema si può generalizzare alle funzioni analitiche definite da serie generali di DIRICHLET, e cioè:

TEOREMA II. — *Se vengono soddisfatte le due seguenti condizioni:*

1°) *la parte reale del coefficiente a_n della serie di Dirichlet*

$$(10) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot e^{-\lambda_n \cdot z}$$

non è negativa:

2°) *il valore principale dell'argomento, φ_n , di a_n (per i valori di n per i quali la detta parte reale è positiva), soddisfa alla condizione:*

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos \varphi_n} = 1;$$

allora, il punto nel quale la retta di convergenza della serie (10) incontra l'asse reale del piano z è singolare per la funzione analitica definita da questa serie.

Questo teorema generalizza quello del FEKETE (che esige $|\varphi_n| \leq \tau < \frac{\pi}{2}$, essendo τ un valore fisso: condizione molto più ristretta della (11)).

DOCUMENTO N° 4

Nota del Sr. Carlos Biggeri publicada en la Revista de la U.M.A.

Reproducimos a continuación la nota aparecida en el número precedente de la Revista de la U.M.A. por no haber tenido cabida en el anterior.

Es esta la nota "fraguada en perjuicio suyo, imitando su estilo" de la cual dice textualmente (Documento N° 10) con su firma:

"artículo que la Redacción de dicha Revista me atribuye".

"...publicado en forma tal como si yo lo hubiera remitido para su publicación, lo que, como ya dije, no es exacto".

"Afirmo categóricamente que no he autorizado a publicar el referido artículo".

Rogamos al lector que coteje cuidadosamente esta nota (que además de **fraguada** ha sido **mutilada**) con la carta autógrafa del Sr. Biggeri (*), y también con su nota del Bollettino que está igualmente **mutilada**, puesto que le falta esa famosa 3ª condición. (Documento N° 3).

(*) La insignificante discrepancia es, como verá el lector, de orden tipográfico, por la escasez del espacio y la carencia del signo "distinto de 0".

SOBRE LOS PUNTOS SINGULARES DE LAS FUNCIONES ANALITICAS (*)

por CARLOS BIGGERI (Buenos Aires)

El teorema demostrado en mi nota "Sobre los puntos singulares de las funciones analíticas" (R. U. M. A.; N° 1, Vol. 1 pág. 5) se puede generalizar a las funciones analíticas definidas por series generales de Dirichlet, a saber:

Teorema I. *Si se verifican las condiciones siguientes:*

1º) *La parte real del coeficiente a_n de la serie de Dirichlet $\sum a_n e^{-\lambda_n z}$ no es negativa (desde un valor de n en adelante);*

2º) *El valor principal φ_n del argumento de a_n (para los valores de n tales que a_n no es nulo) es tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos \varphi_n} = 1$,*

entonces, el punto real de la recta de convergencia de la serie es singular para la función analítica que define dicha serie.

Este teorema generaliza los teoremas de Fekete (C. R. t. 150, 1910 y t. 151, 1910) y de Landau (Math. Ann., t. 61, 1905).

La condición [2] es susceptible de una pequeña ampliación.

El lema enunciado en mi nota anterior puede servir para generalizar algunos teoremas ya clásicos. Una generalización interesante es la que hemos logrado del teorema enunciado por Lecornu (C. R., t. 104, 1887, p. 349-352) y demostrado por Fabry (Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 3.e série, t. XIII, 1896). En efecto: si llamamos ϱ_n y φ_n al módulo y al argumento, respectivamente, del coeficiente a_n de la serie: $\sum a_n z^n$ y R al radio de convergencia de dicha serie, el teorema de Lecornu-Fabry asegura que si se verifica:

a). *existe límite ordinario, para $n \rightarrow \infty$, del cociente $\varrho_n / \varrho_{n+1}$.*

b). *existe límite ordinario, para $n \rightarrow \infty$, de la diferencia $\varphi_n - \varphi_{n+1}$; entonces el punto $z = R$ es singular para $f(z)$.*

Ahora bien, mediante el lema hemos conseguido ver que:

Teorema II. *Para la validez de la conclusión del teorema de Lecornu-Fabry, no es necesaria la hipótesis a), es suficiente b).*

Estos dos teoremas así como la generalización del II a las series de Dirichlet, los demostraremos en notas próximas.

(*) Algunas observaciones críticas sobre esta nota y la anterior del mismo autor aparecerán en otro número. (N. de la Red.).

DOCUMENTO N° 5

Carta de la Dra. Clotilde A. Bula al Dr. Carlos Biggeri (*)

Rosario, noviembre 3 de 1938.

Dr. Carlos Biggeri

BUENOS AIRES.

Señor consocio:

La ex-tesorera de nuestra sociedad Srta. Raquel E. Simonetti, al hacerme entrega de todos los recibos de la U.M.A. me comunica que Vd. tiene en su poder los siguientes:

N° 51 — Carlos Coello \$ 50.— año 1936

N° 58 — F. Durio „ 6.— „ 1936

firmados por ella y si es que no le fuera posible hacer efectivos sus importes le ruego enviármelos a la dirección que indico al pie de la presente.

Dada la necesidad de arbitrar recursos para la U.M.A., a fin de atender los gastos que demandan las tres publicaciones que están en prensa, una de la Revista y dos del Suplemento, me permito rogarle el envío de su cuota como socio fundador por el corriente año 1938.

Enterado de que le escribo, n|Secretario el Dr. Gaspar me encarga le trasmita su saludo y le exprese que estarían muy gustosos de contar con una colaboración suya para el próximo número de la Revista, cuyo material ya se está reuniendo.

Aprovecho esta oportunidad para saludar a Vd. con distinguida consideración

(fdo.) C. A. Bula.

Dirección:

Dra. Clotilde A. Bula
Instituto de Estadística
Fac. de C. Económicas
Oroño N° 1261
ROSARIO.

Nota de la U. M. A.:

Con motivo de esta carta, conviene hacer constar estos dos procederes del Dr. Biggeri:

1º—El Dr. Biggeri no ha contestado, hasta la fecha, a la Srta. Dra. C. A. Bula, la atentísima carta que ésta le dirigió.

2º—El Dr. Biggeri no ha devuelto los recibos de cuya cobranza se encargó, ni ha dado cuenta de esta cobranza.

(*) Es interesante recordar que el Dr. Biggeri, pocos días después de su denuncia, arguyó así a un miembro de nuestra J. D.: “¿Me habría pedido la U.M.A. una colaboración si fuera cierto que ya tenía en su poder el original de la nota que se me atribuye?”

Aunque la carta de puño y letra del Dr. Biggeri que reproducimos en facsimil (Documento N° 2), es prueba definitiva y concluyente, no está demás, como nuevo elemento de juicio, señalar la inconsistencia de aquel pretendido argumento, como notará el lector al comparar las dos frases que hemos subrayado en la carta.

DOCUMENTO N° 6

**Carta del Dr. Alberto González Domínguez al
Dr. Fernando L. Gaspar**

Buenos Aires, 3 de mayo de 1939.

Dr. Fernando L. Gaspar,
Secretario de la U.M.A.

25 de Diciembre 1433,
ROSARIO (Pcia. de Santa Fe).

Muy señor mío:

Días pasados estubo en este Seminario el Dr. Carlos Biggeri, quien me expresó su extraordinaria extrañeza porque en el último número de la Revista de la U.M.A. hubiera aparecido un trabajo con su firma, intitulado "Sobre los Puntos Singulares de las Funciones Analíticas", pues, según dijo, él tenía excelente memoria, y no recordaba haber entregado tal trabajo para su publicación en la citada revista. Contestó el suscripto que, no obstante la afirmación del señor Biggeri, el tema de ese trabajo, e incluso las peculiaridades de su redacción (uso continuado de la primera persona en las afirmaciones), eran los acostumbrados del señor Biggeri, a lo que éste repuso que tema y peculiaridades de estilo pueden imitarse. El suscripto le preguntó al señor Biggeri entonces si quería dar a entender que ese trabajo había sido fraguado en perjuicio suyo, a lo que éste respondió que así era efectivamente, y que por eso precisamente exigía que se le mostraran los originales. Después de vanas tentativas del abajo firmado de convencer al Sr. Biggeri de la poca consistencia de sus afirmaciones, éste terminó por expresar que, aun en el caso de que los originales le pertenecieran efectivamente, ellos habían sido mutilados, segregando una condición fundamental para la validez de su teorema. El señor Manuel Sadoski fué testigo del diálogo que el suscripto mantuvo con el señor Biggeri. Finalmente, el citado señor me rogó transmitiera a Ud. su deseo de que se le mostraran los citados originales, pues según dijo tenía el propósito de aclarar perfectamente el asunto.

Doy con esta carta cumplimiento al pedido del Dr. Biggeri, y me permito expresarle también, en mi carácter de vocal de la U.M.A., mi deseo de que, en resguardo de la reputación de nuestra Sociedad, tome Ud. las disposiciones pertinentes, para dejar aclarada cuanto antes, de manera terminante, la extraña imputación del Dr. Biggeri.

Aprovecho la oportunidad para saludar a Ud. muy atentamente.

(fdo.) Alberto González Domínguez.

DOCUMENTO N° 7

Carta del Dr. Fernando L. Gaspar al Dr. Carlos Biggeri

Rosario, 9 de mayo de 1939.

Dr. Carlos Biggeri

BUENOS AIRES.

Estimado consocio:

Nuestro consocio y miembro de la J. D. de la U.M.A., Sr. Alberto González Domínguez me comunica la imputación hecha por Ud. de que su trabajo publicado en el N° 4 de la Revista de la U.M.A. había sido fraguado en su perjuicio imitando su estilo; me comunica también el Sr. González Domínguez el pedido que Ud. formula de que se le muestren los originales.

En lo que a este pedido respecta, hasta este momento no puedo satisfacerlo por haber desaparecido el original que sirvió para la imprenta del cajón sin llave donde, habitualmente, se guardan. Nos hemos preocupado seriamente en buscarlo y continuamos haciéndolo.

El cargo que Ud. formula, es de la máxima gravedad y no consentiríamos permanecer un solo día más en una institución en que hecho de tal naturaleza fuese consentido, no se agotasen los esfuerzos para ponerlo en claro y se aplicase la sanción correspondiente a quien resultare culpable.

Por la unión del reducido grupo matemático argentino, sería mi deseo que su afirmación fuese el resultado de un recuerdo equivocado, no muy probable pero admisible y por eso, antes de tratar en la J. D. el asunto que Ud. denuncia, le ruego tenga la amabilidad de contestarme ratificando o rectificando lo manifestado por el Sr. González Domínguez y alimento la esperanza de que estaremos en el último caso.

Dirijo la presente al Colegio Militar por no conocer su actual domicilio y le saluda con distinguida consideración.

(fdo.) Fernando L. Gaspar.

Nota de la U.M.A.: Sin hacer imputación a nadie, cumplimos el deber informativo de hacer constar que también faltan en el tomo 104 de los *Comptes Rendus* de la Biblioteca de la Facultad de Ciencias Exactas, precisamente las dos hojas (págs. 349, 350, 351, 352) que contienen la nota de Lecornu a que se refiere el Sr. Biggeri en su carta. (Documentos N° 2 y 4).

DOCUMENTO Nº 8

Telegrama del Dr. Carlos Biggeri al Ing. Manuel Guitarte

A Manuel Guitarte

Perú 222

CAPITAL.

9 de mayo de 1939.

He visto con sorpresa trabajo con mi firma en último número Revista Unión Matemática Argentina cuya publicación no he autorizado ni corregido jamás las pruebas. Protesto formalmente ante Ud. en su carácter Presidente Unión y espero de su caballerosidad exija rectificación al responsable de este hecho. Respetuosos saludos. — Colaciónese. — Carlos Biggeri.

DOCUMENTO Nº 9

Carta del Dr. Fernando L. Gaspar al Dr. Carlos Biggeri

Rosario, mayo 17 de 1939.

Señor

Dr. Carlos Biggeri — Colegio Militar

SAN MARTIN - F. C. C. A.

Estimado consocio:

Se me ha dado conocimiento de un telegrama dirigido por Ud. a nuestro Presidente Ing. Manuel Guitarte, telegrama que se cruzó con mi carta anterior y como el texto del mismo no contesta la pregunta que le formulaba en la citada carta, mucho le agradecería su respuesta con el objeto de poder presentar el asunto, sin equívoco, con toda exactitud, a la Junta Directiva, caso de que Ud. insista en la petición hecha al Sr. González Domínguez.

Con tal motivo le saluda muy atte.

(fdo.) Fernando L. Gaspar.

DOCUMENTO Nº 10

Extracto de la nota aparecida en la Entrega VI del Tomo CXXVII de los *Anales de la Sociedad Científica Argentina*, que lleva la fecha de Junio de 1939, publicada en los primeros días de septiembre:

SOBRE LOS PUNTOS SINGULARES DE LAS FUNCIONES ANALITICAS, por el Doctor Carlos Biggeri.

“Con este mismo título (*Sobre los puntos singulares de las funciones analíticas*) en la *Revista de la Unión Matemática Argentina, Volumen II, 1938-1939, Número 4, página 22*, *aparecida en el mes de abril de 1939*, he visto con profunda sorpresa un artículo que la Redacción de dicha Revista me atribuye. Afirmo categóricamente que no he autorizado a nadie para publicar el referido artículo. Además, no he tenido conocimiento de ese artículo sino después de haberlo leído ya publicado (pues ni siquiera he visto las correspondientes pruebas de imprenta) y publicado en forma tal como si yo lo hubiera remitido para su publicación, lo que, como ya dije, no es exacto.”

“En virtud de estas circunstancias, estimo necesario, *por de pronto*, dejar constancia de ésto y de lo que consigno más abajo, librando al lector desinteresado e imparcial la sencilla tarea de calificar como corresponde los hechos expuestos.

“Pasaré, ahora, a considerar brevemente el artículo en cuestión. En realidad, el trabajo que he publicado en los *Comptes rendus...* el 14 de Septiembre de 1936... y que es el que ha servido, en parte, de base a la persona que (con fines que no me detendré a analizar en atención al respeto que me inspiran estos *Anales...*) ha confeccionado el artículo lo aparecido en la *Revista de la U.M.A...* no dice lo que en este último se expresa; en el artículo aparecido en la *Revista de la U.M.A...* se omite una condición *esencial* para la validez de uno de los teoremas contenidos en él, condición que está *explícitamente* estipulada en mi Nota mencionada de los *Comptes rendus...* En efecto, en dicha Nota mía de los *Comptes rendus...* enuncié el siguiente teorema:

(sigue el enunciado del teorema con sus tres condiciones)

“En cambio, en el artículo que la Redacción de la *Revista de la U. M. A.*... me atribuye, *aparece este último teorema sin imponerle a la serie de Dirichlet la tercera condición* (las abscisas de convergencia condicional y absoluta de la serie [12] son iguales) la cual es *fundamental* para la validez del “teorema”.

(siguen las citas bibliográficas donde vuelve a figurar la tantas veces citada nota de los *Comptes rendus*...).

NOTA DE LA U.M.A.—La transcripción, como puede comprobarse con el número de los Anales a la vista, es exacta, respetando las frases escritas en cursiva por su autor. Solamente hemos abreviado las citas acortando los títulos, como es costumbre, para ahorrar espacio y ganar en claridad. Así, p. ej. donde nosotros ponemos brevemente *Comptes rendus*, él repite, las muchas veces que en tan pocas líneas cita su famosa nota: *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris (Sesión del 14 de Septiembre de 1936)*; y todavía agrega alguna vez, para mayor documentación: “presentado por intermedio de M. Emile Borel”, además de transcribir, como es justo, el título.

Bueno es hacer notar de paso que la publicación de notas en los *Comptes rendus*... es ya demasiado frecuente por parte de numerosos matemáticos de nuestra lengua para justificar tan repetido auto-anuncio.

Algún lector benévolo podrá, pues, pensar que se trata simplemente de amor a la exactitud. Por desgracia no es así. La verdadera cita de Perron (nada laudatoria, por cierto, para el Sr. Biggeri) la hemos transcrito en la nota de pág. 4; pero lo más sorprendente es que al cabo de tantas citas innecesarias, falta la única que importa al caso y que el prolijo citador ha olvidado incluir, a saber: la Nota del Bollettino del 15 de diciembre de 1936 en que solamente aparecen las dos condiciones. ¿Habrá sido víctima el autor de alguna otra “*persona que con fines...*”?

Acudamos en ayuda de la víctima salvando este nuevo olvido con la reproducción fotográfica del párrafo pertinente del citado Boletín, que el lector comparará con la nota enviada a nuestra revista. (Documento N° 3).

Quizás haya también en Bolonia envidiosos de su gloria que “han confeccionado el artículo” mutilándolo para poder criticarlo después; y con tan perverso fin lo han “publicado en forma tal como si lo hubiera remitido para su publicación” “sin imponerle a la serie de Dirichlet la tercera condición, la cual es fundamental para la validez del teorema”.

El lector imparcial sabrá interpretar esta completa documentación y calificará como corresponde la extraordinaria conducta del promotor de este desdichado asunto, en su doble aspecto científico y moral.

