MINISTERIO DE JUSTICIA E INSTRUCCIÓN PÚBLICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS, COMERCIALES Y POLÍTICAS
INSTITUTO DE ESTADÍSTICA

# Teoría y cálculo de los momentos dobles. Centraje. Correcciones de Sheppard. Método simplificador de Mitropolsky.

por la profesora doctora

CLOTILDE A. BULA

Miembro del Instituto de Estadística

PUBLICADO EN LA REVISTA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS, COMERCIALES Y POLÍTICAS, ROSARIO, TOMO VIII; N. 2. MAYO - AGOSTO DE 1939; N. 3 SETIEMBRE - DICIEMBRE DE 1939.

*

ROSARIO
1940

# INDICE

IMPRENTA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL - SANTA FE

## Introducción

Los estudios Estadísticos son esencialmente experimentales, y, como los de toda ciencia experimental, se realizan sobre masas de observaciones.

Las observaciones pueden estar referidas a uno o a varios atributos. En el caso de tratarse de un atributo, su representación gráfica se hace en un espacio a dos dimensiones, es decir, se tiene una curva en un plano; si los atributos fuesen dos, se la haría en un espacio a tres dimensiones y los puntos correspondientes a las frecuencias, determinarían una superficie en el espacio. Si los atributos fuesen más de dos, resultaría una superficie en un hiper-espacio, cuya representación gráfica es imposible en la forma habitual.

En Biometría y Antropometría, especialmente, es frecuente que las observaciones correspondan a pares de atributos.

Se tienen, por tanto, en todos los casos, dos conjuntos de números: el de los atributos y el de las frecuencias, y una correspondencia entre ambos, es decir, una función en el sentido, ya clásico, de Riemann.

Podemos, pues, hablar con toda propiedad, de la existencia de una función cuya expresión matemática nos es desconocida.

Una de las finalidades más importantes del Método Estadístico es dar la expresión analítica, mediante una función matemática, de los hechos observados, siempre que estas observaciones puedan ser referidas a números, es decir, que se trate de atributos cuantitativos o reducibles a ese caso.

La determinación de esa fórmula matemática puede hacerse respondiendo a dos conceptos, fundamentalmente, distintos:

1) Descriptivo. La función matemática buscada se considerará satisfactoria siempre que los valores que ella defina, para los dados del atributo, aproximen suficientemente a los datos experimentales. No se pretende, pues, explicación alguna sobre las causales y la marcha del fenómeno y se procura obtener funciones matemáticas sencillas.

2) Explicativo. Este concepto exige que, a la función matemática buscada, se la determine sobre la base de hipótesis que encierren, en sí, razones acerca de la génesis y de la dinámica del fenómeno; entonces, dicha función, además de describirlo lo explica:

Cuando así se pretende abordar el problema de dar expresión, mediante una función matemática, a los datos de la experiencia, estamos conducidos, de manera natural, a encarar ese problema dentro del cálculo de las probabilidades. Ya sabemos lo difícil que es ello y si, ni aún cuando de un solo atributo se trata, el problema ha tenido solución, general, no digamos cuán lejos se está de obtenerla cuando lo sea de varios atributos.

En cualquiera de los dos casos, utilizamos, para lograr la finalidad propuesta, ciertos elementos característicos de las distribuciones de frecuencia: los momentos que ellos definen.

Si de dos atributos se trata, simbolizando, como lo hacemos más adelante, por $\mu_{r,s}$, a dichos momentos, cuando están centrados, es:

$$\mu_{r,s} = \sum_i \sum_j z_{i,j}\, x^r_i\, y^s_j$$

donde la doble sumatoria está extendida a los pares x,y que corresponden a las frecuencias relativas $z_{i,j}$.

Estos momentos cumplen algunas propiedades importantes, entre ellas, ciertas leyes de desigualdades que son invariantes respecto de los mismos, quiere decir que, dichas desigualdades, son las mismas cualquiera sea la sucesión de los momentos.

En Biometría y Antropometría, como lo expresé antes. se tienen, con mucha frecuencia, superficies experimentales correspondientes a pares de atributos, cuyos momentos dobles es necesario calcular. Este cálculo es largo y delicado. Para obtener, en función de los momentos, una función matemática que dé la fidelidad necesaria para que los valores teóricos sean utilizables, es necesario someter a los momentos experimentales, a ciertas correcciones.

La extensión de los cálculos obliga a utilizar métodos simplificadores y de control. Los que nosotros empleamos son los de Tschetwerikoff y de Mitropolsky.

El objeto del presente trabajo es hacer una exposición sencilla y clara, accesible para los técnicos que deban hacer aplicaciones, de toda la teoría al respecto porque la utilización de fórmulas, de manera mecánica. es cosa mala, que muchas veces ha conducido a resultados totalmente erróneos.

Junto con la teoría se mostrará la forma de aplicación, con la extensión y detenimiento necesarios, para que no surjan dudas ni dificultades al hacer las aplicaciones y éstas se realicen correctamente.

Procuramos, con ello, que se aproveche el resultado de nuestra personal experiencia, teórica y práctica, consecuencia de los trabajos que, desde hace algunos años, nos ocupan en el Instituto a que pertenecemos.

C. A. B.

## § I. Nomenclatura y definiciones

El cálculo de los momentos es posible, siempre que se trate de atributos cuantitativos o reducibles a este caso.

Utilizaremos para los atributos esta notación:

$\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ atributos medidos con respecto al origen natural. es decir, tal cual resultan de la experiencia.

$X, Y$ atributos medidos con respecto a un origen arbitrario, es decir, que si el origen se pasa al punto del plano definido por el par $x_p$ $y_q$, el nuevo sistema resulta de este cambio de variables:

$$X_i = \mathcal{X}_i - \mathcal{X}_p$$
$$Y_j = \mathcal{Y}_j - \mathcal{Y}_q$$

x , y atributos medidos con respecto a las medias aritméticas $\overline{X}_a$ e $\overline{Y}_a$ respectivamente; por tanto, el nuevo sistema, resulta de este cambio de variables:

$$x_i = X_i - \overline{X}_a$$
$$y_j = Y_j - \overline{Y}_a$$

Para los momentos, cuyos diferentes tipos definiremos de inmediato, utilizaremos esta notación:

- Momentos potenciales
  - Absolutos
    - $M'_{r,s}$ (respecto del origen natural)
    - $M_{r,s}$ (respecto de un origen arbitrario)
  - Relativos
    - $m'_{r,s}$ (respecto del origen natural)
    - $m_{r,s}$ (respecto de un origen arbitrario)
    - $\mu_{r,s}$ (centrado, es decir, con origen en la media aritmética)
    - $\mu'_{r,s}$ (centrado y corregido—Sheppard).
    - $q_{r,s}$ (reducido o básico; medido con respecto a los desvíos $\sigma_x$ y $\sigma_y$).

Momentos factoriales: $\mathcal{M}_{r,s}$

Momentos binomiales: $B_{r,s}$

Designaremos por:

$\eta_{i,j}$ la frecuencia absoluta que corresponde a un par genérico de atributos de subíndices (i,j)

$z_{i,j}$ las frecuencias relativas que corresponden al mismo par.

N suma de las frecuencias absolutas o «población».

El cálculo de los momentos, en el caso de una variable, así como las fórmulas de centraje y las correcciones de Sheppard, han sido motivo de consideración en casi todos los tratados de «Estadística Matemática», por lo cual a ellos nos remitimos (1).

Cuando se pasa al caso de dos variables, si bien los momentos, conceptualmente, tienen el mismo significado que en el de una, la operatoria es más complicada y se producen variantes que obligan a adoptar una técnica de cálculo distinta, que trataremos de explicar.

Designaremos con el nombre de «momentos dobles» a los que correspondan a funciones de dos variables independientes.

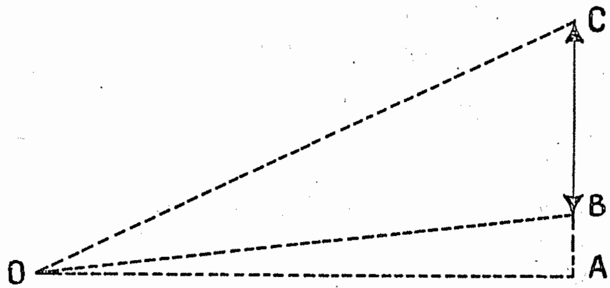
En Matemática, el término «momento» tiene un significado que es extensión del que tiene en Física. Se distingue con este nombre, en Mecánica, a diversas cantidades que ofrecen el carácter común de estar dadas por el producto de una fuerza por una distancia.

Cuando la distancia se mide con referencia a un punto, se llama momento $m$ de una fuerza, con relación a dicho punto, al producto de la fuerza por su distancia al punto, es decir

$$m = BC \times OA$$

(1) Pueden consultarse, al respecto, los tratados de Estadística Matemática citados en la bibliografía que se agrega al final de este trabajo.

donde BC es la fuerza y OA la distancia (dada por la proyección de BC sobre el eje de las abscisas).




Este es el caso que se presenta en Matemática aunque deben considerarse, siempre, las fuerzas aplicadas directamente al eje $x$.

Las frecuencias experimentales corresponden a valores de los atributos que varían en intervalos finitos.

Las «frecuencias» se consideran «fuerzas» y los «atributos» o «variables independientes» medidas con respecto al origen al que están referidas, se asimilan a las «distancias».

Se llama «órden de un momento» al grado a que, en su cálculo, se eleva el atributo o variable independiente; en física no se usan momentos de órden mayor que el segundo.

Cuando las frecuencias corresponden a más de un atributo se tienen los momentos múltiples.

En este trabajo vamos a tratar de los momentos dobles, es decir, de los que corresponden a pares de atributos.

*Momento doble absoluto* es la suma de los productos de las frecuencias absolutas por los correspondientes valores de los atributos elevados a las potencias que expresa el orden del momento.

Por tanto un «momento doble absoluto» de órden $r,s$ respecto del origen natural es

$$M'_{r,s} = \sum_i \sum_j \eta_{i,j}\, x^r_i\, y^s_j \quad [1] \quad \begin{pmatrix} r = 0, 1, 2, \ldots \\ s = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

El momento doble absoluto de orden 0,0 da por consiguiente la suma de las frecuencias o sea la población:

$$M'_{0,0} = \sum_i \sum_j \eta_{i,j} = N \qquad [2]$$

Con el objeto de simplificar los cálculos se opera con frecuencias relativas.

Un «Momento doble relativo», respecto del origen natural, de órden $r,s$, es

$$m'_{r,s} = \sum_i \sum_j \frac{\eta_{i\,j}}{N} x^r_i\, y^s_j = \frac{1}{N} \sum_i \sum_j \eta_{i,j}\, x^r_i\, y^s_j = \frac{M'_{r\,s}}{N} \qquad [3]$$

El momento doble relativo de órden 0,0 es igual a la unidad

$$m'_{0,0} = \frac{M'_{0,0}}{N} = 1 \qquad [4]$$

Tanto en el caso de una, como en el de dos variables, en la práctica, para calcular los momentos relativos se hallan primero los «absolutos» y luego se los divide por la población, con el objeto de evitar el cálculo de cada una de las frecuencias relativas, lo que conduce a expresiones decimales que complican las operaciones y afectan la exactitud de los resultados.

Los momentos, según su estructura, se clasifican en: potenciales, factoriales y binomiales.

En lo que antecede, hemos tratado de los «momentos potenciales».

Si en vez de sumas de productos de potencias de las variables por las correspondientes frecuencias, consideramos la suma de los productos de $r$ y de $s$ factores decrecientes, a partir de X e Y, respectivamente, multiplicados por las frecuencias, tenemos definido un «momento factorial doble absoluto» de órden $r,s$, respecto de un origen arbitrario, es decir

$$\mathcal{M}_{r,s} = \sum_{i} \sum_{j} X_i (X_i - 1) \ldots (X_i - r + 1) Y_j (X_j - 1) \ldots (Y_j - s + 1) \eta_{i,j} \quad [5]$$

Las fórmulas de estos momentos tienen expresiones más simples que las de los momentos potenciales. Se pueden fácilmente expresar los «momentos potenciales» en función de los «momentos factoriales» y viceversa, lo que se hace para simplificar los cálculos. Finalmente un «momento binomial absoluto» de órden $r,s$, respecto de un origen arbitrario se define así:

$$B_{r,s} = \sum_{i} \sum_{j} \binom{X_i}{r} \binom{Y_j}{s} \eta_{i,j} \qquad [6]$$

También estos momentos pueden expresarse en función de los «momentos potenciales» o de los «momentos factoriales» y a la inversa. En efecto, con respecto a estos últimos, es inmediato que con el simbolismo

$$X_i^{r)} = X_i (X_i + 1) \ldots (X_i + r - 1)$$

$$Y_j^{s)} = Y_j (Y_j + 1) \ldots (Y_j + s - 1)$$

$$X_i^{(r} = X_i (X_i - 1) \ldots (X_i - r + 1)$$

$$Y_j^{(s} = Y_j (Y_j - 1) \ldots (Y_j - s + 1)$$

la fórmula [6] puede escribirse así

$$B_{r,s} = \frac{\sum_{i} \sum_{j} X_i^{(r} \, Y_j^{(s} \, \eta_{i,j}}{r! \; s!}$$

y puesto que $r$ y $s$ son parámetros constantes, respecto de las variables de sumación, resulta

$$B_{r,s} = \frac{\mathcal{M}_{r,s}}{r! \; s!}$$

La utilización de los momentos binomiales simplifica el proceso del cálculo, puesto que, mediante el esquema de Tschetwerikoff, ellos se obtienen por simples sumas, controlándose, a la vez, fácilmente los resultados.

El método a seguir para dicho cálculo será explicado en el § 4, donde, también, daremos el repertorio de los momentos potenciales dobles en función de los binomiales $B_{r,s}$, que deben emplearse, conforme lo exige el método.

## § 2. Momentos potenciales dobles. Centraje

Habitualmente, cuando se trata de funciones de dos variables independientes, los datos de la experiencia se disponen en una tabla a doble entrada, que suele también denominarse *damero* y que tiene la siguiente forma:

Tabla I

| $\mathcal{Y} \backslash \mathcal{X}$ | $\mathcal{X}_1$ | $\mathcal{X}_2$ | $\mathcal{X}_3$ | $\mathcal{X}_4$ | ... | $\mathcal{X}_i$ | ... | ... | ... | $\mathcal{X}_{n-2}$ | $\mathcal{X}_{n-1}$ | $\mathcal{X}_n$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{Y}_1$ | | | | | | | | | | | | | $\Sigma\mathcal{Y}_1$ |
| $\mathcal{Y}_2$ | | | | | | | | | | | | | $\Sigma\mathcal{Y}_2$ |
| $\vdots$ | | | | | | | | | | | | | $\vdots$ |
| $\mathcal{Y}_j$ | | | | | | $n_{ij}$ | | | | | | | $\Sigma\mathcal{Y}_j$ |
| $\vdots$ | | | | | | | | | | | | | $\vdots$ |
| $\mathcal{Y}_{m-2}$ | | | | | | | | | | | | | $\Sigma\mathcal{Y}_{m-2}$ |
| $\mathcal{Y}_{m-1}$ | | | | | | | | | | | | | $\Sigma\mathcal{Y}_{m-1}$ |
| $\mathcal{Y}_m$ | | | | | | | | | | | | | $\Sigma\mathcal{Y}_m$ |
| | $\Sigma\mathcal{X}_1$ | $\Sigma\mathcal{X}_2$ | $\Sigma\mathcal{X}_3$ | $\Sigma\mathcal{X}_4$ | ... | $\Sigma\mathcal{X}_i$ | ... | ... | ... | $\Sigma\mathcal{X}_{n-2}$ | $\Sigma\mathcal{X}_{n-1}$ | $\Sigma\mathcal{X}_n$ | N |

Las variables $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ están medidas con respecto al origen natural (que es el cero) que está en el ángulo superior izquierdo y ubicadas dichas variables en el centro de cada sub-intervalo, lo que importa que, en realidad, el origen esté desplazado sobre la diagonal del rectángulo que hay en ese ángulo del damero. Las frecuencias definidas por un par $(\mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_j)$ con $\left(\begin{matrix} j=1, 2, \ldots, n \\ i=1, 2, \ldots, m \end{matrix}\right)$ se consideran acumuladas en el centro de la celda que, a dicho par, corresponde.

Los datos experimentales, forman una sucesión discreta y los momentos dobles calculados con respecto a ellos se llaman, como vimos, «momentos dobles absolutos» y también «momentos dobles brutos» o «momentos dobles estadísticos», que hemos definido según la fórmula [1].

Una primera simplificación se obtiene trasladando el origen a un punto escogido de manera tal que se logre operar con cifras más pequeñas, por ej., asignando el valor cero al par de variables para el que la frecuencia sea mayor.

Esto es lo que, con cierta impropiedad, se llama un «origen arbitrario».

Si, en la tabla, a doble entrada, (I), suponemos trasladado el origen al punto definido por el par $(\mathcal{X}_k, \mathcal{Y}_l)$. se tiene: (Tabla II)

$$X_i = \mathcal{X}_i - \mathcal{X}_k$$

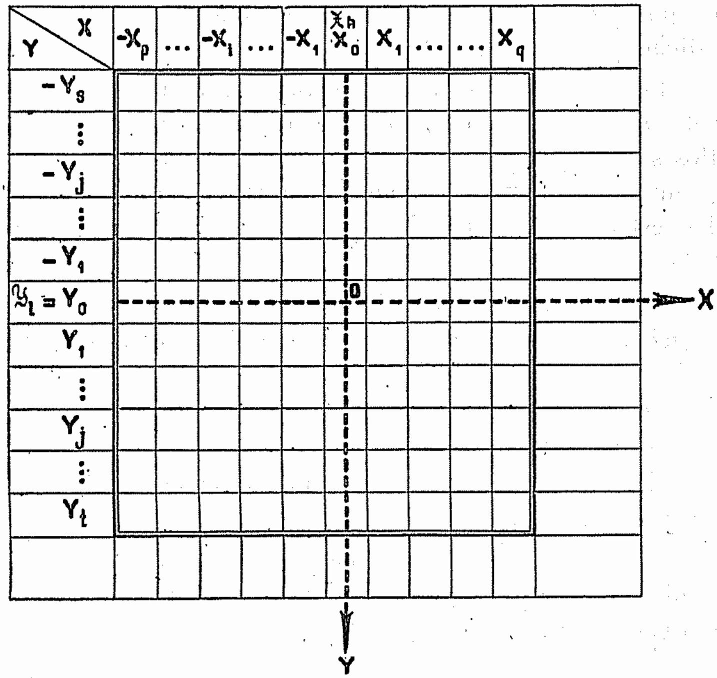
$$Y_j = \mathcal{Y}_j - \mathcal{Y}_l$$

Entonces un momento relativo doble, de orden $r,s$, calculado con respecto a un origen arbitrario es

$$m_{r,s} = \frac{1}{N} \sum_i \sum_j \eta_{i,j} X^r_i Y^s_j \qquad [7]$$

Una segunda simplificación — la más importante — se realiza trasladando el origen al baricentro, punto de equilibrio de las masas que representan las frecuencias y definido, por lo tanto, por la intersección de las medias aritméticas ponderadas de las X y de las Y dadas por $\overline{X}_a$ e $\overline{Y}_a$

Tabla II




Se tendrá entonces

$$\left.\begin{aligned} x_i &= X_i - \overline{X}_a \\ y_j &= Y_j - \overline{Y}_a \end{aligned}\right\} \qquad [8]$$

Las medias aritméticas $\overline{X}_a$ e $\overline{Y}_a$ deben tomarse con el signo que les corresponda; en el caso de la Tabla III resulta

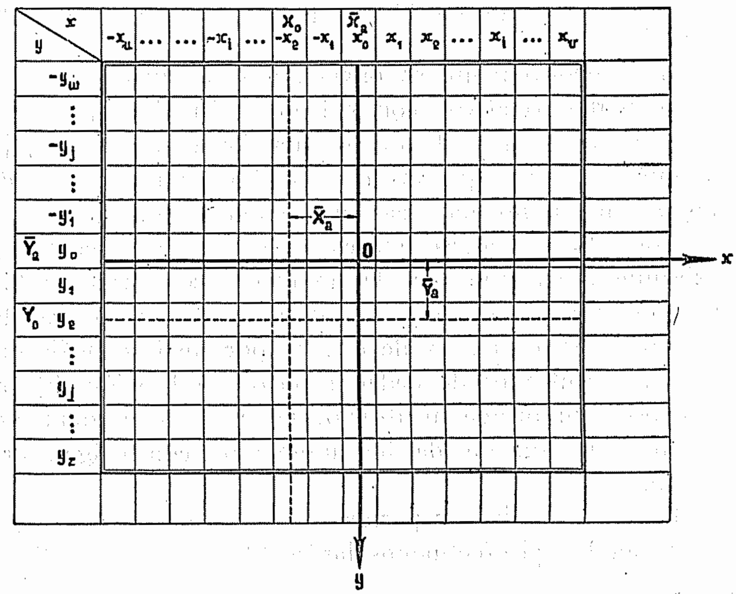
$$\overline{X}_a > o$$

$$\overline{Y}_a < o$$

Un momento relativo centrado doble, de orden r,s, es:

$$\mu_{r,s} = \frac{1}{N} \sum_i \sum_j \eta_{i,j}\, x^r_i\, y^s_j \qquad [9]$$

Tabla III



Por las propiedades de la media aritmética resulta

$$\left.\begin{array}{l} \mu_{1,0} = 0 \\ \\ \mu_{0,1} = 0 \end{array}\right\} \qquad [10]$$

Además, si la superficie es simétrica, cuando cualquiera de los dos sub-índices es impar el momento resulta nulo, es decir que:

$$\begin{aligned} \mu_{2r+1,s} &= 0 \\ \mu_{r,2s+1} &= 0 \\ \mu_{2r+1,\,2s+1} &= 0 \end{aligned}$$

El cálculo de los momentos centrados, aplicando directamente la [9], suele ser penoso.

Los valores de las medias aritméticas $\overline{X}_a$ e $\overline{Y}_a$, casi siempre están dados por expresiones decimales, por lo que, al despejar de las fórmulas de transformación [8] $X_i$ e $Y_j$, para sustituirlas en la [9], se los tiene expresados por números decimales, con lo que la operatoria se complica.

Este inconveniente se obvia si se calculan, primero, los momentos relativos con origen arbitrario $m_{r,s}$ (*) y luego se los centra, utilizando una fórmula de centraje que sale de la [7] que define a dichos momentos, efectuando, en la misma, las sustituciones [8].

Con ello se logra expresar un momento centrado cualesquiera, en función: del momento con origen arbitrario del mismo orden y de los momentos centrados de orden inferior, de $m_{0,1}$ y de $m_{1,0}$ y, por sustitución de los momentos centrados de orden inferior en función de los momentos con origen arbitrario, se expresa, el momento centrado, en función de los momentos con origen arbitrario.

Daremos ambos repertorios.

Si en la [7] efectuamos las sustituciones [8] se tiene que:

$$m_{r,s} = \frac{1}{N} \sum_i \sum_j \eta_{i,j} \, (x_i + \overline{X}_a)^r \, (y_j + \overline{Y}_a)^s$$

y como es

$$\overline{X}_a = m_{1,0}$$

$$\overline{Y}_a = m_{0,1}$$

resulta:

$$m_{r,s} = \frac{1}{N} \sum_i \sum_j \eta_{i,j} \, (x_i + m_{1,0})^r \, (y_j + m_{0,1})^s$$

(*) Ver procedimiento en el § 4.

Desarrollando los binomios se tiene:

$$m_{r,s} = \frac{1}{N}\sum_i \sum_j \eta_{i,j}\Big\{\Big[x_i^r + \binom{r}{1} x_i^{r-1} m_{1,0} + \binom{r}{2} x_i^{r-2} m^2_{1,0} +$$

$$+ \ldots + \binom{r}{r-1} x_i m^{r-1}_{1,0} + m^r_{1,0}\Big]\Big[y_j^s + \binom{s}{1} y_j^{s-1} m_{0,1} +$$

$$+ \binom{s}{2} y_j^{s-2} m^2_{0,1} + \ldots + \binom{s}{s-1} y_j m^{s-1}_{0,1} + m^s_{0,1}\Big]\Big\}$$

quitando los corchetes:

$$m_{r,s} = \frac{1}{N}\sum_i \sum_j \eta_{i,j}\Big\{x_i^r y_j^s + \binom{s}{1} m_{0,1} x_i^r y_j^{s-1} +$$

$$+ \binom{s}{2} m^2_{0,1} x_i^r y_j^{s-2} + \ldots + \binom{s}{s-1} m^{s-1}_{0,1} x_i^r y_j + m^s_{0,1} x_i^r +$$

$$+ \binom{r}{1} m_{1,0} x_i^{r-1} y_j^s + \binom{r}{1}\binom{s}{1} m_{1,0} m_{0,1} x_i^{r-1} y_j^{s-1} +$$

$$+ \ldots + \binom{r}{1}\binom{s}{s-1} m_{1,0} m^{s-1}_{0,1} x_i^{r-1} y_j + \binom{r}{1} m_{1,0} m^s_{0,1} x^{r-1}_i +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ \binom{r}{r-1} m^{r-1}_{1,0} x_i y_j^s + \binom{r}{r-1}\binom{s}{1} m^{r-1}_{1,0} m_{0,1} x_i y_j^{s-1} +$$

$$+ \ldots + \binom{r}{r-1}\binom{s}{s-1} m^{r-1}_{1,0} m^{s-1}_{0,1} x_i y_j +$$

$$+ \binom{r}{r-1} m^{r-1}_{1,0} m^s_{0,1} x_i + m^r_{1,0} y_j^s + \binom{s}{1} m^r_{1,0} m_{0,1} y_j^{s-1} +$$

$$+ \ldots + \binom{s}{s-1} m^r_{1,0} m^{s-1}_{0,1} y_j + m^r_{1,0} m^s_{0,1}\Big\}$$

separando las sumatorias se puede poner:

$$m_{r,s} = \frac{1}{N}\Big\{\sum_i \sum_j \eta_{i,j} x_i^r y_j^s + \binom{s}{1} m_{0,1} \sum_i \sum_j \eta_{i,j} x_i^r y_j^{s-1} +$$

$$+ \binom{s}{2} m^2_{0,1} \sum_i \sum_j \eta_{i,j} x_i^r y_j^{s-2} + \ldots +$$

$$+ \binom{s}{s-1} m^{s-1}_{0,1} \sum_i \sum_j \eta_{i,j} x_i^r y_j + m^s_{0,1} \sum_i \sum_j \eta_{i,j} x_i^r +$$

$$+ \binom{r}{1} m_{1,0} \sum_i \sum_j \eta_{i,j} x_i^{r-1} y_j^s +$$

$$+ \binom{r}{1}\binom{s}{1} m_{1,0}\, m_{0,1} \sum_i \sum_j \eta_{i,j} x_i^{r-1} y_j^{s-1} +$$

$$+\ldots+\binom{r}{1}\binom{s}{s-1} m_{1,0}\, m^{s-1}_{0,1} \sum\sum \eta_{i,j}\, x_i^{r-1} y_j +$$

$$+\binom{r}{1} m_{1,0}\, m^{s}_{0,1} \sum_i \sum_j \eta_{i,j}\, x_i^{r-1} + \ldots +$$

$$+\binom{r}{r-1} m^{r-1}_{1,0} \sum_i \sum_j \eta_{i,j}\, x_i\, y_j^{s} +$$

$$+\binom{r}{r-1}\binom{s}{1} m^{r-1}_{1,0}\, m_{0,1} \sum_i \sum_j \eta_{i,j}\, x_i\, y_j^{s-1} + \ldots +$$

$$+\binom{r}{r-1}\binom{s}{s-1} m^{r-1}_{1,0}\, m^{s-1}_{0,1} \sum_i \sum_j \eta_{i,j}\, x_i\, y_j +$$

$$+\binom{r}{r-1} m^{r-1}_{1,0}\, m^{s}_{0,1} \sum_i \sum_j \eta_{i,j}\, x_i +$$

$$+ m^{r}_{1,0} \sum_i \sum_j \eta_{i,j}\, y^{s}_j + \binom{s}{1} m^{r}_{1,0}\, m_{0,1} \sum_i \sum_j \eta_{i,j}\, y^{s-1}_j +$$

$$+\binom{s}{2} m^{r}_{1,0}\, m^{2}_{0,1} \sum_i \sum_j \eta_{i,j}\, y^{s-2}_j + \ldots +$$

$$+\binom{s}{s-1} m^{r}_{1,0}\, m^{s-1}_{0,1} \sum_i \sum_j \eta_{i,j}\, y_j + m^{r}_{1,0}\, m^{s}_{0,1} \sum_i \sum_j \eta_{i,j} \Big\}$$

Como es

$$\mu_{r,s} = \frac{1}{N} \sum_i \sum_j \eta_{i,j}\, x^{r}_i\, y^{s}_j \qquad \begin{matrix}(r = 0, 1, 2, \ldots) \\ (s = 0, 1, 2, \ldots)\end{matrix}$$

teniendo en cuenta las nulidades que acusa la [10] y también que, por trabajar con frecuencias relativas, es

$$\mu_{0,0} = \frac{1}{N} \sum_i \sum_j \eta_{i,j} = 1$$

resulta

$$m_{r,s} = \mu_{r,s} + \binom{s}{1} m_{0,1}\, \mu_{r,s-1} + \binom{s}{2} m^{2}_{0,1}\, \mu_{r,s-2} +$$

$$+\ldots+\binom{s}{s-1} m^{s-1}_{0,1}\, \mu_{r,1} + m^{s}_{0,1}\, \mu_{r,0} +$$

$$+\binom{r}{1} m_{1,0}\, \mu_{r-1,s} + \binom{r}{1}\binom{s}{1} m_{1,0}\, m_{0,1}\, \mu_{r-1,s-1} + \ldots +$$

$$+\binom{r}{1}\binom{s}{s-1} m_{1,0}\, m^{s-1}_{0,1}\, \mu_{r-1,1} + \binom{r}{1} m_{1,0}\, m^{s}_{0,1}\, \mu_{r-1,0} +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+\binom{r}{r-1} m^{r-1}_{1,0}\, \mu_{1,s} + \binom{r}{r-1}\binom{s}{1} m^{r-1}_{1,0}\, m_{0,1}\, \mu_{1,s-1} +$$

$$+ \ldots + \binom{r}{r-1}\binom{s}{s-1} m^{r-1}_{1,0}\, m^{s-1}_{0,1}\, \mu_{1,1} + \binom{r}{r-1}$$

$$m^{r-1}_{1,0}\, m^{s}_{0,1}\, \mu_{1,0} + m^{r}_{1,0}\, \mu_{0,s} + \binom{s}{1} m^{r}_{1,0}\, m_{0,1}\, \mu_{0,s-1} +$$

$$+ \ldots + \binom{s}{s-1} m^{r}_{1,0}\, m^{s-1}_{0,1}\, \mu_{0,1} + m^{r}_{1,0}\, m^{s}_{0,1}\, \mu_{0,0}$$

es decir

$$m_{r,s} = \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{s} \binom{r}{i}\binom{s}{j} m^{i}_{1,0}\, m^{j}_{0,1}\, \mu_{r-i,s-j}$$

de donde:

$$\mu_{r,s} = m_{r,s} - \binom{s}{1} m_{0,1}\, \mu_{r,s-1} - \binom{s}{2} m^{2}_{0,1}\, \mu_{r,s-2} - \ldots -$$

$$- \binom{s}{s-1} m^{s-1}_{0,1}\, \mu_{r,1} - m^{s}_{0,1}\, \mu_{r,0} -$$

$$- \binom{r}{1} m_{1,0}\, \mu_{r-1,s} - \binom{r}{1}\binom{s}{1} m_{1,0}\, m_{0,1}\, \mu_{r-1,s-1} - \ldots -$$

$$- \binom{r}{1}\binom{s}{s-1} m_{1,0}\, m^{s-1}_{0,1}\, \mu_{r-1,1} - \binom{r}{1} m_{1,0}\, m^{s}_{0,1}\, \mu_{r-1,0} - \ldots -$$

$$- \binom{r}{r-1} m^{r-1}_{1,0}\, \mu_{1,s} - \binom{r}{r-1}\binom{s}{1} m^{r-1}_{1,0}\, m_{0,1}\, \mu_{1,s-1} -$$

$$- \ldots - \binom{r}{r-1}\binom{s}{s-1} m^{r-1}_{1,0}\, m^{s-1}_{0,1}\, \mu_{1,1} -$$

$$- \binom{r}{r-1} m^{r-1}_{1,0}\, m^{s}_{0,1}\, \mu_{1,0} - m^{r}_{1,0}\, \mu_{0,s} -$$

$$- \binom{s}{1} m^{r}_{1,0}\, m_{0,1}\, \mu_{0,s-1} - \ldots - \binom{s}{s-1} m^{r}_{1,0}\, \mu_{0,1} -$$

$$- m^{r}_{1,0}\, m^{s}_{0,1}\, \mu_{0,0} \qquad [11]$$

Con lo cual, se tiene un momento centrado de orden *r,s*, dado en función del momento bruto del mismo órden, de los momentos centrados de órden inferior, de $m_{1,0}$ y de $m_{0,1}$.

Comenzando el cálculo por los momentos $\mu_{r,s}$ de órden menor, que son aquellos en que es

$$r + s = 2$$

puesto que

$$\mu_{0,0} = 1$$
$$\mu_{1,0} = \mu_{0,1} = 0$$

se tiene que:

$$\mu_{2,0} = m_{2,0} - m^2_{1,0}$$
$$\mu_{1,1} = m_{1,1} - m_{1,0}\, m_{0,1}$$
$$\mu_{0,2} = m_{0,2} - m^2_{0,1}$$

Estas fórmulas permiten, por sustituciones sucesivas, expresar a los momentos centrados $\mu_{r,s}$, para $r+s > 2$, en función, sólo, de los momentos brutos.

Se obtiene así el siguiente repertorio [12].

$$\mu_{0,0} = 1$$
$$\mu_{1,0} = 0$$
$$\mu_{0,1} = 0$$
$$\mu_{2,0} = m_{2,0} - m^2_{1,0}$$
$$\mu_{1,1} = m_{1,1} - m_{1,0}\, m_{0,1}$$
$$\mu_{0,2} = m_{0,2} - m^2_{0,1}$$
$$\mu_{3,0} = m_{3,0} - 3\, m_{2,0}\, m_{1,0} + 2\, m^3_{1,0}$$
$$\mu_{2,1} = m_{2,1} - m_{2,0}\, m_{0,1} - 2\, m_{1,0}\, m_{1,1} + 2\, m^2_{1,0}\, m_{0,1}$$
$$\mu_{1,2} = m_{1,2} - m_{0,2}\, m_{1,0} - 2\, m_{0,1}\, m_{1,1} + 2\, m^2_{0,1}\, m_{1,0}$$
$$\mu_{0,3} = m_{0,3} - 3\, m_{0,2}\, m_{0,1} + 2\, m^3_{0,1}$$
$$\mu_{4,0} = m_{4,0} - 4\, m_{3,0}\, m_{1,0} + 6\, m_{2,0}\, m^2_{1,0} - 3\, m^4_{1,0}$$
$$\mu_{3,1} = m_{3,1} - m_{3,0}\, m_{0,1} - 3\, m^3_{1,0}\, m_{0,1} - 3\, m_{2,1}\, m_{1,0} + \\ + 3\, m_{2,0}\, m_{1,0}\, m_{0,1} + 3\, m^2_{1,0}\, m_{1,1}$$
$$\mu_{2,2} = m_{2,2} - 2\, m_{2,1}\, m_{0,1} + m_{2,0}\, m^2_{0,1} + 4\, m_{1,0}\, m_{0,1}\, m_{1,1} - \\ - 3\, m^2_{1,0}\, m^2_{0,1} - 2\, m_{1,0}\, m_{1,2} + m^2_{1,0}\, m_{0,2}$$
$$\mu_{1,3} = m_{1,3} - m_{0,3}\, m_{1,0} - 3\, m^3_{0,1}\, m_{1,0} - 3\, m_{1,2}\, m_{0,1} + \\ + 3\, m_{0,2}\, m_{0,1}\, m_{1,0} + 3\, m^2_{0,1}\, m_{1,1}$$
$$\mu_{0,4} = m_{0,4} - 4\, m_{0,3}\, m_{0,1} + 6\, m_{0,2}\, m^2_{0,1} - 3\, m^4_{0,1}$$
$$\mu_{5,0} = m_{5,0} - 5\, m_{4,0}\, m_{1,0} + 10\, m_{3,0}\, m^2_{1,0} - 10\, m_{2,0}\, m^3_{1,0} + \\ + 4\, m^5_{1,0}$$

$$\mu_{4,1} = m_{4,1} - m_{4,0}\, m_{0,1} - 4\, m_{3,1}\, m_{1,0} + 4\, m_{3,0}\, m_{1,0}\, m_{0,1} +$$
$$+ 6\, m_{2,1}\, m^2_{1,0} - 6\, m_{2,0}\, m^2_{1,0}\, m_{0,1} + 20\, m_{1,1}\, m^3_{1,0} +$$
$$+ 4\, m^4_{1,0}\, m_{0,1}$$

$$\mu_{3,2} = m_{3,2} - 2\, m_{3,1}\, m_{0,1} + m_{3,0}\, m^2_{0,1} - 3\, m_{2,2}\, m_{1,0} +$$
$$+ 6\, m_{2,1}\, m_{1,0}\, m_{,01} - 3\, m_{2,0}\, m_{1,0}\, m^2_{0,1} + 3\, m_{1,2}\, m^2_{1,0} +$$
$$+ 6\, m_{1,1}\, m^2_{1,0}\, m_{0,1} - m^3_{1,0}\, m_{0,2} + 4\, m^3_{1,0}\, m^2_{0,1}$$

$$\mu_{2,3} = m_{2,3} - 3\, m_{2,2}\, m_{0,1} + 3\, m_{2,1}\, m^2_{0,1} - 2\, m_{1,3}\, m_{1,0} +$$
$$+ 6\, m_{1,2}\, m_{1,0}\, m_{0,1} + 6\, m_{1,1}\, m_{1,0}\, m^2_{0,1} - m_{2,0}\, m^3_{0,1} +$$
$$+ m_{0,3}\, m^2_{1,0} - 3\, m^2_{1,0}\, m_{0,1}\, m_{0,2} + 4\, m^2_{1,0}\, m^3_{0,1}$$

$$\mu_{1,4} = m_{1,4} - m_{0,4}\, m_{1,0} - 4\, m_{1,3}\, m_{0,1} + 4\, m_{0,3}\, m_{0,1}\, m_{1,0} +$$
$$+ 6\, m_{1,2}\, m^2_{0,1} - 6\, m_{0,2}\, m^2_{0,1}\, m_{1,0} + 20\, m_{1,1}\, m^3_{0,1} +$$
$$+ 4\, m^4_{0,1}\, m_{1,0}$$

$$\mu_{0,5} = m_{0,5} - 5\, m_{0,4}\, m_{0,1} + 10\, m_{0,3}\, m^2_{0,1} - 10\, m_{0,2}\, m^3_{0,1} +$$
$$+ 4\, m^5_{0,1}$$

$$\mu_{6,0} = m_{6,0} - 6\, m_{5,0}\, m_{1,0} + 15\, m_{4,0}\, m^2_{1,0} - 20\, m_{3,0}\, m^3_{1,0} +$$
$$+ 15\, m_{2,0}\, m^4_{1,0} - 5\, m^6_{1,0}$$

$$\mu_{5,1} = m_{5,1} - m_{5,0}\, m_{0,1} - 5\, m_{4,1}\, m_{1,0} + 5\, m_{4,0}\, m_{1,0}\, m_{0,1} +$$
$$+ 10\, m_{3,1}\, m^2_{1,0} - 10\, m_{3,0}\, m^2_{1,0}\, m_{0,1} - 10\, m_{2,1}\, m^3_{1,0} +$$
$$+ 10\, m_{2,0}\, m^3_{1,0}\, m_{0,1} - 55\, m_{1,1}\, m^4_{1,0} - 5\, m^5_{1,0}\, m_{0,1}$$

$$\mu_{4,2} = m_{4,2} - 2\, m_{4,1}\, m_{0,1} - 4\, m_{3,2}\, m_{1,0} + m_{4,0}\, m^2_{0,1} +$$
$$+ 8\, m_{3,1}\, m_{1,0}\, m_{0,1} + 6\, m_{2,2}\, m^2_{1,0} - 4\, m_{3,0}\, m_{1,0}\, m^2_{0,1} -$$
$$- 12\, m_{2,1}\, m^2_{1,0}\, m_{0,1} + 6\, m_{2,0}\, m^2_{1,0}\, m^2_{0,1} -$$
$$- 40\, m_{1,1}\, m^3_{1,0}\, m_{0,1} + m_{0,2}\, m^4_{1,0} - 4\, m_{1,2}\, m^3_{1,0} -$$
$$- 5\, m^2_{0,1}\, m^4_{1,0}$$

$$\mu_{3,3} = m_{3,3} - m_{3,2}\, m_{0,1} - 3\, m_{2,3}\, m_{1,0} + 3\, m_{3,1}\, m^2_{0,1} +$$
$$+ 9\, m_{2,2}\, m_{1,0}\, m_{0,1} + 3\, m_{1,3}\, m^2_{1,0} - 9\, m_{2,1}\, m_{1,0}\, m^2_{0,1} -$$
$$- 9\, m_{1,2}\, m^2_{1,0}\, m_{0,1} - 27\, m_{1,1}\, m^2_{1,0}\, m^2_{0,1} +$$
$$+ 3\, m_{0,2}\, m^3_{1,0}\, m_{0,1} - m_{3,0}\, m^3_{0,1} + 30\, m_{2,0}\, m_{1,0}\, m^3_{0,1} -$$
$$- m_{0,3}\, m_{1,0}^3 - 5\, m^3_{1,0}\, m^3_{0,1}$$

$$\mu_{2,4} = m_{2,4} - 4\, m_{2,3}\, m_{0,1} + 6\, m_{2,2}\, m^2_{0,1} - 4\, m_{2,1}\, m^3_{0,1} +$$
$$+ m_{2,0}\, m^4_{0,1} + 8\, m_{1,3}\, m_{1,0}\, m_{0,1} - 2\, m_{1,4}\, m_{1,0} -$$
$$- 12\, m_{1,2}\, m_{1,0}\, m^2_{0,1} - 40\, m_{1,1}\, m_{1,0}\, m^3_{0,1} +$$
$$+ m_{0,4}\, m^2_{1,0} - 4\, m_{0,3}\, m^2_{1,0}\, m_{0,1} + 6\, m_{0,2}\, m^2_{1,0}\, m^2_{0,1} -$$
$$- 5\, m^2_{1,0}\, m^4_{0,1}$$

$$\mu_{1,5} = m_{1,5} - 5\, m_{1,4}\, m_{0,1} + 10\, m_{1,3}\, m^2_{0,1} - 10\, m_{1,2}\, m^3_{0,1} -$$
$$- 55\, m_{1,1}\, m^4_{0,1} + 5\, m_{0,4}\, m_{1,0}\, m_{0,1} - m_{0,5}\, m_{1,0} -$$
$$- 10\, m_{0,3}\, m^2_{0,1}\, m_{1,0} + 10\, m_{0,2}\, m_{1,0}\, m^3_{0,1} - 5\, m_{1,0}\, m^5_{0,1}$$
$$\mu_{0,6} = m_{0,6} - 6\, m_{0,5}\, m_{0,1} + 15\, m_{0,4}\, m^2_{0,1} - 20\, m_{0,3}\, m^3_{0,1} +$$
$$+ 15\, m_{0,2}\, m^4_{0,1} - 5\, m^6_{0,1}$$

Para que pueda servir de contralor damos a continuación el repertorio de los momentos dobles centrados en función: del momento bruto del mismo orden, de los centrados de órden inferior, de $m_{1,0}$ y $m_{0,1}$ [13]

$$\mu_{0,0} = 1$$
$$\mu_{1,0} = 0$$
$$\mu_{0,1} = 0$$
$$\mu_{2,0} = m_{2,0} - m^2_{1,0}$$
$$\mu_{1,1} = m_{1,1} - m_{1,0}\, m_{0,1}$$
$$\mu_{0,2} = m_{0,2} - m^2_{0,1}$$
$$\mu_{3,0} = m_{3,0} - 3\, m_{1,0}\, \mu_{2,0} - m^3_{1,0}$$
$$\mu_{2,1} = m_{2,1} - m_{0,1}\, \mu_{2,0} - 2\, m_{1,0}\, \mu_{1,1} - m^2_{1,0}\, m_{0,1}$$
$$\mu_{1,2} = m_{1,2} - m_{1,0}\, \mu_{0,2} - 2\, m_{0,1}\, \mu_{1,1} - m_{1,0}\, m^2_{0,1}$$
$$\mu_{0,3} = m_{0,3} - 3\, m_{0,1}\, \mu_{0,2} - m^3_{0,1}$$
$$\mu_{4,0} = m_{4,0} - 4\, m_{1,0}\, \mu_{3,0} - 6\, m^2_{1,0}\, \mu_{2,0} - m^4_{1,0}$$
$$\mu_{3,1} = m_{3,1} - m_{0,1}\, \mu_{3,0} - 3\, m_{1,0}\, \mu_{2,1} - 3\, m_{1,0}\, m_{0,1}\, \mu_{2,0} -$$
$$- 3\, m^2_{1,0}\, \mu_{1,1} - m^3_{1,0}\, m_{0,1}$$
$$\mu_{2,2} = m_{2,2} - 2\, m_{0,1}\, \mu_{2,1} - m^2_{0,1}\, \mu_{2,0} - 2\, m_{1,0}\, \mu_{1,2} -$$
$$- 4\, m_{1,0}\, m_{0,1}\, \mu_{1,1} - m^2_{1,0}\, \mu_{0,2} - m^2_{1,0}\, m^2_{0,1}$$
$$\mu_{1,3} = m_{1,3} - 3\, m_{0,1}\, \mu_{1,2} - 3\, m^2_{0,1}\, \mu_{1,1} - m_{1,0}\, \mu_{0,3} -$$
$$- 3\, m_{1,0}\, \mu_{0,2}\, m_{0,1} - m_{1,0}\, m^3_{0,1}$$
$$\mu_{0,4} = m_{0,4} - 4\, m_{0,1}\, \mu_{0,3} - 6\, m^2_{0,1}\, \mu_{0,2} - m^4_{0,1}$$
$$\mu_{5,0} = m_{5,0} - 5\, m_{1,0}\, \mu_{4,0} - 10\, m^2_{1,0}\, \mu_{3,0} - 10\, m^3_{1,0}\, \mu_{2,0} -$$
$$- m^5_{1,0}.$$
$$\mu_{4,1} = m_{4,1} - m_{0,1}\, \mu_{4,0} - 4\, m_{1,0}\, \mu_{3,1} - 4\, m_{1,0}\, m_{0,1}\, \mu_{3,0} -$$
$$- 6\, m^2_{1,0}\, \mu_{2,1} - 6\, m^2_{1,0}\, m_{0,1}\, \mu_{2,0} - 4\, m^3_{1,0}\, \mu_{1,1} - m^4_{1,0}\, m_{0,1}$$

$$\mu_{3,2} = m_{3,2} - 2\, m_{0,1}\, \mu_{3,1} - m^2_{0,1}\, \mu_{3,0} - 3\, m_{1,0}\, \mu_{2,2} -$$
$$- 6\, m_{1,0}\, m_{0,1}\, \mu_{2,1} - 3\, m_{1,0}\, m^2_{0,1}\, \mu_{2,0} - 3\, m^2_{1,0}\, \mu_{1,2} -$$
$$- 6\, m^2_{1,0}\, m_{0,1}\, \mu_{1,1} - m^3_{1,0}\, \mu_{0,2} - m^3_{1,0}\, m^2_{0,1}$$

$$\mu_{2,3} = m_{2,3} - 3\, m_{0,1}\, \mu_{2,2} - 3\, m^2_{0,1}\, \mu_{2,1} - m^3_{0,1}\, \mu_{2,0} -$$
$$- 2\, m_{1,0}\, \mu_{1,3} - 6\, m_{1,0}\, m_{0,1}\, \mu_{1,2} - 6\, m_{1,0}\, m^2_{0,1}\, \mu_{1,1} -$$
$$- m^2_{1,0}\, \mu_{0,3} - 3\, m^2_{1,0}\, m_{0,1}\, \mu_{0,2} - m^2_{1,0}\, m^3_{0,1}$$

$$\mu_{1,4} = m_{1,4} - 4\, m_{0,1}\, \mu_{1,3} - 6\, m^2_{0,1}\, \mu_{1,2} - 4\, m^3_{1,0}\, \mu_{1,1} -$$
$$- m_{1,0}\, \mu_{0,4} - 4\, m_{1,0}\, m_{0,1}\, \mu_{0,3} - 6\, m_{1,0}\, m^2_{0,1}\, \mu_{0,2} -$$
$$- m_{1,0}\, m^4_{0,1}$$

$$\mu_{0,5} = m_{0,5} - 5\, m_{0,1}\, \mu_{0,4} - 10\, m^2_{0,1}\, \mu_{0,3} - 10\, m^3_{0,1}\, \mu_{0,2} -$$
$$- m^5_{0,1}$$

$$\mu_{6,0} = m_{6,0} - 6\, m_{1,0}\, \mu_{5,0} - 15\, m^2_{1,0}\, \mu_{4,0} - 20\, m^3_{1,0}\, \mu_{3,0} -$$
$$- 15\, m^4_{1,0}\, \mu_{2,0} - m^6_{1,0}$$

$$\mu_{5,1} = m_{5,1} - m_{0,1}\, \mu_{5,0} - 5\, m_{1,0}\, \mu_{4,1} - 5\, m_{1,0}\, m_{0,1}\, \mu_{4,0} -$$
$$- 10\, m^2_{1,0}\, \mu_{3,1} - 10\, m^2_{1,0}\, m_{0,1}\, \mu_{3,0} - 10\, m^3_{1,0}\, \mu_{2,1} -$$
$$- 10\, m^3_{1,0}\, m_{0,1}\, \mu_{2,0} - 5\, m^4_{1,0}\, \mu_{1,1} - m^5_{1,0}\, m_{0,1}$$

$$\mu_{4,2} = m_{4,2} - 2\, m_{0,1}\, \mu_{4,1} - m^2_{0,1}\, \mu_{4,0} - 4\, m_{1,0}\, \mu_{3,2} -$$
$$- 8\, m_{1,0}\, m_{0,1}\, \mu_{3,1} - 4\, m_{1,0}\, m^2_{0,1}\, \mu_{3,0} - 6\, m^2_{1,0}\, \mu_{2,2} -$$
$$- 12\, m^2_{1,0}\, m_{0,1}\, \mu_{2,1} - 6\, m^2_{1,0}\, m^2_{0,1}\, \mu_{2,0} - 4\, m^3_{1,0}\, \mu_{1,2} -$$
$$- 8\, m^3_{1,0}\, m_{0,1}\, \mu_{1,1} - m^4_{1,0}\, \mu_{2,0} - m^4_{1,0}\, m^2_{0,1}$$

$$\mu_{3,3} = m_{3,3} - 3\, m_{0,1}\, \mu_{3,2} - 3\, m^2_{1,0}\, \mu_{3,1} - m^3_{0,1}\, \mu_{3,0} -$$
$$- 3\, m_{1,0}\, \mu_{2,3} - 9\, m_{1,0}\, m_{0,1}\, \mu_{2,2} - 9\, m_{1,0}\, m^2_{0,1}\, \mu_{2,1} -$$
$$- 3\, m_{1,0}\, m^3_{0,1}\, \mu_{2,0} - 3\, m^2_{1,0}\, \mu_{1,3} - 9\, m^2_{1,0}\, m_{0,1}\, \mu_{1,2}$$
$$- 9\, m^2_{1,0}\, m^2_{0,1}\, \mu_{1,1} - m^3_{1,0}\, \mu_{0,3} - 3\, m^3_{1,0}\, m_{0,1}\, \mu_{0,2} -$$
$$- m^3_{1,0}\, m^3_{0,1}$$

$$\mu_{2,4} = m_{2,4} - 4\, m_{0,1}\, \mu_{2,3} - 6\, m^2_{0,1}\, \mu_{2,2} - 4\, m^3_{0,1}\, \mu_{2,1} -$$
$$- m^4_{0,1}\, \mu_{2,0} - 2\, m_{1,0}\, \mu_{1,4} - 8\, m_{1,0}\, m_{0,1}\, \mu_{1,3} -$$
$$- 12\, m_{1,0}\, m^2_{0,1}\, \mu_{1,2} - 8\, m_{1,0}\, m^3_{0,1}\, \mu_{1,1} - m^2_{1,0}\, \mu_{0,4} -$$
$$- 4\, m^2_{1,0}\, m_{0,1}\, \mu_{0,3} - 6\, m^2_{1,0}\, m^2_{0,1}\, \mu_{0,2} - m^2_{1,0}\, m^4_{0,1}$$

$$\mu_{1,5} = m_{1,5} - 5\, m_{0,1}\, \mu_{1,4} - 10\, m^2_{0,1}\, \mu_{1,3} - 10\, m^3_{0,1}\, \mu_{1,2} -$$
$$- 5\, m^4_{0,1}\, \mu_{1,1} - m_{1,0}\, \mu_{0,5} - 5\, m_{1,0}\, m_{0,1}\, \mu_{0,4} -$$
$$- 10\, m_{1,0}\, m^2_{0,1}\, \mu_{0,3} - 10\, m_{1,0}\, m^3_{0,1}\, \mu_{0,2} - m_{1,0}\, m^5_{0,1}$$

$$\mu_{0,6} = m_{0,6} - 6\, m_{0,1}\, \mu_{0,5} - 15\, m^2_{0,1}\, \mu_{0,4} - 20\, m^3_{0,1}\, \mu_{0,3} -$$
$$- 15\, m^4_{0,1}\, \mu_{0,2} - m^6_{0,1}$$

## § 3. Correcciones de Sheppard

Dada una distribución de frecuencias experimentales y su disposición en una tabla a doble entrada, tal como (III), en que las variables $x$ e $y$ están ubicadas en el centro de cada subintervalo, las frecuencias correspondientes a cada par $(xy)$ se consideran acumuladas en el centro de la celda respectiva.

Dijimos que, en estos casos, un momento relativo doble, centrado, de órden $r,s$, se definía así:

$$\mu_{r,s} = \sum_i \sum_j z_{i.j} x^r_i y^s_j \quad [13]$$

en que, por $z_{i,j}$ designamos, genéricamente, las frecuencias que corresponden a los pares $x_i$ $y_j$ tales que:

$$x_i - {}^1/_2 \Delta x < x < x_i + {}^1/_2 \Delta x.$$

$$y_j - {}^1/_2 \Delta y < y < y_j + {}^1/_2 \Delta y$$

en que es:

$$x_{i+{}^1/_2} - x_{i-{}^1/_2} = \Delta x = \omega \text{ (constante)}$$

$$y_{j+{}^1/_2} - y_{j-{}^1/_2} = \Delta y = \lambda \text{ (constante)}$$

En este trabajo suponemos que es $\omega = \lambda = 1$.

Con $z_{i,j}$ se simboliza, pues, una sucesión discreta de datos de la experiencia, dados por lo tanto, en el campo discontinuo.

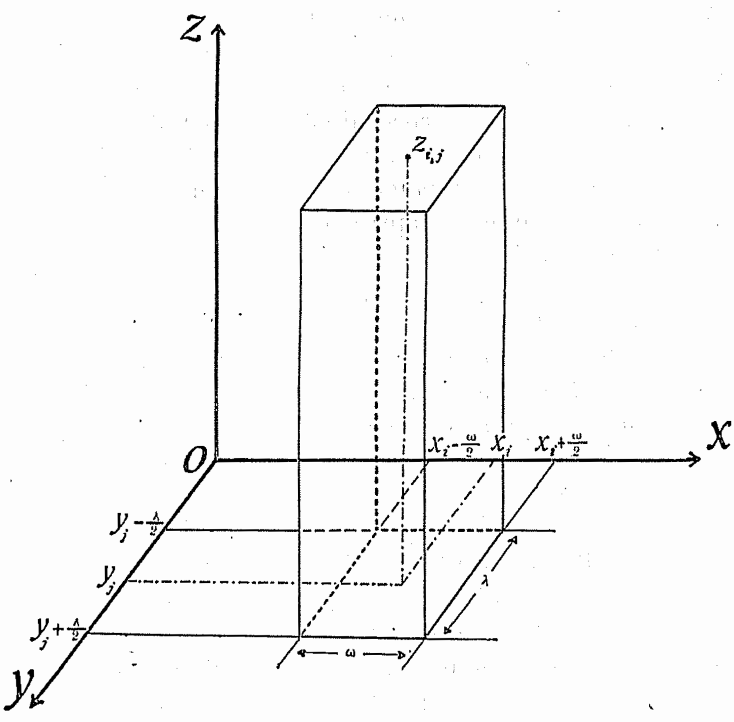
Si se conociera, en el campo continuo, la ley que rige el acaecer del fenómeno, definida por una función f(x,y), siendo

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = 1$$

donde D es el dominio, que ahora puede ser finito o infinito, en que la función f(x,y) está definida; el momento doble centrado correspondiente, de órden $r,s$, estaría definido así:

$$\mu'_{r,s} = \iint_D f(x,y)\, x^r\, y^s\, dx\, dy \qquad [14]$$

En la [13], los elementos de la doble sumatoria, evidentemente se pueden representar por volúmenes de prismas de bases rectangulares, cuyos lados son $\omega$ y $\lambda$ y la altura dada por las frecuencias $z_{i,j}$. Haciendo su representación gráfica se tendría:




Si la variación es continua, y excluído el caso f (x,y) = K (constante), es indudable que, para el mismo elemento $\omega\lambda$ — que puede ser considerado como un elemento diferencial de área — corresponderá un elemento diferencial de volumen, diferente del anterior, por la distinta y variable distribución de las masas en su interior.

Definiendo un volumen elemental $\omega \lambda z_{i,j}$ en función del incremento que sufre $f(x,y)$ cuando pasa del valor $f(x_i,y_j)$ al $f(x_i+h,\ y_j+k)$, podremos poner

$$\omega \lambda z_{i,j} = \int_{-1/2\,\omega}^{+1/2\,\omega} \int_{-1/2\,\lambda}^{+1/2\,\lambda} f(x_i+h,\ y_j+k)\, dh\, dk \qquad [15]$$

Los momentos teóricos [14] deducidos por el cálculo de la forma analítica adoptada, son desconocidos y deben darse en función de los momentos experimentales [13]. Si los intervalos $\omega$ y $\lambda$ son pequeños, los valores $\mu'_{r,s}$ y $\mu_{r,s}$ serán aproximados, y lo que se desea es obtener, haciendo sobre $f(x,y)$ ciertas hipótesis generales, a veces verificadas, una expresión de las pequeñas diferencias existentes entre estos momentos, expresión que nos permitirá efectuar mejores aproximaciones.

Esta diferencia

$$\mu'_{r,s} - \mu_{r,s}$$

es la que vamos a corregir siguiendo, para ello, el método que Sheppard aplicara en el caso de una variable (*).

El proceso paralelo, para el caso de dos variables independientes, se desarrolla sobre la base de las siguientes hipótesis:

1.°) La función $f(x,y)$ se anula en el contorno del dominio, finito o infinito, en que $x,y$ varían.

2.°) Las derivadas parciales sucesivas de $f(x,y)$ respecto de $x$ y respecto de $y$ también se anulan en el contorno de dicho dominio, así como, si el dominio es infinito, se anulan los productos de la forma

$x^n y^m \frac{\delta^{r+s} f(xy)}{\delta x^r\, \delta y^s}$ cualesquiera sean $r$ y $s$.

(*) SHEPPARD, W. F., *Proceed of the Math.* Soc. Vol. XXIX, páginas 353 - 380.

3.º) Sustitución, sin error sensible, de sumatorias por integrales. Es decir, que, siendo, según la fórmula de Euler-Maclaurin extendida a dos variables,

$$\omega\lambda \sum\sum x^n y^m \frac{\delta^{r+s} f(xy)}{\delta x^r \delta y^s} = \iint x^n y^m \frac{\delta^{r+s} f(x,y)}{\delta x^r \delta y^s} dx\, dy + R$$

se supone que R es nulo o que puede despreciarse.

Desarrollando en [15] la función $f(x_i + h, y_j + k)$ en serie de Taylor, según las potencias de $h$ y de $k$, se se tiene:

$$\omega\lambda z_{i,j} = \int_{-1/2\,\omega}^{+1/2\,\omega} \int_{-1/2\,\lambda}^{+1/2\,\lambda} [f(x_i, y_j) + h f'_x(x_i, y_j) + k f'_y(x_i, y_j) +$$

$$+ \frac{h^2}{2!} f''_{x.x}(x_i, y_j) + \binom{2}{1} \frac{h k}{2!} f''_{xy}(x_i, y_j) + \frac{k^2}{2!} f''_{yy}(x_i, y_j) +$$

$$+ \frac{h^3}{3!} f'''_{x.x.x}(x_i, y_j) + \binom{3}{1} \frac{h^2 k}{3!} f'''_{x.x.y}(x_i, y_j) +$$

$$+ \binom{3}{2} \frac{h k^2}{3!} f'''_{xyy}(x_i, y_j) + \frac{k^3}{3!} f'''_{yyy}(x_i, y_j) + \frac{h^4}{4!} f^{IV}_{xxxx}(x_i, y_j) +$$

$$+ \binom{4}{1} \frac{h^3 k}{4!} f^{IV}_{xxxy}(x_i, y_j) + \binom{4}{2} \frac{h^2 k^2}{4!} f^{IV}_{xxyy}(x_i, y_j) +$$

$$+ \binom{4}{3} \frac{h k^3}{4!} f^{IV}_{xyyy}(x_i, y_j) + \frac{h^4}{4!} f^{IV}_{yyyy}(x_i, y_j) + \ldots] dh\, dk$$

Por estar las variables $h$ y $k$ integradas en intervalos simétricos, respecto del origen, los términos que contienen potencias impares de $h$ o de $k$ se anulan y queda:

$$\omega\lambda z_{i,j} = \int_{-1/2\,\omega}^{+1/2\,\omega} \int_{-1/2\,\lambda}^{+1/2\,\lambda} [f(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2!} f''_{xx}(x_i y_j) +$$

$$+ \frac{k^2}{2!} f''_{yy}(x_i, y_j) + \frac{k^4}{4!} f^{IV}_{xxxx}(x_i, y_j) +$$

$$+ \binom{4}{2} \frac{h^2 k^2}{4!} f^{IV}_{xxyy}(x_i, y_j) + \ldots] dh\, dk$$

Suponiendo que el campo de convergencia de la serie de Taylor, comprende al dominio rectangular de lados $\omega,\lambda$ el desarrollo en serie converge uniformemente, en este dominio que es simétrico respecto del origen; es legítimo, por tanto, integrar, en el segundo miembro, término a término, con lo que se tiene

$$\omega\lambda z_{ij} = f(x_i,y_j)\,\omega\lambda + \frac{\omega^3\lambda}{2!3.2^2} f''_{xx}(x_i y_j) + \frac{\omega\lambda^3}{2!3.2^2} f''_{yy}(x_i,y_j) +$$

$$+ \frac{\lambda^5\omega}{4!5.2^4} f^{IV}_{xxxx}(x_i,y_j) + \binom{4}{2}\frac{\omega^3\lambda^3}{4!3.3.2^4} f^{IV}_{xxyy}(x_i,y_j) +$$

$$+ \frac{\omega^5\lambda}{4!5.2^4} f^{IV}_{yyyy}(x_i,y_j) + \ldots \qquad [16]$$

expresión que, simbólicamente, podemos escribir

$$\omega\lambda z_{i,j} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\binom{2(r+s)}{2s}\frac{\omega^{2r+1}\lambda^{2s+1}\dfrac{\delta^{2(r+s)} f(x_i,y_j)}{\delta x^{2r}\delta y^{2s}}}{2^{2(r+s)}(2r+1)(2s+1)[2(r+s)]!}$$

Con esta fórmula, por ser su primer miembro igual al primer miembro de la [15], tenemos definido un volumen elemental.

Si multiplicamos sus dos miembros por $x_i^r\ y_j^s$ y sumamos, extendiendo la doble sumatoria a los pares en que $x,y$ varían, tendremos el momento centrado doble de órden r,s que define la [9], donde $\omega=\lambda=1$. Es decir

$$\mu_{r,s} = \sum_i\sum_j x_i^r\, y_j^s\, z_{i,j}\,\omega\lambda =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\binom{2(r+s)}{2s}\frac{\omega^{2r+1}\lambda^{2s+1}}{2^{(2r+s)}(2r+1)(2s+1)[2(r+s)]!}\times$$

$$\times \sum_i\sum_j \frac{\delta^{2(r+s)} f(x_i,y_j)}{\delta x^{2r}\delta y^{2s}}\, x_i^r\, y_j^s \qquad [17]$$

Mediante la expresión de los momentos centrados, dados por la fórmula anterior, obtenemos las diferencias que los relacionan con los corregidos.

Desarrollando la sumatoria externa de la fórmula [17], que es lo mismo que haber operado con el desarrollo dado por la [16], resulta

$$\mu_{r,s} = \omega\lambda \sum_i \sum_j x_i^r y_j^s z_{i,j} = \omega\lambda \sum_i \sum_j x_i^r y_j^s f(x_i, y_j) +$$

$$+ \frac{\omega^3\lambda}{2!3.2^2} \sum_i \sum_j x_i^r y_j^s f''_{xx}(x_i, y_j) +$$

$$+ \frac{\omega\lambda^3}{2!3.2^2} \sum_i \sum_j x_i^r y_j^s f''_{yy}(x_i, y_j) + \frac{\lambda^5\omega}{4!5.2^4} \sum_i \sum_j x_i^r y_j^s f^{IV}_{xxxx}(x_i, y_j) +$$

$$+ \binom{4}{2} \frac{\omega^3\lambda^3}{4!3.3.2^4} \sum_i \sum_j x_i^r y_j^s f^{IV}_{xxyy}(x_i, y_j) +$$

$$+ \frac{\omega^5\lambda}{4!5.2^4} \sum_i \sum_j x_i^r y_j^s f^{IV}_{yyyy}(x_i, y_j) + \ldots$$

Apoyándonos en la hipótesis 3.ª, podemos sustituir las sumatorias del segundo miembro por integrales, con lo que:

$$\mu_{r,s} = \omega\lambda \sum_i \sum_j x_i^r y_j^s z_{i,j} = \iint_D x_i^r y_j^s f(x_i, y_j)\, dx\, dy +$$

$$+ \frac{\omega^2}{2!3.2^2} \iint_D x_i^r y_j^s f''_{xx}(x_i, y_j)\, dx\, dy +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{2!3.2^2} \iint_D x_i^r y_j^s f''_{yy}(x_i, y_j)\, dx\, dy +$$

$$+ \frac{\lambda^4}{4!5.2^4} \iint_D x_i^r y_j^s f^{IV}_{xxxx}(x_i, y_j)\, dx\, dy +$$

$$+ \binom{4}{2} \frac{\omega^2\lambda^2}{4!3.3.2^4} \iint_D x_i^r y_j^s f^{IV}_{xxyy}(x_i, y_j)\, dx\, dy +$$

$$+ \frac{\omega^4}{4!5.2^4} \iint_D x_i^r y_j^s f^{IV}_{yyyy}(x_i, y_j)\, dx\, dy + \ldots \qquad [18]$$

La integral del primer término, es el momento corregido doble, de órden *r,s,* que define la [14], y de la integración por partes de los términos subsiguientes obtenemos estos resultados:

$$\frac{r\,(r-1)\,\omega^2}{2|3.2^2}\iint_D x_i^{r-2}\,y_j^{s}\,f\,(x_i,y_j)\,dx\,dy=\frac{r\,(r-1)\,\omega^2}{2|3.2^2}\,\mu'_{r-2,s}$$

$$\frac{s\,(s-1)\,\lambda^2}{2|3.2^2}\iint_D x_i^{r}\,y_j^{s-2}\,f\,(x_i,y_j)\,dx\,dy=\frac{s\,(s-1)\,\lambda^2}{2|3.2^2}\,\mu'_{r,s-2}$$

$$\frac{r\,(r-1)\,(r-2)\,(r-3)\,\lambda^4}{4|5.2^4}\iint_D x_i^{r-4}\,y_j^{s}\,f\,(x_i,y_j)\,dx\,dy=$$

$$=\frac{r\,(r-1)\,(r-2)\,(r-3)\,\lambda^4}{4|5.2^4}\,\mu'_{r-4,s}$$

$$\binom{4}{2}\frac{r\,(r-1)\,s\,(s-1)\,\omega^2\,\lambda^2}{4|3.3.2^4}\iint_D x_i^{r-2}\,y_j^{s-2}\,f\,(x_i,y_j)\,dx\,dy=$$

$$=\binom{4}{2}\frac{r\,(r-1)\,s\,(s-1)\,\omega^2\,\lambda^2}{4|3.3.2^4}\,\mu'_{r-2,s-2}$$

$$\frac{s\,(s-1)\,(s-2)\,(s-3)\,\omega^4}{4|5.2^4}\iint_D x_i^{r}\,y_j^{s-4}\,f\,(x_i,y_j)\,dx\,dy=$$

$$=\frac{s\,(s-1)\,(s-2)\,(s-3)\,\omega^4}{4|5.2^4}\,\mu'_{r,s-4}$$

.....................................................

es decir que

$$\mu_{r,s}=\mu'_{r,s}+\frac{r\,(r-1)\,\omega^2}{2|3.2^2}\,\mu'_{r-2,s}+\frac{s\,(s-1)\,\lambda^2}{2|3.2^2}\,\mu'_{r,s-2}+$$

$$+\frac{r\,(r-1)\,(r-2)\,(r-3)\,\lambda^4}{4|5.2^4}\,\mu'_{r-4,s}+$$

$$+\binom{4}{2}\frac{r(r-1)s(s-1)\omega^2\lambda^2}{413.3.2^4}\mu'_{r-2,s-2}+$$

$$+\frac{s(s-1)(s-2)(s-3)\omega^4}{415.2^4}\mu'_{r,s-4}+\ldots \qquad [19]$$

En el desarrollo en serie, dado por la [18], al efectuar la integración, término a término, por las hipótesis 1.ª y 2.ª, se anulan los términos entre barras; por tanto, como resultado de la misma, sólo subsistirán expresiones de la forma

$$\iint_D x_i^{r-2m} y_j^{s-2n} f(x_i, y_j)\,dx\,dy \quad [20] \quad \begin{pmatrix} m=0,1,2,\ldots \\ n=0,1,2,\ldots \end{pmatrix}$$

que definen momentos dobles corregidos, obteniéndose, de la integración de la serie, un desarrollo finito, puesto que, sean cuales fueran $r$ y $s$, procediendo a esa integración término a término, se llega en el desarrollo de la [18] a un término, desde el cual en adelante, se tienen todas expresiones de este tipo

$$\iint_D \frac{\delta^{2(p+q)} f(x_i, y_j)}{\delta x^{2p}\,\delta y^{2q}}\,dx\,dy = \left| \frac{\delta^{2(p+q-1)} f(x_i, y_j)}{\delta x^{2p-1}\delta y^{2q-1}} \right| = 0$$

por la hipótesis del anulamiento extremo de la función y sus derivadas sucesivas. Por tanto, hay, en dicho desarrollo en serie, un término a partir del cual son todos nulos, por lo que, legítimamente, puede expresarse el resultado de la integración de la siguiente forma:

$$\mu_{r,s} = \sum_{i=0}^{E\left(\frac{r}{2}\right)} \sum_{j=0}^{E\left(\frac{s}{2}\right)} \frac{\binom{r}{2i}\binom{s}{2j}\omega^{2i}\lambda^{2j}}{(2i+1)(2j+1)\,2^{2(i+j)}}\mu'_{r-2i,\,s-2j} \qquad [21]$$

$[E\left(\frac{r}{2}\right) = \text{mayor entero contenido en } \frac{r}{2}]$

con lo cual tenemos los momentos dobles centrados en función de los momentos corregidos.

Como los momentos dobles centrados se obtienen por el cálculo efectuado sobre los datos de la experiencia, interesa tener el momento corregido, cuyo valor no se conoce, expresado en función de los centrados. De la [21] se deduce, supuesto, como lo hemos hecho, $\omega = \lambda = 1$

$$\mu'_{r,s} = \mu_{r,s} - \sum_{i=0}^{E\left(\frac{r}{2}\right)} \sum_{j=0}^{E\left(\frac{s}{2}\right)} \frac{\binom{r}{2i}\binom{s}{2j}}{(2i+1)(2j+1)\,2^{2(i+j)}} \mu'_{r-2i,\,s-2j} \quad [22]$$

donde $i$ y $j$ no deben tomar *simultáneamente* el valor 0.

Dando valores a $r$ y $s$, obtenemos el siguiente repertorio de momentos corregidos expresados en función del momento centrado del mismo orden y de los corregidos de orden inferior.

$$\mu'_{00} = \mu_{00}$$
$$\mu'_{10} = \mu_{10}$$
$$\mu'_{01} = \mu_{01}$$
$$\mu'_{20} = \mu_{20} - {}^{1}/_{12}\,\mu'_{00}$$
$$\mu'_{11} = \mu_{11}$$
$$\mu'_{02} = \mu_{02} - {}^{1}/_{12}\,\mu'_{00}$$
$$\mu'_{30} = \mu_{30} - {}^{1}/_{4}\,\mu'_{10}$$
$$\mu'_{21} = \mu_{21} - {}^{1}/_{12}\,\mu'_{01}$$
$$\mu'_{12} = \mu_{12} - {}^{1}/_{12}\,\mu'_{10}$$
$$\mu'_{03} = \mu_{03} - {}^{1}/_{4}\,\mu'_{01}$$
$$\mu'_{40} = \mu_{40} - {}^{1}/_{2}\,\mu'_{20} - {}^{1}/_{80}\,\mu'_{00}$$
$$\mu'_{31} = \mu_{31} - {}^{1}/_{4}\,\mu'_{11}$$
$$\mu'_{22} = \mu_{22} - {}^{1}/_{12}\,\mu'_{20} - {}^{1}/_{12}\,\mu'_{02} - {}^{1}/_{144}\,\mu'_{00}$$
$$\mu'_{13} = \mu_{13} - {}^{1}/_{4}\,\mu'_{11}$$
$$\mu'_{04} = \mu_{04} - {}^{1}/_{2}\,\mu'_{02} - {}^{1}/_{80}\,\mu'_{00}$$
$$\mu'_{50} = \mu_{50} - {}^{5}/_{6}\,\mu'_{30} - {}^{1}/_{16}\,\mu'_{10}$$
$$\mu'_{41} = \mu_{41} - {}^{1}/_{2}\,\mu'_{21} - {}^{1}/_{80}\,\mu'_{01}$$
$$\mu'_{32} = \mu_{32} - {}^{1}/_{12}\,\mu'_{30} - {}^{1}/_{4}\,\mu'_{12} - {}^{1}/_{48}\,\mu'_{10}$$

$$\mu'_{23} = \mu_{23} - {}^1/_{12}\,\mu'_{03} - {}^1/_4\,\mu'_{21} - {}^1/_{48}\,\mu'_{01}$$
$$\mu'_{14} = \mu_{14} - {}^1/_2\,\mu'_{12} - {}^1/_{80}\,\mu'_{10}$$
$$\mu'_{05} = \mu_{05} - {}^5/_6\,\mu'_{03} - {}^1/_{16}\,\mu'_{01}$$
$$\mu'_{60} = \mu_{60} - {}^5/_4\,\mu'_{40} - {}^3/_{16}\,\mu'_{20} - {}^1/_{448}\,\mu'_{00}$$
$$\mu'_{51} = \mu_{51} - {}^5/_6\,\mu'_{31} - {}^1/_{16}\,\mu'_{11}$$
$$\mu'_{42} = \mu_{42} - {}^1/_{12}\,\mu'_{40} - {}^1/_2\,\mu'_{22} - {}^1/_{24}\,\mu'_{20} - {}^1/_{80}\,\mu'_{02} - {}^1/_{960}\,\mu'_{00}$$
$$\mu'_{33} = \mu_{33} - {}^1/_4\,\mu'_{31} - {}^1/_4\,\mu'_{13} - {}^1/_{16}\,\mu'_{11}$$
$$\mu'_{24} = \mu_{24} - {}^1/_{12}\,\mu'_{04} - {}^1/_2\,\mu'_{22} - {}^1/_{24}\,\mu'_{02} - {}^1/_{80}\,\mu'_{20} - {}^1/_{960}\,\mu'_{00}$$
$$\mu'_{15} = \mu_{15} - {}^5/_6\,\mu'_{13} - {}^1/_{16}\,\mu'_{11}$$
$$\mu'_{06} = \mu_{06} - {}^5/_4\,\mu'_{04} - {}^3/_{16}\,\mu'_{02} - {}^1/_{448}\,\mu'_{00}$$

En la práctica, a menudo, se utilizan también los momentos dobles corregidos, expresados en función *sólo* de los centrados, por lo cual damos a continuación el repertorio de los mismos en dicha forma.

$$\mu'_{00} = 1$$
$$\mu'_{10} = 0$$
$$\mu'_{01} = 0$$
$$\mu'_{20} = \mu_{20} - {}^1/_{12}$$
$$\mu'_{11} = \mu_{11}$$
$$\mu'_{02} = \mu_{02} - {}^1/_{12}$$
$$\mu'_{30} = \mu_{30}$$
$$\mu'_{21} = \mu_{21}$$
$$\mu'_{12} = \mu_{12}$$
$$\mu'_{03} = \mu_{03}$$
$$\mu'_{40} = \mu_{40} - {}^1/_2\,\mu_{20} + {}^7/_{240}$$
$$\mu'_{31} = \mu_{31} - {}^1/_4\,\mu_{11}$$
$$\mu'_{22} = \mu_{22} - {}^1/_{12}\,\mu_{20} - {}^1/_{12}\,\mu_{02} + {}^1/_{144}$$
$$\mu'_{13} = \mu_{13} - {}^1/_4\,\mu_{11}$$

$$\mu'_{04} = \mu_{04} - {}^{1}/_{2}\, \mu_{02} + {}^{7}/_{240}$$

$$\mu'_{50} = \mu_{50} - {}^{5}/_{6}\, \mu_{30}$$

$$\mu'_{41} = \mu_{41} - {}^{1}/_{2}\, \mu_{21} \qquad [22']$$

$$\mu'_{32} = \mu_{32} - {}^{1}/_{2}\, \mu_{30} - {}^{1}/_{4}\, \mu_{12}$$

$$\mu'_{23} = \mu_{23} - {}^{1}/_{2}\, \mu_{03} - {}^{1}/_{4}\, \mu_{21}$$

$$\mu'_{14} = \mu_{14} - {}^{1}/_{2}\, \mu_{12}$$

$$\mu'_{05} = \mu_{05} - {}^{5}/_{6}\, \mu_{03}$$

$$\mu'_{60} = \mu_{60} - {}^{5}/_{4}\, \mu_{40} + {}^{7}/_{16}\, \mu_{20} - {}^{31}/_{1344}$$

$$\mu'_{51} = \mu_{51} - {}^{5}/_{6}\, \mu_{31} + {}^{7}/_{48}\, \mu_{11}$$

$$\mu'_{42} = \mu_{42} - {}^{1}/_{2}\, \mu_{22} + {}^{1}/_{24}\, \mu_{20} - $$
$$- {}^{1}/_{12}\, \mu_{40} + {}^{7}/_{240}\, \mu_{02} - {}^{7}/_{2880}$$

$$\mu'_{33} = \mu_{33} - {}^{1}/_{4}\, \mu_{31} - {}^{1}/_{4}\, \mu_{13} + {}^{1}/_{16}\, \mu_{11}$$

$$\mu'_{24} = \mu_{24} - {}^{1}/_{2}\, \mu_{22} + {}^{1}/_{24}\, \mu_{02} - $$
$$- {}^{1}/_{12}\, \mu_{04} + {}^{7}/_{240}\, \mu_{20} - {}^{7}/_{2880}$$

$$\mu'_{15} = \mu_{15} - {}^{5}/_{6}\, \mu_{13} + {}^{7}/_{48}\, \mu_{11}$$

$$\mu'_{06} = \mu_{06} - {}^{5}/_{4}\, \mu_{04} + {}^{7}/_{16}\, \mu_{02} - {}^{31}/_{1344}$$

## § 4. Esquema para el cálculo de los momentos absolutos dobles con origen arbitrario. Método simplificador de Mitropolsky

Con el objeto de no romper la unidad de la explicación acerca del proceso de cálculo a seguir, antes de entrar en materia, estudiaremos las relaciones existentes entre los momentos binomiales y potenciales dobles. Mediante la utilización de los momentos binomiales dobles, lograremos realizar los cálculos más fácilmente y con mayor seguridad, pues el método de sumas de Tschetwerikoff, por el que se los determina, permite verificar cada etapa del trabajo.

Hemos definido los momentos dobles absolutos referidos al origen natural, así:

$$M'_{r,s} = \sum_i \sum_j \eta_{ij} \mathcal{X}^{r}_{i} \mathcal{Y}^{s}_{j}$$

Los mismos, respecto a un origen arbitrario, como indica la Tabla II, se expresan por:

$$M_{r,s} = \sum_i \sum_j \eta_{ij} X^{r}_{i} Y^{s}_{j} \qquad [23]$$

Designando, como se dijo, por $B_{r,s}$ un momento binomial doble absoluto de órden *r,s*, era:

$$B_{r,s} = \sum_{i=r} \sum_{j=s} \binom{X_i}{r} \binom{Y_j}{s} \eta_{ij} \qquad [24]$$

Desarrollando los números combinatorios tenemos:

$$B_{r,s} = \sum_{i=r} \sum_{j=s} \frac{X_i (X_i-1)(X_i-2)\ldots(X_i-r+1)}{r!} \times \frac{Y_j (Y_j-1)\ldots(Y_j-s+1)}{s!} ] \eta_{i,j} \quad [25]$$

Realizando los productos indicados en el segundo miembro, queda la sumatoria de una suma de un número finito de sumandos que, por tanto, se puede descomponer en una suma de sumatorias, es decir, en una suma de términos de la forma

$$\sum_i \sum_j K \eta_{ij} X^r_i Y^s_j \qquad (K = \text{constante})$$

que, según la fórmula [23], definen momentos potenciales dobles absolutos, respecto de un origen arbitrario, en función de los cuales queda expresado el momento binomial $B_{r,s}$.

Dando en la fórmula [25] valores sucesivos a $r$ y a $s$ obtenemos el siguiente repertorio de momentos dobles binomiales en función de los momentos dobles potenciales absolutos:

$$\begin{aligned}
B_{0,0} &= M_{0,0} \\
B_{1,0} &= M_{1,0} \\
B_{0,1} &= M_{0,1} \\
B_{2,0} &= {}^1/_{2!}\,(M_{2,0} - M_{1,0}) \\
B_{1,1} &= M_{1,1} \\
B_{0,2} &= {}^1/_{2!}\,(M_{0,2} - M_{0,1}) \\
B_{3,0} &= {}^1/_{3!}\,(M_{3,0} - 3\,M_{2,0} + 2\,M_{1,0}) \\
B_{2,1} &= {}^1/_{2!}\,(M_{2,1} - M_{1,1}) \\
B_{1,2} &= {}^1/_{2!}\,(M_{1,2} - M_{1,1}) \\
B_{0,3} &= {}^1/_{3!}\,(M_{0,3} - 3\,M_{0,2} + 2\,M_{0,1}) \\
B_{4,0} &= {}^1/_{4!}\,(M_{4,0} - 6\,M_{3,0} + 11\,M_{2,0} - 6\,M_{1,0}) \\
B_{3,1} &= {}^1/_{3!}\,(M_{3,1} - 3\,M_{2,1} + 2\,M_{1,1}) \\
B_{2,2} &= {}^1/_{2!2!}\,(M_{2,2} - M_{2,1} - M_{1,2} + M_{1,1}) \\
B_{1,3} &= {}^1/_{3!}\,(M_{1,3} - 3\,M_{1,2} + 2\,M_{1,1}) \\
B_{0,4} &= {}^1/_{4!}\,(M_{0,4} - 6\,M_{0,3} + 11\,M_{0,2} - 6\,M_{0,1}) \qquad [26] \\
B_{5,0} &= {}^1/_{5!}\,(M_{5,0} - 10\,M_{4,0} + 35\,M_{3,0} - 50\,M_{2,0} + 24\,M_{1,0})
\end{aligned}$$

$$B_{4,1} = {}^1/_{4!}\,(M_{4,1} - 6\,M_{3,1} + 11\,M_{2,1} - 6\,M_{1,1})$$
$$B_{3,2} = {}^1/_{3!2!}\,(M_{3,2} - 3\,M_{2,2} + 2\,M_{1,2} - M_{3,1} + 3\,M_{2,1} - 2\,M_{1,1})$$
$$B_{2,3} = {}^1/_{2!3!}\,(M_{2,3} - 3\,M_{2,2} + 2\,M_{2,1} - M_{1,3} + 3\,M_{1,2} - 2\,M_{1,1})$$
$$B_{1,4} = {}^1/_{4!}\,(M_{1,4} - 6\,M_{1,3} + 11\,M_{1,2} - 6\,M_{1,1})$$
$$B_{0,5} = {}^1/_{5!}\,(M_{0,5} - 10\,M_{0,4} + 35\,M_{0,3} - 50\,M_{0,2} + 24\,M_{0,1})$$
$$B_{6,0} = {}^1/_{6!}\,(M_{6,0} - 15\,M_{5,0} + 85\,M_{4,0} - 225\,M_{3,0} + {} + 274\,M_{2,0} - 120\,M_{1,0})$$
$$B_{5,1} = {}^1/_{5!}\,(M_{5,1} - 10\,M_{4,1} + 35\,M_{3,1} - 50\,M_{2,1} + 24\,M_{1,1})$$
$$B_{4,2} = {}^1/_{4!2!}\,(M_{4,2} - 6\,M_{3,2} + 11\,M_{2,2} - 6\,M_{1,2} - M_{4,1} + {} + 6\,M_{3,1} - 11\,M_{2,1} + 6\,M_{1,1})$$
$$B_{3,3} = {}^1/_{3!3!}\,(M_{3,3} - 3\,M_{3,2} + 2\,M_{3,1} - 3\,M_{2,3} + 9\,M_{2,2} - {} - 6\,M_{2,1} + 2\,M_{1,3} - 6\,M_{1,2} + 4\,M_{1,1})$$
$$B_{2,4} = {}^1/_{2!4!}\,(M_{2,4} - 6\,M_{2,3} + 11\,M_{2,2} - 6\,M_{2,1} - M_{1,4} + {} + 6\,M_{1,3} - 11\,M_{1,2} + 6\,M_{1,1})$$
$$B_{1,5} = {}^1/_{5!}\,(M_{1,5} - 10\,M_{1,4} + 35\,M_{1,3} - 50\,M_{1,2} + 24\,M_{1,1})$$
$$B_{0,6} = {}^1/_{6!}\,(M_{0,6} - 15\,M_{0,5} + 85\,M_{0,4} - 225\,M_{0,3} + {} + 274\,M_{0,2} - 120\,M_{0,1})$$

El cálculo, realizado con los datos experimentales, nos suministra los valores de los momentos binomiales dobles $B_{r,s}$, y necesitamos, por tanto, tener expresados, en función de ellos, a los momentos dobles potenciales, que son los que se desean obtener.

Despejando, en las fórmulas del repertorio anterior, el momento doble potencial de mayor órden y sustituyendo los otros momentos potenciales de órden menor por su expresión ya obtenida, en función de los binomiales, resulta el repertorio buscado.

$$M_{0,0} = B_{0,0}$$
$$M_{1,0} = B_{1,0}$$
$$M_{0,1} = B_{0,1}$$
$$M_{2,0} = 2\,B_{2,0} + B_{1,0}$$
$$M_{1,1} = B_{1,1}$$
$$M_{0,2} = 2\,B_{0,2} + B_{0,1}$$
$$M_{3,0} = 6\,B_{3,0} + 6\,B_{2,0} + B_{1,0}$$

$$M_{2,1} = 2\,B_{2,1} + B_{1,1}$$
$$M_{1,2} = 2\,B_{1,2} + B_{1,1}$$
$$M_{0,3} = 6\,B_{0,3} + 6\,B_{0,2} + B_{0,1}$$
$$M_{4,0} = 24\,B_{4,0} + 36\,B_{3,0} + 14\,B_{2,0} + B_{1,0}$$
$$M_{3,1} = 6\,B_{3,1} + 6\,B_{2,1} + B_{1,1}$$
$$M_{2,2} = 4\,B_{2,2} + 2\,B_{2,1} + 2\,B_{1,2} + B_{1,1}$$
$$M_{1,3} = 6\,B_{1,3} + 6\,B_{1,2} + B_{1,1}$$
$$M_{0,4} = 24\,B_{0,4} + 36\,B_{0,3} + 14\,B_{0,2} + B_{0,1}$$
$$M_{5,0} = 120\,B_{5,0} + 240\,B_{4,0} + 150\,B_{3,0} + 30\,B_{2,0} + B_{1,0}$$
$$M_{4,1} = 24\,B_{4,1} + 36\,B_{3,1} + 14\,B_{2,1} + B_{1,1} \qquad [27]$$
$$M_{3,2} = 12\,B_{3,2} + 12\,B_{2,2} + 2\,B_{1,2} + 6\,B_{3,1} + 6\,B_{2,1} + B_{1,1}$$
$$M_{2,3} = 12\,B_{2,3} + 12\,B_{2,2} + 2\,B_{2,1} + 6\,B_{1,3} + 6\,B_{1,2} + B_{1,1}$$
$$M_{1,4} = 24\,B_{1,4} + 36\,B_{1,3} + 14\,B_{1,2} + B_{1,1}$$
$$M_{0,5} = 120\,B_{0,5} + 240\,B_{0,4} + 150\,B_{0,3} + 30\,B_{0,2} + B_{0,1}$$
$$M_{6,0} = 720\,B_{6,0} + 1800\,B_{5,0} + 1560\,B_{4,0} + 540\,B_{3,0} + 62\,B_{2,0} + B_{1,0}$$
$$M_{5,1} = 120\,B_{5,1} + 240\,B_{4,1} + 150\,B_{3,1} + 30\,B_{2,1} + B_{1,1}$$
$$M_{4,2} = 48\,B_{4,2} + 72\,B_{3,2} + 28\,B_{2,2} + 2\,B_{1,2} + 24\,B_{4,1} + 36\,B_{3,1} + 14\,B_{2,1} + B_{1,1}$$
$$M_{3,3} = 36\,B_{3,3} + 36\,B_{2,3} + 6\,B_{1,3} + 36\,B_{3,2} + 36\,B_{2,2} + 6\,B_{1,2} + 6\,B_{3,1} + 6\,B_{2,1} + B_{1,1}$$
$$M_{2,4} = 48\,B_{2,4} + 72\,B_{2,3} + 28\,B_{2,2} + 2\,B_{2,1} + 24\,B_{1,4} + 36\,B_{1,3} + 14\,B_{1,2} + B_{1,1}$$
$$M_{1,5} = 120\,B_{1,5} + 240\,B_{1,4} + 150\,B_{1,3} + 30\,B_{1,2} + B_{1,1}$$
$$M_{0,6} = 720\,B_{0,6} + 1800\,B_{0,5} + 1560\,B_{0,4} + 540\,B_{0,3} + 62\,B_{0,2} + B_{0,1}$$

Explicaremos, a continuación, cómo se calculan los momentos binomiales dobles $B_{r,s}$, partiendo de los datos experimentales, para, una vez hallados sus valores, poderlos reemplazar en las anteriores fórmulas y obtener los momentos absolutos dobles $M_{r,s}$.

Consideremos que de la observación realizada con respecto a dos atributos hemos obtenido la siguiente distribución de frecuencias:

| $Y \backslash X$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $X_6$ | $X_7$ | $X_8$ | $X_9$ | $X_{10}$ | $X_{11}$ | $X_{12}$ | $X_{13}$ | $X_{14}$ | $X_{15}$ | $\sum_{i=1}^{15} n_{i.j}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y_1$ | $n_{1,1}$ | $n_{2,1}$ | $n_{3,1}$ | $n_{4,1}$ | $n_{5,1}$ | | | | | | | | | | | $\sum_i n_{i.1}$ |
| $Y_2$ | $n_{1,2}$ | $n_{2,2}$ | $n_{3,2}$ | $n_{4,2}$ | $n_{5,2}$ | $n_{6,2}$ | $n_{7,2}$ | $n_{8,2}$ | | | | | | | | $\sum_i n_{i.2}$ |
| $Y_3$ | $n_{1,3}$ | $n_{2,3}$ | $n_{3,3}$ | $n_{4,3}$ | $n_{5,3}$ | $n_{6,3}$ | $n_{7,3}$ | $n_{8,3}$ | $n_{9,3}$ | $n_{10,3}$ | | | | | | $\sum_i n_{i3}$ |
| $Y_4$ | | | $n_{3,4}$ | $n_{4,4}$ | $n_{5,4}$ | $n_{6,4}$ | $n_{7,4}$ | $n_{8,4}$ | $n_{9,4}$ | $n_{10,4}$ | $n_{11,4}$ | $n_{12,4}$ | | | | $\sum_i n_{i4}$ |
| $Y_5$ | | | | | $n_{5,5}$ | $n_{6,5}$ | $n_{7,5}$ | $n_{8,5}$ | $n_{9,5}$ | $n_{10,5}$ | $n_{11,5}$ | $n_{12,5}$ | $n_{13,5}$ | | | $\sum_i n_{i.5}$ |
| $Y_6$ | | | | | | $n_{6,6}$ | $n_{7,6}$ | $n_{8,6}$ | $n_{9,6}$ | $n_{10,6}$ | $n_{11,6}$ | $n_{12,6}$ | $n_{13,6}$ | | | $\sum_i n_{i.6}$ |
| $Y_7$ | | | | | | | $n_{7,7}$ | $n_{8,7}$ | $n_{9,7}$ | $n_{10,7}$ | $n_{11,7}$ | $n_{12,7}$ | $n_{13,7}$ | | | $\sum_i n_{i.7}$ |
| $Y_8$ | | | | | | | | | $n_{9.8}$ | $n_{10.8}$ | $n_{11.8}$ | $n_{12.8}$ | $n_{13.8}$ | | $n_{15,8}$ | $\sum_i n_{i.8}$ |
| $Y_9$ | | | | | | | | $n_{8,9}$ | $n_{9,9}$ | $n_{10,9}$ | $n_{11,9}$ | $n_{12,9}$ | $n_{13,9}$ | $n_{14,9}$ | | $\sum_i n_{i.9}$ |
| $Y_{10}$ | | | | | | | | | | $n_{10,10}$ | $n_{11,10}$ | $n_{12,10}$ | $n_{13,10}$ | | | $\sum_i n_{i10}$ |
| $\sum_{j=1}^{10} n_{i,j}$ | $\sum_j n_{1,j}$ | $\sum_j n_{2,j}$ | $\sum_j n_{3,j}$ | $\sum_j n_{4,j}$ | $\sum_j n_{5,j}$ | $\sum_j n_{6,j}$ | $\sum_j n_{7,j}$ | $\sum_j n_{8,j}$ | $\sum_j n_{9,j}$ | $\sum_j n_{10,j}$ | $\sum_j n_{11,j}$ | $\sum_j n_{12,j}$ | $\sum_j n_{13,j}$ | $\sum_j n_{14,j}$ | $\sum_j n_{15,j}$ | $N=\sum_i\sum_j n_{ij}$ |

El método de sumas, que utilizaremos para calcular los momentos binomiales, exige, que las observaciones se refieran a atributos equiespaciados, es decir, de módulo constante que, como vimos al tratar las correcciones de Sheppard, hacíamos igual a la unidad.

A los resultados de las sumas por columnas de la Tabla IV los simbolizamos por $\sum_j \eta_{i,j}$, donde la sumatoria se ejecuta variando la $\mathcal{Y}$ cuando se ha fijado la $\mathcal{X}$. Por ej. fijada la $\mathcal{X}_7$ estará, la suma de las frecuencias de esa columna, representada por

$$\sum_j \eta_{7,j}$$

Lo mismo ocurrirá cuando realicemos las sumas por filas; aquí se fija la $\mathcal{Y}$ y varía la $\mathcal{X}$, por lo cual, la expresión de esas sumas será:

$$\sum_i \eta_{i,j}$$

por ej. para $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_4$ se tendría la suma expresada por:

$$\sum_i \eta_{i,4}$$

El conjunto de los resultados de las sumas por columnas, o sea el de los valores que figuran en la última fila de la Tabla IV, recibe el nombre de marginal $\mathcal{X}$ y el de los resultados de las sumas por filas, que figuran en la última columna de la misma tabla, recibe el nombre de marginal $\mathcal{Y}$, cuyos significados son conocidos y corresponden al que, en cálculo de probabilidades tiene la función en independencia de probabilidad, que es uno los factores en que se descompone una función de probabilidad de dos variables.

Para simplificar los cálculos, se elige un origen arbitrario para las $\mathcal{X}$ y otro para las $\mathcal{Y}$, lo que suele convenir hacer para el par $\mathcal{X}\mathcal{Y}$ que corresponde a la frecuencia máxima.

Supongamos que la mayor frecuencia observada estuviese dada por $\eta_{8,5}$, entonces ubicaremos el origen en el punto $\mathcal{X} = \mathcal{X}_8$ e $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_5$.

Como hemos dispuesto los atributos de menor a mayor, siguiendo el sentido de las flechas, y como lo indican los mismos subíndices, resultará que con respecto a la variable $\mathcal{X}$, una vez ubicado el nuevo origen, los valores que se hallan a su izquierda, serán negativos y los que se hallan a su derecha, positivos.

Con respecto a la $\mathcal{Y}$, los que quedan en la parte superior del origen serán negativos y los que quedan en la parte inferior, positivos.

Es decir que las nuevas variables $X$ e $Y$ deberán considerarse con el signo que les corresponda, en virtud del cambio de variables, definido por las relaciones

$$\left.\begin{array}{l} X_i = \mathcal{X}_i - \mathcal{X}_8 \\ Y_j = \mathcal{Y}_j - \mathcal{Y}_5 \end{array}\right\} \qquad [28]$$

La Tabla IV, que recibe el nombre de *damero de sumas de órden cero,* nos suministra la población N que, según vimos, es igual al momento potencial doble absoluto de órden o,o y también al momento doble binomial del mismo órden, es decir, que

$$M_{0,0} = B_{0,0} = N \qquad [29]$$

Las marginales de la Tabla IV dan el elemento para hallar, por sumas, los momentos binomiales dobles que tienen algún subíndice igual a cero; ellos son iguales a los momentos binomiales de una sola variable estadística los que, en este caso, por referirse a observaciones correspondientes a pares de atributos, se designan así:

$$B_{1,0},\ B_{2,0},\ B_{3,0}, \ldots;\ B_{0,1},\ B_{0,2},\ B_{0,3}, \ldots$$

indicando por $B_{r,0}$ ($r = 1, 2, \ldots$) los que corresponden a la marginal $X$, y por $B_{0,s}$ ($s = 1, 2, \ldots$) a los de la marginal $Y$.

En base de dichas marginales, se construyen las tablas de sumas, tomando el nuevo origen indicado en la fórmula [28].

Las tablas de sumas para calcular estos momentos binomiales $B_{r,0}$ y $B_{0,s}$ se forman, de manera análoga que en el caso de un solo atributo o variable estadística, con los valores de la variable $\mathcal{X}$ y con las frecuencias $\sum_j \eta_{i,j}$ y con los valores de la variable $\mathcal{Y}$ y con las frecuencias $\sum_i \eta_{i,j}$ obteniéndose dos distribuciones que puedan representarse por medio de tablas a simple entrada así:

| $\mathcal{X}_i$ | $\sum_j \eta_{i,j}$ |
|---|---|
| $\mathcal{X}_1$ | $\sum_j \eta_{1,j}$ |
| $\mathcal{X}_2$ | $\sum_j \eta_{2,j}$ |
| $\mathcal{X}_3$ | $\sum_j \eta_{3,j}$ |
| $\mathcal{X}_4$ | $\sum_j \eta_{4,j}$ |
| $\mathcal{X}_5$ | $\sum_j \eta_{5,j}$ |
| $\mathcal{X}_6$ | $\sum_j \eta_{6,j}$ |
| $\mathcal{X}_7$ | $\sum_j \eta_{7,j}$ |
| $\mathcal{X}_8$ | $\sum_j \eta_{8,j}$ |
| $\mathcal{X}_9$ | $\sum_j \eta_{9,j}$ |
| $\mathcal{X}_{10}$ | $\sum_j \eta_{10,j}$ |
| $\mathcal{X}_{11}$ | $\sum_j \eta_{11,j}$ |
| $\mathcal{X}_{12}$ | $\sum_j \eta_{12,j}$ |
| $\mathcal{X}_{13}$ | $\sum_j \eta_{13,j}$ |
| $\mathcal{X}_{14}$ | $\sum_j \eta_{14,j}$ |
| $\mathcal{X}_{15}$ | $\sum_j \eta_{15,j}$ |

| $\mathcal{Y}_j$ | $\sum_i \eta_{i,j}$ |
|---|---|
| $\mathcal{Y}_1$ | $\sum_i \eta_{i,1}$ |
| $\mathcal{Y}_2$ | $\sum_i \eta_{i,2}$ |
| $\mathcal{Y}_3$ | $\sum_i \eta_{i,3}$ |
| $\mathcal{Y}_4$ | $\sum_i \eta_{i,4}$ |
| $\mathcal{Y}_5$ | $\sum_i \eta_{i,5}$ |
| $\mathcal{Y}_6$ | $\sum_i \eta_{i,6}$ |
| $\mathcal{Y}_7$ | $\sum_i \eta_{i,7}$ |
| $\mathcal{Y}_8$ | $\sum_i \eta_{i,8}$ |
| $\mathcal{Y}_9$ | $\sum_i \eta_{i,9}$ |
| $\mathcal{Y}_{10}$ | $\sum_i \eta_{i,10}$ |

Las frecuencias anotadas en estas tablas en las columnas $\sum_j \eta_{i,j}$ y $\sum_i \eta_{i,j}$ no son otra cosa que las marginales de la $\mathcal{X}$ y de la $\mathcal{Y}$ respectivamente, a que antes hicimos mención, las que están representadas en la Tabla IV por la última fila (de sumas verticales) y por la última columna (de sumas horizontales) y se confecciona la tabla de sumas a que nos estamos refiriendo, haciéndolo con un número de columnas mayor en una unidad al número de momentos que se quieren calcular. Por ej. para calcular cuatro momentos se agregan cinco columnas; para calcular siete momentos se agregan ocho, etc.

Las columnas se designan con un número de órden (1), (2), (3), etc. Si se tratara de calcular momentos $B_{0,s}$, es decir, de operar con la marginal $Y$, tendríamos:

TABLA V

| $Y$ | $\sum_i \eta_{i,j}$ | (1) | (2) | (3) | (4) |
|---|---|---|---|---|---|
| $-Y_4$ | $\sum_i \eta_{i,-4}$ | $\sum_i \eta_{i,-4}$ | $\sum_i \eta_{i,-4}$ | $\sum_i \eta_{i,-4}$ | $\sum_i \eta_{i,-4} = v_4^-$ |
| $-Y_3$ | $\sum_i \eta_{i,-3}$ | $\sum_i \eta_{i,-4} + \sum_i \eta_{i,-3}$ | $2\sum_i \eta_{i,-4} + \sum_i \eta_{i,-3}$ | $3\sum_i \eta_{i,-4} + \sum_i \eta_{i,-3} = v_3^-$ | —— |
| $-Y_2$ | $\sum_i \eta_{i,-2}$ | $\sum_i \eta_{i,-4} + \sum_i \eta_{i,-3} + \sum_i \eta_{i,-2}$ | $3\sum_i \eta_{i,-4} + 2\sum_i \eta_{i,-3} + \sum_i \eta_{i,-2} = v_2^-$ | —— | —— |
| $-Y_1$ | $\sum_i \eta_{i,-1}$ | $\sum_i \eta_{i,-4} + \sum_i \eta_{i,-3} + \sum_i \eta_{i,-2} + \sum_i \eta_{i,-1} = v_1^-$ | —— | —— | —— |
| $Y_0$ | $\sum_i \eta_{i,0}$ | —— | —— | —— | —— |
| $Y_1$ | $\sum_i \eta_{i,1}$ | $\sum_i \eta_{i,5} + \sum_i \eta_{i,4} + \sum_i \eta_{i,3} + \sum_i \eta_{i,2} + \sum_i \eta_{i,1} = v_1^+$ | —— | —— | —— |
| $Y_2$ | $\sum_i \eta_{i,2}$ | $\sum_i \eta_{i,5} + \sum_i \eta_{i,4} + \sum_i \eta_{i,3} + \sum_i \eta_{i,2}$ | $4\sum_i \eta_{i,5} + 3\sum_i \eta_{i,4} + 2\sum_i \eta_{i,3} + \sum_i \eta_{i,2} = v_2^+$ | —— | —— |
| $Y_3$ | $\sum_i \eta_{i,3}$ | $\sum_i \eta_{i,5} + \sum_i \eta_{i,4} + \sum_i \eta_{i,3}$ | $3\sum_i \eta_{i,5} + 2\sum_i \eta_{i,4} + \sum_i \eta_{i,3}$ | $6\sum_i \eta_{i,5} + 3\sum_i \eta_{i,4} + \sum_i \eta_{i,3} = v_3^+$ | —— |
| $Y_4$ | $\sum_i \eta_{i,4}$ | $\sum_i \eta_{i,5} + \sum_i \eta_{i,4}$ | $2\sum_i \eta_{i,5} + \sum_i \eta_{i,4}$ | $3\sum_i \eta_{i,5} + \sum_i \eta_{i,4}$ | $4\sum_i \eta_{i,5} + \sum_i \eta_{i,4} = v_4^+$ |
| $Y_5$ | $\sum_i \eta_{i,5}$ | $\sum_i \eta_{i,5}$ | $\sum_i \eta_{i,5}$ | $\sum_i \eta_{i,5}$ | $\sum_i \eta_{i,5}$ |
| | $\sum_i \sum_j \eta_{i,j} = N$ | $4\sum_i \eta_{i,-4} + 3\sum_i \eta_{i,-3} + 2\sum_i \eta_{i,-2} + \sum_i \eta_{i,-1} =$ $= B_{0,1}^- = \sum_i \sum_j Y_j \, \eta_{i,j}$ | $\frac{4(4-1)}{2!}\sum_i \eta_{i,-4} + \frac{3(3-1)}{2!}\sum_i \eta_{i,-3} + \sum_i \eta_{i,-2} =$ $= B_{0,2}^- = \sum_i \sum_j \binom{Y_j}{2} \eta_{i,j}$ | $\frac{4(4-1)(4-2)}{3!}\sum_i \eta_{i,-4} + \sum_i \eta_{i,-3} =$ $= B_{0,3}^- = \sum_i \sum_j \binom{Y_j}{3} \eta_{i,j}$ | $\sum_i \eta_{i,-4} =$ $= B_{0,4}^- = \sum \sum \binom{Y_j}{4} \eta_{i,j}$ |
| | | $5\sum_i \eta_{i,5} + 4\sum_i \eta_{i,4} + 3\sum_i \eta_{i,3} + 2\sum_i \eta_{i,2} + \sum_i \eta_{i,1} =$ $= B_{0,1}^+ = \sum_i \sum_j Y_j \, \eta_{i,j}$ | $\frac{5(5-1)}{2!}\sum_i \eta_{i,5} + \frac{4(4-1)}{2!}\sum_i \eta_{i,4} + \frac{3(3-1)}{2!}\sum_i \eta_{i,3} + \sum_i \eta_{i,2} =$ $= B_{0,2}^- = \sum_i \sum_j \binom{Y_j}{2} \eta_{i,j}$ | $\frac{5(5-1)(5-2)}{3!}\sum_i \eta_{i,5} + \frac{4(4-1)(4-2)}{3!}\sum_i \eta_{i,4} + \sum_i \eta_{i,3} =$ $= B_{0,3}^+ = \sum_i \sum_j \binom{Y_j}{3} \eta_{i,j}$ | $\frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{4!}\sum_i \eta_{i,5} + \sum_i \eta_{i,4} =$ $= B_{0,4}^+ = \sum_i \sum_j \binom{Y_j}{4} \eta_{i,j}$ |
| | $s_{0,5} = B_{0,5}^+ + B_{0,5}^-$ | $s_{0,1} = B_{0,1}^+ + B_{0,1}^-$ | $s_{0,2} = B_{0,2}^+ + B_{0,2}^-$ | $s_{0,3} = B_{0,3}^+ + B_{0,3}^-$ | $s_{0,4} = B_{0,4}^+ + B_{0,4}^-$ |
| | $d_{0,5} = B_{0,5}^+ - B_{0,5}^-$ | $d_{0,1} = B_{0,1}^+ - B_{0,1}^-$ | $d_{0,2} = B_{0,2}^+ - B_{0,2}^-$ | $d_{0,3} = B_{0,3}^+ - B_{0,3}^-$ | $d_{0,4} = B_{0,4}^+ - B_{0,4}^-$ |

Los valores de las marginales se disponen, separadamente, en tablas para operar por el método de sumas, análogamente a como se procede para operar en diferencias finitas, esto es, de manera tal que, cada número $\sum_i \eta_{i,j}^{(p)}$, donde p indica la columna de esta Tabla, sea igual a la suma de dos números, uno de los cuales $\sum_i \eta_{i,j}^{(p-1)}$ está en la misma fila de la columna anterior y el otro $\sum_i \eta_{i,j-1}^{(p)}$ está en la fila anterior de la misma columna *p*, siendo, por tanto

$$\sum_i \eta_{i,j}^{(p)} = \sum_i \eta_{i,j-1}^{(p)} + \sum_i \eta_{i,j}^{(p-1)} \qquad (p = 1,\ 2,\ 3, \ldots) \qquad [30]$$

Frente a la frecuencia correspondiente al origen, se traza una línea horizontal que divide la tabla en dos partes: superior e inferior, en cada una de las cuales las sumas se hacen separadamente: en la parte superior, de arriba hacia abajo y en la parte inferior, de abajo hacia arriba, tal como se indica en la Tabla V.

Tanto en la parte superior como en la parte inferior, las sumas se realizan de la siguiente manera: en la columna (1) las sumas se extienden hasta la última fila, (excluído el origen frente al cual se ha trazado la horizontal de separación) en la columna (2) se extienden hasta la penúltima fila; en la (3) hasta la antepenúltima y así sucesivamente.

Se consideran últimas filas de la parte superior y de la parte inferior, las inmediatas a la horizontal. Esta forma de operar corresponde a los desarrollos que se tendrían de los momentos binomiales, tal como resultan de la definición que de ellos se ha dado, según la fórmula [24].

Debajo de cada columna se escriben las sumas de los números de la mitad superior, negativa, simbolizada por $B_{0,s}^{-}$ y de la mitad inferior, positiva, simbolizada por $B_{0,s}^{+}$ $(s = 1,\ 2,\ 3, \ldots)$ siendo

$$B^{-}_{o,s} = \sum_i \sum_j \binom{Y_j}{s} \eta_{i,-j}$$

$$B^{+}_{o,s} = \sum_i \sum_j \binom{Y_j}{s} \eta_{i,j} \qquad [31]$$

De igual manera, para la marginal $X$ se tendrá

$$B^{-}_{r,o} = \sum_i \sum_j \binom{X_i}{r} \eta_{-i,j}$$

$$B^{+}_{r,o} = \sum_i \sum_j \binom{X_i}{r} \eta_{i,j} \qquad [32]$$

Las fórmulas [31] y [32], como puede observarse, corresponden a la definición que dimos en [24] de los momentos binomiales.

Finalmente, en la última fila de la misma tabla V se anotan las sumas de esas sumas (s) y sus diferencias (d).

Cada etapa de este cálculo debe verificarse; para ello se suman los números de la columna (1) que están arriba y debajo de la horizontal con la frecuencia que corresponde al origen y debe obtenerse, como resultado, la población N

$$v_1^- + v_1^+ + \sum_i \eta_{i,0} = N \qquad [33]$$

En las columnas siguientes, también es muy fácil la verificación y corresponde hacerla separadamente para la parte negativa y para la positiva. La suma de cada columna es igual a la suma de dos números, uno de los cuales está en la última fila de la misma columna y el otro en la última fila de la columna siguiente, considerando, como ya se dijo, últimas filas las inmediatas a la horizontal.

Es decir, que debe ser

$$v_1^- + v_2^- = B_{0,1}^-$$
$$v_2^- + v_3^- = B_{0,2}^-$$
$$v_3^- + v_4^- = B_{0,3}^-$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$v_1^+ + v_2^+ = B_{0,1}^+$$
$$v_2^+ + v_3^+ = B_{0,2}^+$$
$$v_3^+ + v_4^+ = B_{0,3}^+$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$v_j^- + v_{j+1}^- = B_{0,j}^-$$
$$v_j^+ + v_{j+1}^+ = B_{0,j}^+$$

Esta es la razón, por la cual, se debe considerar una columna más que el órden del momento a calcular, o sea, tener los elementos para verificar los valores que luego deberán utilizarse.

Operando en forma paralela con la marginal $X$ tendríamos, como resultados, los valores

$$B_{1,0}^-,\ B_{2,0}^-,\ B_{3,0}^-, \dots;\ B_{1,0}^+,\ B_{2,0}^+,\ B_{3,0}^+, \dots$$

y también

$$s_{i,0} = B_{i,0}^+ + B_{i,0}^-$$

$$d_{i,0} = B_{i,0}^+ - B_{i,0}^-$$

Los momentos potenciales $M_{r,0}$ y $M_{0,s}$, que tratamos de calcular, por haberse dividido las marginales en dos partes de distinto signo, con el cambio de origen, quedan definidos por las relaciones

$$\left.\begin{aligned} M_{r,0} &= M_{r,0}^+ + (-1)^r M_{r,0}^- \\ M_{0,s} &= M_{0,s}^+ + (-1)^s M_{0,s}^- \end{aligned}\right\} \quad [35]$$

simbolizando por $M^{+}_{r,0}$ a los momentos potenciales correspondientes a la parte positiva y por $M^{-}_{r,0}$ a los de la parte negativa, de la marginal $X$; por $M^{+}_{0,s}$ y $M^{-}_{0,s}$ a los de las partes positiva y negativa, respectivamente, de la marginal $Y$.

Es decir, que deben sumarse los momentos resultantes de cada parte, pero como el signo de la parte negativa cambiará según sea par o impar la potencia, se afectan a los segundos sumandos por los factores $(-1)^r$ y $(-1)^s$ respectivamente.

Del repertorio [27] consideremos sólo las fórmulas de los momentos que tienen uno de los subíndices igual a cero, por ej. para $r = 1$, es

$$M_{1,0} = B_{1,0}$$

Según la fórmula [35] es:

$$M_{1,0} = M^{+}_{1,0} - M^{-}_{1,0}$$

luego resulta

$$M_{1,0} = B^{+}_{1,0} - B^{-}_{1,0} = d_{1,0}$$

para $r = 2$

$$M_{2,0} = 2\, B_{2,0} + B_{1,0}$$

por la [35]

$$M_{2,0} = M^{+}_{2,0} + M^{-}_{2,0}$$

resulta

$$\begin{aligned} M_{2,0} &= [2\, B^{+}_{2,0} + B^{+}_{1,0}] + [2\, B^{-}_{2,0} + B^{-}_{1,0}] \\ &= 2\, [B^{+}_{2,0} + B^{-}_{2,0}] + [B^{+}_{1,0} + B^{-}_{1,0}] \\ &= 2\, s_{2,0} + s_{1,0} \end{aligned}$$

Operando de esta manera se tiene para la marginal $X$, el repertorio:

$$
\begin{aligned}
M_{1,0} &= d_{1,0}\\
M_{2,0} &= 2\, s_{2,0} + s_{1,0}\\
M_{3,0} &= 6\, d_{3,0} + 6\, d_{2,0} + d_{1,0}\\
M_{4,0} &= 24\, s_{4,0} + 36\, s_{3,0} + 14\, s_{2,0} + s_{1,0} \qquad [36]\\
M_{5,0} &= 120\, d_{5,0} + 240\, d_{4,0} + 150\, d_{3,0} + 30\, d_{2,0} + d_{1,0}\\
M_{6,0} &= 720\, s_{6,0} + 180\, s_{5,0} + 1560\, s_{4,0} + 540\, s_{3,0} +\\
&\quad + 62\, s_{2,0} + s_{1,0}
\end{aligned}
$$

y para la marginal $Y$, el siguiente

$$
\begin{aligned}
M_{0,1} &= d_{0,1}\\
M_{0,2} &= 2\, s_{0,2} + s_{0,1}\\
M_{0,3} &= 6\, d_{0,3} + 6\, d_{0,2} + d_{0,1}\\
M_{0,4} &= 24\, s_{0,4} + 36\, s_{0,3} + 14\, s_{0,2} + s_{0,1} \qquad [37]\\
M_{0,5} &= 120\, d_{0,5} + 240\, d_{0,4} + 150\, d_{0,3} + 30\, d_{0,2} + d_{0,1}\\
M_{0,6} &= 720\, s_{0,6} + 180\, s_{0,5} + 1560\, s_{0,4} + 540\, s_{0,3} +\\
&\quad + 62\, s_{0,2} + s_{0,1}
\end{aligned}
$$

Con el cambio de origen que resulta de la fórmula [28], consideramos dividida la Tabla IV en cuatro cuadrantes, eliminando las frecuencias que corresponden al origen, tanto para la $X$ como para la $Y$, es decir, se tiene la tabla VI.

simbolizando por $M^{+}_{r,o}$ a los momentos potenciales correspondientes a la parte positiva y por $M^{-}_{r,o}$ a los de la parte negativa, de la marginal $X$; por $M^{+}_{o,s}$ y $M^{-}_{o,s}$ a los de las partes positiva y negativa, respectivamente, de la marginal $Y$.

Es decir, que deben sumarse los momentos resultantes de cada parte, pero como el signo de la parte negativa cambiará según sea par o impar la potencia, se afectan a los segundos sumandos por los factores $(-1)^r$ y $(-1)^s$ respectivamente.

Del repertorio [27] consideremos sólo las fórmulas de los momentos que tienen uno de los subíndices igual a cero, por ej. para $r=1$, es

$$M'_{1,0}=B_{1,0}$$

Según la fórmula [35] es:

$$M_{1,0}=M^{+}_{1,o}-M^{-}_{1,o}$$

luego resulta

$$M_{1,0}=B^{+}_{1,o}-B^{-}_{1,o}=d_{1,0}$$

para $r=2$

$$M_{2,0}=2\,B_{2,0}+B_{1,0}$$

por la [35]

$$M_{2,0}=M^{+}_{2,o}+M^{-}_{2,o}$$

resulta

$$\begin{aligned}M_{2,0}&=[2\,B^{+}_{2,o}+B^{+}_{1,o}]+[2\,B^{-}_{2,o}+B^{-}_{1,o}]\\&=2\,[B^{+}_{2,o}+B^{-}_{2,o}]+[B^{+}_{1,o}+B^{-}_{1,o}]\\&=2\,s_{2,0}+s_{1,0}\end{aligned}$$

Operando de esta manera se tiene para la marginal $X$, el repertorio:

$$
\begin{aligned}
M_{1,0} &= d_{1,0} \\
M_{2,0} &= 2\,s_{2,0} + s_{1,0} \\
M_{3,0} &= 6\,d_{3,0} + 6\,d_{2,0} + d_{1,0} \\
M_{4,0} &= 24\,s_{4,0} + 36\,s_{3,0} + 14\,s_{2,0} + s_{1,0} \qquad [36] \\
M_{5,0} &= 120\,d_{5,0} + 240\,d_{4,0} + 150\,d_{3,0} + 30\,d_{2,0} + d_{1,0} \\
M_{6,0} &= 720\,s_{6,0} + 180\,s_{5,0} + 1560\,s_{4,0} + 540\,s_{3,0} + \\
&\quad + 62\,s_{2,0} + s_{1,0}
\end{aligned}
$$

y para la marginal $Y$, el siguiente

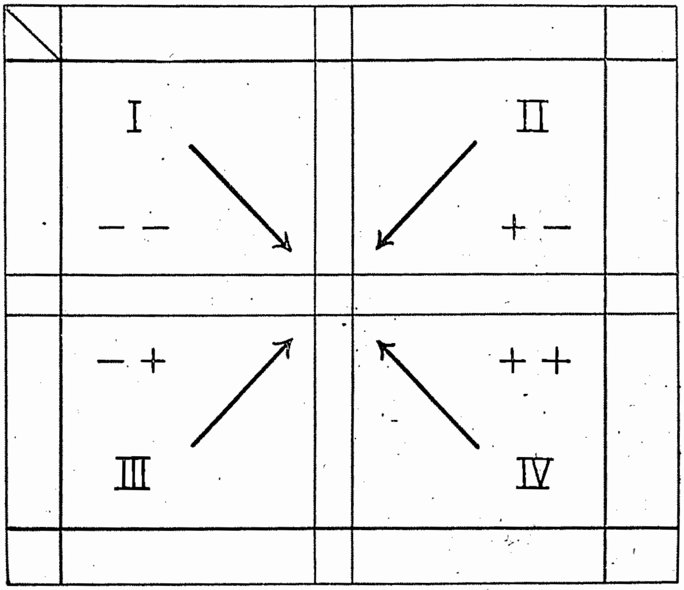
$$
\begin{aligned}
M_{0,1} &= d_{0,1} \\
M_{0,2} &= 2\,s_{0,2} + s_{0,1} \\
M_{0,3} &= 6\,d_{0,3} + 6\,d_{0,2} + d_{0,1} \\
M_{0,4} &= 24\,s_{0,4} + 36\,s_{0,3} + 14\,s_{0,2} + s_{0,1} \qquad [37] \\
M_{0,5} &= 120\,d_{0,5} + 240\,d_{0,4} + 150\,d_{0,3} + 30\,d_{0,2} + d_{0,1} \\
M_{0,6} &= 720\,s_{0,6} + 180\,s_{0,5} + 1560\,s_{0,4} + 540\,s_{0,3} + \\
&\quad + 62\,s_{0,2} + s_{0,1}
\end{aligned}
$$

Con el cambio de origen que resulta de la fórmula [28], consideramos dividida la Tabla IV en cuatro cuadrantes, eliminando las frecuencias que corresponden al origen, tanto para la $X$ como para la $Y$, es decir, se tiene la tabla VI.

TABLA VI

| $Y_j$ \ $X_i$ | $-X_7$ | $-X_6$ | $-X_5$ | $-X_4$ | $-X_3$ | $-X_2$ | $-X_1$ | $X_0=0$ | | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $X_6$ | $X_7$ | I | II | I+II |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-Y_4$ | $\eta_{-7,-4}$ | $\eta_{-6,-4}$ | $\eta_{-5,-4}$ | $\eta_{-4,-4}$ | $\eta_{-3,-4}$ | | | | | | | | | | | | $\sum_i \eta_{i,-4}$ | — | |
| $-Y_3$ | $\eta_{-7,-3}$ | $\eta_{-6,-3}$ | $\eta_{-5,-3}$ | $\eta_{-4,-3}$ | $\eta_{-3,-3}$ | $\eta_{-2,-3}$ | $\eta_{-1,-3}$ | | | | | | | | | | $\sum_i \eta_{i,-3}$ | — | |
| $-Y_2$ | $\eta_{-7,-2}$ | $\eta_{-6,-2}$ | $\eta_{-5,-2}$ | $\eta_{-4,-2}$ | $\eta_{-3,-2}$ | $\eta_{-2,-2}$ | $\eta_{-1,-2}$ | | | $\eta_{1,-2}$ | $\eta_{2,-2}$ | | | | | | $\sum_i \eta_{i,-2}$ | $\sum_i \eta_{i,-2}$ | |
| $-Y_1$ | | | $\eta_{-5,-1}$ | $\eta_{-4,-1}$ | $\eta_{-3,-1}$ | $\eta_{-2,-1}$ | $\eta_{-1,-1}$ | | | $\eta_{1,-1}$ | $\eta_{2,-1}$ | $\eta_{3,-1}$ | $\eta_{4,-1}$ | | | | $\sum_i \eta_{i,-1}$ | $\sum_i \eta_{i,-1}$ | |
| $Y_0=0$ | | | | | | | | | | | | | | | | | $\Sigma$ I | $\Sigma$ II | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | IV | III | IV+III |
| $Y_1$ | | | | | | $\eta_{-2,1}$ | $\eta_{-1,1}$ | | | $\eta_{1,1}$ | $\eta_{2,1}$ | $\eta_{3,1}$ | $\eta_{4,1}$ | $\eta_{5,1}$ | | | $\sum_i \eta_{i,1}$ | $\sum_i \eta_{i,1}$ | |
| $Y_2$ | | | | | | | $\eta_{-1,2}$ | | | $\eta_{1,2}$ | $\eta_{2,2}$ | $\eta_{3,2}$ | $\eta_{4,2}$ | $\eta_{5,2}$ | | | $\sum_i \eta_{i,2}$ | $\sum_i \eta_{i,2}$ | |
| $Y_3$ | | | | | | | | | | $\eta_{1,3}$ | $\eta_{2,3}$ | $\eta_{3,3}$ | $\eta_{4,3}$ | $\eta_{5,3}$ | | $\eta_{7,3}$ | $\sum_i \eta_{i,3}$ | — | |
| $Y_4$ | | | | | | | | | | $\eta_{1,4}$ | $\eta_{2,4}$ | $\eta_{3,4}$ | $\eta_{4,4}$ | $\eta_{5,4}$ | $\eta_{6,4}$ | | $\sum_i \eta_{i,4}$ | — | |
| $Y_5$ | | | | | | | | | | | $\eta_{2,5}$ | $\eta_{3,5}$ | $\eta_{4,5}$ | $\eta_{5,5}$ | | | $\sum_i \eta_{i,5}$ | — | |
| I | $\sum_j \eta_{-7,j}$ | $\sum_j \eta_{-6,j}$ | $\sum_j \eta_{-5,j}$ | $\sum_j \eta_{-4,j}$ | $\sum_j \eta_{-3,j}$ | $\sum_j \eta_{-2,j}$ | $\sum_j \eta_{-1,j}$ | $\Sigma$ I | IV | $\sum_j \eta_{1,j}$ | $\sum_j \eta_{2,j}$ | $\sum_j \eta_{3,j}$ | $\sum_j \eta_{4,j}$ | $\sum_j \eta_{5,j}$ | $\sum_j \eta_{6,j}$ | $\sum_j \eta_{7,j}$ | I+IV | — | — |
| III | — | — | — | — | — | $\sum_j \eta_{-2,j}$ | $\sum_j \eta_{-1,j}$ | $\Sigma$ III | III | $\sum_j \eta_{1,-j}$ | $\sum_j \eta_{2,-j}$ | $\sum_j \eta_{3,-j}$ | $\sum_j \eta_{4,-j}$ | — | — | — | — | II+III | — |
| I+III | | | | | | | | | | | | | | | | | — | — | I+II+III+IV |

Para una mejor comprensión, esquematizaremos esta tabla así:




(fig 1)

Llamaremos *primer cuadrante* al del ángulo superior izquierdo (respecto del origen), *segundo cuadrante* al del ángulo superior derecho, *tercer cuadrante* al del ángulo inferior izquierdo y *cuarto cuadrante*, al del ángulo inferior derecho y los distinguiremos respectivamente por I, II, III, IV.

Sin efectuar esta división en cuatro cuadrantes, se puede operar directamente con la tabla IV referida al origen natural y es inmediato que la forma de hacerlo es la misma que se explicará ahora para el cuadrante IV.

El objeto de la división es simplificar el cálculo.

Para cada cuadrante resultará un momento binomial que distinguiremos por $B^{I}_{r,s}$, $B^{II}_{r,s}$, $B^{III}_{r,s}$, $B^{IV}_{r,s}$, donde los exponentes I, II, III y IV designan el cuadrante a que pertenecen.

Se trata de hallar los momentos potenciales $M_{r,s}$ que, en virtud de la división del damero en los cuatro cuadrantes, estará formado por la suma de los cuatro valores parciales, correspondientes a cada uno de los cuadrantes.

Cada suma parcial debe ser tomada con el signo que le corresponda, el que depende de la paridad de los subíndices que indican el órden del momento.

Sea un momento genérico $M_{r,s}$; cuatro casos pueden presentarse

Caso (1): r y s pares

Caso (2): r y s impares

Caso (3): r par y s impar

Caso (4): r impar y s par

los que esquematizaremos de la siguiente manera:

CASO (1)

| $x^{2r}$ \ $y^{2s}$ | − | | + | |
|---|---|---|---|---|
| − | I<br>+ | | II<br>+ | |
| | | | | |
| + | III<br>+ | | IV<br>+ | |
| | | | | |

CASO (2)

| $x^{2r+1}$ \ $y^{2s+1}$ | − | | + | |
|---|---|---|---|---|
| − | I<br>+ | | II<br>− | |
| | | | | |
| + | III<br>− | | IV<br>+ | |
| | | | | |

CASO (3)

| $x^{2r}$ \ $y^{2s+1}$ | − | | + | |
|---|---|---|---|---|
| − | I<br>− | | II<br>− | |
| | | | | |
| + | III<br>+ | | IV<br>+ | |
| | | | | |

CASO (4)

| $x^{2r+1}$ \ $y^{2s}$ | − | | + | |
|---|---|---|---|---|
| − | I<br>− | | II<br>− | |
| | | | | |
| + | III<br>− | | IV<br>+ | |
| | | | | |

Como puede observarse, resulta que, cuando el momento potencial $M_{r,s}$ a calcular, tiene los dos subíndices pares, deberemos aplicar a las sumas parciales $M^{I}_{r,s}$, $M^{II}_{r,s}$, $M^{III}_{r,s}$, $M^{IV}_{r,s}$ los signos que figuran para el caso (1), es decir, que estarán todos afectados por el signo positivo.

Si los dos subíndices fuesen impares afectaríamos a las sumas de cada cuadrante con los signos que figuran para el caso (2): cuadrantes I y IV positivos; II y III negativos.

Si el primer subíndice fuese par y el segundo impar, aplicaríamos los signos que figuran para el caso (3): cuadrantes I y II negativos; III y IV positivos.

Cuando el primer subíndice fuese impar y el segundo par, correspondería aplicar los signos que figuran para el caso (4): cuadrantes I y III negativos; II y IV positivos.

Los momentos potenciales $M_{r,s}$ se expresan según el repertorio [24] en función de los binomiales dobles; utilizando las mismas relaciones [24] se expresa $M^{I}_{r,s}$ en función de los binomiales del cuadrante I; de igual modo se expresan $M^{II}_{r,s}$, $M^{III}_{r,s}$ y $M^{IV}_{r,s}$ en función de los binomiales de los cuadrantes II, III y IV, respectivamente; es decir que

$$M_{r,s} = \pm M^{I}_{r,s} \pm M^{II}_{r,s} \pm M^{III}_{r,s} \pm M^{IV}_{r,s} \qquad [38]$$

donde el signo de cada sumando del segundo miembro dependerá del caso que definan los índices $r,s$. Sustituyendo $M^{I}_{r,s}$, $M^{II}_{r,s}$, $M^{III}_{r,s}$, $M^{IV}_{r,s}$ en función de los binomiales de los respectivos cuadrantes y reuniendo, luego, los términos que tienen igual coeficiente, obtendremos expresiones en las que figurarán los momentos binomiales de los cuatro cuadrantes vinculados por los mismos signos que vinculan en [38] a los potenciales. Estos casos serán, por tanto, también cuatro y los definiremos así:

$$\left.\begin{array}{r} B^{I}_{m,n}+B^{II}_{m,n}+B^{III}_{m,n}+B^{IV}_{m,n}=T^{(1)}_{m,n} \\ B^{I}_{m,n}-B^{II}_{m,n}-B^{III}_{m,n}+B^{IV}_{m,n}=T^{(2)}_{m,n} \\ -B^{I}_{m,n}-B^{II}_{m,n}+B^{III}_{m,n}+B^{IV}_{m,n}=T^{(3)}_{m,n} \\ -B^{I}_{m,n}+B^{II}_{m,n}-B^{III}_{m,n}+B^{IV}_{m,n}=T^{(4)}_{m,n} \end{array}\right\} \quad [39]$$

donde, como ya se dijo, los exponentes de los términos del primer miembro indican el cuadrante a que pertenecen dichas sumas y el exponente de $T_{m,n}$ simboliza el caso respectivo definido por la paridad de los subíndices del momento potencial $M_{r,s}$.

La tabla VI nos permitirá construir el llamado *primer damero de sumas* que da los elementos para calcular los momentos en que, alguno de los dos subíndices, es igual a la unidad. es decir, los momentos binomiales de los tipos

$$B^{N}_{r,1} \quad y \quad B^{N}_{1,s} \quad \begin{pmatrix} r=1, & 2, & 3,\ldots \\ s=1, & 2, & 3,\ldots \end{pmatrix} \; (N=I,\ II,\ III,\ IV)$$

Construimos una tabla con la misma división que la VI, pero anotamos los valores de las frecuencias en el ángulo superior izquierdo, de cada celda. Esto es lo que se llama el primer damero de sumas.

Se trabaja en cada cuadrante del mismo, comenzando desde el ángulo opuesto al del origen común a los dos atributos y en dirección a ese mismo origen.

La dirección a seguir en cada cuadrante está indicada con flecha en la fig. 1.

De esta manera las sumas se hacen hacia el centro, en el cuadrante I desde el ángulo superior izquierdo; en el II desde el ángulo superior derecho; en el III desde el ángulo inferior izquierdo y en el IV desde el ángulo inferior derecho.

En cada celda se anota ahora un nuevo número que es una frecuencia acumulada, designando por $N_{i,j}$ la que corresponde al par $X_i Y_j$.

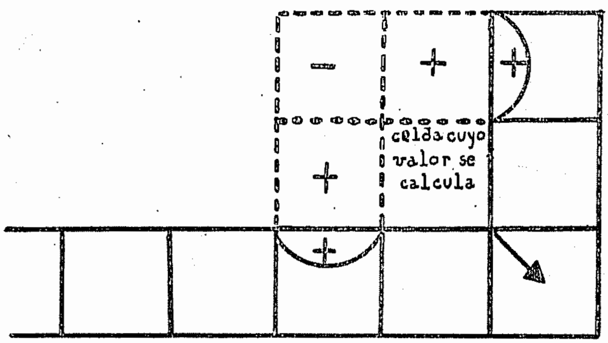
Estas frecuencias acumuladas se forman de la siguiente manera:

$$N_{i,j} = N_{i,j-1} + N_{i-1,j} - N_{i-1,j-1} + \eta_{i,j} \qquad [40]$$

Es decir, para calcular estos números $N_{i,j}$ se suman dos números del mismo damero que se está construyendo, uno de los cuales está en la celda de la misma fila que la del número que se busca, pero de la columna anterior, y el otro en la celda de la misma columna que la del número que se busca, pero de la fila anterior, luego se resta el número que queda en la celda de la fila anterior de la columna anterior, finalmente a este resultado hay que sumarle el número escrito en el ángulo superior izquierdo de la misma celda para la que se está calculando el valor de $N_{i,j}$.

Sea, por ejemplo, el cuadrante I: para formar cada número $N_{i,j}$ del damero de sumas es necesario añadir al número escrito en el ángulo superior izquierdo de la celda, los dos números $N_{i,j-1}$; $N_{i-1,j}$ que están en las celdas de arriba y a la izquierda de la que se considera y restarle el número $N_{i-1,j-1}$ de la celda opuesta. En los otros cuadrantes se opera lo mismo, comenzando como se dijo, desde el ángulo opuesto al origen común.

Este trabajo de composición del damero de sumas queda facilitado si se recurre a una escuadra de papel o cartón de la forma de la fig. 3.




(fig. 3)

La escuadra se usa así: en cada cuadrante la flecha debe estar dirigida al centro; en el ángulo recto de la escuadra queda una celda; el valor que corresponde anotar en ella es el que se calcula; los signos + indican los valores $N_{i,j}$ de las celdas que se suman a la frecuencia que figura en el ángulo superior izquierdo de la celda cuyo valor se calcula y el signo — indica el valor $N_{i,j}$ de la celda opuesta a la que se calcula y que se resta de la suma antes obtenida. (Ver esquema fig. 3).

Un ejemplo numérico aclarará esta operación, por lo demás muy sencilla.

| $y \backslash x$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-4$ | $^{2}\ 2$ | $^{2}\ 4$ | $^{5}\ 9$ | $^{1}\ 10$ | |
| $-3$ | $^{1}\ 3$ | $^{1}\ 4$ | $^{7}\ 16$ | $^{10}\ 27$ | + |
| $-2$ | $3$ | $^{6}\ 10$ | $^{13}\ 35$ | $^{20}\ 66$ | |
| $-1$ | | | + | | |

(fig. 4)

Donde el valor de $N_{i,j}$ de la celda que se calcula es 66 y resulta así:

$$N_{-2,-2} = 66 = 20 + 35 + 27 - 16$$

En la formación de la primer fila y de la primer columna de la tabla que estamos construyendo, sólo intervienen los valores $N_{i,j}$ de las celdas que las forman, ya que los otros dos valores $N_{i,j}$ no existen.

De esta manera se forma lo que hemos llamado *primer damero de sumas*, resultando la tabla VII.

TABLA VII

| $Y_j \backslash X_i$ | $-X_7$ | $-X_6$ | $-X_5$ | $-X_4$ | $-X_3$ | $-X_2$ | $-X_1$ | 0 | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $X_6$ | $X_7$ | II $\sum_i n_{-i,-j}$ | III $\sum_i n_{i,-j}$ | I+II |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-Y_4$ | $\boxed{\eta_{-7,-4}}$ $n_{-7,-4}$ | $\boxed{\eta_{-6,-4}}$ $n_{-6,-4}$ | $\boxed{\eta_{-5,-4}}$ $n_{-5,-4}$ | $\boxed{\eta_{-4,-4}}$ $n_{-4,-4}$ | $\boxed{\eta_{-3,-4}}$ $n_{-3,-4}$ | | | | | | | | | | | $\sum_i n_{-i,-4}$ | — | |
| $-Y_3$ | $\boxed{\eta_{-7,-3}}$ $n_{-7,-3}$ | $\boxed{\eta_{-6,-3}}$ $n_{-6,-3}$ | $\boxed{\eta_{-5,-3}}$ $n_{-5,-3}$ | $\boxed{\eta_{-4,-3}}$ $n_{-4,-3}$ | $\boxed{\eta_{-3,-3}}$ $n_{-3,-3}$ | $\boxed{\eta_{-2,-3}}$ $n_{-2,-3}$ | $\boxed{\eta_{-1,-3}}$ $n_{-1,-3}$ | | | | | | | | | $\sum_i n_{-i,-3}$ | — | |
| $-Y_2$ | $\boxed{\eta_{-7,-2}}$ $n_{-7,-2}$ | $\boxed{\eta_{-6,-2}}$ $n_{-6,-2}$ | $\boxed{\eta_{-5,-2}}$ $n_{-5,-2}$ | $\boxed{\eta_{-4,-2}}$ $n_{-4,-2}$ | $\boxed{\eta_{-3,-2}}$ $n_{-3,-2}$ | $\boxed{\eta_{-2,-2}}$ $n_{-2,-2}$ | $\boxed{\eta_{-1,-2}}$ $n_{-1,-2}$ | | $\boxed{\eta_{1,-2}}$ $n_{1,-2}$ | $\boxed{\eta_{2,-2}}$ $n_{2,-2}$ | | | | | | $\sum_i n_{-i,-2}$ | $\sum_i n_{i,-2}$ | |
| $-Y_1$ | $n_{-7,-1}$ | $n_{-6,-1}$ | $\boxed{\eta_{-5,-1}}$ $n_{-5,-1}$ | $\boxed{\eta_{-4,-1}}$ $n_{-4,-1}$ | $\boxed{\eta_{-3,-1}}$ $n_{-3,-1}$ | $\boxed{\eta_{-2,-1}}$ $n_{-2,-1}$ | $\boxed{\eta_{-1,-1}}$ $n_{-1,-1}$ | | $\boxed{\eta_{1,-1}}$ $n_{1,-1}$ | $\boxed{\eta_{2,-1}}$ $n_{2,-1}$ | $\boxed{\eta_{3,-1}}$ $n_{3,-1}$ | $\boxed{\eta_{4,-1}}$ $n_{4,-1}$ | | | | $\sum_i n_{-i,-1}$ | $\sum_i n_{i,-1}$ | |
| 0 | | | | | | | | | | | | | | | | IV $\sum_i n_{i,j}$ | III $\sum_i n_{-i,j}$ | IV+III |
| $Y_1$ | | | | | | $\boxed{\eta_{-2,1}}$ $n_{-2,1}$ | $\boxed{\eta_{-1,1}}$ $n_{-1,1}$ | | $\boxed{\eta_{1,1}}$ $n_{1,1}$ | $\boxed{\eta_{2,1}}$ $n_{2,1}$ | $\boxed{\eta_{3,1}}$ $n_{3,1}$ | $\boxed{\eta_{4,1}}$ $n_{4,1}$ | $\boxed{\eta_{5,1}}$ $n_{5,1}$ | $n_{6,1}$ | $n_{7,1}$ | $\sum_i n_{i,1}$ | $\sum_i n_{-i,1}$ | |
| $Y_2$ | | | | | | | $\boxed{\eta_{-1,2}}$ $n_{-1,2}$ | | $\boxed{\eta_{1,2}}$ $n_{1,2}$ | $\boxed{\eta_{2,2}}$ $n_{2,2}$ | $\boxed{\eta_{3,2}}$ $n_{3,2}$ | $\boxed{\eta_{4,2}}$ $n_{4,2}$ | $\boxed{\eta_{5,2}}$ $n_{5,2}$ | $n_{6,2}$ | $n_{7,2}$ | $\sum_i n_{i,2}$ | $\sum_i n_{-i,2}$ | |
| $Y_3$ | | | | | | | | | $\boxed{\eta_{1,3}}$ $n_{1,3}$ | $\boxed{\eta_{2,3}}$ $n_{2,3}$ | $\boxed{\eta_{3,3}}$ $n_{3,3}$ | $\boxed{\eta_{4,3}}$ $n_{4,3}$ | $\boxed{\eta_{5,3}}$ $n_{5,3}$ | $n_{6,3}$ | $\boxed{\eta_{7,3}}$ $n_{7,3}$ | $\sum_i n_{i,3}$ | — | |
| $Y_4$ | | | | | | | | | $\boxed{\eta_{1,4}}$ $n_{1,4}$ | $\boxed{\eta_{2,4}}$ $n_{2,4}$ | $\boxed{\eta_{3,4}}$ $n_{3,4}$ | $\boxed{\eta_{4,4}}$ $n_{4,4}$ | $\boxed{\eta_{5,4}}$ $n_{5,4}$ | $\boxed{\eta_{6,4}}$ $n_{6,4}$ | | $\sum_i n_{i,4}$ | — | |
| $Y_5$ | | | | | | | | | $n_{1,5}$ | $\boxed{\eta_{2,5}}$ $n_{2,5}$ | $\boxed{\eta_{3,5}}$ $n_{3,5}$ | $\boxed{\eta_{4,5}}$ $n_{4,5}$ | $\boxed{\eta_{5,5}}$ $n_{5,5}$ | | | $\sum_i n_{i,5}$ | — | |
| I $\sum_j n_{-i,-j}$ | $\sum_j n_{-7,-j}$ | $\sum_j n_{-6,-j}$ | $\sum_j n_{-5,-j}$ | $\sum_j n_{-4,-j}$ | $\sum_j n_{-3,-j}$ | $\sum_j n_{-2,-j}$ | $\sum_j n_{-1,-j}$ | IV $\sum_j n_{i,j}$ | $\sum_j n_{1,j}$ | $\sum_j n_{2,j}$ | $\sum_j n_{3,j}$ | $\sum_j n_{4,j}$ | $\sum_j n_{5,j}$ | $\sum_j n_{6,j}$ | $\sum_j n_{7,j}$ | I+IV | — | — |
| III $\sum_j n_{-i,j}$ | — | — | — | — | — | $\sum_j n_{-2,j}$ | $\sum_j n_{-1,j}$ | II $\sum_j n_{i,-j}$ | $\sum_j n_{1,-j}$ | $\sum_j n_{2,-j}$ | $\sum_j n_{3,-j}$ | $\sum_j n_{4,-j}$ | — | — | — | — | II+III | — |
| I+III | | | | | | | | IV+II | | | | | | | | — | — | I+II+III+IV |

La manera como se realizan estas sumas y la formación de los números $N_{i,j}$ muestra que, en el fondo, cada uno de estos números resulta de una suma de las frecuencias $\eta_{i,j}$, como se indica en las Tablas VIII, IX y X para los tres primeros cuadrantes.

Operando, de manera análoga, en el cuarto cuadrante, tendríamos, para la marginal *X*, expresiones de la forma:

$$\sum_i X_i (\eta_{i,1} + \eta_{i,2} + \ldots) = \sum_i N_{i,j}$$

Para la marginal *Y*

$$\sum_j Y_j (\eta_{1,j} + \eta_{2,j} + \ldots) = \sum_j N_{i,j}$$

y como suma total

$$\sum_i \sum_j X_i Y_j \eta_{1,j} = \sum_i \sum_j N_{i,j}$$

Los índices de sumación *i,j* están extendidos, en cada cuadrante, a los pares $X_i Y_j$ que corresponden a las frecuencias de ese cuadrante.

Contralor inmediato de si las operaciones, en cada cuadrante, han sido bien realizadas, nos la da la tabla VII en las últimas fila y columna. En efecto, al valor dado por [I + II + III + IV] debe llegarse, independientemente, sumando la última fila y la última columna, además, también se lo obtiene, sumando los valores que están indicados en las dos celdas que forman diagonal, con la que contiene el valor I + II + III + IV que consideramos.

Por otra parte, agregando, a la suma de los valores que en la Tabla VII están en las celdas que rodean al origen, es decir, a $N_{-1,-1} + N_{1,-1} + N_{-1,1} + N_{1,1}$, los valores marginales de la Tabla IV que se suprimieron por el cambio de origen, o sea $\sum \eta_{i,5}$ y $\sum \eta_{8,j}$ y restando el de la frecuencia que en la misma Tabla IV está en el centro

CUADRANTE I

TABLA VIII

| $X_i$ \ $Y_j$ | $-X_7$ | $-X_6$ | $-X_5$ | $-X_4$ | $-X_3$ | $-X_2$ | $-X_1$ | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-Y_4$ | $\boxed{n_{-7,-4}}$ $n_{-7,-4} = N_{-7,-4}$ | $\boxed{n_{-6,-4}}$ $n_{-7,-4}+n_{-6,-4} = N_{-6,-4}$ | $\boxed{n_{-5,-4}}$ $n_{-7,-4}+n_{-6,-4}+n_{-5,-4} = N_{-5,-4}$ | $\boxed{n_{-4,-4}}$ $n_{-7,-4}+n_{-6,-4}+n_{-5,-4}+n_{-4,-4} = N_{-4,-4}$ | $\boxed{n_{-3,-4}}$ $n_{-7,-4}+n_{-6,-4}+n_{-5,-4}+n_{-4,-4}+n_{-3,-4} = N_{-3,-4}$ | $n_{-7,-4}+n_{-6,-4}+n_{-5,-4}+n_{-4,-4}+n_{-3,-4} = N_{-2,-4}$. | $n_{-7,-4}+n_{-6,-4}+n_{-5,-4}+n_{-4,-4}+n_{-3,-4} = N_{-1,-4}$. | $\sum_i X_i n_{i,-4} = \sum_i N_{i,-4}$ |
| $-Y_3$ | $\boxed{n_{-7,-3}}$ $n_{-7,-4}+n_{-7,-3} = N_{-7,-3}$ | $\boxed{n_{-6,-3}}$ $n_{-7,-4}+n_{-7,-3}+n_{-6,-4}+n_{-6,-3} = N_{-6,-3}$ | $\boxed{n_{-5,-3}}$ $n_{-7,-4}+n_{-7,-3}+n_{-6,-4}+n_{-6,-3}+n_{-5,-4}+n_{-5,-3} = N_{-5,-3}$ | $\boxed{n_{-4,-3}}$ $n_{-7,-4}+n_{-7,-3}+n_{-6,-4}+n_{-6,-3}+n_{-5,-4}+n_{-5,-3}+n_{-4,-4}+n_{-4,-3} = N_{-4,-3}$ | $\boxed{n_{-3,-3}}$ $n_{-7,-4}+n_{-7,-3}+n_{-6,-4}+n_{-6,-3}+n_{-5,-4}+n_{-5,-3}+n_{-4,-4}+n_{-4,-3}+n_{-3,-3} = N_{-3,-3}$ | $\boxed{n_{-2,-3}}$ $n_{-7,-4}+n_{-7,-3}+n_{-6,-4}+n_{-6,-3}+n_{-5,-4}+n_{-5,-3}+n_{-4,-4}+n_{-4,-3}+n_{-3,-4}+n_{-3,-3}+n_{-2,-3} = N_{-2,-4}$ | $\boxed{n_{-1,-3}}$ $n_{-7,-4}+n_{-7,-3}+n_{-6,-4}+n_{-6,-3}+n_{-5,-4}+n_{-5,-3}+n_{-4,-4}+n_{-4,-3}+n_{-3,-4}+n_{-3,-3}+n_{-2,-3}+n_{-1,-3} = N_{-1,-3}$ | $\sum_i X_i(n_{i,-4}+n_{i,-3}) = \sum_i N_{i,-3}$ |
| $-Y_2$ | $\boxed{n_{-7,-2}}$ $n_{-7,-4}+n_{-7,-3}+n_{-7,-2} = N_{-7,-2}$ | $\boxed{n_{-6,-2}}$ $n_{-7,-4}+n_{-7,-3}+n_{-7,-2}+n_{-6,-4}+n_{-6,-3}+n_{-6,-2} = N_{-6,-2}$ | $\boxed{n_{-5,-2}}$ $n_{-7,-4}+n_{-7,-3}+n_{-7,-2}+n_{-6,-4}+n_{-6,-3}+n_{-6,-2}+n_{-5,-4}+n_{-5,-3}+n_{-5,-2} = N_{-5,-2}$ | $\boxed{n_{-4,-2}}$ $n_{-7,-4}+n_{-7,-3}+n_{-7,-2}+n_{-6,-4}+n_{-6,-3}+n_{-6,-2}+n_{-5,-4}+n_{-5,-3}+n_{-5,-2}+n_{-4,-4}+n_{-4,-3}+n_{-4,-2} = N_{-4,-2}$ | $\boxed{n_{-3,-2}}$ $n_{-7,-4}+n_{-7,-3}+n_{-7,-2}+n_{-6,-4}+n_{-6,-3}+n_{-6,-2}+n_{-5,-4}+n_{-5,-3}+n_{-5,-2}+n_{-4,-4}+n_{-4,-3}+n_{-4,-2}+n_{-3,-4}+n_{-3,-3}+n_{-3,-2} = N_{-3,-2}$ | $\boxed{n_{-2,-2}}$ $n_{-7,-4}+n_{-7,-3}+n_{-7,-2}+n_{-6,-4}+n_{-6,-3}+n_{-6,-2}+n_{-5,-4}+n_{-5,-3}+n_{-5,-2}+n_{-4,-4}+n_{-4,-3}+n_{-4,-2}+n_{-3,-4}+n_{-3,-3}+n_{-3,-2}+n_{-2,-4}+n_{-2,-3}+n_{-2,-2} = N_{-2,-2}$ | $\boxed{n_{-1,-2}}$ $n_{-7,-4}+n_{-7,-3}+n_{-7,-2}+n_{-6,-4}+n_{-6,-3}+n_{-6,-2}+n_{-5,-4}+n_{-5,-3}+n_{-5,-2}+n_{-4,-4}+n_{-4,-3}+n_{-4,-2}+n_{-3,-4}+n_{-3,-3}+n_{-3,-2}+n_{-2,-4}+n_{-2,-3}+n_{-2,-2}+n_{-1,-4}+n_{-1,-3}+n_{-1,-2} = N_{-1,-2}$ | $\sum_i X_i(n_{i,-4}+n_{i,-3}+n_{i,-2}) = \sum_i N_{i,-2}$ |
| $-Y_1$ | $n_{-7,-4}+n_{-7,-3}+n_{-7,-2} = N_{-7,-1}$ | $n_{-7,-4}+n_{-7,-3}+n_{-7,-2}+n_{-6,-4}+n_{-6,-3}+n_{-6,-2} = N_{-6,-1}$ | $\boxed{n_{-5,-1}}$ $n_{-7,-4}+n_{-7,-3}+n_{-7,-2}+n_{-6,-4}+n_{-6,-3}+n_{-6,-2}+n_{-5,-4}+n_{-5,-3}+n_{-5,-2}+n_{-5,-1} = N_{-5,-1}$ | $\boxed{n_{-4,-1}}$ $n_{-7,-4}+n_{-7,-3}+n_{-7,-2}+n_{-6,-4}+n_{-6,-3}+n_{-6,-2}+n_{-5,-4}+n_{-5,-3}+n_{-5,-2}+n_{-4,-4}+n_{-4,-3}+n_{-4,-2}+n_{-4,-1} = N_{-4,-1}$ | $\boxed{n_{-3,-1}}$ $n_{-7,-4}+n_{-7,-3}+n_{-7,-2}+n_{-6,-4}+n_{-6,-3}+n_{-6,-2}+n_{-5,-4}+n_{-5,-3}+n_{-5,-2}+n_{-4,-4}+n_{-4,-3}+n_{-4,-2}+n_{-3,-4}+n_{-3,-3}+n_{-3,-2}+n_{-3,-1} = N_{-3,-1}$ | $\boxed{n_{-2,-1}}$ $n_{-7,-4}+n_{-7,-3}+n_{-7,-2}+n_{-6,-4}+n_{-6,-3}+n_{-6,-2}+n_{-5,-4}+n_{-5,-3}+n_{-5,-2}+n_{-4,-4}+n_{-4,-3}+n_{-4,-2}+n_{-3,-4}+n_{-3,-3}+n_{-3,-2}+n_{-2,-4}+n_{-2,-3}+n_{-2,-2}+n_{-2,-1} = N_{-2,-1}$ | $\boxed{n_{-1,-1}}$ $n_{-7,-4}+n_{-7,-3}+n_{-7,-2}+n_{-6,-4}+n_{-6,-3}+n_{-6,-2}+n_{-5,-4}+n_{-5,-3}+n_{-5,-2}+n_{-4,-4}+n_{-4,-3}+n_{-4,-2}+n_{-3,-4}+n_{-3,-3}+n_{-3,-2}+n_{-3,-1}+n_{-2,-3}+n_{-2,-1}+n_{-1,-3}+n_{-1,-2}+n_{-1,-1} = N_{-1,-1}$ | $\sum_i X_i(n_{i,-4}+n_{i,-3}+n_{i,-2}+n_{i,-1}) = \sum_i N_{i,-1}$ |
| I | $\sum_j Y_j n_{-7,j} = \sum_j N_{-7,j}$ | $\sum_j Y_j(n_{-7,j}+n_{-6,j}) = \sum_j N_{-6,j}$ | $\sum_j Y_j(n_{-7,j}+n_{-6,j}+n_{-5,j}) = \sum_j N_{-5,j}$ | $\sum_j Y_j(n_{-7,j}+n_{-6,j}+n_{-5,j}+n_{-4,j}) = \sum_j N_{-4,j}$ | $\sum_j Y_j(n_{-7,j}+n_{-6,j}+n_{-5,j}+n_{-4,j}+n_{-3,j}) = \sum_j N_{-3,j}$ | $\sum_j Y_j(n_{-7,j}+n_{-6,j}+n_{-5,j}+n_{-4,j}+n_{-3,j}+n_{-2,j}) = \sum_j N_{-2,j}$ | $\sum_j Y_j(n_{-7,j}+n_{-6,j}+n_{-5,j}+n_{-4,j}+n_{-3,j}+n_{-2,j}+n_{-1,j}) = \sum_j N_{-1,j}$ | $\sum_i\sum_j X_iY_j n_{i,j} = \sum_i\sum_j N_{i,j}$ |

CUADRANTE II | TABLA IX

| $Y_j \backslash X$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $X_6$ | $X_7$ | III |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-Y_4$ | | | | | | | | — |
| $-Y_3$ | | | | | | | | — |
| $-Y_2$ | $\boxed{\eta_{1,-2}}$ $\eta_{2,-2}+\eta_{1,-2}=N_{1,-2}$ | $\boxed{\eta_{2,-2}}$ $\eta_{2,-2}=N_{2,-2}$ | | | | | | $\sum_i X_i\,\eta_{i,-2}= =\sum_i N_{i,-2}$ |
| $-Y_1$ | $\boxed{\eta_{1,-1}}$ $\eta_{4,-1}+\eta_{3,-1}+\eta_{2,-2}+\eta_{2,-1}+ +\eta_{1,-2}+\eta_{1,-1} =N_{1,-1}$ | $\boxed{\eta_{2,-1}}$ $\eta_{4,-1}+\eta_{3,-1}+\eta_{2,-2}+\eta_{2,-1}= =N_{2,-1}$ | $\boxed{\eta_{3,-1}}$ $\eta_{4,-1}+\eta_{3,-1}=N_{3,-1}$ | $\boxed{\eta_{4,-1}}$ $\eta_{4,-1}=N_{4,-1}$ | | | | $\sum_i X_i(\eta_{i,-2}+\eta_{i,-1}) =\sum_i N_{i,-1}$ |
| III | $\sum_j Y_j(\eta_{4,-j}+\eta_{3,-j}+\eta_{2,-j}+ +\eta_{1,-j})= =\sum_j N_{1,-j}$ | $\sum_j Y_j(\eta_{4,-j}+\eta_{3,-j}+ +\eta_{2,-j})= =\sum_j N_{2,-j}$ | $\sum_j Y_j(\eta_{4,-j}+ +\eta_{3,-j})= =\sum_j N_{3,-j}$ | $\sum_j Y_j\,\eta_{4,-j}= =\sum_j N_{4,-j}$ | — | — | — | $\sum_i\sum_j X_i Y_j \eta_{i,-j}= =\sum_i\sum_j N_{i,-j}$ |

CUADRANTE III | TABLA X

| $Y_j \backslash X_i$ | $-X_7$ | $-X_6$ | $-X_5$ | $-X_4$ | $-X_3$ | $-X_2$ | $-X_1$ | III |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y_1$ | | | | | | $\boxed{\eta_{-2,1}}$ $\eta_{-2,1}=N_{-2,1}$ | $\boxed{\eta_{-1,1}}$ $\eta_{-2,1}+\eta_{-1,2}+\eta_{-1,1}=N_{-1,1}$ | $\sum_i X_i(\eta_{-i,1}+\eta_{-i,2})= =\sum_i N_{-i,1}$ |
| $Y_2$ | | | | | | | $\boxed{\eta_{-1,2}}$ $\eta_{-1,2}=N_{1,2}$ | $\sum_i X_i\,\eta_{-i,2}= =\sum_i N_{-i,2}$ |
| $Y_3$ | | | | | | | | — |
| $Y_3$ | | | | | | | | — |
| $Y_4$ | | | | | | | | — |
| III | — | — | — | — | — | $\sum_j Y_j\,\eta_{-2,j}= =\sum_j N_{2,j}$ | $\sum_j Y_j(\eta_{-2,j}+\eta_{-1,j})= =\sum_j N_{-1,j}$ | $\sum_i\sum_j X_i Y_j\,\eta_{-i,j}= =\sum_i\sum_j N_{-i,j}$ |

de la cruz: $\eta_{8,5}$, debemos tener, reproducido, el número total de observaciones, o sea la población N.

En la Tabla VII hay cuatro marginales $X$ y cuatro marginales $Y$, correspondientes a cada uno de los cuatro cuadrantes en que está dividida.

Repitiendo, con estas marginales, operaciones de sumas como las que se realizaron en la tabla V, una vez con respecto a $X$ y varias con respecto a $Y$, tendremos momentos binomiales en que el primer subíndice es $1$; si operamos en el otro sentido, una vez con respecto a $Y$ y varias veces con respecto a $X$, tendremos momentos binomiales con el segundo subíndice igual a $1$.

Por tanto, las sumas de las columnas de totales, encabezadas por I, II, III y IV, de la Tabla VII, dan los valores

$$B^{I}_{1,1}\,,\quad B^{I}_{1,2}\,,\ldots\ldots\;;\quad B^{III}_{1,1}\,,\quad B^{III}_{1,2}\,,\ldots\ldots$$

$$B^{II}_{1,1}\,,\quad B^{II}_{1,2}\,,\ldots\ldots\;;\quad B^{IV}_{1,1}\,,\quad B^{IV}_{1,2}\,,\ldots\ldots$$

y con las sumas de las filas totales I, II, III y IV de la misma tabla tenemos los de

$$B^{I}_{1,1}\,,\quad B^{I}_{2,1}\,,\ldots\ldots\;;\quad B^{III}_{1,1}\,,\quad B^{III}_{2,1}\,,\ldots\ldots$$

$$B^{II}_{1,1}\,,\quad B^{II}_{2,1}\,,\ldots\ldots\;;\quad B^{IV}_{1,1}\,,\quad B^{IV}_{2,1}\,,\ldots\ldots$$

Consideremos, por ejemplo, en el 4.º cuadrante de la Tabla VII la marginal $X$ y construyamos el cuadro de sumas: Tabla XI.

Los datos deben disponerse según los valores decrecientes de los atributos, o sea, de manera que la suma se inicie por la frecuencia más alejada del punto que se ha tomado como origen.

La columna (1) acabará en la fila 1, la columna (2) en la fila 2, etc. La tabla XI es la correspondiente al IV cuadrante, respecto de la variable $X$.

TABLA XI

| $X_i$ | $\sum_j N_{i,j}$ | (1) | (2) | (3) |
|---|---|---|---|---|
| $X_7$ | $\sum_j Y_j \eta_{7,j}$ | $\sum_j Y_j \eta_{7,j}$ | $\sum_j Y_j \eta_{7,j}$ | $\sum_j Y_j \eta_{7,j}$ |
| $X_6$ | $\sum_j Y_j \eta_{6,j}$ | $\sum_j Y_j(\eta_{7,j}+\eta_{6,j})$ | $\sum_j Y_j(2\eta_{7,j}+\eta_{6,j})$ | $\sum_j Y_j(3\eta_{7,j}+\eta_{6,j})$ |
| $X_5$ | $\sum_j Y_j \eta_{5,j}$ | $\sum_j Y_j(\eta_{7,j}+\eta_{6,j}+\eta_{5,j})$ | $\sum_j Y_j(3\eta_{7,j}+2\eta_{6,j}+\eta_{5,j})$ | $\sum_j Y_j(6\eta_{7,j}+3\eta_{6,j}+\eta_{5,j})$ |
| $X_4$ | $\sum_j Y_j \eta_{4,j}$ | $\sum_j Y_j(\eta_{7,j}+\eta_{6,j}+\eta_{5,j}+\eta_{4,j})$ | $\sum_j Y_j(4\eta_{7,j}+3\eta_{6,j}+2\eta_{5,j}+\eta_{4,j})$ | $\sum_j Y_j(10\eta_{7,j}+6\eta_{6,j}+3\eta_{5,j}+\eta_{4,j})$ |
| $X_3$ | $\sum_j Y_j \eta_{3,j}$ | $\sum_j Y_j(\eta_{7,j}+\eta_{6,j}+\eta_{5,j}+\eta_{4,j}+\eta_{3,j})$ | $\sum_j Y_j(5\eta_{7,j}+4\eta_{6,j}+3\eta_{5,j}+2\eta_{4,j}+\eta_{3,j})$ | $\sum_j Y_j(15\eta_{7,j}+10\eta_{6,j}+6\eta_{5,j}+3\eta_{4,j}+\eta_{3,j})$ |
| $X_2$ | $\sum_j Y_j \eta_{2,j}$ | $\sum_j Y_j(\eta_{7,j}+\eta_{6,j}+\eta_{5,j}+\eta_{4,j}+\eta_{3,j}+\eta_{2,j})$ | $\sum_j Y_j(6\eta_{7,j}+5\eta_{6,j}+4\eta_{5,j}+3\eta_{4,j}+2\eta_{3,j}+\eta_{2,j})$ | ——— |
| $X_1$ | $\sum_j Y_j \eta_{1,j}$ | $\sum_j Y_j(\eta_{7,j}+\eta_{6,j}+\eta_{5,j}+\eta_{4,j}+\eta_{3,j}+\eta_{2,j}+\eta_{1,j})$ | ——— | ——— |
| | $\sum_j Y_j(\eta_{7,j}+\eta_{6,j}+\eta_{5,j}+\eta_{4,j}+\eta_{3,j}+\eta_{2,j}+\eta_{1,j})$ | $\sum_j Y_j(7\eta_{7,j}+6\eta_{6,j}+5\eta_{5,j}+4\eta_{4,j}+3\eta_{3,j}+2\eta_{2,j}+\eta_{1,j})$ | $\sum_j Y_j\left(\frac{7(7-1)}{2!}\eta_{7,j}+\frac{6(6-1)}{2!}\eta_{6,j}+\frac{5(5-1)}{2!}\eta_{5,j}+\frac{4(4-1)}{2!}\eta_{4,j}+\frac{3(3-1)}{2!}\eta_{3,j}+\eta_{2,j}\right)$ | $\sum_j Y_j\left(\frac{7(7-1)(7-2)}{3!}\eta_{7,j}+\frac{6(6-1)(6-2)}{3!}\eta_{6,j}+\frac{5(5-1)(5-2)}{3!}\eta_{5,j}+\frac{4(4-1)(4-2)}{3!}\eta_{4,j}+\eta_{3,j}\right)$ |
| | $\sum_i \sum_j Y_j \eta_{i,j}$ | $B^{IV}_{1,1}=\sum_j Y_j \sum_i X_i \eta_{i,j}$ $=\sum_i \sum_j X_i Y_j \eta_{i,j}$ | $B^{IV}_{2,1}=\sum_j Y_j \sum_i \frac{X_i(X_i-1)}{2!}\eta_{i,j}$ $=\sum_i\sum_j \binom{X_i}{2} Y_j \eta_{i,j}$ | $B^{IV}_{3,1}=\sum_j Y_j \sum_i \frac{X_i(X_i-1)(X_i-2)}{3!}\eta_{i,j}$ $=\sum_i\sum_j \binom{X_i}{3} Y_j \eta_{i,j}$. |

Operando en la misma forma, con los valores de las marginales $X$ de los otros tres cuadrantes calcularíamos los valores de

$$B'_{1,1} \quad B'_{2,1} \quad B'_{3,1} \quad \ldots$$

$$B''_{1,1} \quad B''_{2,1} \quad B''_{3,1} \quad \ldots$$

$$B'''_{1,1} \quad B'''_{2,1} \quad B'''_{3,1} \quad \ldots$$

agregando a éstos, los correspondientes resultados de la tabla XI, según la regla de los signos, dadas por las fórmulas [39], obtenemos los valores de

$$T^{(1)}_{1,1} \quad T^{(2)}_{1,1} \quad T^{(3)}_{1,1} \quad T^{(4)}_{1,1}$$

$$T^{(1)}_{2,1} \quad T^{(2)}_{2,1} \quad T^{(3)}_{2,1} \quad T^{(4)}_{2,1}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Como resultado de operaciones paralelas con las marginales $Y$ se obtienen los valores de

$$T^{(1)}_{1,1} \quad T^{(2)}_{1,1} \quad T^{(3)}_{1,1} \quad T^{(4)}_{1,1}$$

$$T^{(1)}_{1,2} \quad T^{(2)}_{1,2} \quad T^{(3)}_{1,2} \quad T^{(4)}_{1,2}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Antes de calcular estos valores, conviene realizar el control ,ya explicado, para las tablas de sumas.

Dichos valores de $T^{(n)}_{i,1}$ y $T^{(n)}_{1,j}$ ($n=1, 2, 3, 4$; $i,j=1, 2,\ldots$) deben sustituirse en las fórmulas de los momentos absolutos potenciales dobles, que deseamos calcular, en los que uno de los subíndices es igual a la unidad y que tomamos del repertorio [27], donde, en lugar de los $B_{i,1}$ y $B_{1,j}$ se sustituyen los $T^{(n)}_{i,1}$ y $T^{(n)}_{1,j}$ en que $n$ queda determinado por el caso que definen los índices $r,s$ del momento potencial $M_{r,s}$ que se calcula.

Sea, por ejemplo, calcular $M_{2,1}$; según el repertorio [27] es

$$M_{2,1} = 2\,B_{2,1} + B_{1,1} \qquad [41]$$

Para los momentos potenciales dobles, por la división en cuatro cuadrantes del damero, rigen los cuatro casos analizados en la fig. 2, correspondiendo aplicar los signos que determinan la paridad de los índices, que expresan el órden del momento potencial.

$M_{2,1}$ está en el caso (3), por tanto, es

$$M_{2,1} = -M^{I}_{2,1} - M^{II}_{2,1} + M^{III}_{2,1} + M^{IV}_{2,1}$$

Expresando cada término del 2º. miembro en función de los momentos binomiales como indica la fórmula [41] se tiene:

$$\begin{aligned} M_{2,1} = & -[2\,B^{I}_{2,1} + B^{I}_{1,1}] - [2\,B^{II}_{2,1} + B^{II}_{1,1}] + [2\,B^{III}_{2,1} + B^{III}_{1,1}] + \\ & + [2\,B^{IV}_{2,1} + B^{IV}_{1,1}] = 2\,[-B^{I}_{2,1} - B^{II}_{2,1} + B^{III}_{2,1} + B^{IV}_{2,1}] + \\ & + [-B^{I}_{1,1} - B^{II}_{1,1} + B^{III}_{1,1} + B^{IV}_{1,1}] \end{aligned}$$

que por la [39] puede escribirse

$$M_{2,1} = 2\,T^{(3)}_{2,1} + T^{(3)}_{1,1}$$

Operando de la misma manera, tendríamos el siguiente repertorio de momentos potenciales dobles, con uno de los subíndices igual a la unidad:

$$\begin{aligned} M_{1,1} &= T^{(2)}_{1,1} \\ M_{2,1} &= 2\,T^{(3)}_{2,1} + T^{(3)}_{1,1} \\ M_{1,2} &= 2\,T^{(4)}_{1,2} + T^{(4)}_{1,1} \\ M_{3,1} &= 6\,T^{(2)}_{3,1} + 6\,T^{(2)}_{2,1} + T^{(2)}_{1,1} \\ M_{1,3} &= 6\,T^{(2)}_{1,3} + 6\,T^{(2)}_{1,2} + T^{(2)}_{1,1} \qquad [42] \\ M_{4,1} &= 24\,T^{(3)}_{4,1} + 36\,T^{(3)}_{3,1} + 14\,T^{(3)}_{2,1} + T^{(3)}_{1,1} \end{aligned}$$

$$M_{1,4} = 24\,T^{(4)}_{1,4} + 36\,T^{(4)}_{1,3} + 14\,T^{(4)}_{1,2} + T^{(4)}_{1,1}$$
$$M_{5,1} = 120\,T^{(2)}_{5,1} + 240\,T^{(2)}_{4,1} + 150\,T^{(2)}_{3,1} + 30\,T^{(2)}_{2,1} + T^{(2)}_{1,1}$$
$$M_{1,5} = 120\,T^{(2)}_{1,5} + 240\,T^{(2)}_{1,4} + 150\,T^{(2)}_{1,3} + 30\,T^{(2)}_{1,2} + T^{(2)}_{1,1}$$

Para obtener los momentos potenciales, uno de cuyos subíndices sea 2, deben calcularse los binomiales que tengan un subíndice 2; para ello debe formarse el *segundo damero de sumas* partiendo del primero, o sea de la Tabla VII.

Como en la expresión de los momentos binomiales [24] los límites inferiores de las sumatorias no pueden ser menores que los subíndices del momento que se calcula, puesto que sino los números combinatorios se anularían, para el cálculo que nos proponemos, no deben tomarse en cuenta los valores de los atributos $-X_1$, $X_1$, $-Y_1$ e $Y_1$.

Orlamos, pues, en el nuevo damero de sumas, a la cruz central, con otra cruz doble, de celdas en blanco, y disponemos en el ángulo superior izquierdo, de cada una de las restantes, los valores que, respectivamente, figuran en las celdas de la Tabla VII. Se opera como en el caso del damero anterior, es decir, que en cada celda se anota ahora, un nuevo número que es otra frecuencia acumulada, designando por $\mathcal{N}_{i,j}$ la que corresponde al par $X_i$, $Y_j$.

Estas nuevas frecuencias acumuladas se forman de la siguiente manera:

$$\mathcal{N}_{i,j} = \mathcal{N}_{i,j-1} + \mathcal{N}_{i-1,j} - \mathcal{N}_{i-1,j-1} + N_{i,j} \qquad [43]$$

Se tiene así la Tabla XII

TABLA XII

| $Y_j \backslash X_i$ | $X_{-7}$ | $X_{-6}$ | $X_{-5}$ | $X_{-4}$ | $X_{-3}$ | $X_{-2}$ | $X_{-1}$ | $X_0$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $X_6$ | $X_7$ | I | II | I+II |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-Y_4$ | $\boxed{n_{-7,-4}}\ \mathcal{N}_{-7,-4}$ | $\boxed{n_{-6,-4}}\ \mathcal{N}_{-6,-4}$ | $\boxed{n_{-5,-4}}\ \mathcal{N}_{-5,-4}$ | $\boxed{n_{-4,-4}}\ \mathcal{N}_{-4,-4}$ | $\boxed{n_{-3,-4}}\ \mathcal{N}_{-3,-4}$ | $\boxed{n_{-2,-4}}\ \mathcal{N}_{-2,-4}$ | — | | — | | | | | | | $\sum_i \mathcal{N}_{i,-4}$ | — | |
| $-Y_3$ | $\boxed{n_{-7,-3}}\ \mathcal{N}_{-7,-3}$ | $\boxed{n_{-6,-3}}\ \mathcal{N}_{-6,-3}$ | $\boxed{n_{-5,-3}}\ \mathcal{N}_{-5,-3}$ | $\boxed{n_{-4,-3}}\ \mathcal{N}_{-4,-3}$ | $\boxed{n_{-3,-3}}\ \mathcal{N}_{-3,-3}$ | $\boxed{n_{-2,-3}}\ \mathcal{N}_{-2,-3}$ | — | | — | | | | | | | $\sum_i \mathcal{N}_{i,-3}$ | — | |
| $-Y_2$ | $\boxed{n_{-7,-2}}\ \mathcal{N}_{-7,-2}$ | $\boxed{n_{-6,-2}}\ \mathcal{N}_{-6,-2}$ | $\boxed{n_{-5,-2}}\ \mathcal{N}_{-5,-2}$ | $\boxed{n_{-4,-2}}\ \mathcal{N}_{-4,-2}$ | $\boxed{n_{-3,-2}}\ \mathcal{N}_{-3,-2}$ | $\boxed{n_{-2,-2}}\ \mathcal{N}_{-2,-2}$ | — | | — | $\boxed{n_{2,-2}}\ \mathcal{N}_{2,-2}$ | | | | | | $\sum_i \mathcal{N}_{-i,-2}$ | $\sum_i \mathcal{N}_{i,-2}$ | |
| $-Y_1$ | — | — | — | — | — | — | — | | — | — | — | — | — | — | — | — | — | |
| $Y_0$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $Y_1$ | — | — | — | — | — | — | — | | — | — | — | — | — | — | — | IV | III | IV+III |
| $Y_2$ | | | | | | | — | | — | $\boxed{n_{2,2}}\ \mathcal{N}_{2,2}$ | $\boxed{n_{3,2}}\ \mathcal{N}_{3,2}$ | $\boxed{n_{4,2}}\ \mathcal{N}_{4,2}$ | $\boxed{n_{5,2}}\ \mathcal{N}_{5,2}$ | $\boxed{n_{6,2}}\ \mathcal{N}_{6,2}$ | $\boxed{n_{7,2}}\ \mathcal{N}_{7,2}$ | $\sum_i \mathcal{N}_{i,2}$ | — | |
| $Y_3$ | | | | | | | — | | — | $\boxed{n_{2,3}}\ \mathcal{N}_{2,3}$ | $\boxed{n_{3,3}}\ \mathcal{N}_{3,3}$ | $\boxed{n_{4,3}}\ \mathcal{N}_{4,3}$ | $\boxed{n_{5,3}}\ \mathcal{N}_{5,3}$ | $\boxed{n_{6,3}}\ \mathcal{N}_{6,3}$ | $\boxed{n_{7,3}}\ \mathcal{N}_{7,3}$ | $\sum_i \mathcal{N}_{i,3}$ | — | |
| $Y_4$ | | | | | | | — | | — | $\boxed{n_{2,4}}\ \mathcal{N}_{2,4}$ | $\boxed{n_{3,4}}\ \mathcal{N}_{3,4}$ | $\boxed{n_{4,4}}\ \mathcal{N}_{4,4}$ | $\boxed{n_{5,4}}\ \mathcal{N}_{5,4}$ | $\boxed{n_{6,4}}\ \mathcal{N}_{6,4}$ | | $\sum_i \mathcal{N}_{i,4}$ | — | |
| $Y_5$ | | | | | | | — | | — | $\boxed{n_{2,5}}\ \mathcal{N}_{2,5}$ | $\boxed{n_{3,5}}\ \mathcal{N}_{3,5}$ | $\boxed{n_{4,5}}\ \mathcal{N}_{4,5}$ | $\boxed{n_{5,5}}\ \mathcal{N}_{5,5}$ | | | $\sum_i \mathcal{N}_{i,5}$ | — | |
| I | $\sum_j \mathcal{N}_{-7,j}$ | $\sum_j \mathcal{N}_{-6,j}$ | $\sum_j \mathcal{N}_{-5,j}$ | $\sum_j \mathcal{N}_{-4,j}$ | $\sum_j \mathcal{N}_{-3,j}$ | $\sum_j \mathcal{N}_{-2,j}$ | — | | IV | $\sum_j \mathcal{N}_{2,j}$ | $\sum_j \mathcal{N}_{3,j}$ | $\sum_j \mathcal{N}_{4,j}$ | $\sum_j \mathcal{N}_{5,j}$ | $\sum_j \mathcal{N}_{6,j}$ | $\sum_j \mathcal{N}_{7,j}$ | I+IV | — | — |
| II | — | — | — | — | — | — | — | | III | $\sum_j \mathcal{N}_{2,-j}$ | — | — | — | — | — | — | II+III | — |
| I+III | | | | | | | | | IV+II | | | | | | | — | — | I+II+III+IV |

Determinados los valores $\mathcal{N}_{i,j}$ según la fórmula [43] y los de las columnas y filas encabezadas por I, II, III, y IV en la Tabla XII, se realizan primero, los siguientes controles: verificación de la igualdad de resultados, sumando filas y columnas; verificación de la siguiente igualdad:

$$[I+IV]+[II+III]=[I+II]+[III+IV]$$

Finalmente, a la suma de las frecuencias de los valores de las cuatro celdas que rodean al origen (en este caso reducidos a tres por no haber frecuencias en la que corresponde al tercer cuadrante), es decir, a la suma

$$\mathcal{N}_{-2,-2}+\mathcal{N}_{2,-2}+\mathcal{N}_{2,2}$$

se agrega, la suma de los valores:

$$[\sum_i N_{-i,-1}+\sum_i N_{i,-1}]+[\sum_i N_{i,1}+\sum_i N_{-i,1}]+$$

$$+[\sum_j N_{-1,-i}+\sum_j N_{-1,j}]+[\sum_j N_{1-j}+\sum_j N_{1,j}]$$

que figuraban en la última columna y fila de la Tabla VII y se anularon, al orlar la primera cruz con una doble cruz de ceros y se resta el valor dado por la suma de los cuatro valores $N_{i,j}$ de las celdas que rodean el origen en la Tabla VII, cuya suma es, por tanto, la siguiente:

$$N_{-1,-1}+N_{1,-1}+N_{-1,1}+N_{1,1}$$

este resultado debe reproducir el valor dado por $[I+II+III+IV]$ en la tabla VII.

Con los valores marginales, formamos las tablas de sumas, siguiendo un proceso paralelo al anterior y tendremos como resultado de la operatoria con las marginales $X$ los valores de

$$B^{\mathrm{I}}_{2,2}\ ,\quad B^{\mathrm{I}}_{3,2}\ ,\quad B^{\mathrm{I}}_{4,2}\ ,\dots\quad ;\quad B^{\mathrm{II}}_{2,2}\ ,\quad B^{\mathrm{II}}_{3,2}\ ,\dots$$

$$B^{\mathrm{III}}_{2,2}\ ,\quad B^{\mathrm{III}}_{3,2}\ ,\quad B^{\mathrm{III}}_{4,2}\ ,\dots\quad ;\quad B^{\mathrm{IV}}_{2,2}\ ,\quad B^{\mathrm{IV}}_{3,2}\ ,\dots$$

y con las marginales $Y$ los de

$$B^{\mathrm{I}}_{2,2}\ ,\quad B^{\mathrm{I}}_{2,3}\ ,\quad B^{\mathrm{I}}_{2,4}\ ,\dots\quad ;\quad B^{\mathrm{II}}_{2,2}\ ,\quad B^{\mathrm{II}}_{2,3}\ ,\dots$$

$$B^{\mathrm{III}}_{2,2}\ ,\quad B^{\mathrm{III}}_{2,3}\ ,\quad B^{\mathrm{III}}_{2,4}\ ,\dots\quad ;\quad B^{\mathrm{IV}}_{2,2}\ ,\quad B^{\mathrm{IV}}_{2,3}\ ,\dots$$

Por no haber frecuencias, en el tercer cuadrante, $B^{\mathrm{III}}_{2,2}$ , $B^{\mathrm{III}}_{3,2}$ , $B^{\mathrm{III}}_{4,2}$ , $B^{\mathrm{III}}_{5,2}$ , . . . ; $B^{\mathrm{III}}_{2,3}$ , $B^{\mathrm{III}}_{2,4}$ , . . . son nulos. En el segundo cuadrante sólo queda $B^{\mathrm{II}}_{2,2}$ .

Para que sirva de ejemplo, confeccionemos la tabla de sumas correspondiente al 4.º cuadrante y a la marginal $Y$ (Tabla XIII)

TABLA XIII

| $Y_j$ | IV | (1) | (2) | (3) |
|---|---|---|---|---|
| $Y_5$ | $\sum_i \mathcal{N}_{i,5}$ | $\sum_i \mathcal{N}_{i,5}$ | $\sum_i \mathcal{N}_{i,5}$ | $\sum_i \mathcal{N}_{i,5}$ |
| $Y_4$ | $\sum_i \mathcal{N}_{i,4}$ | $\sum_i (\mathcal{N}_{i,5}+\mathcal{N}_{i,4})$ | $\sum_i (2\mathcal{N}_{i,5}+\mathcal{N}_{i,4})$ | $\sum_i (3\mathcal{N}_{i,5}+\mathcal{N}_{i,4})$ |
| $Y_3$ | $\sum_i \mathcal{N}_{i,3}$ | $\sum_i (\mathcal{N}_{i,5}+\mathcal{N}_{i,4}+\mathcal{N}_{i,3})$ | $\sum_i (3\mathcal{N}_{i,5}+2\mathcal{N}_{i,4}+\mathcal{N}_{i,3})$ | — |
| $Y_2$ | $\sum_i \mathcal{N}_{i,2}$ | $\sum_i (\mathcal{N}_{i,5}+\mathcal{N}_{i,4}+\mathcal{N}_{i,3}+\mathcal{N}_{i,2})$ | — | — |
| | $\sum_i (\mathcal{N}_{i,5}+\mathcal{N}_{i,4}+\mathcal{N}_{i,3}+\mathcal{N}_{i,2})$ | $\sum_i (4\mathcal{N}_{i,5}+3\mathcal{N}_{i,4}+2\mathcal{N}_{i,3}+\mathcal{N}_{i,2})$ | $\sum_i \left(\frac{4(4-1)}{2!}\mathcal{N}_{i,5}+\frac{3(3-1)}{2!}\mathcal{N}_{i,4}+\mathcal{N}_{i,3}\right)$ | $\sum_i \left(\frac{4(4-1)(4-2)}{3!}\mathcal{N}_{i,5}+\mathcal{N}_{i,4}\right)$ |
| | $\sum_i \sum_j \mathcal{N}_{i,j}$ | $B^{\mathrm{IV}}_{2,2}=\sum_i \sum_j \binom{Y_j-1}{1}\mathcal{N}_{i,j}$ | $B^{\mathrm{IV}}_{2,3}=\sum_i \sum_j \binom{Y_j-1}{2}\mathcal{N}_{i,j}$ | $B^{\mathrm{IV}}_{2,4}=\sum_i \sum_j \binom{Y_j-1}{3}\mathcal{N}_{i,j}$ |

Reemplazando, en las fórmulas que nos dan $B^{N}_{r,2}$ y $B^{N}_{2,s}$ ($N=$I, II, III, IV) los valores de $\mathcal{N}_{i,j}$ en función de $N_{i,j}$ y éstos en función de las frecuencias originarias $\eta_{i,j}$, podemos poner

$$B^{IV}_{2,2} = \sum_i \sum_j \binom{X_i}{2}\binom{Y_j}{2} \eta_{i,j}$$

$$B^{IV}_{2,3} = \sum_i \sum_j \binom{X_i}{2}\binom{Y_j}{3} \eta_{i,j}$$

$$B^{IV}_{2,4} = \sum_i \sum_j \binom{X_i}{2}\binom{Y_j}{4} \eta_{i,j}$$

es decir, hemos obtenido momentos binomiales, según la definición dada en la fórmula [24].

En general, tendremos, para cualquier cuadrante

$$B^{N}_{2,s} = \sum_i \sum_j \binom{X_i}{2}\binom{Y_j}{s} \eta_{i,j}$$

Operando de la misma manera con las marginales $X$ de la Tabla XII obtenemos.

$$B^{N}_{r,2} = \sum_i \sum_j \binom{X_i}{r}\binom{Y_j}{2} \eta_{i,j}$$

La doble sumatoria debe considerarse extendida a los pares $X_i$, $Y_j$ que corresponden a cada cuadrante.

Con estos valores y aplicando las fórmulas [39] se calculan:

$$T^{(n)}_{2,2}\ ,\ T^{(n)}_{2,3}\ ,\ T^{(n)}_{2,4}\ ,\dots,\ T^{(n)}_{3,2}\ ,\ T^{(n)}_{4,2}\ ,\dots \quad (n = 1, 2, 3, 4)$$

Con un proceso análogo al seguido para obtener los valores de los momentos potenciales dobles con uno de los subíndices igual a la unidad y expresados en función de los binomiales dobles dados por la fórmula [27], llegamos a obtener, para los momentos potenciales dobles que tienen alguno de los subíndices igual a 2, el siguiente repertorio:

$$M_{2,2} = 4\,T^{(1)}_{2,2} + 2\,T^{(1)}_{2,1} + 2\,T^{(1)}_{1,2} + T^{(1)}_{1,1}$$

$$M_{3,2} = 12\,T^{(4)}_{3,2} + 12\,T^{(4)}_{2,2} + 2\,T^{(4)}_{1,2} + 6\,T^{(4)}_{3,1} + 6\,T^{(4)}_{2,1} + T^{(4)}_{1,1}$$

$$M_{2,3} = 12\,T^{(3)}_{2,3} + 12\,T^{(3)}_{2,2} + 2\,T^{(3)}_{2,1} + 6\,T^{(3)}_{1,3} + 6\,T^{(3)}_{1,2} + T^{(3)}_{1,1} \quad [44]$$

$$M_{4,2} = 48\,T^{(1)}_{4,2} + 72\,T^{(1)}_{3,2} + 28\,T^{(1)}_{2,2} + 2\,T^{(1)}_{1,2} + 24\,T^{(1)}_{4,1} + \\ + 36\,T^{(1)}_{3,1} + 14\,T^{(1)}_{2,1} + T^{(1)}_{1,1}$$

$$M_{2,4} = 48\,T^{(1)}_{2,4} + 72\,T^{(1)}_{2,3} + 28\,T^{(1)}_{2,2} + 2\,T^{(1)}_{2,1} + 24\,T^{(1)}_{1,4} + \\ + 36\,T^{(1)}_{1,3} + 14\,T^{(1)}_{1,2} + T^{(1)}_{1,1}$$

Para calcular momentos binomiales dobles, de órden superior, se sigue análogo proceso: se confecciona primero el damero de sumas, con las frecuencias del damero de sumas anterior, según la regla [43], utilizando las marginales resultantes y por sumas sucesivas se obtienen los momentos binomiales $B^{N}_{r,s}$ que para el caso general de r,s cualesquiera se expresan así:

$$B^{N}_{r,s} = \sum_{i=r} \sum_{j=s} \binom{X_i}{r}\binom{Y_j}{s} \eta_{i,j} \qquad (N = I, II, III, IV)$$

Por las divisiones del damero para obtener los valores de $T^{(n)}_{r,s}$ aplicamos las fórmulas [39] y sustituyendo en las [27] tenemos los momentos potenciales absolutos dobles, referidos a un origen arbitrario.

Dividiendo estos momentos $M_{r,s}$, dados en los repertorios [29], [36], [37], [42] y [44] por la población N, tenemos los momentos potenciales dobles relativos, referidos a un origen arbitrario y que en la fórmula [7] del § 2 simbolizamos con $m_{r,s}$.

Recurriendo al repertorio [12] del § 2, hallamos, en función de $m_{r,s}$, los momentos centrados $\mu_{r,s}$ que se corrigen por el método de Sheppard en virtud de las fórmulas del repertorio [22'] del § 3 y obtenemos así los valores designados por $\mu'_{r,s}$ que son los que, en definitiva, es necesario conocer para las aplicaciones.

El método de cálculo de los momentos dobles que dejamos explicado es el del destacado Profesor A. F. Mitropolsky (*).

## § 5. Aplicación del método

Complementando la exposición teórica que se ha hecho del método para el cálculo de los momentos dobles, haremos a continuación la aplicación del mismo, a un caso concreto.

Del trabajo del Prof. J. Koga y G. M. Morant, titulado «*On the degree of association between reaction times in the case of different senses*», aparecido en «*Biometrika*», Vol. XV, partes III y IV, de diciembre de 1923, pág. 363, tomamos la tabla n.º XIV que comprende 3379 observaciones, sobre reacciones auditivas y visuales, realizadas en el Instituto Antropométrico de Galton (Londres).

La tabla es la siguiente:

(*) A. F. Mitropolsky, *Teoría de Momentos* (Moscú, 1933) (En ruso).

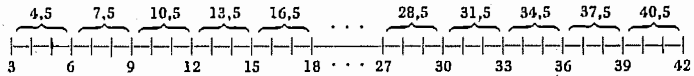
REACCIONES VISUALES (en pulgadas) — TABLA XIV

REACCIONES AUDITIVAS (en 1000 vibraciones por segundo)

| y \ x | 3 - 5 | 6 - 8 | 9 - 11 | 12-14 | 15-17 | 18-20 | 21-23 | 24-26 | 27-29 | 30-32 | 33-35 | 36-38 | 39-41 | Totales |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 - 6 | 1 | | | | 2 | | | | | | | | | 3 |
| 7 - 8 | 22 | 4 | 2 | 3 | 3 | 7 | 2 | 2 | | | | | | 45 |
| 9 - 10 | 3 | 1 | | 1 | | 1 | 2 | 1 | 1 | | | | | 10 |
| 11 - 12 | 49 | 3 | 8 | 5 | 8 | 12 | 7 | 10 | 1 | | | | 1 | 104 |
| 13 - 14 | 32 | 3 | 5 | 9 | 8 | 12 | 10 | 10 | 4 | | | | | 93 |
| 15 - 16 | 36 | 16 | 16 | 36 | 36 | 64 | 47 | 36 | 18 | 3 | | 2 | | 310 |
| 17 - 18 | 27 | 26 | 33 | 68 | 79 | 138 | 82 | 75 | 39 | 7 | | 1 | 1 | 576 |
| 19 - 20 | 33 | 45 | 45 | 102 | 151 | 236 | 191 | 168 | 63 | 16 | | | 1 | 1051 |
| 21 - 22 | 25 | 42 | 43 | 81 | 115 | 204 | 191 | 158 | 75 | 20 | | 3 | | 957 |
| 23 - 24 | 5 | 3 | 10 | 19 | 21 | 37 | 31 | 24 | 11 | 3 | | | 1 | 165 |
| 25 - 26 | | 1 | 1 | 1 | 2 | 15 | 8 | 7 | 3 | 2 | | 1 | | 41 |
| 27 - 28 | 1 | 1 | | | | 4 | 2 | 5 | 2 | 1 | | | | 16 |
| 29 - 30 | | | | 1 | | | | 1 | | | | | | 2 |
| 31 - 32 | | | | | | 2 | | | | | | | | 2 |
| 33 - 34 | | 1 | | 1 | | 1 | 1 | | | | | | | 4 |
| Totales | 234 | 146 | 163 | 327 | 425 | 733 | 574 | 497 | 217 | 52 | 0 | 7 | 4 | 3379 |

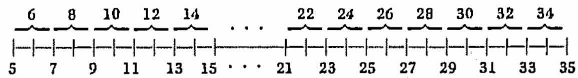
Consideraremos, como valor del atributo, para cada subintervalo de observación, el central.

Para la variable $\mathcal{X}'$, las medidas están dadas en pulgadas, de manera que, en cada sub-intervalo, se consideran comprendidas las medidas desde el valor inferior del mismo hasta las medidas que no alcanzan exactamente el valor inferior del sub-intervalo siguiente, es decir, que, por ej., para el 15—17, se consideran todas las observaciones que presentaron como valor mínimo 15 pulgadas y alcanzaron 17,99 o sea que no llegaron a 18, puesto que éstas deben ser ya consideradas en el grupo siguiente. Por tanto, gráficamente resultarán los siguientes valores centrales:




Siendo, la diferencia entre los valores centrales, constante, tenemos una distribución monomodular y haciendo, entonces, el módulo igual a la unidad, se tendrá una nueva variable $\mathcal{X}$ que varía desde 1 hasta 13.

De la misma manera para con el atributo $\mathcal{Y}'$ tendremos




Por tanto, al hacer el módulo igual a la unidad, la variación va desde 1 hasta 15.

En esencia, el procedimiento seguido, se reduce a efectuar el siguiente cambio de variables:

$$\mathcal{X}_i = \frac{\mathcal{X}'_i}{3} - 0{,}5$$

$$\mathcal{Y}_j = \frac{\mathcal{Y}'_j}{2} - 2$$

Con ello la tabla XIV queda como indica la Tabla XV.

Tabla XV

| | $\mathcal{X}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | Totales |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{Y}$ | Y \ X | — 5 | — 4 | — 3 | — 2 | — 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | $f_x$ |
| 1 | — 7 | 1 | | | | 2 | | | | | | | | | 3 |
| 2 | — 6 | 22 | 4 | 2 | 3 | 3 | 7 | 2 | 2 | | | | | | 45 |
| 3 | — 5 | 3 | 1 | | 1 | | 1 | 2 | 1 | 1 | | | | | 10 |
| 4 | — 4 | 49 | 3 | 8 | 5 | 8 | 12 | 7 | 10 | 1 | | | | 1 | 104 |
| 5 | — 3 | 32 | 3 | 5 | 9 | 8 | 12 | 10 | 10 | 4 | | | | | 93 |
| 6 | — 2 | 36 | 16 | 16 | 36 | 36 | 64 | 47 | 36 | 18 | 3 | | 2 | | 310 |
| 7 | — 1 | 27 | 26 | 33 | 68 | 79 | 138 | 82 | 75 | 39 | 7 | | 1 | 1 | 576 |
| 8 | 0 | 33 | 45 | 45 | 102 | 151 | 236 | 191 | 168 | 63 | 16 | | | 1 | 1051 |
| 9 | 1 | 25 | 42 | 43 | 81 | 115 | 204 | 191 | 158 | 75 | 20 | | 3 | | 957 |
| 10 | 2 | 5 | 3 | 10 | 19 | 21 | 37 | 31 | 24 | 11 | 3 | | | 1 | 165 |
| 11 | 3 | | 1 | 1 | 1 | 2 | 15 | 8 | 7 | 3 | 2 | | 1 | | 41 |
| 12 | 4 | 1 | 1 | | | | 4 | 2 | 5 | 2 | 1 | | | | 16 |
| 13 | 5 | | | | 1 | | | | 1 | | | | | | 2 |
| 14 | 6 | | | | | | 2 | | | | | | | | 2 |
| 15 | 7 | | 1 | | 1 | | 1 | 1 | | | | | | | 4 |
| Total. | $f_y$ | 234 | 146 | 163 | 327 | 425 | 733 | 574 | 497 | 217 | 52 | 0 | 7 | 4 | 3379 |

Vamos a calcular, por el método de sumas explicado en el § 4, los momentos binomiales dobles y luego aplicando las fórmulas [27] que expresan los momentos dobles potenciales $M_{r,s}$, en función de los binomiales dobles $B_{r,s}$, tendremos los valores que, después de divididos por la población N, habrá que centrar y corregir.

La población de la Tabla XV nos da el momento doble de órden cero:

$$B_{0,0} = M_{0,0} = 3379 \qquad [45]$$

Para simplificar los cálculos cambiaremos el origen, trasladándolo a los atributos para los cuales las frecuencias son mayores.

En la Tabla XIV esto se verifica, con respecto a la $\mathcal{X}'$, en el grupo 18—20 y para la $\mathcal{Y}'$, en el grupo 19—20, a los que corresponden en la Tabla XV, respectivamente, los valores 6 y 8. Este cambio de origen resulta del cambio de variables:

$$\left.\begin{array}{l} X_i = \mathcal{X}_i - 6 \\ Y_j = \mathcal{Y}_j - 8 \end{array}\right\} [46]$$

Debemos empezar por calcular los momentos binomiales dobles, uno de cuyos subíndices sea o.

De acuerdo con la notación establecida, designamos por $B_{r,o}$ los que corresponden a la marginal *X* y por $B_{o,s}$ los de la marginal *Y*, debiendo aplicarse el signo que corresponde según el cuadrante, como ya se explicó.

Tomamos, para ello, las frecuencias dadas en la Tabla XV. La fila de *Totales* nos da la marginal *X* y la columna de *Totales* la marginal *Y*. Con ellas construimos las tablas de sumas: XVI y XVII.

TABLA XVI

| $\mathfrak{X}$ | X | $f_y$ | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | —5 | 234 | 234 | 234 | 234 | 234 | $v_5^- =$ 234 | — | — |
| 2 | —4 | 146 | 380 | 614 | 848 | $v_4^- =$ 1082 | — | — | — |
| 3 | —3 | 163 | 543 | 1157 | $v_3^- =$ 2005 | — | — | — | — |
| 4 | —2 | 327 | 870 | $v_2^- =$ 2027 | — | — | — | — | — |
| 5 | —1 | 425 | $v_1^- =$ 1295 | — | — | — | — | — | — |
| 6 | 0 | 733 | | | | | | | |
| 7 | 1 | 574 | $v_1^+ =$ 1351 | — | — | — | — | — | — |
| 8 | 2 | 497 | 777 | $v_2^+ =$ 1146 | — | — | — | — | — |
| 9 | 3 | 217 | 280 | 367 | $v_3^+ =$ 503 | — | — | — | — |
| 10 | 4 | 52 | 63 | 89 | 134 | $v_4^+ =$ 202 | — | — | — |
| 11 | 5 | 0 | 11 | 26 | 45 | 68 | $v_5^+ =$ 95 | — | — |
| 12 | 6 | 7 | 11 | 15 | 19 | 23 | 27 | $v_6^+ =$ 31 | — |
| 13 | 7 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | $v_7^+ = 4$ |
| | | 3379 | $B^-_{1,0} =$ 3322 | $B^-_{2,0} =$ 4032 | $B^-_{3,0} =$ 3087 | $B^-_{4,0} =$ 1316 | $B^-_{5,0} =$ 234 | $B^-_{6,0} =$ 0 | $B^-_{7,0} = 0$ |
| | | | $B^+_{1,0} =$ 2497 | $B^+_{2,0} =$ 1649 | $B^+_{3,0} =$ 705 | $B^+_{4,0} =$ 297 | $B^+_{5,0} =$ 126 | $B^+_{6,0} =$ 35 | $B^+_{7,0} = 4$ |
| | | $s_{r,0} = B^+_{r,0} + B^-_{r,0}$ | $s_{1,0} =$ 5819 | $s_{2,0} =$ 5681 | $s_{3,0} =$ 3792 | $s_{4,0} =$ 1613 | $s_{5,0} =$ 360 | $s_{6,0} =$ 35 | $s_{7,0} = 4$ |
| | | $d_{r,0} = B^+_{r,0} - B^-_{r,0}$ | $d_{1,0} = -$ 825 | $d_{2,0} = -2383$ | $d_{3,0} = -2382$ | $d_{4,0} = -1019$ | $d_{5,0} = -108$ | $d_{6,0} =$ 35 | $d_{7,0} = 4$ |

TABLA XVII

| $\mathcal{Y}$ | Y | $f_x$ | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | —7 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | $v_7^- = 3$ |
| 2 | —6 | 45 | 48 | 51 | 54 | 57 | 60 | $v_6^- =$ 63 | — |
| 3 | —5 | 10 | 58 | 109 | 163 | 220 | $v_5^- =$ 280 | — | — |
| 4 | —4 | 104 | 162 | 271 | 434 | $v_4^- =$ 654 | — | — | — |
| 5 | —3 | 93 | 255 | 526 | $v_3^- =$ 960 | — | — | — | — |
| 6 | —2 | 310 | 565 | $v_2^- =$ 1091 | — | — | — | — | — |
| 7 | —1 | 576 | $v_1^- =$ 1141 | — | — | — | — | — | — |
| 8 | 0 | 1051 | | | | | | | |
| 9 | 1 | 957 | $v_1^+ =$ 1187 | — | — | — | — | — | — |
| 10 | 2 | 165 | 230 | $v_2^+ =$ 337 | — | — | — | — | — |
| 11 | 3 | 41 | 65 | 107 | $v_3^+ =$ 181 | — | — | — | — |
| 12 | 4 | 16 | 24 | 42 | 74 | $v_4^+ =$ 124 | — | — | — |
| 13 | 5 | 2 | 8 | 18 | 32 | 50 | $v_5^+ =$ 72 | — | — |
| 14 | 6 | 2 | 6 | 10 | 14 | 18 | 22 | $v_6^+ =$ 26 | — |
| 15 | 7 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | $v_7^+ = 4$ |
| | | 3379 | $B_{0,1}^- =$ 2232 | $B_{0,2}^- =$ 2051 | $B_{0,3}^- =$ 1614 | $B_{0,4}^- =$ 934 | $B_{0,5}^- =$ 343 | $B_{0,6}^- =$ 66 | $B_{0,7}^- = 3$ |
| | | | $B_{0,1}^+ =$ 1524 | $B_{0,2}^+ =$ 518 | $B_{0,3}^+ =$ 305 | $B_{0,4}^+ =$ 196 | $B_{0,5}^+ =$ 98 | $B_{0,6}^+ =$ 30 | $B_{0,7}^+ = 4$ |
| | | $s_{0,s} = B_{0,s}^+ + B_{0,s}^-$ | $s_{0,1} =$ 3756 | $s_{0,2} =$ 2569 | $s_{0,3} =$ 1919 | $s_{0,4} =$ 1130 | $s_{0,5} =$ 441 | $s_{0,6} =$ 96 | $s_{0,7} = 7$ |
| | | $d_{0,s} = B_{0,s}^+ - B_{0,s}^-$ | $d_{0,1} = -$ 708 | $d_{0,2} = -1533$ | $d_{0,3} = -1309$ | $d_{0,4} = -$ 738 | $d_{0,5} = -245$ | $d_{0,6} = -36$ | $d_{0,7} = 1$ |

Esta construcción se hace de la siguiente manera: dispuestas en columnas las variables y sus respectivas frecuencias (valores de las marginales) se agregan tantas columnas de sumas cuantas indique el subíndice del momento de mayor órden que se desee calcular, más una.

Nuestras tablas, por tanto, están preparadas para calcular hasta los momentos $M_{0,6}$ y $M_{6,0}$.

Trazamos frente a la frecuencia que se halla en el punto de origen o, una horizontal que cruce todas las columnas de sumas que encabezaremos con (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7).

Sumamos separadamente en las columnas de la parte superior y de la inferior, comenzando desde los valores más alejados del origen y acercándonos a él, siguiendo la regla [30] del § 4, es decir que, para obtener, por ejemplo, el número 848 de la parte superior de la columna (3) de la Tabla XVI, sumamos al número de la misma fila de la columna anterior, el número de la fila anterior de la misma columna (3), o sea:

$$848 = 614 + 234$$

Deben terminarse las operaciones en la fila 1 para la columna (1), en la fila 2 para la columna (2), etc.

Las sumas por columnas — separadamente la parte superior y la inferior — se anotan en la penúltima fila y en la última se ponen los resultados obtenidos de sumar y de restar los valores de la penúltima fila entre sí.

Tal como se ha explicado antes, el control se efectúa aplicando las fórmulas [33] y [34].

Por ej. constatemos en la Tabla XVII los resultados obtenidos para las columnas (1) y (5).

Por la fórmula [33] se tendrá para la columna (1)

$$1141 + 1187 + 1051 = 3379$$

y por las [34], para la columna (5)

$$280 + 63 = 343$$

$$72 + 26 = 98$$

Realizada la verificación, calculamos los momentos potenciales absolutos en que uno de los subíndices es o. Sustituyendo, para ello, en los repertorios [36] y [37] los valores obtenidos en las tablas de sumas XVI y XVII, respectivamente, se tiene:

$$
[47]\quad \left\{
\begin{aligned}
& M_{1,0} = -825 \\
& M_{2,0} = 2 \times 5681 + 5819 = 17.181 \\
& M_{3,0} = 6\,(-2382) + 6\,(-2383) + (-825) = \\
& \quad = -29.415 \\
& M_{4,0} = 24 \times 1613 + 36 \times 3792 + 14 \times 5681 + \\
& \quad + 5819 = 260.577 \\
& M_{5,0} = 120\,(-100) + 240\,(-1019) + 150\,(-2382) + \\
& \quad + 30\,(-2383) + (-825) = -687.135 \\
& M_{6,0} = 720 \times 35 + 180 \times 360 + 1560 \times 1613 + \\
& \quad + 540 \times 3792 + 62 \times 5681 + 5819 = 5.012.001 \\
& M_{0,1} = -708 \\
& M_{0,2} = 2 \times 2569 + 3756 = 8.894 \\
& M_{0,3} = 6\,(-1309) + 6\,(-1533) + (-708) = -17.760 \\
& M_{0,4} = 24 \times 1130 + 36 \times 1919 + 14 \times 2569 + \\
& \quad + 3756 = 135.926 \\
& M_{0,5} = 120\,(-245) + 240\,(-738) + 150\,(-1309) + \\
& \quad + 30\,(-1533) + (-708) = -499.568 \\
& M_{0,6} = 720 \times 96 + 180 \times 441 + 1560 \times 1130 + \\
& \quad + 540 \times 1919 + 62 \times 2569 + 3756 = 3.110.594
\end{aligned}
\right.
$$

El cambio de origen en el damero de frecuencias (Tabla XV) lo divide en cuatro cuadrantes, obteniéndose la Tabla XVIII.

Los resultados de las sumas efectuadas en cada uno de los cuadrantes, cuando se han fijado las Y, con lo que se obtienen las marginales Y, se anotan en las columnas encabezadas por I, II, III y IV indicándose, con estos números, el del respectivo cuadrante. La designación de los cuadrantes la haremos siguiendo el esquema dado por la fig. 1, § 4.

Las sumas obtenidas fijando las *X* nos dan las marginales X y los resultados se anotan en las filas encabezadas por I, II, III y IV.

Tabla XVIII

| $Y_j \backslash X_i$ | $-X_5$ | $-X_4$ | $-X_3$ | $-X_2$ | $-X_1$ | $X_0$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $X_6$ | $X_7$ | I | II | I+II |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-Y_7$ | 1 | | | | 2 | | | | | | | | | 3 | — | 3 |
| $-Y_6$ | 22 | 4 | 2 | 3 | 3 | | 2 | 2 | | | | | | 34 | 4 | 38 |
| $-Y_5$ | 3 | 1 | | 1 | | | 2 | 1 | 1 | | | | | 5 | 4 | 9 |
| $-Y_4$ | 49 | 3 | 8 | 5 | 8 | | 7 | 10 | 1 | | | | 1 | 73 | 19 | 92 |
| $-Y_3$ | 32 | 3 | 5 | 9 | 8 | | 10 | 10 | 4 | | | | | 57 | 24 | 81 |
| $-Y_2$ | 36 | 16 | 16 | 36 | 36 | | 47 | 36 | 18 | 3 | | 2 | | 140 | 106 | 246 |
| $-Y_1$ | 27 | 26 | 33 | 68 | 79 | | 82 | 75 | 39 | 7 | | 1 | 1 | 233 | 205 | 438 |
| $Y_0$ | | | | | | | | | | | | | | IV | III | IV+III |
| $Y_1$ | 25 | 42 | 43 | 81 | 115 | | 191 | 158 | 75 | 20 | | 3 | | 447 | 306 | 753 |
| $Y_2$ | 5 | 3 | 10 | 19 | 21 | | 31 | 24 | 11 | 3 | | | 1 | 70 | 58 | 128 |
| $Y_3$ | | 1 | 1 | 1 | 2 | | 8 | 7 | 3 | 2 | | 1 | | 21 | 5 | 26 |
| $Y_4$ | 1 | 1 | | | | | 2 | 5 | 2 | 1 | | | | 10 | 2 | 12 |
| $Y_5$ | | | | 1 | | | | 1 | | | | | | 1 | 1 | 2 |
| $Y_6$ | | | | | | | | | | | | | | — | — | 0 |
| $Y_7$ | | 1 | | 1 | | | 1 | | | | | | | 1 | 2 | 3 |
| I | 170 | 53 | 64 | 122 | 136 | IV | 233 | 195 | 91 | 26 | 0 | 4 | 1 | I+IV=1095 | — | — |
| III | 31 | 48 | 54 | 103 | 138 | II | 150 | 134 | 63 | 10 | 0 | 3 | 2 | — | II=III =736 | |
| I+III | 201 | 101 | 118 | 225 | 274 | IV+II | 383 | 329 | 154 | 36 | 0 | 7 | 3 | — | — | I+II+III+IV =1831 |

Por necesitar, para el control que se debe realizar, el valor [I + II + III + IV] que representa la suma de las frecuencias de la Tabla XVIII, se forman las columnas (I + II); (IV + III) y las filas (I + III), (IV+II) y se calculan sus respectivas sumas.

Debe verificarse que la cifra [I + II + III + IV] sumada a los valores marginales suprimidos y al valor de la frecuencia que se hallaba en el centro de la cruz en la Tabla XV, debe dar la población N. En nuestro caso:

$$1831 + 1051 + 733 + 236 = 3379$$

es decir que el valor 1831 es correcto.

Con los valores de la Tabla XVIII formamos el primer damero de sumas XIX.

Tabla XIX

| $Y_j \backslash X_i$ | $-X_5$ | $-X_4$ | $-X_3$ | $-X_2$ | $-X_1$ | $X_0$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $X_6$ | $X_7$ | I | II | I+II |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-Y_7$ | $^{1}$ 1 | 1 | 1 | 1 | $^{2}$ 3 | | | | | | | | | 7 | — | 7 |
| $-Y_6$ | $^{22}$ 23 | $^{4}$ 27 | $^{2}$ 29 | $^{3}$ 32 | $^{3}$ 37 | | $^{2}$ 4 | $^{2}$ 2 | | | | | | 148 | 6 | 154 |
| $-Y_5$ | $^{3}$ 26 | $^{1}$ 31 | 33 | $^{1}$ 37 | 42 | | $^{2}$ 8 | $^{1}$ 4 | $^{1}$ 1 | | | | | 169 | 13 | 182 |
| $-Y_4$ | $^{19}$ 75 | $^{3}$ 83 | $^{8}$ 93 | $^{5}$ 102 | $^{8}$ 115 | | $^{7}$ 28 | $^{10}$ 16 | $^{1}$ 3 | 1 | 1 | 1 | $^{1}$ 1 | 468 | 51 | 519 |
| $-Y_3$ | $^{32}$ 107 | $^{3}$ 118 | $^{5}$ 133 | $^{9}$ 151 | $^{8}$ 172 | | $^{10}$ 49 | $^{10}$ 27 | $^{4}$ 10 | 4 | 3 | 2 | 1 | 681 | 96 | 777 |
| $-Y_2$ | $^{36}$ 143 | $^{16}$ 170 | $^{16}$ 201 | $^{26}$ 255 | $^{36}$ 312 | | $^{47}$ 157 | $^{26}$ 88 | $^{18}$ 35 | $^{3}$ 11 | 7 | $^{2}$ 4 | 1 | 1081 | 303 | 1384 |
| $-Y_1$ | $^{27}$ 170 | $^{23}$ 223 | $^{33}$ 287 | $^{63}$ 409 | $^{79}$ 545 | | $^{82}$ 362 | $^{75}$ 211 | $^{39}$ 83 | $^{7}$ 20 | 9 | $^{1}$ 6 | $^{1}$ 2 | 1634 | 693 | 2327 |
| $Y_0$ | | | | | | | | | | | | | | IV | III | IV+III |
| $Y_1$ | $^{25}$ 31 | $^{42}$ 79 | $^{43}$ 133 | $^{81}$ 236 | $^{115}$ 374 | | $^{191}$ 550 | $^{158}$ 317 | $^{75}$ 122 | $^{20}$ 31 | 5 | $^{3}$ 5 | 1 | 1031 | 853 | 1884 |
| $Y_2$ | $^{5}$ 6 | $^{3}$ 12 | $^{10}$ 23 | $^{19}$ 45 | $^{21}$ 68 | | $^{31}$ 103 | $^{24}$ 61 | $^{11}$ 24 | $^{3}$ 8 | 2 | 2 | $^{1}$ 1 | 201 | 154 | 355 |
| $Y_3$ | 1 | $^{1}$ 4 | $^{1}$ 5 | $^{1}$ 8 | $^{2}$ 10 | | $^{8}$ 33 | $^{7}$ 22 | $^{3}$ 9 | $^{2}$ 4 | 1 | $^{1}$ 1 | | 70 | 28 | 98 |
| $Y_4$ | $^{1}$ 1 | $^{1}$ 3 | 3 | 5 | 5 | | $^{2}$ 12 | $^{5}$ 9 | $^{2}$ 3 | $^{1}$ 1 | | | | 25 | 17 | 42 |
| $Y_5$ | | 1 | 1 | $^{1}$ 3 | 3 | | 2 | $^{1}$ 1 | | | | | | 3 | 8 | 11 |
| $Y_6$ | | 1 | 1 | 2 | 2 | | 1 | | | | | | | 1 | 6 | 7 |
| $Y_7$ | | $^{1}$ 1 | 1 | $^{1}$ 2 | 2 | | $^{1}$ 1 | | | | | | | 1 | 6 | 7 |
| I | 545 | 653 | 777 | 987 | 1226 | IV | 702 | 410 | 158 | 44 | 8 | 8 | 2 | I+IV= 5520 | — | — |
| III | 39 | 101 | 167 | 301 | 464 | II | 608 | 348 | 132 | 36 | 20 | 13 | 5 | — | II+III =2234 | — |
| I+III | 584 | 754 | 944 | 1288 | 1690 | II+IV | 1310 | 758 | 290 | 80 | 28 | 21 | 7 | — | — | I+II+III+IV =7754 |

Anotamos, en un damero de reticulado igual al de la Tabla XVIII, en el ángulo superior izquierdo de cada celda el valor de la respectiva celda de la tabla XVIII. Haciendo uso de una escuadra de papel o cartón como la de la (fig. 3) del § 4, calculamos los valores de las sumas para cada celda siguiendo la regla [39]. En nuestro ejemplo, el valor 122 del IV cuadrante se obtuvo así:

$$31 + 24 - 8 + 75 = 122$$

y de la misma manera los demás, comenzando, en cada cuadrante, la operación de sumas desde el valor más alejado del origen y continuando hacia él. Las sumas de cada cuadrante dan las marginales con las que calcularemos los momentos binomiales por el método de sumas ya explicado en el § 4 y que es el de Tschetwerikoff.

Antes de operar con ellas realizamos en la Tabla XIX el control a que se hizo referencia y que consiste en sumar los cuatro valores de las celdas que rodean al origen con los valores marginales anulados de la tabla XV, y al resultado restar el de la frecuencia del centro de la cruz, debiendo obtenerse la población N. En el caso de nuestro ejemplo es:

$$545 + 362 + 374 + 550 + 1051 + 733 - 236 = 3379$$

Con las marginales de la Tabla XIX construimos las tablas de sumas, resultando para las marginales *Y* las Tablas XX y XXI y para las marginales *X* las Tablas XXII y XXIII.

**Tabla XX**

| | I | | | | | | II | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y_j$ | $\eta_{-i,-j}$ | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | $\eta_{i,-j}$ | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) |
| $-Y_7$ | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | — | — | — | — | — | — |
| $-Y_6$ | 148 | 155 | 162 | 169 | 176 | 183 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| $-Y_5$ | 169 | 324 | 486 | 655 | 831 | — | 13 | 19 | 25 | 31 | 37 | — |
| $-Y_4$ | 468 | 792 | 1278 | 1933 | — | — | 51 | 70 | 95 | 126 | — | — |
| $-Y_3$ | 681 | 1473 | 2751 | — | — | — | 96 | 166 | 261 | — | — | — |
| $-Y_2$ | 1081 | 2554 | — | — | — | — | 303 | 469 | — | — | — | — |
| $-Y_1$ | 1634 | — | — | — | — | — | 693 | — | — | — | — | — |
| | $B^{I}_{1,1}=4188$ | $B^{I}_{1,2}=5305$ | $B^{I}_{1,3}=4684$ | $B^{I}_{1,4}=2764$ | $B^{I}_{1,5}=1014$ | $B^{I}_{1,6}=190$ | $B^{II}_{1,1}=1162$ | $B^{II}_{1,2}=730$ | $B^{II}_{1,3}=387$ | $B^{II}_{1,4}=163$ | $B^{II}_{1,5}=43$ | $B^{II}_{1,6}=6$ |

**Tabla XXI**

| | III | | | | | | IV | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y_j$ | $\eta_{-i,j}$ | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | $\eta_{i,j}$ | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) |
| $Y_7$ | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $Y_6$ | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $Y_5$ | 8 | 20 | 38 | 62 | 92 | — | 3 | 5 | 8 | 12 | 17 | — |
| $Y_4$ | 17 | 37 | 75 | 137 | — | — | 25 | 30 | 38 | 50 | — | — |
| $Y_2$ | 28 | 65 | 140 | — | — | — | 70 | 100 | 138 | — | — | — |
| $Y_3$ | 154 | 219 | — | — | — | — | 201 | 301 | — | — | — | — |
| $Y_1$ | 853 | — | — | — | — | — | 1031 | — | — | — | — | — |
| | $B^{III}_{1,1}=1072$ | $B^{III}_{1,2}=359$ | $B^{III}_{1,3}=277$ | $B^{III}_{1,4}=229$ | $B^{III}_{1,5}=128$ | $B^{III}_{1,6}=42$ | $B^{IV}_{1,1}=1332$ | $B^{IV}_{1,2}=439$ | $B^{IV}_{1,3}=188$ | $B^{IV}_{1,4}=67$ | $B^{IV}_{1,5}=23$ | $B^{IV}_{1,6}=7$ |

Tabla XXII

| | I | | | | | | III | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | $\eta_{-i,-j}$ | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | $\eta_{-i,j}$ | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) |
| $-X_5$ | 545 | 545 | 545 | 545 | 545 | — | 39 | 39 | 39 | 39 | 39 | — |
| $-X_4$ | 653 | 1198 | 1743 | 2288 | — | — | 101 | 140 | 179 | 218 | — | — |
| $-X_3$ | 777 | 1975 | 3718 | — | — | — | 167 | 307 | 486 | — | — | — |
| $-X_2$ | 987 | 2962 | — | — | — | — | 301 | 608 | — | — | — | — |
| $-X_1$ | 1226 | — | — | — | — | — | 464 | — | — | — | — | — |
| | $B^{I}_{1,1}=4188$ | $B^{I}_{2,1}=6680$ | $B^{I}_{3,1}=6006$ | $B^{I}_{4,1}=2833$ | $B^{I}_{5,1}=545$ | $B^{I}_{6,1}=0$ | $B^{III}_{1,1}=1072$ | $B^{III}_{2,1}=1094$ | $B^{III}_{3,1}=704$ | $B^{III}_{4,1}=257$ | $B^{III}_{5,1}=39$ | $B^{III}_{6,1}=0$ |

Tabla XXIII

| | II | | | | | | IV | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_j$ | $\eta_{i,-j}$ | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | $\eta_{i,j}$ | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) |
| $X_7$ | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| $X_6$ | 13 | 18 | 23 | 28 | 33 | 38 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| $X_5$ | 20 | 38 | 61 | 89 | 122 | — | 8 | 18 | 30 | 44 | 60 | — |
| $X_4$ | 36 | 74 | 135 | 224 | — | — | 44 | 62 | 92 | 136 | — | — |
| $X_3$ | 132 | 206 | 341 | — | — | — | 158 | 220 | 312 | — | — | — |
| $X_2$ | 348 | 554 | — | — | — | — | 410 | 630 | — | — | — | — |
| $X_1$ | 608 | — | — | — | — | — | 702 | — | — | — | — | — |
| | $B^{II}_{1,1}=1162$ | $B^{II}_{2,1}=895$ | $B^{II}_{3,1}=565$ | $B^{II}_{4,1}=346$ | $B^{II}_{5,1}=160$ | $B^{II}_{6,1}=43$ | $B^{IV}_{1,1}=1332$ | $B^{IV}_{2,1}=942$ | $B^{IV}_{3,1}=448$ | $B^{IV}_{4,1}=196$ | $B^{IV}_{5,1}=78$ | $B^{IV}_{6,1}=20$ |

Se efectúa el control de las sumas aplicando las fórmulas [32].

Para operar con el repertorio [42] necesitamos calcular los valores de:

$$T^{(2)}_{1,1},\ T^{(3)}_{1,1},\ T^{(4)}_{1,1},\ T^{(2)}_{2,1},\ T^{(3)}_{2,1},\ T^{(2)}_{1,2},\ T^{(4)}_{1,2},\ T^{(2)}_{3,1},\ T^{(3)}_{3,1},\ T^{(2)}_{1,3}$$
$$T^{(4)}_{1,3},\ T^{(2)}_{4,1},\ T^{(3)}_{4,1},\ T^{(2)}_{1,4},\ T^{(4)}_{1,4},\ T^{(2)}_{5,1},\ T^{(2)}_{1,5}$$

Utilizando las fórmulas [39] donde reemplazamos los $B^N_{r,s}$ (N=I, II, III y IV), por los valores que corresponden, dados en las Tablas XX, XXI, XXII y XXIII, resulta:

$$\begin{aligned}
T^{(2)}_{1,1} &= 4188 - 1162 - 1072 + 1332 = 3286\\
T^{(3)}_{1,1} &= -4188 - 1162 + 1072 + 1332 = -2946\\
T^{(4)}_{1,1} &= -4188 + 1162 - 1072 + 1332 = -2766\\
T^{(2)}_{2,1} &= 6680 - 895 - 1094 + 942 = 5633\\
T^{(3)}_{2,1} &= -6680 - 895 + 1094 + 942 = -5539\\
T^{(2)}_{1,2} &= 5305 - 730 - 359 + 439 = 4655\\
T^{(4)}_{1,2} &= -5305 + 730 - 359 + 439 = -4495\\
T^{(2)}_{3,1} &= 6006 - 565 - 704 + 448 = 5185 \qquad [48]\\
T^{(3)}_{3,1} &= -6006 - 565 + 704 + 448 = -5419\\
T^{(2)}_{1,3} &= 4684 - 387 - 277 + 188 = 4208\\
T^{(4)}_{1,3} &= -4684 + 387 - 277 + 188 = -4386\\
T^{(2)}_{4,1} &= 2833 - 346 - 257 + 196 = 2426\\
T^{(3)}_{4,1} &= -2833 - 346 + 257 + 196 = -2726\\
T^{(2)}_{1,4} &= 2764 - 163 - 229 + 67 = 2439\\
T^{(4)}_{1,4} &= -2764 + 163 - 229 + 67 = -2763\\
T^{(2)}_{5,1} &= 545 - 160 - 39 + 78 = 424\\
T^{(2)}_{1,5} &= 1014 - 43 - 128 + 23 = 866
\end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo estos valores en las fórmulas [42], tenemos los momentos potenciales dobles absolutos que tienen uno de los subíndices igual a la unidad:

$$M_{1,1} = 3.286$$
$$M_{2,1} = 2\,(-5.539) + (-2.946) = -\,14.024$$
$$M_{1,2} = 2\,(-4.495) + (-2.766) = -\,11.756$$
$$M_{3,1} = 6 \times 5.185 + 6 \times 5.633 + 3.286 = 68.194 \qquad [49]$$
$$M_{1,3} = 6 \times 4208 + 6 \times 4655 + 3286 = 56.464$$
$$M_{4,1} = 24\,(-2726) + 36\,(-5419) + 14\,(-5539) + (-2946) = -\,341.000$$
$$M_{1,4} = 24\,(-2763) + 36\,(-4386) + 14\,(-4495) + (-2766) = -\,289.904$$
$$M_{5,1} = 120 \times 424 + 240 \times 2426 + 150 \times 5185 + 30 \times 5633 + 3286 = 1.583.146$$
$$M_{1,5} = 120 \times 866 + 240 \times 2439 + 150 \times 4208 + 30 \times 4655 + 3286 = 1.463.416$$

Para el cálculo de los momentos binomiales dobles, con un subíndice igual a 2, se construye el *segundo damero de sumas*, Tabla XXIV, partiendo del damero de sumas XIX. Anulamos, primero, en el nuevo damero, las celdas que corresponden a los atributos $X_1$, $X_{-1}$, $Y_{-1}$ e $Y_1$, pues, los números combinatorios, exigen que el valor mínimo de $r$ y $s$ sean ahora 2 y nos queda así la primitiva cruz orlada de ceros por sus cuatro lados.

En cada una de las celdas que no han sido anuladas, anotamos en el ángulo superior izquierdo, los valores que en las respectivas celdas figuran en la tabla XIX. Seguimos un proceso paralelo al anterior, es decir, aplicamos la regla de sumas [39] utilizando la escuadra (fig. 3, § 4) y comenzando el cálculo, en cada cuadrante, desde el extremo opuesto al origen.

Tendremos así la tabla XXIV, con cuyas marginales calcularemos los momentos binomiales $B^N_{r,2}$ y $B^N_{2,s}$. Antes de hacerlo, se verifican los resultados de la siguiente manera: a la suma de los valores de las cuatro celdas que rodean el origen, se agrega el de las marginales anuladas en la tabla XIX y la suma de los valores de las cuatro celdas que rodean el origen en la citada tabla XIX, con lo cual, se debe tener el mismo valor, que la suma total de la Tabla XIX.

Tabla XXIV

| $Y_j \backslash X_i$ | $-X_5$ | $-X_4$ | $-X_3$ | $-X_2$ | $-X_1$ | $X_0$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $X_6$ | $X_7$ | I | II | II+I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-Y_7$ | [1] 1 | [1] 2 | [1] 3 | [1] 4 | — | | — | | | | | | | 10 | — | 10 |
| $-Y_6$ | [23] 24 | [27] 52 | [29] 82 | [32] 115 | — | | — | [2] 2 | | | | | | 273 | 2 | 275 |
| $-Y_5$ | [26] 50 | [31] 109 | [23] 172 | [37] 242 | — | | — | [4] 7 | [1] 1 | | | | | 573 | 8 | 681 |
| $-Y_4$ | [75] 125 | [83] 267 | [93] 423 | [102] 595 | — | | — | [16] 30 | [3] 8 | [1] 4 | [1] 3 | [1] 2 | [1] 1 | 1410 | 48 | 1458 |
| $-Y_3$ | [107] 232 | [118] 492 | [133] 781 | [151] 1104 | — | | — | [27] 77 | [10] 28 | [4] 14 | [3] 9 | [2] 5 | [1] 2 | 2609 | 135 | 2744 |
| $-Y_2$ | [143] 375 | [170] 805 | [201] 1295 | [255] 1873 | — | | — | [88] 223 | [35] 86 | [11] 37 | [7] 21 | [4] 10 | [1] 3 | 4348 | 380 | 4728 |
| $-Y_1$ | — | — | — | — | — | | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| $Y_0$ | | | | | | | | | | | | | | IV | III | IV+III |
| $Y_1$ | — | — | — | — | — | | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| $Y_2$ | [6] 8 | [12] 30 | [23] 64 | [45] 129 | — | | — | [61] 149 | [24] 56 | [8] 20 | [2] 7 | [2] 4 | [1] 1 | 237 | 231 | 468 |
| $Y_3$ | [1] 2 | [4] 12 | [5] 23 | [8] 43 | — | | — | [22] 51 | [9] 19 | [4] 7 | [1] 2 | [1] 1 | | 80 | 80 | 160 |
| $Y_4$ | [1] 1 | [3] 7 | [3] 13 | [5] 25 | — | | — | [9] 14 | [3] 4 | [1] 1 | | | | 19 | 46 | 65 |
| $Y_5$ | | [1] 3 | [1] 6 | [3] 13 | — | | — | [1] 1 | | | | | | 1 | 22 | 23 |
| $Y_6$ | | [1] 2 | [1] 4 | [2] 8 | — | | — | | | | | | | — | 14 | 14 |
| $Y_7$ | | [1] 1 | [1] 2 | [2] 4 | — | | — | | | | | | | — | 7 | 7 |
| I | 807 | 1727 | 2756 | 3933 | — | IV | — | 215 | 79 | 28 | 9 | 5 | 1 | I+IV =9560 | — | — |
| III | 11 | 55 | 112 | 222 | — | II | — | 339 | 123 | 55 | 33 | 17 | 6 | — | II+III =973 | — |
| I+III | 818 | 1782 | 2868 | 4155 | — | IV+II | — | 554 | 202 | 83 | 42 | 22 | 7 | — | — | I+II+III+IV =10533 |

En efecto:

$$[1873+223+129+149]+[2327+1884+1690+1310]-$$
$$-[545+362+374+550]=7754$$

que es el total de la tabla XIX.

Con las marginales de la tabla XXIV, formamos las tablas de sumas XXV, XXVI, XXVII y XXVIII, donde operamos y controlamos como en los casos anteriores.

El repertorio [44] de los momentos potenciales dobles absolutos, con un índice igual a 2, exige que calculemos:

$$T^{(1)}_{2,2},\ T^{(3)}_{2,2},\ T^{(4)}_{2,2},\ T^{(1)}_{2,1},\ T^{(3)}_{2,1},\ T^{(4)}_{2,1},\ T^{(1)}_{1,2},\ T^{(3)}_{1,2},\ T^{(4)}_{1,2},\ T^{(1)}_{1,1}$$
$$T^{(3)}_{1,1},\ T^{(4)}_{1,1},\ T^{(1)}_{3,2},\ T^{(4)}_{3,2},\ T^{(1)}_{3,1},\ T^{(4)}_{3,1},\ T^{(1)}_{2,3},\ T^{(3)}_{2,3},\ T^{(1)}_{1,3},\ T^{(3)}_{1,3}$$
$$T^{(1)}_{4,2},\ T^{(1)}_{4,1},\ T^{(1)}_{2,4},\ T^{(1)}_{1,4}$$

En el repertorio [48] se tienen ya calculados los siguientes:

$$T^{(3)}_{2,1}=-5.539$$
$$T^{(4)}_{1,2}=-4.495$$
$$T^{(3)}_{1,1}=-2.946$$
$$T^{(4)}_{1,1}=-2.766$$

Para calcular los demás, se utilizan los valores de $B^{N}_{2,s}$ y $B^{N}_{r,2}$ dados en las tablas XX, XXI, XXII, XXIII, XXV, XXVI, XXVII, XXVIII y aplicando las fórmulas [39], resulta:

**Tabla XXV**

| $Y_j$ | I: $\eta_{-i,-j}$ | (1) | (2) | (3) | (4) | II: $\eta_{i,-j}$ | (1) | (2) | (3) | (4) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-Y_7$ | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | — | — | — | — | — |
| $-Y_6$ | 273 | 283 | 293 | 303 | 313 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| $-Y_5$ | 573 | 856 | 1149 | 1452 | — | 8 | 10 | 12 | 14 | — |
| $-Y_4$ | 1410 | 2266 | 3415 | — | — | 48 | 58 | 70 | — | — |
| $-Y_3$ | 2609 | 4875 | — | — | — | 135 | 193 | — | — | — |
| $-Y_2$ | 4348 | — | — | — | — | 380 | — | — | — | — |
| | $B^{I}_{2,2}=9223$ | $B^{I}_{2,3}=8290$ | $B^{I}_{2,4}=4867$ | $B^{I}_{2,5}=1765$ | $B^{I}_{2,6}=323$ | $B^{II}_{2,2}=573$ | $B^{II}_{2,3}=263$ | $B^{II}_{2,4}=84$ | $B^{II}_{2,5}=16$ | $B^{II}_{2,6}=2$ |

**Tabla XXVI**

| $Y_j$ | III: $\eta_{-i,j}$ | (1) | (2) | (3) | (4) | IV: $\eta_{i,j}$ | (1) | (2) | (3) | (4) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y_7$ | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | — | — | — | — | — |
| $Y_6$ | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | — | — | — | — | — |
| $Y_5$ | 22 | 43 | 71 | 106 | — | 1 | 1 | 1 | 1 | — |
| $Y_4$ | 46 | 89 | 160 | — | — | 19 | 20 | 21 | — | — |
| $Y_3$ | 80 | 169 | — | — | — | 80 | 100 | — | — | — |
| $Y_2$ | 231 | — | — | — | — | 237 | — | — | — | — |
| | $B^{III}_{2,2}=400$ | $B^{III}_{2,3}=329$ | $B^{III}_{2,4}=266$ | $B^{III}_{2,5}=148$ | $B^{III}_{2,6}=49$ | $B^{IV}_{2,2}=337$ | $B^{IV}_{2,3}=121$ | $B^{IV}_{2,4}=22$ | $B^{IV}_{2,5}=1$ | $B^{IV}_{2,6}=0$ |

I | III | TABLA XXVII

| $X_i$ | $\eta_{-i,-j}$ | (1) | (2) | (3) | (4) | $\eta_{-i,j}$ | (1) | (2) | (3) | (4) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-X_5$ | 807 | 807 | 807 | 807 | — | 11 | 11 | 11 | 11 | — |
| $-X_4$ | 1727 | 2534 | 3341 | — | — | 55 | 66 | 77 | — | — |
| $-X_3$ | 2756 | 5290 | — | — | — | 112 | 178 | — | — | — |
| $-X_1$ | 3933 | — | — | — | — | 222 | — | — | — | — |
| | $B^{I}_{2,2}=9223$ | $B^{I}_{3,2}=8631$ | $B^{I}_{4,2}=4148$ | $B^{I}_{5,2}=807$ | $B^{I}_{6,2}=0$ | $B^{III}_{2,2}=400$ | $B^{III}_{3,2}=255$ | $B^{III}_{4,2}=88$ | $B^{III}_{5,2}=11$ | $B^{III}_{6,2}=0$ |

II | IV | TABLA XXVIII

| $X_i$ | $\eta_{i,-j}$ | (1) | (2) | (3) | (4) | $\eta_{i,j}$ | (1) | (2) | (3) | (4) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_7$ | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $X_6$ | 17 | 23 | 29 | 35 | 41 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $X_5$ | 33 | 56 | 85 | 120 | — | 9 | 15 | 22 | 30 | — |
| $X_4$ | 55 | 111 | 196 | — | — | 28 | 43 | 65 | — | — |
| $X_3$ | 123 | 234 | — | — | — | 79 | 122 | — | — | — |
| $X_2$ | 339 | — | — | — | — | 215 | — | — | — | — |
| | $B^{II}_{2,2}=573$ | $B^{II}_{3,2}=430$ | $B^{II}_{4,2}=316$ | $B^{II}_{5,2}=161$ | $B^{II}_{6,2}=47$ | $B^{IV}_{2,2}=337$ | $B^{IV}_{3,2}=187$ | $B^{IV}_{4,2}=95$ | $B^{IV}_{5,2}=39$ | $B^{IV}_{6,2}=10$ |

$$\left.\begin{array}{l}
T^{(1)}_{2,2} = 9223 + 573 + 400 + 337 = 10533 \\
T^{(3)}_{2,2} = - 9223 - 573 + 400 + 337 = - 9059 \\
T^{(4)}_{2,2} = - 9223 + 573 - 400 + 337 = - 8713 \\
T^{(1)}_{2,1} = 6680 + 895 + 1094 + 942 = 9611 \\
T^{(4)}_{2,1} = - 6680 + 895 - 1094 + 942 = - 5633 \\
T^{(1)}_{1,2} = 5305 + 730 + 359 + 439 = 6833 \\
T^{(3)}_{1,2} = - 5305 - 730 + 359 + 439 = - 5237 \\
T^{(1)}_{1,1} = 4188 + 1162 + 1072 + 1332 = 7754 \\
T^{(3)}_{1,3} = - 4684 - 387 + 277 + 188 = - 4606 \\
T^{(1)}_{3,2} = 8.631 + 430 + 255 + 187 = 9.503 \\
T^{(4)}_{3,2} = - 8.631 + 430 - 255 + 187 = - 8.269 \\
T^{(1)}_{3,1} = 6.006 + 565 + 704 + 448 = 7.723 \\
T^{(4)}_{3,1} = - 6.006 + 565 - 704 + 448 = - 5.697 \\
T^{(1)}_{2,3} = 8.290 + 263 + 329 + 121 = 9.003 \\
T^{(3)}_{2,3} = - 8.290 - 263 + 329 + 121 = - 8.103 \\
T^{(1)}_{1,3} = 4.684 + 387 + 277 + 188 = 5.536 \\
T^{(1)}_{4,2} = 4.184 + 316 + 88 + 95 = 4.647 \\
T^{(1)}_{4,1} = 2.833 + 346 + 257 + 196 = 3.692 \\
T^{(1)}_{2,4} = 4.867 + 84 + 266 + 22 = 5.239 \\
T^{(1)}_{1,4} = 2.764 + 163 + 229 + 67 = 3.223
\end{array}\right\} [50]$$

Sustituyendo estos valores en las fórmulas [44] tenemos:

$$[51]\left\{\begin{array}{l}
M_{2,2} = 4 \times 10533 + 2 \times 9611 + 2 \times 6833 + 7754 = \\
\quad = 82774 \\
M_{3,2} = 12\,(-8269) + 12\,(-8713) + 2\,(-4495) + \\
\quad + 6\,(-5697) + 6\,(-5633) + (-2766) = - \\
\quad = - 283520 \\
M_{2,3} = 12\,(-8103) + 12\,(-9059) + 2\,(-5539) + \\
\quad + 6\,(-4606) + 6\,(-5237) + (-2766) = - \\
\quad = - 278846 \\
M_{4,2} = 48 \times 4647 + 72 \times 9503 + 28 \times 10533 + \\
\quad 2 \times 6833 + 24 \times 3632 + 36 \times 7723 + \\
\quad + 14 \times 9611 + 7754 = 1723366 \\
M_{2,4} = 48 \times 5239 + 72 \times 9003 + 28 \times 10533 + \\
\quad + 2 \times 9611 + 24 \times 3223 + 36 \times 5536 + \\
\quad + 14 \times 6833 + 7754 = 1593898
\end{array}\right.$$

Para completar el repertorio de momentos dobles potenciales absolutos [27] falta el $M_{3,3}$. Debemos construir la tabla XXIX o *tercer damero de sumas*, utilizando la tabla XXIV.

Anulamos en el nuevo damero de sumas las celdas correspondientes a $X_{-2}$, $X_2$, $Y_{-2}$ e $Y_2$; anotamos en el ángulo superior izquierdo, de cada una de las restantes, los valores que figuran en el centro de las correspondientes celdas de la Tabla XXIV y sumamos siguiendo la regla [40]. Con las marginales dispuestas en las tablas de sumas XXX, XXXI, XXXII y XXXIII calculamos los momentos binomiales dobles que tienen un subíndice igual a 3.

Antes deben verificarse los resultados que figuran en la Tabla XXIX. A la suma de los valores de las celdas que rodean al origen, agregamos, la suma de las marginales anuladas en la tabla XXIV y restamos el valor de la suma de las cuatro celdas centrales de esta última tabla; el resultado debe ser igual a la suma total de la tabla XXIV. En efecto es:

$$[2815+77+76+34]+[4728+231+4155+554]-$$
$$[1873+223+129+149]=10533$$

El control en las tablas de sumas se hace lo mismo que en los casos anteriores.

Como para calcular el momento $M_{3,3}$ se lo expresa en función de los valores de $T^{(n)}_{r,s}$ y en el § 4 no hemos dado el repertorio de los momentos que tienen algún subíndice igual a *3*, vamos a deducir la fórmula que se debe aplicar.

Por la paridad de los índices de $M_{3,3}$ corresponde aplicar el caso (2) (fig. 2, § 4).

$$M_{3,3}=M^{\text{I}}_{3,3}-M^{\text{II}}_{3,3}-M^{\text{III}}_{3,3}+M^{\text{IV}}_{3,3} \qquad [52]$$

Por las fórmulas [27] resulta

TABLA XXIX

| $Y_j$ \ $X_i$ | $-X_5$ | $-X_4$ | $-X_3$ | $-X_2$ | $-X_1$ | $X_0$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $X_6$ | $X_7$ | I | II | I+II |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-Y_7$ | [1] 1 | [2] 3 | [3] 6 | — | — | | — | — | | | | | | 10 | — | 10 |
| $-Y_6$ | [24] 25 | [52] 79 | [82] 164 | — | — | | — | — | | | | | | 268 | — | 268 |
| $-Y_5$ | [50] 75 | [103] 238 | [172] 495 | — | — | | — | — | [1] 1 | | | | | 808 | 1 | 809 |
| $-Y_4$ | [123] 200 | [207] 630 | [423] 1310 | — | — | | — | — | [8] 19 | [4] 10 | [3] 6 | [1] 3 | [1] 1 | 2140 | 39 | 2179 |
| $-Y_3$ | [232] 432 | [492] 1354 | [781] 2815 | — | — | | — | — | [28] 77 | [14] 40 | [8] 22 | [5] 10 | [2] 3 | 4601 | 152 | 4753 |
| $-Y_2$ | — | — | — | — | — | | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| $-Y_1$ | — | — | — | — | — | | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| $Y_0$ | | | | | | | | | | | | | | IV | III | IV+III |
| $Y_1$ | — | — | — | — | — | | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| $Y_2$ | — | — | — | — | — | | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| $Y_3$ | 3 | [12] 28 | [23] 76 | — | — | | — | — | [19] 34 | [7] 11 | [2] 3 | [1] 1 | | 49 | 107 | 156 |
| $Y_4$ | [1] 1 | [7] 14 | [13] 39 | — | — | | — | — | [4] 5 | [1] 1 | | | | 6 | 54 | 60 |
| $Y_5$ | | [3] 6 | [6] 18 | — | — | | — | — | | | | | | — | 24 | 24 |
| $Y_6$ | | [2] 3 | [4] 9 | — | — | | — | — | | | | | | — | 12 | 12 |
| $Y_7$ | | [1] 1 | [2] 3 | — | — | | — | — | | | | | | — | 4 | 4 |
| I | 733 | 2304 | 4790 | — | — | IV | — | — | 39 | 12 | 3 | 1 | — | IV+I= = 7882 | — | — |
| III | 4 | 52 | 145 | — | — | II | — | — | 97 | 50 | 28 | 13 | 4 | — | II+III =393 | — |
| | 737 | 2356 | 4935 | — | — | IV+II | — | — | 136 | 62 | 31 | 14 | 4 | — | — | I+II+III +IV =8275 |

TABLA XXX

| | I | | | | | II | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y_j$ | $\eta_{-i,-j}$ | (1) | (2) | (3) | (4) | $\eta_{i,-j}$ | (1) | (2) | (3) |
| $-Y_7$ | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | — | — | — | — |
| $-Y_6$ | 268 | 278 | 288 | 298 | — | — | — | — | — |
| $-Y_5$ | 808 | 1086 | 1374 | — | — | 1 | 1 | 1 | — |
| $-Y_4$ | 2140 | 3226 | — | — | — | 39 | 40 | — | — |
| $-Y_3$ | 4601 | — | — | — | — | 152 | — | — | — |
| | $B^{I}_{3,3}=7827$ | $B^{I}_{3,4}=4600$ | $B^{I}_{3,5}=1672$ | $B^{I}_{3,6}=308$ | $B^{I}_{4,6}=10$ | $B^{II}_{3,3}=192$ | $B^{II}_{3,4}=41$ | $B^{II}_{3,5}=1$ | $B^{II}_{3,6}=0$ |

TABLA XXXI

| | III | | | | | IV | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y_j$ | $\eta_{-i,j}$ | (1) | (2) | (3) | (4) | $\eta_{i,j}$ | (1) | (2) |
| $Y_7$ | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | — | — | — |
| $Y_6$ | 12 | 16 | 20 | 24 | — | — | — | — |
| $Y_5$ | 24 | 40 | 60 | — | — | — | — | — |
| $Y_4$ | 54 | 94 | — | — | — | 6 | 6 | — |
| $Y_3$ | 107 | — | — | — | — | 49 | — | — |
| | $B^{III}_{3,3}=201$ | $B^{III}_{3,4}=154$ | $B^{III}_{3,5}=84$ | $B^{III}_{3,6}=28$ | $B^{III}=4$ | $B^{IV}_{3,3}=55$ | $B^{IV}_{3,4}=6$ | $B^{IV}_{3,5}=0$ |

| | I | | | | III | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | $\eta_{-i,-j}$ | (1) | (2) | (3) | $\eta_{-i,j}$ | (1) | (2) | (3) |
| $-X_5$ | 733 | 733 | 733 | — | 4 | 4 | 4 | — |
| $-X_4$ | 2304 | 3037 | — | — | 52 | 56 | — | — |
| $-X_3$ | 4790 | — | — | — | 145 | — | — | — |
| | $B^{I}_{3,3}=7827$ | $B^{I}_{4,3}=3770$ | $B^{I}_{5,3}=733$ | $B^{I}_{6,3}=0$ | $B^{III}_{3,3}=201$ | $B^{III}_{4,3}=60$ | $B^{III}_{5,3}=4$ | $B^{III}_{6,3}=0$ |

TABLA XXXII

| | II | | | | | IV | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | $\eta_{i,-j}$ | (1) | (2) | (3) | (4) | $\eta_{i,j}$ | (1) | (2) | (3) | (4) |
| $X_7$ | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | — | — | — | — | — |
| $X_6$ | 13 | 17 | 21 | 25 | — | 1 | 1 | 1 | 1 | — |
| $X_5$ | 28 | 45 | 66 | — | — | 3 | 4 | 5 | — | — |
| $X_4$ | 50 | 95 | — | — | — | 12 | 16 | — | — | — |
| $X_3$ | 97 | — | — | — | — | 39 | — | — | — | — |
| | $B^{II}_{3,3}=192$ | $B^{II}_{4,3}=161$ | $B^{II}_{5,3}=91$ | $B^{II}_{6,3}=29$ | $B^{II}_{7,3}=4$ | $B^{IV}_{3,3}=55$ | $B^{IV}_{4,3}=21$ | $B^{IV}_{5,3}=6$ | $B^{IV}_{6,3}=1$ | $B^{IV}_{7,3}=0$ |

TABLA XXXIII

$$M_{3,3} = 36\,B_{3,3} + 36\,B_{2,3} + 6\,B_{1,3} + 36\,B_{3,2} + 36\,B_{2,2} +$$
$$+ 6\,B_{1,2} + 6\,B_{3,1} + 6\,B_{2,1} + B_{1,1}$$

luego efectuando en la [52] las sustituciones que expresan las fórmulas [39], se tiene:

$$M_{3,3} = 36\,T^{(2)}_{3,3} + 36\,T^{(2)}_{2,3} + 6\,T^{(2)}_{1,3} + 36\,T^{(2)}_{3,2} + 36\,T^{(2)}_{2,2} + 6\,T^{(2)}_{1,2}$$
$$+ 6\,T^{(2)}_{3,1} + 6\,T^{(2)}_{2,1} + T^{(2)}_{1,1} \qquad [53]$$

Debemos calcular estos valores de $T^{(n)}_{r,s}$. En el repertorio [48] tenemos dados los de:

$$T^{(2)}_{1,3} = 4.208$$
$$T^{(2)}_{1,2} = 4.655$$
$$T^{(2)}_{3,1} = 5.185$$
$$T^{(2)}_{2,1} = 5.633$$
$$T^{(2)}_{1,1} = 3.286$$

De las tablas XXV, XXVI, XXVII, XXVIII, XXX y XXXI obtenemos los valores de $B^{N}_{r,3}$ y $B^{N}_{3,s}$ que, sustituídos en las fórmulas [39], permiten calcular los restantes y se tiene:

$$T^{(2)}_{3,3} = 7827 - 192 - 201 + 55 = 7.489$$
$$T^{(2)}_{2,3} = 8290 - 263 - 329 + 121 = 7.819$$
$$T^{(2)}_{3,2} = 8631 - 430 - 255 + 187 = 8.133$$
$$T^{(2)}_{2,2} = 9223 - 573 - 400 + 337 = 8.587$$

Reeemplazando estos valores en la [53] y factoreando, resulta

$$M_{3,3} = 36\,[7489 + 7819 + 8133 + 8587] +$$
$$+ 6\,[4208 + 4655 + 5185 + 5633] + 3286$$

de donde

$$M_{3,3} = 1274380 \qquad [54]$$

Así podríamos continuar hasta agotar los cálculos, lo que ocurriría cuando, en las tablas de sumas, no quedasen más valores con los cuales operar.

Los momentos potenciales dobles absolutos, cuyos valores se dan en los repertorios [45], [47], [49], [51] y [54], deben ser divididos por la población $N = 3379$ para tener los momentos potenciales dobles relativos $m_{r,s}$ que, reemplazados en las fórmulas [12] del § 2, dan los valores de los momentos potenciales dobles centrados $\mu_{r,s}$ y finalmente, después de haberlos calculados, sustituyéndolos en el repertorio [22] del § 3 obtenemos los momentos relativos centrados y corregidos por el método de Sheppard, $\mu'_{r,s}$ que son los que se utilizan en las aplicaciones.

# BIBLIOGRAFIA


CHARLIER, C. V. L., *Vorlesungen über die Grundzüge der mathematischen Statistik*, Lund, 1931 (Versión castellana del Dr. José González Galé en Cuadernos de Trabajo del Instituto de Biometría, Buenos Aires, 1936).

DARMOIS, GEORGE, *Statistique Mathématique*, París, 1928.

ELDERTON, W. PALIN, *Frequency curves and correlation*, 2ª ed., Londres, 1927.

FISHER, ARNE, *The mathematical theory of probabilities and its application to frequency curves and statistical methods*, 2ª ed., New York, 1930.

FRISH, R., *Recurrence formulae for the moments of the point binomial*, Biometrika, Vol. XVII, 1925, págs. 165 - 171.

JORDAN, CHARLES, *Statistique Mathématique*, París, 1927.

MITROPOLSKY, A. M., *Teoría de momentos* (en ruso). Moscú, 1933.

RIETZ, H. L., *Mathematical Statistic*. Chicago, 1927.

ROMANOVSKY, V., *On the moments of means of functions of one and more random variables*. Metron, Vol. VIII, Nos. 1 - 2. Roma, 1929, págs. 251 - 289.

TSCHETWERIKOFF, N. S., *Teoría de momentos. Sobre la técnica del cálculo de series estadísticas parabólicas* (en ruso), publicación del Instituto de la Conjuntura de Moscú, vol. 2, 1926.

YULE, G. UNDY, *An introduction to the theory of Statistic*. 6ª ed., Londres, 1932.