

CALCULO DE SUPERFICIES DE FRECUENCIAS

**VERIFICACION EXPERIMENTAL Y COMPARACION DEL METODO DE LAS FUNCIONES
MARGINALES CON EL DE LAS 16 CONSTANTES DE KARL PEARSON**



CLOTILDE A. BULA

CALCULO DE SUPERFICIES DE FRECUENCIAS

VERIFICACION EXPERIMENTAL Y COMPARACION DEL METODO DE LAS FUNCIONES
MARGINALES CON EL DE LAS 15 CONSTANTES DE KARL PEARSON

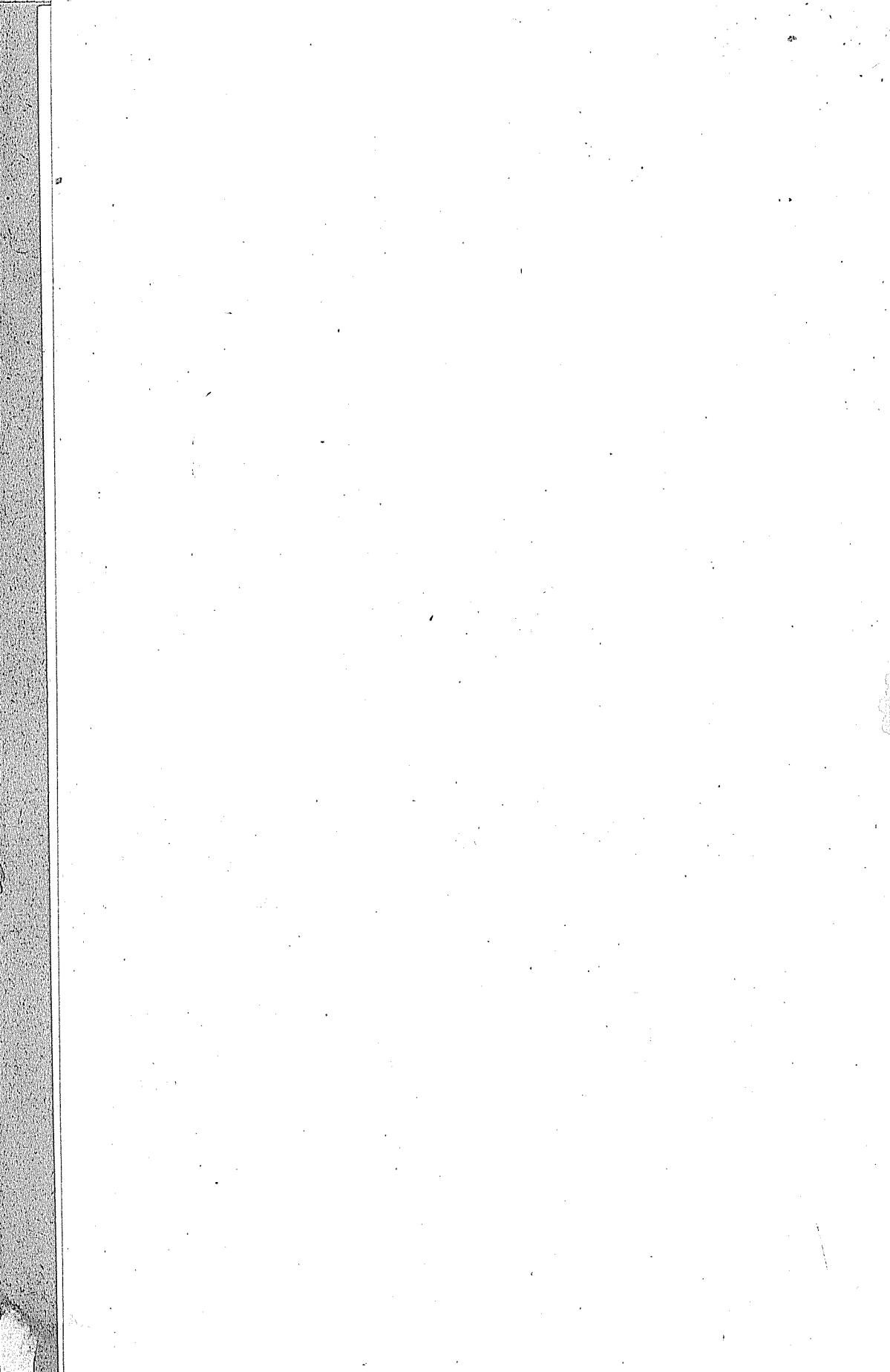
UNION MATEMATICA ARGENTINA

VOL. VI - 1940

PUBLICACION N°. 10

BUENOS AIRES

1940



RÉSUMÉ

Dans le volume XXVI, III^e et IV^e parties, page 379 de « Biometrika » de Décembre 1934, a été publié sous le titre « Contribution à l'étude de la théorie de la Corrélation », un travail où on étudie le problème qui pose la définition analytique d'une surface de fréquences et on donne la solution par le moyen d'une expression mathématique de la forme suivante:

$$f(x, y) = \varphi(x) \varphi(y) \sum_{j=0} \sum_{k=0} \omega_{j,k} X_j(x) Y_k(y)$$

dans laquelle $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$ sont les marginales expérimentales ajustées par la méthode de Pearson; $X(x)$ $Y(y)$ sont des polynômes orthogonaux en rapport des fonctions $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$; les $\omega_{j,k}$ sont des paramètres à déterminer. C'est ce que nous appelons la méthode des fonctions marginales.

Dans ce travail, nous appliquons la méthode à une surface déjà étudiée par Pearson avec sa méthode des quinze constantes, dont les résultats furent publiés dans le volume XVII, III^e et VI^e parties, page 291 de « Biometrika » de Décembre 1926, circonstance qui nous permet d'effectuer des comparaisons utiles entre les deux méthodes.

Comme résultat de l'application faite de la méthode des fonctions marginales, nous donnons, dans le tableau XVII, la surface théorique obtenue. Les graphiques finaux montrent des sections de cette même surface, en comparant ces résultats avec les résultats obtenus par Pearson et les données empiriques.

Les tableaux XXI y XXII et les graphiques Nos. 5 et 6 se rapportent aux équations de sédasticité.

En outre, nous avons calculé le coefficient de relation de corrélation et nous donnons les formules pour le calcul des équations clitics et kurtics.

Faite la vérification, on constate que la méthode des fonctions marginales définit une surface théorique déformée en relation avec la surface experimental, aplatie dans les points qui correspondent aux fréquences maximales et levée dans les points qui correspondent au contour expérimental; surface théorique qui prend, en outre, dans son domaine d'existence, des valeurs négatives, en conséquence, les équations de sédasticité prennent aussi des valeurs négatives, perdant, par la même raison, dans ce cas, sa signification de fonction signalétique.

La méthode des fonctions marginales dans sa caractéristique fondamentale, en se manifestant et en conduisant à des résultats si peu satisfaisants, définit toujours la surface théorique, dans des domaines rectangulaires, finis ou infinis. Dans le cas de la surface que nous étudions, le rectangle est formé par le centre de côtés ($-\infty$; $+\infty$) et ($+24,6$; $+31,0$) qui correspondent aux intervalles de variation de l' x et de l' y respectivement, en se rapportant à l'origine naturel, c'est à dire, que

cette méthode définit une surface théorique dans un domaine différent de celui dans lequel l'expérimentale existe.

Comme conclusion de la vérification expérimentale faite, notre opinion est que la méthode des fonctions marginales ne peut pas représenter, avec propriété, une surface de fréquences, et, en conséquence, avec elle on ne peut pas non plus, mesurer la corrélation dans cette même surface. Puisque, étant le coefficient de corrélation défini de la manière suivante:

$$\eta_{yx}^2 = 1 - \frac{S_{yx}^2}{\sigma_y^2}$$

(de la même manière on pourrait définir le coefficient symétrique η_{xy}^2), où

$$S_{yx}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) [y - \bar{y}_x]^2 dx dy \quad \text{étant } f(x, y)$$

la fonction théorique qui définit les points de la surface, il n'y a pas de sens de dire qu'avec une mauvaise équation de la surface on obtient une bonne mesure de la corrélation.

INTRODUCCIÓN

Trato, en este trabajo, del cálculo que he realizado y de los resultados obtenidos con la aplicación del método de las funciones marginales a una superficie de frecuencias experimentales, así como también de las funciones signaléticas: ecuación de la línea de regresión, coeficiente de relación de correlación y ecuación sedás-tica.

La superficie experimental elegida, lo fué porque ya había sido estudiada por KARL PEARSON, con su método de las quince constantes y con el propósito de comparar, luego, ambos resultados.

Ha sido éste un trabajo delicado y largo que, el mal resultado obtenido con el método de las funciones marginales hizo más difícil por las múltiples revisaciones de los cálculos que tuve que realizar, rehaciéndolos luego, íntegramente, operando con 11 decimales, en vez de 7, como lo había hecho primero, con la esperanza de mejorar, así, la aproximación hasta llegar a la certeza de que los cálculos eran correctos y que la falta de fidelidad observada no era imputable a errores ni a insuficiencia del número de decimales, sino a deficiencia del fundamento conceptual del método.

Una publicación parcial de los resultados numéricos de mi trabajo, cuando aún no estaba terminado, fué hecha por el Instituto de Estadística de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional del Litoral, en el folleto intitulado: «*Análisis experimental de la correlación en superficies de frecuencias a dos variables*». La forma en que esta publicación se ha efectuado: escauta exposición de fórmulas, tablas numéricas y resultados, carente de toda explicación, tanto sobre el método como sobre el proceso de cálculo seguido, si bien podrá llenar la finalidad de mostrar algunos de los resultados obtenidos, deja insatisfechas otras, que considero de suma importancia. Esto y tanto la conveniencia de mostrar la totalidad de los resultados, como de hacer la exposición de los métodos y proceso de cálculo seguidos, que pueden servir de útil experiencia para otros casos análogos, me han determinado a la presente publicación del trabajo, en la forma en que lo hago.

Hay en el trabajo científico, como en ningún otro, un aspecto de utilidad que se realiza independientemente de que el resultado

obtenido sea bueno o malo; que se logre la finalidad propuesta o la contraria.

Sea cual fuere la posición subjetiva del investigador, puede decirse que el pragmatismo es de la esencia misma de lo científico, aun en aquellos casos en que lo abstracto del asunto lo hace aparecer como sin conexión alguna con la realidad objetiva y ese aspecto pragmatista se conserva aún cuando los resultados sean malos o no se llegue a la finalidad propuesta.

Tiene, por eso, el trabajo científico, una significación trascendente en sí, desligada de la personalidad de quien lo realiza y aún, a veces, contrapuesta a ella y a pesar de ella.

El método de las funciones marginales para definir una superficie de frecuencias es malo; esto surge de los resultados a que se llega en la verificación experimental del mismo que he hecho y se expone en las páginas que siguen, pero, aun así, considero que la experiencia realizada es útil.

El entusiasmo, tesonera aplicación y buena fe con que, durante dos años largos, me dediqué a dicha verificación experimental, el vehemente deseo de que el más brillante de los éxitos la coronara, se tradujeron, como es natural y fácilmente se explica, en un sentimiento de sincero pesar ante los resultados a que el método conduce.

Un análisis sereno del mismo, contenido en el estudio crítico, aún inédito, que, en razón de esos resultados, hizo el miembro del Instituto Prof. Dr. F. L. GASPAR, mostró la deficiencia de su base conceptual y que la función producto $\varphi(x) \cdot \varphi(y)$ formada por la caprichosa yuxtaposición de las funciones marginales define, es cierto, una superficie, pero, esa yuxtaposición, no responde a ningún concepto ni representa característica alguna de la superficie experimental cuya definición analítica se pretende, puesto que es muy fácil demostrar que hay infinitas superficies distintas con las mismas marginales (v. GASPAR, FERNANDO L. - *La función de primera aproximación y la definición analítica de las superficies de frecuencias experimentales*, en Anales de la Sociedad Científica Argentina, enero de 1937, E. I, T. CXXIII, pág. 46, nº 7). En cambio falsa el dominio de existencia de la superficie experimental reduciéndolo, arbitraria y exclusivamente, al caso rectangular quitando, en la que vendría a officiar como función de primera aproximación, un elemento fundamental, básico, característico de las superficies de frecuencias experimentales que, en la enorme mayoría de los casos, son superficies de correlación. Dicho elemento es la ligazón estocástica que vincula a las dos variables y hace que sea imposible la descom-

posición de la superficie en el producto de dos funciones, una de una de las variables por otra de la otra.

Refiriéndome a algunos comentarios publicados sobre el valor del método de las funciones marginales, me parece conveniente expresar que, hablando con la seriedad que estas cuestiones reclaman y el conocimiento que debemos presumir en quienes de ellas se ocupan, no puede decirse que, con una mala ecuación de una superficie, se llegue a un resultado satisfactorio en el cálculo de la correlación que la misma define. Esto es sencillamente absurdo. Tanto, valiera decir que la correlación es independiente de la superficie que la define.

Yo creo que el problema de la correlación, es inseparable del de la superficie, es decir, que no puede estudiarse, en forma satisfactoria, el primero sin haber resuelto el segundo y éste es el problema candente de la estadística matemática de nuestros días. En una conferencia que, sobre el tema, pronuncié en octubre de 1937, en la Facultad de Ciencias Económicas de Buenos Aires y en una publicación posterior sobre el mismo ⁽¹⁾, hice una exposición del estado del problema y de las distintas formas en que se lo ha abordado.

La introducción, en el análisis matemático, de los polinomios, de dos variables, ortogonales respecto de una función de ponderación, sea el dominio de existencia, de la misma, finito o infinito, que ha hecho el Prof. F. L. GASPAR en algunas memorias aparecidas en los Anales de la Sociedad Científica Argentina ⁽²⁾ ha proporcionado el instrumento matemático necesario para abordar, con propiedad, la definición analítica de una superficie de frecuencias experimentales, siendo digno de notar cómo, la solución del problema estadístico, hizo necesaria la solución previa de un problema de análisis matemático puro.

(1) BULA, CLOTILDE A.—*Las superficies de frecuencias*, en «Revista de Ciencias Económicas», febrero de 1938. Buenos Aires.

(2) GASPAR, FERNANDO L.—*Sobre los polinomios ortogonales a dos variables y generalización de la superficie de Bravais*, en Anales de la Soc. Científica Argentina, febrero de 1936, E. II, T. CXXI, pág. 74 y sig. Buenos Aires;

— *La función de primera aproximación y la definición analítica de las superficies de frecuencias experimentales*, en Anales de la Soc. Científica Argentina, enero de 1937, E. I, T. CXXIII, pág. 39 y sig. Buenos Aires.

— *La ortogonalidad sin ponderación. El problema de Hermite*, en Anales de la Soc. Científica Argentina, setiembre de 1937, E. III, T. CXXIV, págs. 176-193. Buenos Aires.

En una publicación posterior, el mismo autor (³) modifica la forma clásica de efectuar las llamadas generalizaciones de las funciones de probabilidad, de manera que, el error integral cuadrático pueda ser arbitrariamente pequeño, con lo cual se tiene un criterio riguroso de convergencia, lo que es de importancia fundamental en el problema de que se trata.

Tal es el estado actual del mismo.

La verificación experimental que he hecho, del método de las funciones marginales, constituye, si mi información no es incompleta, el primer caso de trabajos de tal índole que se haya efectuado en el país.

De las investigaciones del Prof. Gaspar a que me he referido, resulta un nuevo método para definir, analíticamente, una superficie de frecuencias, método que será necesario verificar experimentalmente, tal como lo hago en la presente publicación respecto del método de las funciones marginales por lo que, independientemente de los resultados obtenidos, mi trabajo puede representar una experiencia útil para quienes deban repetir, con aquel o con otros métodos, estas verificaciones. Para que ello sea posible, para que dicha asimilación de experiencia pueda efectuarse, es indispensable hacer la exposición del método y proceso de cálculo de manera que éste pueda ser seguido en todos sus detalles. Es lo que me he propuesto hacer.

Procuro de tal manera que este modesto esfuerzo mío se aproveche y rinda el mayor beneficio posible, tratando de ocupar, con dignidad, un puesto entre los que trabajan, honradamente, en la solución de esos problemas.

CLOTILDE A. BULA.

(³) GASPAR, FERNANDO L.—*Sobre los desarrollos en serie de polinomios ortogonales de varias variables, cumpliendo la condición de convergencia en media*, en Anales de la Soc. Científica Argentina, marzo de 1938, E. III, T. CXXV, págs. 174 a 180. Buenos Aires.

§ I. — EXPOSICIÓN DEL MÉTODO Y FÓRMULAS A APLICAR

1. — En el trabajo publicado en la Revista de Ciencias Económicas de Buenos Aires a que nos referimos en la introducción ⁽⁴⁾ hemos expuesto en qué consiste el problema de la definición analítica de una superficie de frecuencias experimentales y las distintas formas en que se lo ha abordado.

Aquí nos ocuparemos sólo de los resultados obtenidos con la aplicación del método llamado de las funciones marginales, el que está expuesto en Biometrika, Vol. XXVI, Parts. III y IV, diciembre de 1934 con el título de «*Contribution à l'étude de la théorie de la correlation*» y en otra publicación posterior efectuada por el Instituto de Estadística de la Universidad Nacional del Litoral, titulada: «*Teoría de la correlación*».

Según este método, la definición teórica de la superficie de frecuencias, designada por la función desconocida $f(x, y)$, se realiza mediante la siguiente expresión:

$$f(x, y) \sim \varphi(x) \varrho(y) \sum_{j=0} \sum_{k=0} \omega_{j,k} X_j(x) Y_k(y) \quad (*) \quad [1]$$

donde $F(x, y) = \varphi(x) \cdot \varrho(y)$ desempeña el rol de función de primera aproximación respecto de la superficie de frecuencias experimentales siendo $\varphi(x)$ la marginal ajustada de las x y $\varrho(y)$ la marginal ajustada de las y .

El desarrollo en serie, actúa como corrector de aquella primera aproximación. Los $\omega_{j,k}$ son coeficientes a determinar; $X_j(x)$ es una sucesión de polinomios sólo en x ; $Y_k(y)$ es otra sucesión de polinomios sólo en y , ortogonales respecto de las funciones $\varphi(x)$ y $\varrho(y)$, respectivamente. Se trata, pues, de casos de ortogonalidad ponderada.

(4) BULA, CLOTILDE A. — Loc. cit. (1).

(*) Como las aplicaciones técnicas no están reñidas con el rigor y la propiedad en la expresión, nos ha parecido conveniente utilizar la notación de HURWITZ ⁽⁵⁾ sustituyendo el signo de igualdad por el de correspondencia. Para que la igualdad sea legítima es necesario probar que la serie del segundo miembro es convergente y que su suma es igual a $f(x, y)$.

(5) HURWITZ, ADOLF. — *Math. Annalen*, vol. LVII, 1903, pág. 427.

2. — Los datos de la experiencia se disponen, como es de práctica, en una tabla a doble entrada y por simples sumas se obtienen las dos marginales empíricas que deben ser ajustadas. Con los momentos de las funciones marginales se calculan los sistemas $\{X_j(x)\}$ e $\{Y_k(y)\}$. Con los momentos dobles de la superficie se calculan los coeficientes $\omega_{j,k}$, como veremos.

El ajustamiento de las marginales empíricas se realiza por el método de Pearson (⁶) que define el conocido repertorio de curvas que lleva su nombre, a cuyos tipos corresponderán, por tanto, las funciones marginales teóricas que se designan, como dijimos, por $\varphi(x)$ y $\varrho(y)$.

3. — La circunstancia de que, en la serie doble

$$\sum_{j=0} \sum_{k=0} \omega_{j,k} X_j(x) Y_k(y)$$

los polinomios $X_j(x)$ e $Y_k(y)$ sean ortogonales respecto de las funciones $\varphi(x)$ y $\varrho(y)$, respectivamente, permite el cálculo de cada uno de los coeficientes ω independientemente de todos los demás. Entonces, si calculada una aproximación, ésta no satisficiera, se pueden agregar nuevos términos conservando todo lo hecho, siendo suficiente calcular los coeficientes correspondientes a los términos agregados.

Lo mismo que en el método clásico para determinar los coeficientes de la serie trigonométrica que debe representar a una función dada, se procede en este caso como si la serie doble fuese uniformemente convergente, o por lo menos integrable, término a término, en el dominio en que $F(x,y) = \varphi(x) \cdot \varrho(y)$ está definida, aun después de la multiplicación por $X_m(x) Y_n(y)$.

No puede decirse, sin más, que, con el agregado de nuevos términos, la aproximación se mejora. El segundo miembro de la fórmula [1] no converge cuadráticamente hacia el primero, condición suficiente para que tampoco converja puntualmente. La recíproca podría no ser cierta.

Para que estos desarrollos converjan cuadráticamente o, como suele decirse, en media de grado 2, es necesario hacerlos en la forma indicada por el prof. GASPAR en el trabajo a que antes hicimos mención (⁷).

(⁶) ELDERTON W. PALIN. — *Frequency curves and correlation*, Londres, 1927.

BULA, CLOTILDE A. — *Exposición del método de Pearson. Estudio de los tipos básicos I, IV y VI* (en prensa).

(⁷) GASPAR, FERNANDO L. — *Loc. cit.* (⁸).

Por eso, en el método que estamos exponiendo, es decir, operando con el desarrollo [1], si una aproximación no es satisfactoria no queda otra cosa que hacer que intentar mejorarla agregando nuevos términos, sin que pueda decirse, previamente, si ocurrirá eso o lo contrario.

4.— La definición, por determinantes, de los polinomios de los sistemas $\{X_j(x)\}$ e $\{Y_k(y)\}$ se hace según las fórmulas siguientes:

$$X_j(x) = \frac{(-1)^j}{\Delta_{j,0}} \begin{vmatrix} 1 & x & \dots & x^j \\ \mu'_{0,0} & \mu'_{1,0} & \dots & \mu'_{j,0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu'_{j-1,0} & \mu'_{j,0} & \dots & \mu'_{2j-1,0} \end{vmatrix} \quad [2]$$

$$Y_k(y) = \frac{(-1)^k}{\Delta_{0,k}} \begin{vmatrix} 1 & y & \dots & y^k \\ \mu'_{0,0} & \mu'_{0,1} & \dots & \mu'_{0,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu'_{0,k-1} & \mu'_{0,k} & \dots & \mu'_{0,2k-1} \end{vmatrix} \quad [3]$$

$\Delta_{j,0}$ y $\Delta_{0,k}$ son los menores complementarios de x^j e y^k , respectivamente, con lo que se consigue que los coeficientes de los términos de grado máximo de $X_j(x)$ e $Y_k(y)$ sean iguales a la unidad positiva, es decir, son funciones de esta forma:

$$X_j(x) = \alpha_{j,0} + \alpha_{j,1}x + \alpha_{j,2}x^2 + \dots + \alpha_{j,j-1}x^{j-1} + x^j$$

$$Y_k(y) = \gamma_{k,0} + \gamma_{k,1}y + \gamma_{k,2}y^2 + \dots + \gamma_{k,k-1}y^{k-1} + y^k$$

Los elementos

$$\mu'_{j,0} \text{ y } \mu'_{0,k} \quad (j = 0, 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots)$$

son momentos dobles de la superficie, centrados y corregidos ⁽⁸⁾ que, por tener uno de los índices igual a cero, coinciden con los momentos simples de las marginales teóricas y están definidos así: (*)

$$\mu'_{j,0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) x^j dx \quad [4] \quad \mu'_{0,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) y^k dy \quad [5]$$

(8) BULA, CLOTILE A.— *Teoría y cálculo de los momentos dobles. Centraje. Correcciones de Sheppard. Método simplificador de Mitropolsky.* Rosario, 1940.

(*) A los efectos de la notación, procederemos como si fueran infinitos los intervalos en que están definidas las funciones $\varphi(x)$, y $\varphi(y)$ y, por tanto, el dominio en que está definida la función $F(x,y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$; en el caso de que fueran finitos, bastará, considerar a las funciones nulas fuera de los extremos del intervalo o del contorno del dominio en que están definidas.

El método de Pearson no es otra cosa que el método de los momentos, el que está basado en un criterio de aproximación según el cual los parámetros de la función teórica deben ser determinados en forma tal que, sean iguales los momentos teóricos y experimentales hasta los de un cierto orden.

La aproximación se considera mejor cuando el orden de los momentos que son iguales es mayor (º).

En la forma en que Pearson aplica dicho método, se verifica la igualdad de los momentos teóricos y experimentales hasta los de cuarto orden inclusive.

Es decir que llamando $f(x_i)$ y $f(y_j)$ a los datos de las marginales experimentales se deberá verificar

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) x^s_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) x^s dx$$

$$\sum_{j=1}^n f(y_j) y^s_j = \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho(y) y^s dy$$

igualdades válidas para $s = 0, 1, 2, 3, 4$.

En el cálculo de la superficie por el método que estamos exponiendo, intervienen también los momentos de orden 5º y 6º de ambas marginales, es decir

$$\mu'_{0,5}, \mu'_{0,6} \text{ y } \mu'_{5,0}, \mu'_{6,0}$$

los que hemos calculado aplicando la siguiente fórmula de recurrencia:

$$\frac{-sb_0 \mu'_{s-1} - sb_1 \mu'_s}{(s+2)b_2 + 1} = \mu'_{s+1} \quad [6]$$

que expresa un momento simple teórico centrado y corregido en función de los dos anteriores. Como en esta teoría no se consideran momentos de índices negativos, la fórmula [6] sólo es aplicable para $s \geq 2$.

(º) GASPAR, FERNANDO L.—*La interpolación en el caso de varias variables, con una introducción de polinomios ortogonales, en el campo discontinuo*. Obras editadas por la Facultad de Ciencias Económicas, Comerciales y Políticas de la Universidad Nacional del Litoral, Serie I, Vol. II, Rosario, 1938.

Las constantes b_0 , b_1 y b_2 que se calculan en base a los momentos, como más adelante veremos, son los coeficientes que figuran en la ecuación diferencial

$$\frac{y'}{y} = \frac{x + a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} \quad [7]$$

de que parte PEARSON para obtener su repertorio de curvas.

Por la ortogonalidad de los sistemas $\{X_j(x)\}$ e $\{Y_k(y)\}$ se verifica (10)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) X_j(x) X_m(x) dx \left\{ \begin{array}{ll} = 0 & \text{si } j \neq m \\ = \frac{\Delta_{j+1,0}}{\Delta_{j,0}} & \text{si } j = m \end{array} \right. \quad [8]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) Y_k(y) Y_n(y) dy \left\{ \begin{array}{ll} = 0 & \text{si } k \neq n \\ = \frac{\Delta_{0,k+1}}{\Delta_{0,k}} & \text{si } k = n \end{array} \right. \quad [9]$$

lo que importa que sea

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \varphi(y) X_j(x) X_m(x) Y_k(y) Y_n(y) dx dy \left\{ \begin{array}{ll} = 0 & \text{si } j, k \neq m, n \\ \neq 0 & \text{si } j, k = m, n \end{array} \right.$$

Esto permite el cálculo de los coeficientes ω de la fórmula [1] por el clásico procedimiento de FOURIER.

Para calcular, por ejemplo, $\omega_{j,k}$, se multiplican ambos miembros por $X_j(x) Y_k(y)$ y se integra, resultando

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) X_j(x) Y_k(y) dx dy &= \\ &= \omega_{j,k} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \varphi(y) X_j^2(x) Y_k^2(y) dx dy \end{aligned}$$

pues, por las condiciones de ortogonalidad [8] y [9] se anulan en el segundo miembro, todos los términos del desarrollo, excepto aquel en que figura $X_j^2(x) Y_k^2(y)$.

(10) GASPAR, FERNANDO L.—*Sobre algunas series funcionales*. Publicaciones de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional del Litoral. Serie: Técnico-Científica, nº 10, Rosario, 1937.

Por tanto es

$$\omega_{j,k} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) X_j(x) Y_k(y) dx dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \rho(y) X^2_j(x) Y^2_k(y) dx dy} \quad [10]$$

Calculados los coeficientes ω se reemplazan en la [1].

Es necesario hacer notar que, aunque en la fórmula [10] se escriben integrales, como la función $f(x,y)$ es desconocida, ellas no pueden calcularse, por lo que, el cálculo efectivo, no se hace con integrales sino con sumatorias.

Como es

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) X_j(x) Y_k(y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) [\alpha_{j,0} + \alpha_{j,1} x + \dots + \alpha_{j,j-1} x^{j-1} + x^j] \\ & \quad \times [\gamma_{k,0} + \gamma_{k,1} y + \dots + \gamma_{k,k-1} y^{k-1} + y^k] dx dy \end{aligned}$$

el numerador de aquella fórmula puede descomponerse en una suma de expresiones de la forma

$$c \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) x^r y^s dx dy \quad (c = \text{const.})$$

que no es otra cosa que un momento doble de orden r,s de la superficie teórica, multiplicado por una constante conocida.

Lo que se hace entonces, como se verá a continuación, es postular la igualdad, hasta un cierto orden, de los momentos teóricos con los momentos experimentales centrados y corregidos y se opera, por sumas, con estos últimos.

Por lo tanto, se ve cómo, la definición analítica de la superficie de frecuencias experimentales, dada por la fórmula [1] reposa, en cierta medida, sobre el criterio de aproximación del método de los momentos.

5. — Con el propósito de facilitar los cálculos, se utilizan los momentos reducidos $q_{j,k}$; los coeficientes de simetría β_{10} y β_{01} y los coeficientes de normalidad β_{20} y β_{02} .

Estos valores se definen así:

$$q_{j,k} = \frac{\mu'_{j,k}}{\sigma_x^j \sigma_y^k} \quad [11]$$

$$\beta_{10} = \frac{\mu'^2_{30}}{\mu'^3_{20}} \quad [12]$$

$$\beta_{01} = \frac{\mu'^2_{03}}{\mu'^3_{02}} \quad [13]$$

$$\beta_{20} = \frac{\mu'_{40}}{\mu'^2_{20}} = q_{40} \quad [14]$$

$$\beta_{02} = \frac{\mu'_{04}}{\mu'^2_{02}} = q_{04} \quad [15]$$

σ_x y σ_y son los desvíos medios cuadráticos correspondientes a cada una de las marginales $\varphi(x)$ y $\varphi(y)$ respectivamente.

En la expresión [11] se tienen los llamados momentos dobles reducidos dados en función de los momentos dobles $\mu'_{j,k}$ centrados y corregidos según el método de SHEPPARD extendido para dos variables, los que se definen así:

$$\mu'_{j,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) x^j y^k dx dy \quad [16]$$

Cuando alguno de los subíndices es igual a cero, recaemos en las fórmulas [4] ó [5] y los momentos reducidos expresados en [11] son los momentos reducidos de las marginales.

Si en los subíndices no aparecen ceros, los $q_{j,k}$ se calculan haciendo intervenir todas las frecuencias experimentales y con el objeto de simplificar dicho cálculo recurrimos al método de MITROPOLSKY ⁽¹¹⁾.

El proceso que se sigue en este método es, esquemáticamente, el siguiente:

- 1º - Cálculo de los momentos dobles binomiales recurriendo al esquema de TSCHETWERIKOFF.
- 2 - Cálculo de los momentos brutos, absolutos, dobles.
- 3º - Cálculo de los momentos dobles relativos.
- 4º - Centraje.
- 5º - Correcciones de SHEPPARD.
- 6º - Cálculo de los momentos reducidos.

(11) MITROPOLSKY, A. M.—*Teoría de Momentos*. Leningrado, 1933 (en ruso).

BULA, CLOTILDE A.—*Loc. cit.* (8).

Aplicando el esquema de TSCHEWERIKOFF a los resultados obtenidos en las tablas que MITROPOLSKY llama de sumas, se tienen los momentos binominales dobles $B_{j,k}$.

Si en la fórmula que da un momento binomial doble en función de los potenciales, cuya expresión general es:

$$B_{j,k} = \sum_{m=j} \sum_{n=k} \eta_{m,n} \left[\frac{X_m (X_m - 1) (X_m - 2) \dots (X_m - j + 1)}{j!} \times \right. \\ \left. \times \frac{Y_n (Y_n - 1) (Y_n - 2) \dots (Y_n - k + 1)}{k!} \right] (*) [17]$$

despejamos el momento potencial de orden j,k y sustituimos los de orden inferior en función de los binomiales, obtenemos el siguiente repertorio (**) de momentos potenciales dobles absolutos, respecto de un origen arbitrario en función de los binomiales.

$$\begin{aligned} M_{00} &= B_{00} \\ M_{10} &= B_{10} \\ M_{01} &= B_{01} \\ M_{20} &= 2 B_{20} + B_{10} \\ M_{11} &= B_{11} \\ M_{02} &= 2 B_{02} + B_{01} \\ M_{30} &= 6 B_{30} + 6 B_{20} + B_{10} \\ M_{21} &= 2 B_{21} + B_{11} \\ M_{12} &= 2 B_{12} + B_{11} \\ M_{03} &= 6 B_{03} + 6 B_{02} + B_{01} \\ M_{40} &= 24 B_{40} + 36 B_{30} + 14 B_{20} + B_{10} \\ M_{31} &= 6 B_{31} + 6 B_{21} + B_{11} \\ M_{22} &= 4 B_{22} + 2 B_{21} + 2 B_{12} + B_{11} \\ M_{13} &= 6 B_{13} + 6 B_{12} + B_{11} \\ M_{04} &= 24 B_{04} + 36 B_{03} + 14 B_{02} + B_{01} \end{aligned} \quad [18]$$

(*) En este trabajo utilizaremos la siguiente notación:

Para las frecuencias:

η_{ij} frecuencias experimentales absolutas

z'_{ij} frecuencias experimentales relativas

z_{ij} frecuencias teóricas relativas.

Para los atributos:

\mathcal{X}, \mathcal{Y} cuando están referidos al origen natural

X, Y cuando están referidos a un origen arbitrario

x, y cuando están referidos a la media aritmética.

(**) Los repertorios que figuran en este trabajo, comprenden solamente, las expresiones de los momentos que intervienen en el cálculo.

A los momentos absolutos del repertorio [18] se los transforma en relativos dividiéndolos por la población N, pues por definición es:

$$m_{j,k} = \frac{M_{j,k}}{N} \quad [19]$$

Decimos que un momento doble está centrado cuando su cálculo se realiza después que el origen de los atributos ha sido trasladado a su valor medio aritmético.

Generalmente, la media aritmética de varias cantidades es un número decimal y como con ello se dificulta la operatoria, nunca, en la práctica, se calculan los momentos centrados directamente pues, conocidos los momentos brutos dobles relativos, es fácil centrarlos aplicando la fórmula general del centraje que expresa un momento bruto en función de los centrados y es:

$$m_{j,k} = \sum_m \sum_n z'_{m,n} (x_m + \bar{X}_a)^j (y_n + \bar{Y}_a)^k (*) \quad [20]$$

Desarrollando la doble sumatoria para los distintos valores que toman j y k , despejando el momento centrado de mayor orden y expresando los de orden inferior en función de los $m_{j,k}$, se tiene:

$$\begin{aligned} \mu_{00} &= 1 \\ \mu_{10} &= 0 \\ \mu_{01} &= 0 \\ \mu_{20} &= m_{20} - m_{10}^2 \\ \mu_{11} &= m_{11} - m_{10} m_{01} \\ \mu_{02} &= m_{02} - m_{01}^2 \\ \mu_{30} &= m_{30} - 3 m_{20} m_{10} + 2 m_{10}^3 \\ \mu_{21} &= m_{21} - m_{20} m_{01} - 2 m_{10} m_{11} + 2 m_{10}^2 m_{01} \\ \mu_{12} &= m_{12} - m_{02} m_{10} - 2 m_{01} m_{11} + 2 m_{01}^2 m_{10} \\ \mu_{03} &= m_{03} - 3 m_{02} m_{01} + 2 m_{01}^3 \quad [21] \\ \mu_{40} &= m_{40} - 4 m_{30} m_{10} + 6 m_{20} m_{10}^2 + 3 m_{10}^4 \\ \mu_{31} &= m_{31} - m_{30} m_{01} - 3 m_{20} m_{01}^2 - 3 m_{21} m_{10} + 3 m_{20} m_{10} m_{01} + \\ &\quad + 3 m_{10}^2 m_{11} \\ \mu_{22} &= m_{22} - 2 m_{21} m_{01} + m_{20} m_{01}^2 + 4 m_{10} m_{01} m_{11} - 3 m_{10}^2 m_{01}^2 - \\ &\quad - 2 m_{10} m_{12} + m_{10}^2 m_{02} \\ \mu_{13} &= m_{13} - m_{03} m_{10} - 3 m_{01}^3 m_{10} - 3 m_{12} m_{01} + 3 m_{02} m_{01} m_{10} + \\ &\quad + 3 m_{01}^2 m_{11} \\ \mu_{04} &= m_{04} - 4 m_{03} m_{01} + 6 m_{02} m_{01}^2 - 3 m_{01}^4 \end{aligned}$$

(*) Por \bar{X}_a e \bar{Y}_a designamos las medias aritméticas de los atributos X e Y , que es como los simbolizamos cuando están referidos a un origen arbitrario. (v. BULIA CLOTILDE A., loc. cit. (8) § 2).

Finalmente, hay que corregir estos momentos, aplicándose, para ello, la fórmula deducida extendiendo el método de Sheppard al caso de dos variables ⁽¹²⁾ la que expresa un momento centrado en función de los corregidos

$$\mu_{j,k} = \sum_{m=0}^{B\left(\frac{j}{2}\right)} \sum_{n=0}^{B\left(\frac{k}{2}\right)} \frac{\binom{j}{2m} \binom{k}{2n} \omega^{2m} \lambda^{2n}}{(2m+1)(2n+1) 2^{2(m+n)}} \mu'_{j-2m, k-2n} \quad [22]$$

Despejando, en el segundo miembro, el momento corregido de mayor orden, dando valores a j y a k , y expresando los momentos corregidos de menor orden en función de los centrados, se obtiene, el siguiente repertorio (*):

$$\begin{aligned} \mu'_{00} &= \mu_{00} \\ \mu'_{10} &= \mu_{10} \\ \mu'_{01} &= \mu_{01} \\ \mu'_{20} &= \mu_{20} - \frac{1}{12} \\ \mu'_{11} &= \mu_{11} \\ \mu'_{02} &= \mu_{02} - \frac{1}{12} \\ \mu'_{30} &= \mu_{30} \\ \mu'_{21} &= \mu_{21} \\ \mu'_{12} &= \mu_{12} \\ \mu'_{03} &= \mu_{03} \\ \mu'_{40} &= \mu_{40} - \frac{1}{2} \mu_{20} + \frac{7}{240} \\ \mu'_{31} &= \mu_{31} - \frac{1}{4} \mu_{11} \\ \mu'_{22} &= \mu_{22} - \frac{1}{12} \mu_{20} - \frac{1}{12} \mu_{02} + \frac{1}{144} \\ \mu'_{13} &= \mu_{13} - \frac{1}{4} \mu_{22} \\ \mu'_{04} &= \mu_{04} - \frac{1}{2} \mu_{02} + \frac{7}{240} \end{aligned} \quad [23]$$

(12) BULLA, CLOTILDE A., *Loc. cit.* (8).

(*) Estas fórmulas son las que resultan trabajando en una superficie de frecuencias, cuando, para el cálculo de sus momentos dobles, suponemos cada una

Reemplazando estos valores en [2], [3] y [10], simplificando y sustituyendo luego por las expresiones [11], [12], [13], [14], [15], podemos escribir la fórmula [1] así:

$$f(xy) \sim \varphi(x) \varphi(y) [1 + Axy + BxT_2(y) + CyT_2(x) + D T_2(x) T_2(y) + ExT_3(y) + FyT_3(x)] \quad [24]$$

donde es:

$$A = \frac{r}{\sigma_x \sigma_y} \quad [25] \quad (r = q_{11})$$

$$B = \frac{q_{12} - r \sqrt{\beta_{01}}}{\sigma_x \sigma_y^2 (\beta_{02} - \beta_{01} - 1)} \quad [26]$$

$$C = \frac{q_{21} - r \sqrt{\beta_{10}}}{\sigma_x^2 \sigma_y (\beta_{20} - \beta_{10} - 1)} \quad [27]$$

$$D = \frac{q_{22} - q_{21} \sqrt{\beta_{01}} - q_{12} \sqrt{\beta_{10}} + r \sqrt{\beta_{10} \beta_{01}} - 1}{\sigma_x^2 \sigma_y^2 (\beta_{20} - \beta_{10} - 1) (\beta_{02} - \beta_{01} - 1)} \quad [28]$$

$$E = \frac{r [\sqrt{\beta_{01}} (q_{05} - \sqrt{\beta_{01}}) - \beta_{02} (\beta_{02} - 1)] - q_{12} [q_{05} - \sqrt{\beta_{01}} (1 + \beta_{02})] + q_{13} [\beta_{02} - \beta_{01} - 1]}{\sigma_x \sigma_y^3 \{q_{00} (\beta_{02} - \beta_{01} - 1) - q_{05} [q_{05} - \beta_{01} (1 + \beta_{02})] + q_{04} [\sqrt{\beta_{01}} (q_{05} - \sqrt{\beta_{01}}) - \beta_{02} (\beta_{02} - 1)] + q_{03} [\sqrt{\beta_{01}} (2 \beta_{02} - \beta_{01}) - q_{05}\}\}} \quad [29]$$

$$F = \frac{r [\sqrt{\beta_{10}} (q_{50} - \sqrt{\beta_{10}}) - \beta_{20} (\beta_{20} - 1)] - q_{21} [q_{50} - \sqrt{\beta_{10}} (1 + \beta_{20})] + q_{31} [\beta_{20} - \beta_{10} - 1]}{\sigma_x^3 \sigma_y \{q_{00} (\beta_{20} - \beta_{10} - 1) - q_{50} [q_{50} - \beta_{10} (1 + \beta_{20})] + q_{40} [\sqrt{\beta_{10}} (q_{50} - \sqrt{\beta_{10}}) - \beta_{20} (\beta_{20} - 1)] + q_{30} [\sqrt{\beta_{10}} (2 \beta_{20} - \beta_{10}) - q_{50}\}\}} \quad [30]$$

$$T_2(x) = x^2 - \sigma_x \sqrt{\beta_{10}} x - \sigma_x^2 \quad [31]$$

de dichas frecuencias equivalentes al volumen de un prisma rectangular, los lados de cuya base se igualan a la unidad.

Como ya se dijo, los momentos que tienen algún cero en los subíndices, coinciden con los momentos simples de las respectivas marginales y resultan cuando se considera como curva de frecuencias al polígono de rectángulos, o sea cuando para el cálculo de los momentos suponemos las frecuencias acumuladas en el centro del intervalo, cuya amplitud se iguala a la unidad.

Otro sería el resultado, si, en este caso, tomásemos como curva de frecuencias el polígono de trapezios (**).

(**) RISSER, R., et TRAYNARD, C. E. *Les principes de la Statistique Mathématique*, pág. 37, París, 1933.

$$T_3(x) = x^3 - \sigma_x \frac{q_{50} - \sqrt{\beta_{10}}(1 - \beta_{20})}{\beta_{20} - \beta_{10} - 1} x^2 + \\ + \sigma_x^2 \frac{\sqrt{\beta_{10}}[q_{50} - \sqrt{\beta_{10}}] - \beta_{20}(\beta_{20} - 1)}{\beta_{20} - \beta_{10} - 1} x - \sigma_x^3 \frac{\sqrt{\beta_{10}}(2\beta_{20} - \beta_{10}) - q_{50}}{\beta_{20} - \beta_{10} - 1} [32]$$

$$T_2(y) = y^2 - \sigma_y \sqrt{\beta_{01}} y - \sigma_y^2 y [33]$$

$$T_3(y) = y^3 - \sigma_y \frac{q_{05} - \sqrt{\beta_{01}}(1 - \beta_{02})}{\beta_{02} - \beta_{01} - 1} y^2 + \\ + \sigma_y^2 \frac{\sqrt{\beta_{01}}[q_{05} - \sqrt{\beta_{01}}] - \beta_{02}(\beta_{02} - 1)}{\beta_{02} - \beta_{01} - 1} y - \sigma_y^3 \frac{\sqrt{\beta_{01}}(2\beta_{02} - \beta_{01}) - q_{05}}{\beta_{02} - \beta_{01} - 1} [34]$$

Una vez hallados los valores numéricos de A, B, C, D, E , y F y los de las expresiones [31], [32], [33] y [34] se sustituyen en la fórmula [24]. Haciendo variar x e y en todo su campo de existencia obtenemos los valores teóricos que describen una superficie, también teórica, que se considera la ajustada de la experimental, tomada como base para estos cálculos.

Damos a continuación, además del coeficiente de relación de correlación, las expresiones analíticas de las funciones signaléticas: ecuaciones de las líneas de regresión, de sedasticidad, de simetría parcial (clítica) y de normalidad parcial (kúrtica).

6. Las ecuaciones de las líneas de regresión de y en x y de x en y son:

$$\bar{y}_x = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) y dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy}$$

$$\bar{x}_y = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) x dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx}$$

que, en virtud de las sustituciones a que antes hicimos referencia, pueden escribirse así:

$$\bar{y}_x = \sigma_y^2 [Ax + C T_2(x) + F T_3(x)] \quad [35]$$

$$\bar{x}_y = \sigma_x^2 [Ay + B T_2(y) + E T_3(y)] \quad [36]$$

7. Los coeficientes de relación de correlación, definidos según Karl Person, son:

$$\eta_{yx}^2 = 1 - \frac{S_{yx}^2}{\sigma_y^2}$$

$$\eta_{xy}^2 = 1 - \frac{S_{xy}^2}{\sigma_x^2}$$

donde por S_{yx}^2 y S_{xy}^2 se designan las dispersiones complejas cuadráticas respecto de las líneas de regresión, definidas así:

$$S_{yx}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) [y - \bar{y}_x]^2 dx dy = \sigma_y^2 - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) (\bar{y}_x)^2 dx$$

$$S_{xy}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) [x - \bar{x}_y]^2 dx dy = \sigma_x^2 - \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho(y) (\bar{x}_y)^2 dy$$

Resolviendo la integral simple y sustituyendo según las fórmulas [11], [12], [13], [14] y [15] podemos escribir los coeficientes de relación de correlación así:

$$\eta_{yx}^2 = \sigma_y^2 \sigma_x^2 \left\{ A^2 + \sigma_x^2 (\beta_{20} - \beta_{10} - 1) C^2 + \right. \\ \left. + \sigma_x^4 \frac{q_{00}(\beta_{20} - \beta_{10} - 1) - q_{50}[q_{50} - \sqrt{\beta_{10}}(\beta_{20} + 1) + q_{40}[\sqrt{\beta_{10}}(q_{50} - \sqrt{\beta_{10}})] - q_{30}[\sqrt{\beta_{10}}(2\beta_{20} - \beta_{10}) - q_{50}]}{(\beta_{20} - \beta_{10} - 1)} F^2 \right\} \quad [37]$$

$$\eta_{xy}^2 = \sigma_x^2 \sigma_y^2 \left\{ A^2 + \sigma_y^2 (\beta_{02} - \beta_{01} - 1) B^2 + \right. \\ \left. + \sigma_y^4 \frac{q_{00}(\beta_{02} - \beta_{01} - 1) - q_{05}[q_{05} - \sqrt{\beta_{01}}(\beta_{02} + 1) + q_{04}[\sqrt{\beta_{01}}(q_{05} - \sqrt{\beta_{01}})] - q_{03}[\sqrt{\beta_{01}}(2\beta_{02} - \beta_{01}) - q_{05}]}{\beta_{02} - \beta_{01} - 1} E^2 \right\} \quad [38]$$

8. Las ecuaciones sedásticas de y en x y de x en y son los desvíos standard con respecto a la media de las funciones ligadas (*) y se definen así:

$$\sigma_{y_x}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) [y - \bar{y}_x]^2 dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy}$$

$$\sigma_{x_y}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) [x - \bar{x}_y]^2 dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx}$$

Operando y sustituyendo como en el caso anterior, resulta:

$$\sigma_{y_x}^2 = \mu'_{02} + \bar{y}_x \frac{\mu'_{03}}{\mu'_{02}} - (\bar{y}_x)^2 + [Bx + D T_2(x)] \left[\mu'_{04} - \frac{\mu'^2_{03}}{\mu'_{02}} - \mu'^2_{02} \right] \quad [39]$$

$$\sigma_{x_y}^2 = \mu'_{20} + \bar{x}_y \frac{\mu'_{30}}{\mu'_{20}} - (\bar{x}_y)^2 + [Cy + D T_2(y)] \left[\mu'_{40} - \frac{\mu'^2_{30}}{\mu'_{20}} - \mu'^2_{20} \right] \quad [40]$$

9. Las ecuaciones clíticas (de simetría parcial) son las siguientes:

$$\sqrt{\beta_1(y)_x} = \frac{\mu'_3(y)_x}{\mu'^{3/2}_{2x}(y)_x}$$

y

$$\sqrt{\beta_1(x)_y} = \frac{\mu'_3(x)_y}{\mu'^{3/2}_{2y}(x)_y}$$

siendo

$$\mu'_k(y)_x = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) [y_x - \bar{y}_x]^k dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy}$$

$$\mu'_j(x)_y = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) [x_y - \bar{x}_y]^j dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx}$$

(*) Se llaman funciones ligadas a las distribuciones de los atributos y o de los atributos x que quedan cuando se ha fijado una x o una y , es decir, a las funciones que definen las curvas resultantes de seccionar la superficie con planos paralelos al xy o al xz respectivamente.

Operando y sustituyendo, como en los casos anteriores, resulta:

$$\sqrt{\beta_1(y)_x} = \frac{\mu'_{03} + \frac{\bar{y}_x}{\mu'_{02}} [\mu'_{04} - 3\mu'^2_{02} - 3\mu'_{03}\bar{y}_x + 2\mu'_{02}(\bar{y}_x)^2] + [Bx + DT_2(x)] \left[\mu'_{05} - \frac{\mu'_{04}\mu'_{03}}{\mu'_{02}} \mu'_{03}\mu'_{02} - 3(\mu'_{04}\mu'_{02} - \mu'^2_{03} - \mu'^3_{02}) \cdot \frac{\bar{y}_x}{\mu'_{02}} \right] + Ex \frac{\Delta_{04}}{\Delta_{03}}}{\left\{ \mu'_{02} + \bar{y}_x \frac{\mu'_{03}}{\mu'_{02}} - (\bar{y}_x)^2 + [Bx + DT_2(x)] \left[\mu'_{04} - \frac{\mu'^2_{03}}{\mu'_{02}} - \mu'^2_{02} \right] \right\}^{3/2}}$$

$$\sqrt{\beta_1(x)_y} = \frac{\mu'_{30} + \frac{\bar{x}_y}{\mu'_{20}} [\mu'_{40} - 3\mu'^2_{20} - 3\mu'_{30}\bar{x}_y - 2\mu'_{20}(\bar{x}_y)^2] + [Cy + DT_2(y)] \left[\mu'_{50} - \frac{\mu'_{40}\mu'_{30}}{\mu'_{20}} - \mu'_{30}\mu'_{20} - 3(\mu'_{40}\mu'_{20} - \mu'^2_{30} - \mu'^3_{20}) \cdot \frac{\bar{x}_y}{\mu'_{20}} \right] + Fy \frac{\Delta_{40}}{\Delta_{30}}}{\left\{ \mu'_{20} + \bar{x}_y \frac{\mu'_{30}}{\mu'_{20}} - (\bar{x}_y)^2 + [Cy + DT_2(y)] \left[\mu'_{40} - \frac{\mu'^2_{10}}{\mu'_{20}} - \mu'^2_{20} \right] \right\}^{3/2}}$$

$\Delta_{j,0}$ y $\Delta_{0,k}$ son los menores complementarios de x^j e y^k en los determinantes [2] y [3], respectivamente.

10. Las ecuaciones kúrticas (de normalidad parcial) son las siguientes:

$$\beta_2(y)_x - 3 = \frac{\mu'_4(y)_x}{\mu'^2_2(y)_x} - 3$$

$$\beta_2(x)_y - 3 = \frac{\mu'_4(x)_y}{\mu'^2_2(x)_y} - 3$$

Operando y sustituyendo, como en los casos anteriores, resulta:

$$\beta_2(y)_x - 3 = \frac{\mu'_{04} + \bar{y}_x \left(\frac{\mu'_{05} - 4\mu'_{03}}{\mu'_{02}} \right) + (\bar{y}_x)^2 \left(6\mu'_{02} - \frac{4\mu'_{04}}{\mu'_{02}} \right) + 6(\bar{y}_x)^3 \frac{\mu'_{03}}{\mu'_{02}} - 3(\bar{y}_x)^4 + [Bx + DT_2(x)] \times \\ \times \left[\mu'_{06} - \mu'_{05} \frac{\mu'_{03}}{\mu'_{02}} - \mu'_{04} \mu'_{02} - 4 \left(\mu'_{05} - \mu'_{04} \frac{\mu'_{03}}{\mu'_{02}} - \mu'_{03} \mu'_{02} \right) \bar{y}_x + 6 \left(\mu'_{04} - \frac{\mu'^2_{03}}{\mu'_{02}} - \mu'^2_{02} \right) (\bar{y}_x)^2 \right] + \\ + Ex \left[\mu'_{07} - \frac{\mu'_{06}(\mu'_{02}\mu'_{05} - \mu'^2_{02}\mu'_{03} - \mu'_{03}\mu'_{04}) + \mu'_{05}(\mu'_{03}\mu'_{05} + \mu'^2_{02}\mu'_{04} - \mu'^2_{03}\mu'_{02} - \mu'^2_{04})}{\mu'_{02}\mu'_{04} - \mu'^3_{02} - \mu'^2_{03}} - 4 \frac{\Delta_{04}}{\Delta_{03}} \bar{y}_x \right] - 3 \\ \beta_2(y)_x - 3 = \frac{\left[\mu'_{02} + \bar{y}_x \frac{\mu'_{03}}{\mu'_{02}} - (\bar{y}_x)^2 + [Bx + DT_2(x)] \left(\mu'_{04} - \frac{\mu'^2_{03}}{\mu'_{02}} - \mu'^2_{02} \right) \right]^2}{\mu'_{02} + \bar{y}_x \frac{\mu'_{03}}{\mu'_{02}} - (\bar{y}_x)^2 + [Bx + DT_2(x)] \left(\mu'_{04} - \frac{\mu'^2_{03}}{\mu'_{02}} - \mu'^2_{02} \right)} - 3$$

$$\beta_2(x)_y - 3 = \frac{\mu'_{40} + \bar{x}_y \left(\frac{\mu'_{50} - 4\mu'_{30}}{\mu'_{20}} \right) + (\bar{x}_y)^2 \left(6\mu'_{20} - \frac{4\mu'_{40}}{\mu'_{20}} \right) + 6(\bar{x}_y)^3 \frac{\mu'_{30}}{\mu'_{20}} - 3(\bar{x}_y)^4 + [Cy + DT_2(y)] \times \\ \times \left[\mu'_{60} - \mu'_{50} \frac{\mu'_{30}}{\mu'_{20}} - \mu'_{40} \mu'_{20} - 4 \left(\mu'_{50} - \mu'_{40} \frac{\mu'_{30}}{\mu'_{20}} - \mu'_{30} \mu'_{20} \right) \bar{x}_y + 6 \left(\mu'_{40} - \frac{\mu'^2_{30}}{\mu'_{20}} - \mu'^2_{20} \right) (\bar{x}_y)^2 \right] + \\ + Fy \left[\mu'_{70} - \frac{\mu_{60}(\mu'_{20}\mu'_{50} - \mu'^2_{20}\mu'_{30} - \mu'_{30}\mu'_{40}) + \mu'_{50}(\mu'_{50}\mu'_{30} + \mu'^2_{20}\mu'_{40} - \mu'^2_{30}\mu'_{20} - \mu'^2_{40})}{\mu'_{20}\mu'_{40} - \mu'^3_{20} - \mu'^2_{30}} - 4 \frac{\Delta_{40}}{\Delta_{30}} \bar{x}_y \right] - 3 \\ \beta_2(x)_y - 3 = \frac{\left[\mu'_{20} + \bar{x}_y \frac{\mu'_{30}}{\mu'_{20}} - (\bar{x}_y)^2 + [Cy + DT_2(y)] \left(\mu'_{40} - \frac{\mu'^2_{30}}{\mu'_{20}} - \mu'^2_{20} \right) \right]^2}{\mu'_{20} + \bar{x}_y \frac{\mu'_{30}}{\mu'_{20}} - (\bar{x}_y)^2 + [Cy + DT_2(y)] \left(\mu'_{40} - \frac{\mu'^2_{30}}{\mu'_{20}} - \mu'^2_{20} \right)}$$

§ 2. — APLICACIÓN DEL MÉTODO

1. Como antes se dijo, vamos a hacer aplicación del método de las funciones marginales a una superficie de frecuencias experimentales ya estudiada por Karl Pearson, con su método de las 15 constantes ⁽¹³⁾. A dicha superficie la forman los datos correspondientes a las alturas barométricas observadas, contemporáneamente, en Southampton y Lauderdale, que figuran en la Tabla I.

Para ajustar por el método de Pearson las marginales que, en la tabla citada, figuran en la columna y fila encabezadas por la palabra « Totales », necesitamos conocer los cuatro primeros momentos de cada una de ellas, pues es, en función de estos momentos, que se determina el criterio K ⁽¹⁴⁾ que permite fijar el tipo de curva de ajuste del repertorio de Pearson, que corresponde emplear.

2. Consideraremos primero la marginal de las \mathcal{X} .

El criterio K , que debemos determinar se define así:

$$K = \frac{\beta_1 (\beta_2 + 3)^2}{4 (2 \beta_2 - 3 \beta_1 - 6) (4 \beta_2 - 3 \beta_1)} \quad [41]$$

y es necesario en virtud de las fórmulas [12], [13], [14] y [15], el conocimiento de los momentos centrados y corregidos μ'_{j0} cuya expresión dimos en [4].

Por tratarse de la marginal de las \mathcal{X} , deben sustituirse en esta fórmula [41], en lugar de β_1 y β_2 los que nosotros hemos simbolizado por β_{10} y β_{20} .

De los datos experimentales obtenemos los momentos brutos absolutos, con origen arbitrario $M_{j,o}$ que, aplicando la fórmula [19] y las de los repertorios [21] y [23], transformamos en momentos relativos, centrados y corregidos sucesivamente.

En este trabajo hemos procedido al cálculo directo de los momentos potenciales $M_{j,o}$ en vez de haber calculado primero los binomiales como explicáramos en nuestra publicación citada ⁽¹⁵⁾.

El proceso seguido para obtener los momentos potenciales brutos con origen arbitrario $M_{j,o}$ es el siguiente.

Dispusimos, en la primera columna de la Tabla II, los valores que toma la variable \mathcal{X} . Tomando como nuevo origen el que co-

⁽¹³⁾ PEARSON, KARL. — *The Fifteen Constant Bivariate Frequency Surface*. Rev. Biometrika, Vol. XVII, Parts. III and IV, December 1926, pág. 291.

⁽¹⁴⁾ ELDERTON W. PALIN. — *Loc. cit.* ^(a) pág. 53.

⁽¹⁵⁾ BULA, CLOTILDE A. — *Loc. cit.* ^(a).

$\rightarrow + \mathcal{X}$

TABLA I. — Alturas barométricas

Southampton. Altura

 $+ \mathcal{Y} \leftarrow Landale.$ Alturas en pulgadas. (Valores Centrales).

	31.0	30.9	30.8	30.7	30.6	30.5	30.4	30.3	30.2	30.1	30.0	29.9	29.8	29.7	29.6	29.5	29.4	29.3	29.2	29.1	29.0	28.9	28.8	28.7	28.6	28.5	28.4	28.3	28.2	28.1	28.0	27.9	Totales		
30.8	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—					
30.7	—	1	—	—	4.5	4	3	1.5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—						
30.6	—	1	3	7.75	9.75	8.5	3.5	2.25	0.25	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—						
30.5	—	1	0.5	6.25	9.25	17	15.75	6.5	5.5	1.75	0.5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—						
30.4	—	—	0.5	5.75	11.75	22	24.75	39.75	19.75	12.25	4.5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—						
30.3	—	—	—	5.25	11.5	15.5	24.75	55	50	25.5	6	5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—						
30.2	—	—	—	—	1	4.25	21.75	24	38.5	55.5	66	32	12.5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—					
30.1	—	—	—	—	—	2	10.75	21.75	23.75	55.75	55.5	46.75	26	27.5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—				
30.0	—	—	—	—	—	—	—	5	11	26.25	48.25	58	57	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—			
29.9	—	—	—	—	—	—	—	4	4	19	31.75	54.25	66.25	48	48	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—		
29.8	—	—	—	—	—	—	—	—	7	13	24.25	41.75	59.75	48	48	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—		
29.7	—	—	—	—	—	—	—	—	2	8	12	36.5	41.25	47	47	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—		
29.6	—	—	—	—	—	—	—	—	0.5	4	8.5	16	26.5	47	47	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—		
29.5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	3	13	18	31	48	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
29.4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.5	5	13.5	17.25	24	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—		
29.3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	6	13.25	17	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
29.2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	5.25	5.25	5.25	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
29.1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	0.25	2.75	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
29.0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
28.9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
28.8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
28.7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
28.6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
28.5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
28.4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
28.3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
28.2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
28.1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
28.0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
27.9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	1	4	4	30.5	52.5	107.5	140.5	237	315	395.5	382.5	339.5	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—		

MOMENTOS: Origen arbitrarioCentrados

$$\begin{aligned}
 m_{0.0} &= 1 & \mu_{0.0} &= 1 \\
 m_{0.1} &= 4,488360 & \mu_{0.1} &= 0 \\
 m_{0.2} &= 35,691650 & \mu_{0.2} &= 15,546239 \\
 m_{0.3} &= 270,939083 & \mu_{0.3} &= -28,812394 \\
 m_{0.4} &= 2539,328200 & \mu_{0.4} &= 771,660280
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{1.0} &= 1,839151 & \mu_{1.0} &= 0 \\
 m_{2.0} &= 14,028747 & \mu_{2.0} &= 10,646271 \\
 m_{3.0} &= 50,759069 & \mu_{3.0} &= -14,202115 \\
 m_{4.0} &= 531,334702 & \mu_{4.0} &= 408,308295
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{1.1} &= 18,226214 & \mu_{1.1} &= 9,971435 \\
 m_{1.2} &= 139,554585 & \mu_{1.2} &= -15,598609 \\
 m_{2.2} &= 901,577002 & \mu_{2.2} &= 401,502951 \\
 m_{1.3} &= 1393,925907 & \mu_{1.3} &= 503,028761 \\
 m_{2.3} &= 87,724675 & \mu_{2.3} &= 11,010307
 \end{aligned}$$

temporáneas a Southampton y Laudale
pulgadas. (Valores centrales)

	29.7	29.6	29.5	29.4	29.3	29.2	29.1	29.0	28.9	28.8	28.7	28.6	28.5	Totales
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	14
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	36
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	64
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	141
0.25	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	200
2.75	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	263
3.25	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	260.5
10	1.5	1.5	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	277.5
11.5	8.75	1	0.5	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	283.5
18	17.5	6.5	3.5	0.5	—	1	—	—	—	—	—	—	—	277.5
19.5	16	7.5	5	5	2.5	0.5	—	—	—	—	—	—	—	245
25.5	23.75	12.5	8	3	1	3	—	—	—	—	—	—	—	212
39.5	20	10.5	8	2.5	—	0.5	—	—	—	—	—	—	—	192
23.75	18	13.5	7.25	5.25	3	0.5	1	1	1	—	—	—	—	135
18.5	11.5	10.5	7.75	5.75	1	2	1	1	—	—	—	—	—	97.5
14	13	8	7	3	2	—	1	—	—	—	1	—	—	67.5
10.5	10	12.5	6	9.5	2	—	1	1	—	—	—	—	—	63
3	5.75	3.75	6.5	6	4.5	2.5	1.5	—	—	—	—	—	—	38.5
1	2.75	5.75	2.5	4.5	4	—	2	1	1	—	—	—	—	24.5
—	1	2.5	2	1.5	0.5	0.5	—	3	—	—	—	—	—	11
—	0.5	1.5	—	1.5	1	3	—	—	—	—	—	—	—	7.5
—	0.5	1	—	1	—	1	—	—	—	—	—	—	—	4.5
—	—	—	—	—	—	0.5	—	—	—	1	—	—	1	2.5
—	—	—	—	—	—	0.5	—	—	—	—	—	—	—	0.5
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	1
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1
201	150.5	98.5	65	50	23.5	15.5	7.5	7	3	—	1	2	—	2922

Corregidos

$$\begin{aligned}\mu'_{0.0} &= 1 \\ \mu'_{0.1} &= 0 \\ \mu'_{0.2} &= 15,462906 \\ \mu'_{0.3} &= -28,812394 \\ \mu'_{0.4} &= 763,916326 \\ \mu'_{0.5} &= 4387,205409 \\ \mu'_{0.6} &= 73122,976365 \\ \mu'_{1.0} &= 0 \\ \mu'_{2.0} &= 10,562938 \\ \mu'_{3.0} &= -14,202115 \\ \mu'_{4.0} &= 403,014325 \\ \mu'_{5.0} &= -1922,684241 \\ \mu'_{6.0} &= 34444,739769 \\ \mu'_{1.1} &= 9,971435 \\ \mu'_{1.2} &= -15,598609 \\ \mu'_{2.2} &= 399,327186 \\ \mu'_{1.3} &= 500,535902 \\ \mu'_{1.4} &= -11,919397\end{aligned}$$

Reducidos

$$\begin{aligned}q_{0.2} &= 1 \\ q_{0.3} &= -0,473852 \\ q_{0.4} &= 3,194947 \\ q_{0.5} &= -4,666167 \\ q_{0.6} &= 19,777920 \\ q_{2.0} &= 1 \\ q_{3.0} &= -0,413691 \\ q_{4.0} &= 3,612028 \\ q_{5.0} &= -5,302081 \\ q_{6.0} &= 29,225975 \\ q_{1.1} &= 0,780225 \\ q_{1.2} &= -0,310386 \\ q_{2.2} &= 2,444855 \\ q_{1.3} &= 2,532831 \\ q_{0.1} &= 0,286962\end{aligned}$$

rresponde a $\mathcal{X} = 29,8$, lo que implica el siguiente cambio de variable:

$$x = \mathcal{X} - 29,8$$

obtuvimos los valores de la segunda columna. En la tercera figuran los valores de la marginal de las \mathcal{X} de la Tabla I. En las columnas cuarta, quinta, sexta y séptima figuran los productos de los valores de la tercer columna por las potencias sucesivas de la variable hasta la de cuarto grado.

Las sumas de estas columnas nos dan los momentos $M_{j,o}$. Dividiéndolos por la población $N = 2922$, obtenemos los momentos relativos $m_{j,o}$. Aplicando las fórmulas del repertorio [21] obtenemos los centrados $\mu_{j,o}$ y sometidos éstos, a las operaciones indicadas en las fórmulas del repertorio [23], tenemos los corregidos $\mu'_{j,o}$ que son los que necesitamos para reemplazar en la fórmula [41] ya que, como vimos, era:

$$\beta_{10} = \frac{\mu'^2_{30}}{\mu'^3_{20}}$$

$$\beta_{20} = \frac{\mu'_{40}}{\mu'^2_{20}}.$$

Sustituyendo pues en [41] estos valores, cuyas expresiones numéricas figuran en la misma página que la Tabla II(*) obtuvimos el siguiente resultado:

$$K = 0,188894.$$

Según la tabla de discriminación que trae Elderton (1^a), por ser

$$0 < K < 1$$

es decir positivo y menor que la unidad, corresponde ajustar esta marginal con una curva Tipo IV de Pearson.

(*) Puede observarse que la última columna de esta tabla la hemos destinado a las operaciones tendientes a efectuar el Control de CHARLIER (17) para constatar si los valores numéricos de los cuatro momentos calculados, han sido bien hallados. El cuadrito al margen de la Tabla indica que, efectivamente, están bien.

(1^a) ELDERTON W. PALIN.—*Loc. cit.* (a) pág. 46.

(17) CHARLIER, C. V. L.—*Grundzüge der Mathematische Statistik*, Lund, 1920. (Hay traducción española del Dr. José González Galé. Bs. Aires, 1936).

TABLA II. — Alturas barométricas en Southampton

X	X	f	Xf	X ² f	X ³ f	X ⁴ f	(X+1) ⁴ f
31.0	12	1	12	144	1728	20736	28561
30.9	11	4	44	484	5324	58564	82944
30.8	10	4	40	400	4000	40000	58564
30.7	9	30.5	274.5	2470.5	22234.5	200110.5	305000
30.6	8	52.5	420	3360	26880	215040	344452.5
30.5	7	107.5	752.5	5267.5	36872.5	258107.5	440320
30.4	6	140.5	843	5058	30348	182088	337340.5
30.3	5	237	1185	5925	29625	148125	307152
30.2	4	315	1260	5040	20160	80640	196875
30.1	3	395.5	1186.5	3559.5	10678.5	32035.5	101248
30.0	2	382.5	765	1530	3060	6120	30982.5
29.9	1	339.5	339.5	339.5	339.5	339.5	5432
29.8	0	288	7122	0	191250	0	288
29.7	-1	201	-201	201	-201	201	0
29.6	-2	150.5	-301	602	-1204	2408	150.5
29.5	-3	98.5	-295.5	886.5	-2659.5	7978.5	1576
29.4	-4	65	-260	1040	-4160	16640	5265
29.3	-5	50	-250	1250	-6250	31250	12800
29.2	-6	23.5	-141	846	-5076	30456	14687.5
29.1	-7	15.5	-108.5	759.5	-5316.5	37215.5	20088
29.0	-8	7.5	-60	480	-3840	30720	18007.5
28.9	-9	7	-63	567	-5103	45927	28672
28.8	-10	3	-30	300	-3000	30000	19683
28.7	-11	0	-0	0	-0	0	0
28.6	-12	1	-12	144	-1728	20736	14641
28.5	-13	2	-26	338	-4394	57122	41472
		2922	-1748		-42932		
			$\Sigma 5374$	$\Sigma 40992$	$\Sigma 148318$	$\Sigma 1552560$	$\Sigma 2416202$

Momentos brutos Momentos Centrados

$$\begin{aligned}
 m_{00} &= 1 & \mu_{00} &= 1 \\
 m_{10} &= 1.839151 & \mu_{10} &= 0 \\
 m_{20} &= 14.028747 & \mu_{20} &= 10.646271 \\
 m_{30} &= 50.759069 & \mu_{30} &= -14.202115 \\
 m_{40} &= 531.334702 & \mu_{40} &= 408.308295
 \end{aligned}$$

Momentos Corregidos

$$\begin{aligned}
 \mu'_{10} &= 0 \\
 \mu'_{20} &= 10.562938 \\
 \mu'_{30} &= -14.202115 \\
 \mu'_{40} &= 403.014326
 \end{aligned}$$

$$\sqrt{\mu'_{20}} = 3.250067 \quad \beta_{20} = 3.612027$$

$$\beta_{10} = 0.171140 \quad \sqrt{\beta_{10}} = -0.413691$$

$$K = 0.188894$$

$$K \left\{ \begin{array}{l} > 0 \\ < 1 \end{array} \right. \therefore \text{Tipo IV}$$

Con 104

$$\begin{aligned}
 X^4f &= 1.552.560 \\
 4 X^3f &= 593.272 \\
 6 X^2f &= 245.952 \\
 4 X f &= 21.496 \\
 f &= 2.922 \\
 & 2.416.202
 \end{aligned}$$

La ecuación del tipo IV de Pearson, que debemos aplicar es:

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x'^2}{a^2} \right)^{-m} e^{-v t g^{-1} \frac{x'}{a}} \quad (*) \quad [42]$$

cuyo origen está tomado en el punto $\frac{va}{2m-2}$ después de la media aritmética. y_0 está definido así:

$$y_0 = \frac{N}{a} \sqrt{\frac{r}{2\pi} \frac{e^{\frac{\cos^2 \Phi}{3r} - \frac{1}{12r} - \Phi v}}{(\cos \Phi)^{r+1}}} \quad [43]$$

siendo N la población.

En la fórmula [42] es:

$$v = \frac{r(r-2)\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{16(r-1)-\beta_1(r-2)^2}} \quad [44]$$

y

$$m = \frac{1}{2}(r+2) \quad [45]$$

El parámetro r que figura en las expresiones de v y m , tiene esta significación:

$$r = \frac{6(\beta_2 - \beta_1 - 1)}{2\beta_2 - 3\beta_1 - 6} \quad (**) \quad [46]$$

En la fórmula [43] las incógnitas son Φ y a ; se conoce la expresión de

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{v}{r} \quad [47]$$

de donde es fácil hallar el valor de Φ y los de $\cos \Phi$ y $\cos^2 \Phi$; finalmente es:

$$a = \sqrt{\frac{\mu'_2}{16} \sqrt{16(r-1)-\beta_1(r-2)^2}} \quad (***) \quad [48]$$

(*) La notación $\operatorname{tg}^{-1} \frac{x'}{a}$ significa $\operatorname{arctg} \frac{x'}{a}$

Designamos por x' a la variable de cálculo para este tipo de curva en que el origen está en el punto $\frac{va}{2m-2}$ después de la media aritmética, siguiendo a ELDERTON (v. ELDERTON, W. PALIN, *loc. cit.* (6), pág. 64).

(**) Recordemos nuevamente que β_1 y β_2 por tratarse de la marginal de las \mathcal{D} corresponden a los que nosotros hemos simbolizado por β_{10} y β_{20} .

(***) Vale la misma observación de la nota anterior, extendida aquí también para el μ'_2 que figura en esta expresión y corresponde a nuestro $\mu'_{2,0}$.

Con estos valores, una vez substituidos en la fórmula [42], estamos en condiciones de comenzar el ajustamiento de la marginal de las \mathcal{X} .

Veamos, en primer término, las nuevas variables con que nos obliga a operar el origen a que la expresión [42] está referida.

Al calcular los momentos $m_{j,o}$ transformamos la *escala natural* en otra llamada *escala con origen arbitrario* mediante el cambio de variable

$$X = (\mathcal{X} - 29,8) \cdot 10 \quad [49]$$

es decir, trasladamos el origen al punto que corresponde al valor 29,8 de la variable primitiva. Al centrar los momentos $m_{j,o}$ y tener los $\mu_{j,o}$ se efectuó un nuevo cambio de origen, pues siendo la media aritmética de la variable [49]

$$\bar{X}_a = 1,839151$$

al considerarla como origen resultó este nuevo cambio de variable:

$$x = X - \bar{X}_a$$

con lo que tuvimos la *escala con origen en la media aritmética*. Finalmente al ser el valor de x que se toma como origen para la *escala de cálculo*

$$\frac{va}{2m-2} = 6.254998$$

resulta que, con respecto a la *escala con origen en \bar{X}_a* , la nueva variable que hemos simbolizado por x' , queda definida por este otro cambio de variable

$$x' = x - 6,254998$$

Para que sea más fácil darse cuenta de estos sucesivos cambios de variable, a continuación, anotamos las cuatro escalas para algunos valores de la misma.

Escala natural \mathcal{X}	Escala con origen arbitrario X	Escala con origen en la $\bar{X}_a = 1,839151$ x	Escala de cálculo x'
30,7	9	7,160849 6,254998	0,905851 0
30,6	8	6,160849	— 0,094149
30,5	7	5,160849	— 1,094149
30,4	6	4,160849	— 2,094149
30,3	5	3,160849	— 3,094149
30,2	4	2,160849	— 4,094149
30,1	3	1,160849	— 5,094149
30,0	2	0,160849	— 6,094149
29,983915	1,839151	0	— 6,254998
29,9	1	— 0,839151	— 7,094149
29,8	0	— 1,839151	— 8,094149
29,7	— 1	— 2,839151	— 9,094149
29,6	— 2	— 3,839151	— 10,094149
29,5	— 3	— 4,839151	— 11,094149
29,4	— 4	— 5,839151	— 12,094149

Los valores de la última columna son los que deben tomarse como los correspondientes a la variable de cálculo.

Siendo la fórmula [42] una exponencial operamos con su logaritmo y resulta:

$$\lg y = \lg y_0 - m \lg \left(1 + \frac{x'^2}{a^2} \right) - v \operatorname{tg}^{-1} \frac{x'}{a} \lg e \quad [50]$$

A su vez, para calcular $\lg y_0$, debemos aplicar logaritmos a la expresión [43] lo cual nos da

$$\begin{aligned} \lg y_0 &= \lg N - \lg a + \frac{1}{2} \lg \left(\frac{r}{2\pi} \right) + \\ &+ \left(\frac{\cos^2 \Phi}{3r} - \frac{1}{12r} - \Phi v \right) \lg e - (r+1) \lg (\cos \Phi) \quad [51] \end{aligned}$$

Para que puedan seguirse mejor y más fácilmente los pasos del cálculo de $\lg y_0$, los detallamos en la tabla III, previa la obtención de los valores de v , r , $\operatorname{tg} \Phi$ y a por sustitución de los datos cono-

cidos en las fórmulas [44], [46], [47] y [48] respectivamente, resultando

$$v = 9,945420$$

$$r = 20,608811$$

$$\operatorname{tg} \Phi = 0,482581$$

$$a = 12,961551$$

De $\operatorname{tg} \Phi = 0,482581$ resulta

$$\Phi = 25^\circ 45' 40''$$

y convirtiendo los grados en medida circular obtenemos

$$\Phi = 0,449616$$

Conocidos estos valores de Φ , calculamos

$$\cos \Phi = 0,900617$$

$$\lg \cos \Phi = \overline{1,954539}$$

Con lo cual se tienen los valores de todos los parámetros que deben ser sustituidos en la [51], resultando

$$\lg y_0 = 1,655257$$

Nos falta calcular el valor de m para poder operar en la fórmula [50]. Sustituyendo en la [45] los valores conocidos tenemos que es:

$$m = 11,304406$$

Realizamos, como lo sugiere Elderton, las operaciones indicadas en [50], en una tabla que distinguimos por Tabla IV. En la última columna anotamos los antilogaritmos de los valores dados en la penúltima, con lo que tenemos los valores ajustados de la marginal de las \mathcal{X} que deseábamos hallar.

TABLA III

Cálculo de y_0

$$a = 12,961551$$

$$\lg a = 1,112657$$

$$r = 20,608811$$

$$\lg r = 1,314053$$

$$\pi = 3,141593$$

$$2\pi = 6,283186$$

$$\sqrt{2\pi} = 2,506628$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0,398942$$

$$\lg \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \overline{1},600910$$

$$\operatorname{tg} \Phi = 0,482581$$

$$\lg \operatorname{tg} \Phi = \overline{1},683571$$

$$\lg \cos \Phi = \overline{1},954539$$

$$\cos \Phi = 0,900617$$

$$\frac{\cos^2 \Phi}{3r} = \frac{0,811111}{61,826433} = 0,013119$$

$$\frac{-1}{12r} = \frac{-1}{12 \times 20,608811} = \frac{-1}{247,305732} = -0,004044$$

$$\Phi = \begin{cases} 25^\circ = 0,436332 \\ 45' = 0,013090 \\ 40'' = 0,000194 \end{cases}$$

$$\Phi = 0,449616$$

$$\lg e = 0,434295$$

$$-\Phi v = -(0,449616 \times 9,945420) = -4,471620$$

$$r + 1 = 21,608811$$

$$\operatorname{colog} (\cos \Phi)^{r+1} = -(r+1) \lg (\cos \Phi) =$$

$$= -21,608811 \times \overline{1},954539 = 0,982358$$

$$\lg 2922 = 3,465680$$

$$\operatorname{colog} a = \overline{2},887343$$

$$\frac{1}{2} \lg r = 0,657027$$

$$\lg \frac{1}{\sqrt{2 \pi}} = \overline{1},600910$$

$$\frac{\cos^2 \Phi}{3r} = 0,013119$$

$$-\frac{1}{12r} = -0,004044$$

$$-\Phi v = -4,471620$$

$$\left. \begin{array}{l} \lg_{10} e \times (-4,462545) \\ \hline -1,938061 \end{array} \right\} = \overline{2},061939$$

$$\operatorname{colog} (\cos \Phi)^{r+1} = 0,982358$$

$$\lg y_0 = 1,655257$$

Los valores empíricos y teóricos figuran en el gráfico nº 1 donde puede apreciarse la fidelidad del ajustamiento que se obtiene con el método de Pearson.

Aunque la curva Tipo IV de Pearson es asintótica en ambos sentidos, y, por tanto, está definida en intervalo infinito, para el cálculo lo hemos limitado, tomando como extremos del mismo los valores 31,4 y 27,7 que corresponden respectivamente a 7,905851 y -29,094149 de la Tabla IV cuando el origen se toma en el punto

$\frac{v a}{2m-2}$ después de la media aritmética, que es el que hemos considerado al valernos de la expresión [42].

Este mismo intervalo es el que tomaremos para el cálculo de la superficie.

(1) x'	(2) $\frac{x'}{a}$	(3) $1 + \frac{x'^2}{a^2}$	(4) $\lg \left(1 + \frac{x'^2}{a^2} \right)$	(5) $\lg \frac{x'}{a}$	(6) $\operatorname{tg}^{-1} \frac{x'}{a}$ en grados
7.905851	0.609946	1.372034	0.137365	1.785292	31° 22' 51"
6.905851	0.532795	1.283871	0.108521	1.726560	28° 2' 54"
5.905851	0.455644	1.207611	0.081927	1.658626	24° 29' 45"
4.905851	0.378493	1.143257	0.058144	1.578058	20° 43' 52"
3.905851	0.301341	1.090806	0.037747	1.479005	16° 46' 4"
2.905851	0.224190	1.050261	0.021297	1.350616	12° 38' 10"
1.905851	0.147039	1.021620	0.009289	1.167432	8° 21' 24"
0.905851	0.069888	1.004884	0.002116	2.844403	3° 59' 22"
— 0.094149	— 0.007264	1.000053	0.000023	3.861176	— 0° 24' 58"
— 1.094149	— 0.084415	1.007126	0.003084	2.926420	— 4° 49' 30"
— 2.094149	— 0.161566	1.026104	0.011192	1.208350	— 9° 10' 39"
— 3.094149	— 0.238718	1.056986	0.024069	1.377885	— 13° 25' 34"
— 4.094149	— 0.315869	1.099773	0.041303	1.499422	— 17° 31' 35"
— 5.094149	— 0.393020	1.154465	0.062381	1.594415	— 21° 27' 21"
— 6.094149	— 0.470171	1.221061	0.086737	1.672256	— 25° 10' 54"
— 7.094149	— 0.547323	1.299562	0.113797	1.738243	— 28° 41' 34"
— 8.094149	— 0.624474	1.389968	0.143005	1.795514	— 31° 59' 1"
— 9.094149	— 0.701625	1.492278	0.173850	1.846105	— 35° 3' 16"
— 10.094149	— 0.778776	1.606492	0.205879	1.891413	— 37° 54' 43"
— 11.094149	— 0.855928	1.732613	0.238701	1.932437	— 40° 33' 40"
— 12.094149	— 0.933079	1.870636	0.271989	1.969918	— 43° 1' 2"
— 13.094149	— 1.010230	2.020565	0.305473	0.004420	— 45° 17' 29"
— 14.094149	— 1.087381	2.182397	0.338933	0.036381	— 47° 23' 49"
— 15.094149	— 1.164533	2.356137	0.372201	0.066152	— 49° 20' 48"
— 16.094149	— 1.241684	2.541779	0.405137	0.094011	— 51° 9' 12"
— 17.094149	— 1.318835	2.739326	0.437644	0.120191	— 52° 49' 44"
— 18.094149	— 1.395986	2.948777	0.469642	0.144881	— 54° 23' 4"
— 19.094149	— 1.473138	3.170136	0.501078	0.168243	— 55° 49' 49"
— 20.094149	— 1.550289	3.403396	0.531913	0.190413	— 57° 10' 34"
— 21.094149	— 1.627440	3.648561	0.562122	0.211505	— 58° 25' 51"
— 22.094149	— 1.704591	3.905630	0.581691	0.231620	— 59° 36' 7"
— 23.094149	— 1.781743	4.174608	0.620615	0.250845	— 60° 41' 48"
— 24.094149	— 1.858894	4.455487	0.648898	0.269255	— 61° 43' 18"
— 25.094149	— 1.936045	4.748270	0.676536	0.286915	— 62° 40' 58"
— 26.094149	— 2.013196	5.052958	0.703545	0.303886	— 63° 35' 7"
— 27.094149	— 2.090348	5.369555	0.729937	0.320219	— 64° 26' 2"
— 28.094149	— 2.167499	5.698052	0.755726	0.335959	— 65° 14' 0"
— 29.094149	— 2.244650	6.038454	0.780926	0.351149	— 65° 59' 12"

IV

(7) $\operatorname{tg}^{-1} \frac{x'}{a}$ med. circular	(8) $\operatorname{col}(7) \cdot (-v \lg_{10} e)$	(9) $-m \cdot \operatorname{col}(4)$	(10) $\lg y_0 + \operatorname{col}(8) +$ $\operatorname{col}(9)$	(11) $\operatorname{antilog}(10) =$ $=\varphi_a(x') (*)$
0.547699	-2.365641	-1.552830	-2.263214	0.005
0.489536	-2.114422	-1.226765	-1.685930	0.021
0.427533	-1.846616	-0.926136	-1.117495	0.076
0.361826	-1.562812	-0.657283	-0.564838	0.272
0.292653	-1.264037	-0.426707	-0.035487	0.922
0.220542	-0.952573	-0.240750	+ 0.461934	2.897
0.145861	-0.630008	-0.105007	0.920242	8.322
0.069629	-0.300744	-0.024485	1.330028	21.381
-0.007263	0.031371	-0.000260	1.686368	48.570
-0.084211	0.363727	-0.034863	1.984121	96.410
-0.160178	0.691847	-0.126519	2.220585	166.182
-0.234330	1.012127	-0.272086	2.395298	248.484
-0.305893	1.321224	-0.466906	2.509575	323.279
-0.374475	1.617446	-0.705180	2.567523	369.429
-0.439503	1.898317	-0.980510	2.573064	374.168
-0.500783	2.163000	-1.286407	2.531850	340.291
-0.558219	2.411080	-1.616587	2.449750	281.676
-0.611816	2.642578	-1.965271	2.332564	215.062
-0.661688	2.857987	-2.327340	2.185904	153.424
-0.707925	3.057695	-2.698373	2.014579	103.414
-0.750792	3.242848	-3.074674	1.823431	66.599
-0.790484	3.414287	-3.453191	1.616353	41.338
-0.827233	3.573015	-3.831436	1.396836	24.936
-0.861262	3.719994	-4.207511	1.167740	14.714
-0.892794	3.856188	-4.579833	0.931612	8.543
-0.922038	3.982500	-4.947305	0.690452	4.902
-0.949188	4.099767	-5.309024	0.446000	2.793
-0.974422	4.208759	-5.664389	0.199627	1.584
-0.997911	4.310213	-6.012961	-0.047491	0.896
-1.019811	4.404804	-6.354455	-0.294394	0.508
-1.040250	4.493085	-6.575671	-0.427329	0.374
-1.059357	4.575613	-7.015684	-0.784814	0.164
-1.077246	4.652880	-7.335406	-1.027269	0.094
-1.094021	4.725335	-7.647838	-1.267246	0.054
-1.109772	4.793367	-7.953158	-1.504534	0.031
-1.124584	4.857344	-8.251504	-1.738903	0.018
-1.138536	4.917606	-8.543034	-1.970171	0.013
-1.151685	4.974399	-8.827905	-2.198249	0.006
				2921.852

(*) por $\varphi_a(x')$ designamos la marginal \mathcal{X} ajustada para las frecuencias absolutas, con el origen indicado para la escala de cálculo, por tanto, siendo N

la población, es decir $N = \int_a^b \varphi_a(x') dx'$ se tendrá que $\varphi(x') = \frac{\varphi_a(x')}{N}$

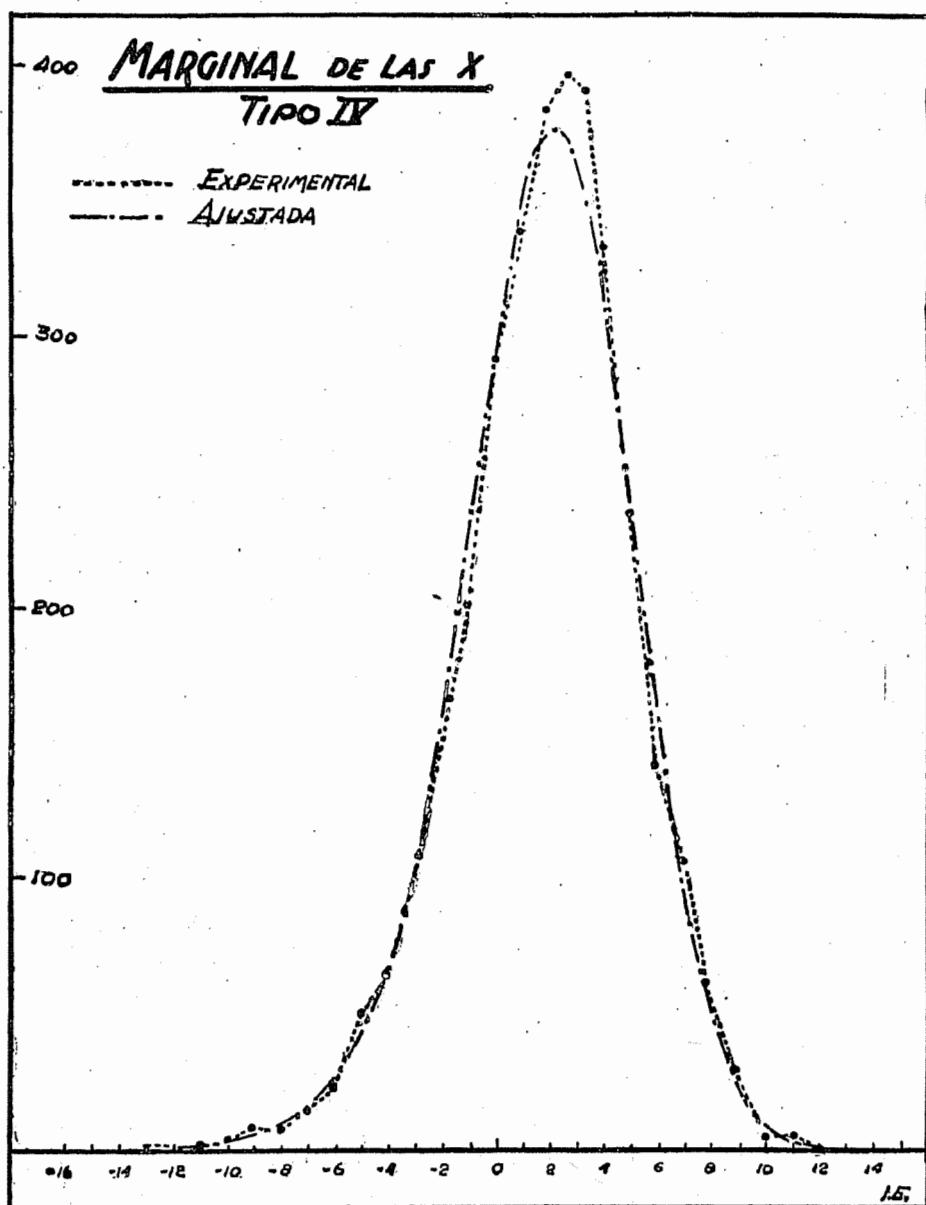


Gráfico 1.

Este ajustamiento se ha hecho por el método de Pearson.

3. Para dejar preparados todos los elementos que provienen de esta marginal y que luego se utilizarán en el cálculo de la superficie veremos ahora, cómo se hallan los momentos μ'_{50} y μ'_{00} así como los momentos reducidos $q_{j,0}$.

Hemos dicho (§ 1, nº 4) que a estos dos momentos los calcularíamos aplicando la fórmula [6] para lo cual debíamos conocer los valores de b_0 , b_1 y b_2 que se expresan así:

$$b_0 = -\frac{\mu'_2(4\beta_2 - 3\beta_1)}{2(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)} \quad [52]$$

$$b_1 = \frac{\sqrt{\mu'_2} \sqrt{\beta_1} (\beta_2 - 3)}{2(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)} \quad [53]$$

$$b_2 = -\frac{2\beta_2 - 3\beta_1 - 6}{2(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)} \quad [54]$$

} (*)

donde reemplazando los parámetros por sus valores calculados tenemos

$$b_0 = -9,161325$$

$$b_1 = 0,553324$$

$$b_2 = -0,044231$$

Sustituyendo en [6] resulta

$$\mu'_{50} = -1922,684241$$

$$\mu'_{00} = 34444,739767$$

Finalmente por aplicación de la [11] que da los momentos reducidos, considerando que, en este caso, es $k = 0$, o sea

$$q_{j,0} = \frac{\mu'_{j,0}}{\sigma_x^j}$$

se obtuvieron los valores de $q_{j,0}$ que figuran al pie de la Tabla I y en la última columna.

4. Para el ajustamiento de la marginal de las \mathcal{Q}' debemos seguir hasta determinar el criterio K , un procedimiento paralelo al anterior. En la Tabla V figura la marcha de las operaciones rea-

(*) $\beta_1 \sim \beta_{10}$; $\beta_2 \sim \beta_{20}$; $\mu'_2 \sim \mu'_{20}$.

TABLA V. — Alturas barométricas en Laudale

y	Y	f	Yf	Y^2f	Y^3f	Y^4f	$(Y + 1)^4f$
30.8	14	2	28	392	5488	76832	101250
30.7	13	14	182	2366	30758	399854	537824
30.6	12	36	432	5184	62208	746496	1028196
30.5	11	64	704	7744	85184	937024	1327104
30.4	10	141	1410	14100	141000	1410000	2064381
30.3	9	200	1800	16200	145800	1312200	2000000
30.2	8	263	2104	16832	134656	1077248	1725543
30.1	7	260.5	1823.5	12764.5	89351.5	625460.5	1067008
30.0	6	277.5	1665	9990	59940	359640	666277.5
29.9	5	283.5	1417.5	7087.5	35437.5	177187.5	367416
29.8	4	277.5	1110	4440	17760	71040	173437.5
29.7	3	245	735	2205	6615	19845	62720
29.6	2	212	424	848	1696	3392	17172
29.5	1	192	192	192	192	192	3072
29.4	0	135	14027	0	816086	0	135
29.3	— 1	97.5	— 97.5	97.5	— 97.5	97.5	0
29.2	— 2	67.5	— 135	270	— 540	1080	67.5
29.1	— 3	63	— 189	567	— 1701	5103	1008
29.0	— 4	38.5	— 154	616	— 2464	9856	3118.5
28.9	— 5	24.5	— 122.5	612.5	— 3062.5	15312.5	6272
28.8	— 6	11	— 66	396	— 2376	14256	6875
28.7	— 7	7.5	— 52.5	367.5	— 2572.5	18007.5	9720
28.6	— 8	4.5	— 36	288	— 2304	18432	10804.5
28.5	— 9	0	— 0	0	— 0	0	0
28.4	— 10	2.5	— 25	250	— 2500	25000	16402.5
28.3	— 11	0.5	— 5.5	60.5	— 665.5	7320.5	5000
28.2	— 12	0	— 0	0	— 0	0	0
28.1	— 13	0	— 0	0	— 0	0	0
28.0	— 14	1	— 14	196	— 2744	38416	28561
27.9	— 15	1	— 15	225	— 3375	50625	38416
		2922	— 912		— 24402		
			$\Sigma 13115$	$\Sigma 104291$	$\Sigma 791684$	$\Sigma 7.419.917$	$\Sigma 11.267.781$

Momentos Brutos Momentos Centrados

$$\begin{aligned} m_{00} &= 1 & \mu_{00} &= 1 \\ m_{01} &= 4.488360 & \mu_{01} &= 0 \\ m_{02} &= 35.691650 & \mu_{02} &= 15.546239 \\ m_{03} &= 270.939083 & \mu_{03} &= -28.812394 \\ m_{04} &= 2539.328200 & \mu_{04} &= 771.660280 \end{aligned}$$

Momentos Corregidos

$$\begin{aligned} \mu_{01} &= 0 \\ \mu_{02} &= 15.462906 \\ \mu_{03} &= -28.812394 \\ \mu_{04} &= 763.916326 \end{aligned}$$

$$\sqrt{\mu'_{02}} = 3.932290 \quad \beta_{01} = 0.224536$$

$$\beta_{02} = 3.194946 \quad \sqrt{\beta_{01}} = -0.473852$$

$$K = -0.626703$$

$K < 0$ Tipo I

Control

$$\begin{aligned} Y_4f &= 7.419.917 \\ 4 Y^3f &= 3.166.736 \\ 6 Y^2f &= 625.746 \\ 4 Y f &= 52.460 \\ f &= 2.922 \\ &\quad 11.267.781 \end{aligned}$$

lizadas y el control de Charlier respectivo habiendo considerado como origen arbitrario $\mathcal{Y} = 29,4$.

Los momentos brutos absolutos $M_{o,k}$ fueron divididos por la población N, luego centrados (repertorio [21]) y finalmente corregidos aplicando las fórmulas del repertorio [23]. Con los momentos corregidos se calcularon β_{01} y β_{02} que sustituídos en la expresión [41] permitiendo calcular el valor de K resultando

$$K = -0,626703$$

Por ser $K < 0$, corresponde ajustar esta marginal con una curva Tipo I de Pearson, según la tabla de discriminación antes citada que trae Elderton (18).

La ecuación Tipo I de Pearson es:

$$x = x_o \left[1 + \frac{y}{A_1} \right]^{m_1} \left[1 - \frac{y}{A_2} \right]^{m_2} \quad [55]$$

cuyo origen está referido a la media aritmética.

Anotamos en la tabla a continuación, como resultan algunos valores de este atributo, referidos a los distintos orígenes que hemos mencionado:

Escala natural \mathcal{Y}	Escala con origen arbitrario $Y = (\mathcal{Y} - 29,4) 10$	Escala con origen en la $\bar{Y}_a = 4,488360$ $y = Y - \bar{Y}_a$
30,3	9	-4,511640
30,2	8	3,511640
30,1	7	2,511640
30,0	6	1,511640
29,9	5	0,511640
29,848836	4,488360	0
29,8	4	-0,488360
29,7	3	-1,488360
29,6	2	-2,488360
29,5	1	-3,488360
29,4	0	-4,488360
29,3	-1	-5,488360
29,2	-2	-6,488360

En la fórmula [55] es

$$x_o = \frac{N}{A_1 + A_2} \frac{(m_1 + 1)^{m_1} (m_2 + 1)^{m_2}}{(m_1 + m_2 + 2)^{m_1 + m_2}} \cdot \frac{\Gamma(m_1 + m_2 + 2)}{\Gamma(m_1 + 1) \Gamma(m_2 + 1)} \quad [56]$$

N es la población; A_1 y A_2 son los valores absolutos de las dos raíces de la ecuación formada por el denominador, igualado a cero, del segundo miembro de la ecuación diferencial [7], cuyas raíces se definen, por tanto, así:

$$\frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4 b_0 b_2}}{2 b_2} \quad [57]$$

(18) ELDERTON W. PALIN.—Loc. cit. (8).

A_1 y A_2 son, por tanto, los valores absolutos de los extremos del intervalo en que la curva Tipo I está definida. Dicho tipo de curva es campaniforme y a extremos nulos.

m_1 y m_2 son parámetros expresados en función de A_1 y A_2 respectivamente, por las fórmulas:

$$m_1 = \frac{A_1 + a}{b_2 (A_1 + A_2)} \quad [58]$$

$$m_2 = \frac{A_2 - a}{b_2 (A_1 + A_2)} \quad [59]$$

Las constantes a , b_0 , b_1 y b_2 que figuran en [57], [58] y [59] son las mismas de la ecuación diferencial [7] por lo cual se calculan mediante las expresiones [52], [53] y [54], como lo hicieron para el caso de la marginal de las \mathcal{X} , recordando que es

$$a = -b_1$$

Sustituyendo, en esas tres últimas fórmulas, los valores de μ'_{02} y β_{01} y β_{02} , dados en la Tabla V, es:

$$\left. \begin{array}{l} a = -1,025603 \\ b_0 = -16,632269 \\ b_1 = 1,025603 \\ b_2 = 0,025208 \end{array} \right\} \quad [60]$$

Reemplazando en [57] resulta que, las dos raíces son:

$$y_1 = 12,423496$$

$$y_2 = -53,109112$$

por tanto

$$|y_1| = A_1 = 12,423496$$

$$|y_2| = A_2 = 53,109112$$

Estamos ahora, en condiciones de calcular m_1 y m_2 ; sustituyendo en [58] y [59], es

$$m_1 = 6,899677$$

$$m_2 = 32,770269$$

Elderton trae un sencillo control para estos dos valores. Sustituidos en las expresiones

$$\frac{m_1 + 1}{A_1}$$

$$\frac{m_2 + 1}{A_2}$$

ambas deben conducir al mismo resultado. En nuestro caso el cálculo es correcto, puesto que, de ambas sustituciones, resulta el valor 0,635866.

Para calcular las funciones

$$\Gamma(m_1 + m_2 + 2) = \Gamma(41,669946)$$

$$\Gamma(m_1 + 1) = \Gamma(7,899677)$$

$$\Gamma(m_2 + 1) = \Gamma(33,770269)$$

que figuran en [56] aplicamos la conocida fórmula de recurrencia

$$\Gamma(n) = (n - 1) \Gamma(n - 1) (*)$$

que permite descomponer dichas funciones Γ en el producto de factores numéricos por una última función Γ , de un número comprendido entre 1 y 2, las que están tabuladas.

Conocidos los valores de los parámetros que figuran en la fórmula [56] la calculamos aplicando logaritmos. Los pasos seguidos figuran, en detalle, en la Tabla VI. Los logaritmos de la función Γ fueron tomados de la tabla XXXI de la 1^a parte, 3^a ed. pág. 58 de las «Tables for Statisticians and Biometricalians» editada por Karl Pearson.

De estos cálculos se obtuvo el valor

$$\lg x_e = 2,461922$$

Ahora, estamos en condición de calcular la [55]. Por ser una exponencial, aplicamos logaritmos y se tiene:

$$\lg x = \lg x_e + m_1 \lg \left(1 + \frac{y}{A_1} \right) + m_2 \lg \left(1 - \frac{y}{A_2} \right) \quad [61]$$

Las operaciones que fueron necesarias para valorizar esta última fórmula están dispuestas y realizadas en la Tabla VII donde pueden seguirse fácil y cómodamente. La última columna la destinamos a los antilogaritmos de los $\lg x$ dados en la penúltima, con lo cual tenemos los valores ajustados de la marginal de las y .

La experiencia comprende un intervalo que va desde 27,9 hasta 30,8. La curva teórica, siendo del Tipo I, tiene sus extremos nulos y están dados, como ya se ha dicho, por las raíces de la ecuación formada por el denominador del segundo miembro, de la ecuación

(*) La función Γ es la integral euleriana de segunda especie definida así:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx$$

diferencial [7], igualado a cero, siendo dichas raíces — 53,109112 y 12,423496, la función teórica queda definida, operando con el origen en la media aritmética, en el intervalo (— 53,109112 ; 12,423496) o haciéndolo con el origen natural, en el intervalo (24,6 ; 31,0) que, como se ve, amplía algo el intervalo experimental.

El gráfico nº 2 muestra, nuevamente, la fidelidad que se obtiene ajustando con el método de Pearson.

TABLA VI

$$x_e = \frac{N}{(A_1 + A_2)} \frac{(m_1 + 1)^{m_1} (m_2 + 1)^{m_2}}{(m_1 + m_2 + 2)^{m_1 + m_2}} \frac{\Gamma(m_1 + m_2 + 2)}{\Gamma(m_1 + 1) \Gamma(m_2 + 1)} =$$
$$= \frac{2922}{65,532608} \frac{7,899677^{6,899677} 33,770269^{32,770269}}{41,669946^{39,090946}} \frac{\Gamma 41,669946}{\Gamma 7,899677 \cdot \Gamma 33,770269},$$

por ser:

$$\lg 7,899677 = 0,897609$$

$$\lg 32,770269 = 1,528535$$

$$\lg 41,669946 = 1,619823$$

resulta

$$\lg 2922 = 3,465680$$

$$6,899677 \lg 7,899677 = 6,193212$$

$$32,770269 \lg 33,770269 = 50,090503$$

$$\lg 40,669946! = 49,035025$$

$$\lg 1,669946 = \underline{\underline{1,955826}}$$

$$108,740246$$

$$\lg 65,532608 = 1,816457$$

$$39,669946 \lg 41,669946 = 64,258289$$

$$\lg 6,899677! = 3,631883$$

$$\lg 1,899677 = \underline{\underline{1,983019}}$$

$$\lg 32,770269! = 36,623085$$

$$\lg 1,770269 = \underline{\underline{1,965591}}$$

$$106,278324$$

$$\lg x_e = 2,461922$$

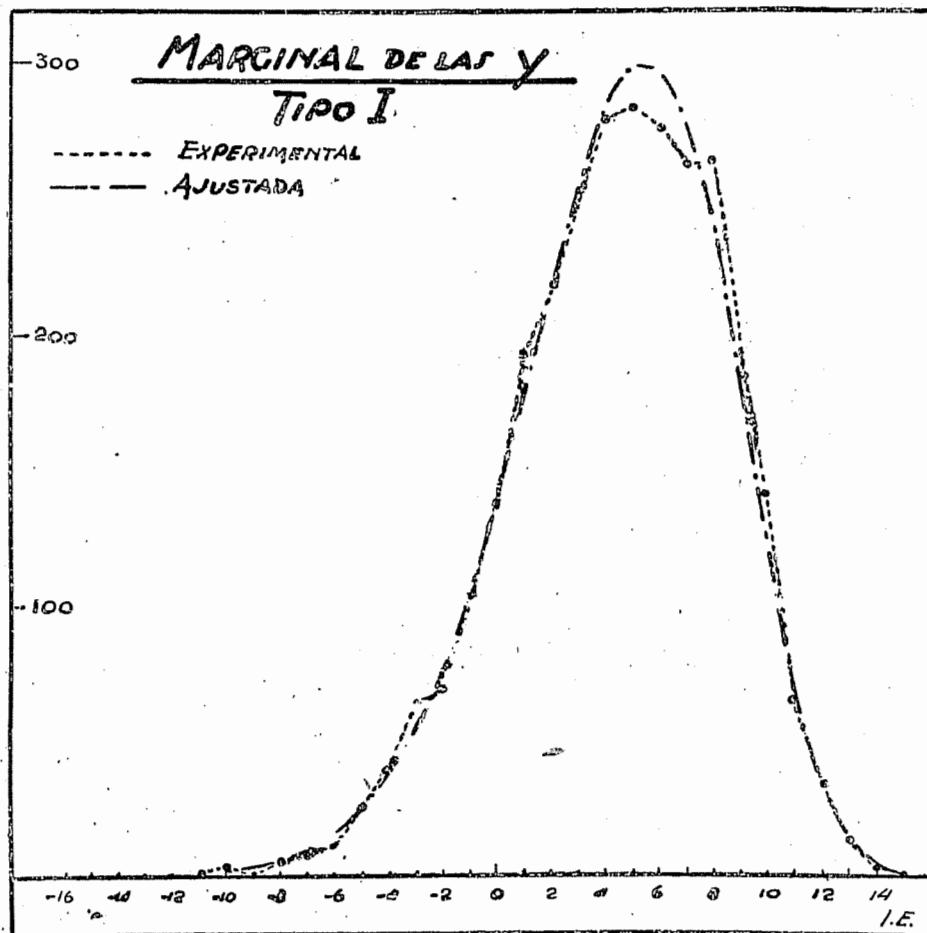


Gráfico 2;

Este ajustamiento se ha hecho por el método de Pearson.

TABLE V

y	y/A_1	$1 - y/A_1$	$\lg(1 - y/A_1)$	(a)	y/A_2
11.511640	0.926602	0.073398	2.865684	-7.826414	0.216754
10.511640	0.846109	0.153891	1.187212	-5.607975	0.197925
9.511640	0.765617	0.234383	1.369926	-4.347307	0.179096
8.511640	0.685124	0.314876	1.498140	-3.462672	0.160267
7.511640	0.604631	0.395369	1.597002	-2.780556	0.141438
6.511640	0.524139	0.475861	1.677480	-2.225284	0.122609
5.511640	0.443646	0.556354	1.745551	-1.756996	0.103779
4.511640	0.363153	0.636847	1.804035	-1.352095	0.084950
3.511640	0.282661	0.717339	1.855724	-0.995458	0.066121
2.511640	0.202168	0.797832	1.901911	-0.676782	0.047292
1.511640	0.121676	0.878324	1.943654	-0.388769	0.028463
0.511640	0.041183	0.958817	1.981736	-0.126016	0.009634
— 0.488360	— 0.039309	1.039309	0.016745	0.115528	— 0.009195
— 1.488360	— 0.119802	1.119802	0.049141	0.339057	— 0.028025
— 2.488360	— 0.200295	1.200295	0.079288	0.547062	— 0.046854
— 3.488360	— 0.280787	1.280787	0.107476	0.741549	— 0.065683
— 4.488360	— 0.361280	1.361280	0.133947	0.924191	— 0.084512
— 5.488360	— 0.441773	1.441773	0.158896	1.096331	— 0.103341
— 6.488360	— 0.522265	1.522265	0.182490	1.259122	— 0.122170
— 7.488360	— 0.602758	1.602758	0.204867	1.413516	— 0.140999
— 8.488360	— 0.683251	1.683251	0.226149	1.560355	— 0.159829
— 9.488360	— 0.763743	1.763743	0.246435	1.700322	— 0.178658
— 10.488360	— 0.844236	1.844236	0.265816	1.834044	— 0.197487
— 11.488360	— 0.924728	1.924728	0.284369	1.962054	— 0.216316
— 12.488360	— 1.005221	2.005221	0.302162	2.084820	— 0.235145
— 13.488360	— 1.085714	2.085714	0.319254	2.202749	— 0.253975
— 14.488360	— 1.166207	2.166207	0.335700	2.316221	— 0.272804
— 15.488360	— 1.246699	2.246699	0.351544	2.425540	— 0.291633
— 16.488360	— 1.327192	2.327192	0.360832	2.531022	— 0.310462
— 17.488360	— 1.407685	2.407685	0.381599	2.632909	— 0.329291
— 18.488360	— 1.488177	2.488177	0.395881	2.731451	— 0.348120
— 19.488360	— 1.568669	2.568669	0.409707	2.826852	— 0.366950
— 20.488360	— 1.649162	2.649162	0.423108	2.919308	— 0.385779
— 21.488360	— 1.729655	2.729655	0.436107	3.008997	— 0.404608
— 22.488360	— 1.810148	2.810148	0.448729	3.096085	— 0.423437

$1 + y/A_2$	$\lg(1 + y/A_2)$	(b) $m_2 \lg(1 + y/A_2)$	$\lg y =$ $= \lg y_a + (a) + (b)$	antilog $y =$ $= \rho_a(y) (*)$
1.216754	0.085302	2.792125	3.427633	0.003
1.197925	0.078430	2.570172	1.424119	0.266
1.179096	0.071549	2.386003	0.500618	3.166
1.160267	0.064558	2.115583	1.114833	13.027
1.141438	0.057452	1.882717	1.564083	36.651
1.122609	0.050229	1.646017	1.882655	76.323
1.103779	0.042882	1.405254	2.110180	128.883
1.084950	0.035410	1.160395	2.270222	186.304
1.066121	0.027807	0.911243	2.377707	238.620
1.047292	0.020068	0.657634	2.442774	277.189
1.028463	0.012188	0.399404	2.472557	296.864
1.009634	0.004164	0.136455	2.472361	296.730
0.990805	1.995988	-0.131474	2.445976	279.239
0.971975	1.987655	-0.404549	2.396430	249.132
0.953146	1.979159	-0.682965	2.326019	211.845
0.934317	1.970494	-0.966919	2.236552	172.406
0.915488	1.961652	-1.256764	2.129439	134.722
0.896659	1.952627	-1.552426	2.005827	101.351
0.877830	1.943411	-1.854436	1.866608	73.554
0.859001	1.933994	-2.163067	1.712371	51.567
0.840171	1.924368	-2.478480	1.543797	34.978
0.821342	1.914524	-2.801071	1.361173	22.971
0.802513	1.904452	-3.131133	1.164833	14.616
0.783684	1.894141	-3.469027	0.954949	9.015
0.764855	1.883579	-3.815147	0.731595	5.390
0.746025	1.872753	-4.169885	0.494786	3.125
0.727196	1.861652	-4.533700	0.244443	1.756
0.708367	1.850259	-4.907052	1.980410	0.956
0.689538	1.838558	-5.290496	1.702448	0.504
0.670709	1.826534	-5.684526	1.410305	0.257
0.651880	1.814168	-6.089763	1.103610	0.127
0.633050	1.801438	-6.506896	2.781878	0.061
0.614221	1.788325	-6.936645	2.444585	0.028
0.595392	1.774803	-7.379764	2.091155	0.012
0.576563	1.760846	-7.837141	3.720866	0.005
				2921.643

(*) Aunque para el cálculo de la superficie hemos debido utilizar hasta el valor de $\rho_a(y)$ correspondiente a $y = -52,488360$, en esta tabla nos limitamos a anotar solamente aquellos $\rho_a(y)$ que tienen cifra significativa para las milésimas.

Por $\rho_a(y)$ designamos la marginal ρ ajustada para las frecuencias absolutas con origen en la media aritmética, por tanto, siendo N la población, es decir

$$N = \int_a^b \rho_a(y) dy \quad \text{se tendrá que} \quad \rho(y) = \frac{\rho_a(y)}{N}.$$

5. Por la fórmula [6] calculamos los momentos μ'_{05} y μ'_{06} . Como ya tenemos calculados los momentos de orden inferior y los parámetros b_0 , b_1 y b_2 , también están valorizados según [60], sustituyendo, resulta

$$\mu'_{05} = -4387,205409$$

$$\mu'_{06} = 73122,976365$$

Finalmente, reemplazando estos valores en la expresión

$$q_{0,k} = \frac{\mu'_{0,k}}{\sigma_y^k}$$

tenemos los momentos reducidos $q_{0,k}$ que figuran, como los anteriores, en la última columna al pie de la Tabla I, y que necesitaremos para el cálculo de la superficie.

6. Para el cálculo de la superficie se parte de la hipótesis de que la función $f(x, y)$ cumple las condiciones de una función de probabilidad, es decir que

$$\iint f(x,y) dx dy = 1$$

Por tanto, debemos reducir los valores ajustados de las marginales, que son absolutos, a relativos. Esta transformación puede seguirse en las tablas VIII y IX donde se dan, en definitiva, los valores de $\varphi(x)$ y $\varrho(y)$ que intervendrán en la fórmula [24] que se aplicará para el cálculo de la superficie.

En el cálculo de las constantes A, B, C, D, E y F intervienen los momentos dobles de la superficie experimental. Aquellos en que uno de los subíndices es cero ya fueron obtenidos de las marginales; resta ahora hallar los de $\mu_{j,k}$ donde sea, a la vez, $j \neq 0, k \neq 0$.

Los que tenemos que calcular son $\mu_{11}, \mu_{21}, \mu_{12}, \mu_{31}, \mu_{22}$ y μ_{13} puesto que, en el desarrollo considerado, sólo intervienen momentos dobles de orden j, k para $j + k \leq 4$.

7. Para el cálculo de dichos momentos dobles, hemos seguido el método de Mitropolsky (10) explicado detalladamente en un trabajo nuestro ya citado (20).

(10) MITROPOLSKY, A. M.—*Loc. cit.* (11).

(20) BULA, CLOTILDE A.—*Loc. cit.* (8).

TABLA VIII. — Marginal de las \mathcal{G}

x	Frecuencias ab-solutas experimen-tales	Frecuencias ab-solutas teóricas $\varphi_a(x')$	$\frac{\varphi_a(x')}{N} = \varphi(x')$
31.4	—	0.005	0.000002
31.3	—	0.021	0.000007
31.2	—	0.076	0.000026
31.1	—	0.272	0.000093
31.0	1	0.922	0.000316
30.9	4	2.897	0.000991
30.8	4	8.322	0.002848
30.7	30.5	21.381	0.007318
30.6	52.5	48.570	0.016623
30.5	107.5	96.410	0.032996
30.4	140.5	166.182	0.056876
30.3	237	248.484	0.085043
30.2	315	323.279	0.110642
30.1	395.5	369.429	0.126437
30.0	382.5	374.168	0.128059
29.9	339.5	340.291	0.116464
29.8	288	281.676	0.096403
29.7	201	215.062	0.073605
29.6	150.5	153.424	0.052509
29.5	98.5	103.414	0.035393
29.4	65	66.599	0.022793
29.3	50	41.338	0.014148
29.2	23.5	24.936	0.008534
29.1	15.5	14.714	0.005036
29.0	7.5	8.543	0.002924
28.9	7	4.902	0.001678
28.8	3	2.793	0.000956
28.7	0	1.584	0.000542
28.6	1	0.896	0.000307
28.5	2	0.508	0.000174
28.4	—	0.374	0.000128
28.3	—	0.164	0.000056
28.2	—	0.094	0.000032
28.1	—	0.054	0.000018
28.0	—	0.031	0.000011
27.9	—	0.018	0.000006
27.8	—	0.013	0.000004
27.7	—	0.006	0.000002
	$2922 = N$	2921.852	1.000000

TABLA IX. — Marginal de las γ

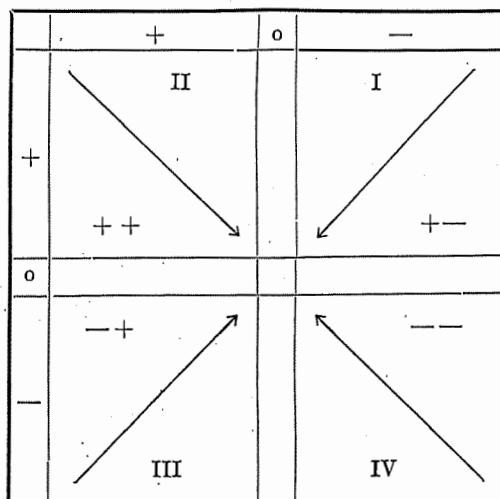
γ	Frecuencias ab-solutas experimen-tales	Frecuencias ab-solutas teóricas $\rho_\alpha(\gamma)$	$\frac{\rho_\alpha(\gamma)}{N} = \varphi(\gamma)$
31.0	—	0.003	0.000001
30.9	—	0.266	0.000091
30.8	2	3.166	0.001084
30.7	14	13.027	0.004458
30.6	36	36.651	0.012545
30.5	64	76.323	0.026123
30.4	141	128.883	0.044113
30.3	200	186.304	0.063767
30.2	263	238.620	0.081673
30.1	260.5	277.189	0.094874
30.0	277.5	296.864	0.101608
29.9	283.5	296.730	0.101563
29.8	277.5	279.239	0.095576
29.7	245	249.132	0.085271
29.6	212	211.845	0.072509
29.5	192	172.406	0.059010
29.4	135	134.722	0.046112
29.3	97.5	101.351	0.034690
29.2	67.5	73.554	0.025176
29.1	63	51.567	0.017650
29.0	38.5	34.978	0.011972
28.9	24.5	22.971	0.007862
28.8	11	14.616	0.005003
28.7	7.5	9.015	0.003086
28.6	4.5	5.390	0.001845
28.5	0	3.125	0.001070
28.4	2.5	1.756	0.000601
28.3	0.5	0.956	0.000327
28.2	0	0.504	0.000173
28.1	0	0.257	0.000088
28.0	1	0.127	0.000043
27.9	1	0.061	0.000021
27.8	0	0.028	0.000009
27.7	0	0.012	0.000004
27.6	0	0.005	0.000002
	2922 = N	2921.643	1.000000

Hemos utilizado aquí, las mismas fórmulas que figuran en el mencionado trabajo, salvo algunos cambios de signos que, como veremos, son debidos a la diferente disposición de los atributos en la tabla (damero) original y al diferente orden seguido para la numeración de los cuatro cuadrantes en que dicha tabla se divide.

En el damero de valores experimentales, que estudiamos (Tabla I), las variables \mathcal{X} e \mathcal{Y} están dispuestas en orden decreciente en lugar de creciente como lo hemos hecho para exponer el método de Mitropolisky. Respecto a la numeración de los cuadrantes, el que allí llevaba el número I, aquí figura como II y viceversa, quedando iguales los otros dos. Estas variaciones sólo traen como consecuencia cambios de signos en los momentos a calcular, sin que con ellos se logre simplificación alguna como, en comentarios sobre esta variación del método, se ha pretendido.

Con el propósito de simplificar los cálculos dividimos dicho damero en cuatro cuadrantes que designamos por I, II, III y IV, según gráfico a continuación, tomando el origen arbitrario de las \mathcal{X} en 29,8 y el de las \mathcal{Y} en 29,4.

Los signos que corresponden a cada cuadrante, en virtud de este cambio de origen, se indican en el mismo gráfico.



Como los hicimos en el caso de las marginales, calcularemos los momentos brutos absolutos $M_{r,s}$ para evitar decimales y luego los dividiremos por la población N , para tener los relativos $m_{r,s}$.

Tendremos entonces, momentos brutos absolutos, para cada cuad-

diente, que distinguiremos con un exponente que indique el cuadrante a que pertenece, así: $M^{\text{I}}_{r,s}$, $M^{\text{II}}_{r,s}$, $M^{\text{III}}_{r,s}$ y $M^{\text{IV}}_{r,s}$. Definiendo el momento $M_{r,s}$ en función de los momentos del mismo orden de cada cuadrante es:

$$M_{r,s} = \pm M^{\text{I}}_{r,s} \pm M^{\text{II}}_{r,s} \pm M^{\text{III}}_{r,s} \pm M^{\text{IV}}_{r,s} \quad [62]$$

El signo de cada uno de los sumandos del segundo miembro, dependerá del caso que definan los índices r,s .

Cuatro casos se pueden presentar:

- Caso (1): r y s pares
- Caso (2): r y s impares
- Caso (3): r par y s impar
- Caso (4): r impar y s par

los que para mayor claridad, esquematizaremos como se hace a continuación, anotando en cada cuadrante, el signo que corresponde.

Caso (1)

X^{2r}		
Y^{2s}	+	-
	(II)	(I)
+	+	+
	(III)	(IV)
-	+	+

Caso (2)

X^{2r+1}		
Y^{2s+1}	+	-
	(II)	(I)
+	+	-
	(III)	(IV)
-	-	+

Caso (3)

X^{2r}		
Y^{2s+1}	+	-
	(II)	(I)
+	+	+
	(III)	(IV)
-	-	-

Caso (4)

X^{2r+1}		
Y^{2s}	+	-
	(II)	(I)
+	+	-
	(III)	(IV)
-	+	-

Operando con los datos experimentales y aplicando el esquema de Tschetwerikoff (21) que utiliza Mitropolsky, se obtienen los momentos binomiales $B_{r,s}$.

Nos interesan los momentos potenciales $M_{r,s}$; para obtenerlos conocidos los $B_{r,s}$ se aplican las fórmulas del repertorio [18] que expresan los momentos potenciales en función de los binomiales.

Como resultado de las operaciones en los cuatro cuadrantes se obtienen, para cada subíndice r,s cuatro momentos binomiales del mismo orden, que distinguiremos por $B^I_{r,s}, B^{II}_{r,s}, B^{III}_{r,s}$ y $B^{IV}_{r,s}$.

Sustituímos los momentos $M^I_{r,s}, M^{II}_{r,s}, M^{III}_{r,s}$ y $M^{IV}_{r,s}$ del segundo miembro de la [62] en función de los binomiales, aplicando, para cada uno de ellos las mismas fórmulas del repertorio [18] y reunimos los términos afectados por iguales coeficientes, obteniendo expresiones en las que figuran los momentos binomiales de los cuatro cuadrantes, vinculados por los mismos signos que ligan en [62] a los potenciales y que se resumen, por tanto, también, en los cuatro casos siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} B^I_{r,s} + B^{II}_{r,s} + B^{III}_{r,s} + B^{IV}_{r,s} = T^{(1)}_{r,s} \\ -B^I_{r,s} + B^{II}_{r,s} - B^{III}_{r,s} + B^{IV}_{r,s} = T^{(2)}_{r,s} \\ B^I_{r,s} + B^{II}_{r,s} - B^{III}_{r,s} - B^{IV}_{r,s} = T^{(3)}_{r,s} \\ -B^I_{r,s} + B^{II}_{r,s} + B^{III}_{r,s} - B^{IV}_{r,s} = T^{(4)}_{r,s} \end{array} \right\} [63]$$

donde, los exponentes de los términos del primer miembro, indican el cuadrante a que pertenecen dichas sumas y el exponente de $T_{r,s}$ simboliza el caso respectivo definido por la paridad de los subíndices del momento potencial $M_{r,s}$.

Por tanto, los seis momentos $M_{r,s}$ que nos interesan, pueden expresarse así:

$$\left. \begin{array}{l} M_{11} = T^{(2)}_{11} \\ M_{21} = 2 T^{(3)}_{21} + T^{(3)}_{11} \\ M_{12} = 2 T^{(4)}_{12} + T^{(4)}_{11} \\ M_{31} = 6 T^{(2)}_{31} + 6 T^{(2)}_{21} + T^{(2)}_{11} \\ M_{22} = 4 T^{(1)}_{22} + 2 T^{(1)}_{21} + 2 T^{(1)}_{12} + T^{(1)}_{11} \\ M_{13} = 6 T^{(2)}_{13} + 6 T^{(2)}_{12} + T^{(2)}_{11} \end{array} \right\} [64]$$

(21) TSCHETWERIKOFF, N. S.—*Teoría de momentos. Sobre la técnica del cálculo de series estadísticas parabólicas* (en ruso). Publicaciones del Instituto de la Conjuntura de Moscú. Vol. 2, 1926.

ТАБЛІЦА

$X \backslash Y$	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	ΣY	
14	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	
13	—	1	—	4.5	4	3	1.5	—	—	—	—	—	14	
12	—	1	3	7.75	9.75	8.5	3.5	2.25	0.25	—	—	—	36	
11	—	—	1	0.5	6.25	9.25	15	15.75	6.5	5.5	1.75	0.5	64	
10	—	—	—	0.5	5.75	11.75	22	24.75	39.75	19.75	12.25	5.4	141	
9	—	—	—	—	5.25	11.5	15.5	24.75	55	50	25.5	6	5	198.5
8	—	—	—	—	1	4,25	21.75	24	38.5	55.5	66	32	13.5	255.5
7	—	—	—	—	—	2	10.75	21.75	23.75	55.75	55.5	46.75	26	242.25
6	—	—	—	—	—	—	5	11	26.25	48.25	63	58	27.5	239
5	—	—	—	—	—	—	4	4	19	31.75	54.25	66.25	57	233.25
4	—	—	—	—	—	—	—	7	23	24.25	41.75	59.75	48	193.75
3	—	—	—	—	—	—	—	2	8	12	36.5	41.25	57	146.75
2	—	—	—	—	—	—	—	0.5	4	8.5	16	265.	47	102.5
1	—	—	—	—	—	—	—	—	1	3	13	18	31	66
ΣX	1	4	4	30.5	52.5	107.5	140.5	237	314.5	385.5	356.5	301	1934.5	
— 1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	6	13.25	21.25	
— 2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	5.25	5.25	12.5	
— 3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	0.25	2.75	4	
— 4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	1	
— 5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
— 6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
— 7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
— 8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
— 9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
— 10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
— 11	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
— 12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
— 13	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
— 14	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
— 15	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
ΣY	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5	12.5	21.25	38.75	

X

-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-13	ΣY
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.25	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.25
2.75	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2.75
3.25	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3.25
10	1.5	1.5	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	14
11.5	8.75	0.5	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	22.75
18	17.5	6.5	3.5	0.5	—	1	—	—	—	—	—	—	47
19.5	16	6.5	5	5	2.5	0.5	—	—	—	—	—	—	56
25.5	23.75	12.5	8	3	1	3	—	—	—	—	—	—	76.75
39.5	20	10.5	8	2.5	—	0.5	—	—	—	—	—	—	81
130,25	87.5	39.5	26	12	3.5	5	—	—	—	—	—	—	303,75
18.5	11.5	10.5	7.75	5.75	1	2	1	1	—	—	—	—	59
14	13	8	8	3	2	—	1	—	—	—	1	—	49
10.5	10	12.5	6	9.5	2	—	1	1	—	—	—	—	52.5
3	5.75	3.75	6.5	6	4.5	2.5	1.5	—	—	—	—	—	33.5
1	2.75	5.75	2.5	4.5	4	—	2	1	1	—	—	—	24.5
—	1	2.5	2	1.5	0.5	0.5	—	3	—	—	—	—	11
—	0.5	1.5	—	1.5	1	3	—	—	—	—	—	—	7.5
—	0.5	1	—	1	—	1	—	—	—	—	—	—	3.5
—	—	—	—	—	0.5	—	—	—	—	1	—	—	2.5
—	—	—	—	—	0.5	—	—	—	—	—	—	—	0.5
—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	1
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1
47	45	45.5	31.75	32.75	16	10	6.5	6	2	—	1	2	245,5

TABLA

$\Sigma X \backslash Y$	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	ΣY
14	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	23
13	1	3	3	7.5	11.5	14.5	16	16	16	16	16	16	136.5
12	1	4	7	19.25	33	44.5	49.5	51.75	52	52	52	52	418
11	1	5	8.5	27	50	78.5	99.25	108	113.75	115.5	116	116	838.5
10	1	5	9	33.25	68	118.5	164	212.5	338	252	257	257	1615.25
9	1	5	9	38.5	84.75	150.75	221	324.5	400	439.5	450.5	455.5	2580
8	1	5	9	39.5	90	177.75	272	414	545	650.5	693.5	711	3608.25
7	1	5	9	39.5	92	190.5	306.5	472.25	659	820	909.75	953.25	4457.75
6	1	5	9	39.5	92	195.5	322.5	514.5	749.5	973.5	1121.25	1192.25	5215.5
5	1	5	9	39.5	92	199.5	330.5	541.5	808.25	1086.5	1297.5	1425.5	5835.75
4	1	5	9	39.5	92	199.5	337.5	561.5	852.5	1172.5	1443.25	1619.25	6332.5
3	1	5	9	39.5	92	199.5	339.5	571.5	874.5	1231	1543	1766	6671.5
2	1	5	9	39.5	92	199.5	340	576	887.5	1260	1598.5	1868.5	6876.5
1	1	5	9	39.5	92	199.5	340	577	891.5	1277	1633.5	1934.5	6999.5
ΣX	14	64	110.5	443.5	983.25	1970	3140.25	4943	7089.5	9348	11133.75	12368.75	51608.5
— 1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5	17.5	38.75	61.25
— 2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	9.5	17.5	30
— 3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	2.25	5	8.25
— 4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	2
— 5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
— 6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
— 7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
— 8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
— 9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
— 10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
— 11	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
— 12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
— 13	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
— 14	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
— 15	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
ΣX	—	—	—	—	—	—	—	—	—	9	30.25	62.25	101.5

KI

-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-13	ΣY
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.25	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.25
3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3
6.25	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	6.25
20.25	4	2.5	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	27.75
43	15.25	5	2.5	1	—	—	—	—	—	—	—	—	66.75
90	44.25	16.5	7.5	2.5	1	1	—	—	—	—	—	—	162.75
16	80.75	37	20.5	10.5	4	1.5	—	—	—	—	—	—	300.25
22.75	132	64.5	35.5	17.5	8	4.5	—	—	—	—	—	—	484.75
33.75	173.5	86	46.5	20.5	8.5	5	—	—	—	—	—	—	643.75
35.25	449.75	211.5	113.5	52	21.5	12	—	—	—	—	—	—	1695.5
6.5	199.5	154.5	109	77.25	44.5	27.5	17.5	11	5	3	3	2	900.25
7.5	159	125.5	90.5	66.5	39.5	23.5	15.5	10	5	3	3	2	730.5
8.5	124	103.5	76.5	59.5	35.5	21.5	13.5	9	4	2	2	2	591.5
5	81	70.5	56	45	30.5	19.5	11.5	8	4	2	2	2	417
1.5	50.5	45.75	35	30.5	22	15.5	10	8	4	2	2	2	278.75
7	27	25	20	18	14	11.5	6	6	3	2	2	2	163.5
6	16	15	12.5	12.5	10	8	3	3	3	2	2	2	105
8.5	8.5	8	7	7	6	5	3	3	3	2	2	2	65
5	5	5	5	5	4	3	3	3	3	2	2	2	49
5	5	5	5	5	4	3	3	3	2	2	2	2	49
2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2	1	1	1	1	1	1	1	23
2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	20
2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	20
2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	20
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13
0	685	567.25	426	335.75	221.5	149	91	69	42	27	27	25	3445.5

8. Comencemos por calcular los momentos binomiales en los que alguno de los subíndices es 1.

Trasladamos los datos del damero original a otro de igual reticulado pero en el que se eliminan los valores de las frecuencias que corresponden a la fila y columna cuyos atributos han sido tomados como nuevo origen y tenemos la tabla X.

Para controles posteriores, sumamos horizontal y verticalmente, los valores de cada cuadrante, por separado, con lo que nos quedan formadas ocho marginales, dos por cada cuadrante. Y constatamos que la suma de la última columna y la última fila coinciden.

Con la Tabla X se forma la llamada *primer tabla de sumas* que es la Tabla XI. Cada uno de los valores que aparece en esta tabla ha sido formado en base a los de la Tabla X.

Indicaremos el proceso seguido en el primer cuadrante siendo igual para los otros, recordando que, en cada cuadrante, la operación debe comenzarse, siempre, desde el ángulo opuesto al del origen común a los cuatro cuadrantes.

Un valor cualquiera de la Tabla XI se forma de la siguiente manera: se suma al valor que en la Tabla X ocupa la misma celda los valores que en la Tabla XI ocupan la celda de la misma columna y fila anterior y el de la celda de la misma fila y columna anterior, restándosele el de la celda de la fila y columna anterior o sea el opuesto al de la celda cuyo valor se trata de obtener.

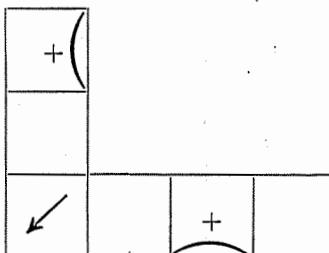
Cuando algunos de estos valores sean ceros o como ocurre con la primera fila y primera columna que, las filas y columnas anteriores no existen, se procede como si fueran ceros, por lo cual, el esquema de cálculo del párrafo anterior es aplicable a cualquier celda.

Sea, por ejemplo, calcular el valor 84,75 que en la Tabla XI ocupa la celda de la 8^a columna y fila 9^a del 1er. cuadrante. Agregamos al valor 11,5 que en la Tabla X tiene la misma ubicación los siguientes valores de la Tabla XI: el valor 68 de la celda que ocupa la misma columna y fila anterior y el valor 38,5 de la celda que ocupa la misma fila y columna anterior, restándole el valor 33,25 que es el que ocupa la celda opuesta o sea la de la fila y columna anterior.

Por tanto se tiene:

$$11,5 + 68 + 38,5 - 33,25 = 84,75$$

Con una escuadra como la del dibujo



se facilita mucho la operación (*). Debe recordarse que han de comenzarse siempre las sumas desde los extremos opuestos al centro del damero y continuar en dirección hacia él.

Completada la Tabla XI se procede a sumar horizontal y verticalmente. Corresponde, aquí, efectuar el control para saber si se ha operado correctamente. Se suman a los cuatro valores que en la Tabla XI rodean el origen común, los valores marginales anulados en el damero original (Tabla I) y al resultado se resta el valor de la frecuencia que corresponde al centro de la cruz en la misma Tabla I, debiendo obtenerse la población N . Efectuando esta operación, resulta:

$$1934,5 + 303,75 + 246,5 + 38,75 + 135 + 288 - 24,5 = 2922$$

Disponemos en cuadros para sumas las marginales de las Y de la Tabla XI o sea de las encabezadas por ΣY que trataremos primero. En la Tabla XII los números romanos indican el cuadrante al que las marginales corresponden y los números entre paréntesis (1), (2),... las sumas sucesivas.

Aplicamos el método de sumas debido a Tschetwerikoff. En las columnas (1) se disponen las marginales de las Y . Un valor cualquiera de las columnas encabezadas por (2), (3)... está formado por la suma de dos números: uno de ellos está en la misma fila de la columna anterior y el otro está en la fila anterior de la misma columna. En la columna (2) debe dejarse la celda más cercana al origen sin valor alguno; en la (3) se dejan dos celdas sin valores y así sucesivamente. Esta operación de suma se realiza partiendo desde la frecuencia más alejada del origen y en dirección a él. Para facilitar la operatoria es pues, conveniente disponer, siempre, de la misma manera los valores de las marginales en estos cuadros para sumas. Al pie de las columnas de la Tabla XII hemos indicado el respectivo momento binomial que resulta.

(*) v. BULLA, CLOTILDE A., loc. cit. (8) § 4.

Y	I				II			
	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)
15	—	—	—	—	—	—	—	—
14	—	—	—	—	23	23	23	23
13	—	—	—	—	136.5	159.5	182.5	205.5
12	—	—	—	—	418	577.5	760	965.5
11	—	—	—	—	838.5	1416	2176	3141.5
10	—	—	—	—	1615.25	3031.25	5207.25	8348.7
9	0.25	0.25	0.25	0.25	2580	5611.25	10818.5	19167.2
8	3	3.25	3.5	3.75	3608.25	9219.5	20038	39205.2
7	6.25	9.5	13	16.75	4457.75	13677.25	33715.25	72920.5
6	27.75	37.25	50.25	67	5215.5	18892.75	52608	125528.
5	66.75	104	154.25	221.25	5835.75	24728.5	77336.5	202865
4	162.75	266.75	421	642.25	6332.5	31061	108397.5	311262.5
3	300.25	567	988	—	6671.5	37732.5	146130	—
2	484.75	1051.75	—	—	6876.5	44609	—	—
1	643.75	—	—	—	6999.5	—	—	—
	1695.5	2039.75	1630.25	951.25	51608.5	190739	457392.5	783633.2
	$B_{1,1}^I$	$B_{1,2}^I$	$B_{1,3}^I$	$B_{1,4}^I$	$B_{1,1}^{II}$	$B_{1,2}^{II}$	$B_{1,3}^{II}$	$B_{1,4}^{II}$

XII

Y	III				IV			
	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)
— 15	—	—	—	—	13	13	13	13
— 14	—	—	—	—	20	33	46	59
— 13	—	—	—	—	20	53	99	158
— 12	—	—	—	—	20	73	172	330
— 11	—	—	—	—	23	96	268	598
— 10	—	—	—	—	49	145	413	1011
— 9	—	—	—	—	49	194	607	1618
— 8	—	—	—	—	65	259	866	2484
— 7	—	—	—	—	105	364	1230	3714
— 6	—	—	—	—	163.5	527.5	1757.5	5471.5
— 5	—	—	—	—	278.75	806.25	2563.75	8035.25
— 4	2	2	2	2	417	1223.25	3787	11822.25
— 3	8.25	10.25	12.25	—	591.5	1814.75	5601.75	—
— 2	30	40.25	—	—	730.5	2545.25	—	—
— 1	61.25	—	—	—	900.25	—	—	—
	101.5	52.5	14.25	2	3445.5	8147	17424	35314
	$B_{1,1}^{III}$	$B_{1,2}^{III}$	$B_{1,3}^{III}$	$B_{1,4}^{III}$	$B_{1,1}^{IV}$	$B_{1,2}^{IV}$	$B_{1,3}^{IV}$	$B_{1,4}^{IV}$

TABLA

X	I				X	II			
	(1)	(2)	(3)	(4)		(1)	(2)	(3)	(4)
— 13	—	—	—	—	13	—	—	—	—
— 12	—	—	—	—	12	14	14	14	14
— 11	—	—	—	—	11	64	78	92	106
— 10	—	—	—	—	10	110.5	188.5	280.5	386.5
— 9	—	—	—	—	9	443.5	632	912.5	1299
— 8	—	—	—	—	8	983.25	1615.25	2527.75	3826.75
— 7	12	12	12	12	7	1970	3585.25	6113	9939.75
— 6	21.5	33.5	45.5	57.5	6	3140.25	6725.5	12838.5	22778.25
— 5	52	85.5	131	188.5	5	4943	11668.5	24507	47285.25
— 4	113.5	199	330	518.5	4	7089.5	18758	43265	90550.25
— 3	211.5	410.5	740.5	—	3	9348	28106	71371	—
— 2	449.75	860.25	—	—	2	11133.75	39239.75	—	—
— 1	835.25	—	—	—	1	12368.75	—	—	—
	1695.5	1600.75	1259	776.5		51608.5	110610.75	161921.25	176185.75
	$B_{1,1}^I$	$B_{2,1}^I$	$B_{3,1}^I$	$B_{4,1}^I$		$B_{1,1}^{II}$	$B_{2,1}^{II}$	$B_{3,1}^{II}$	$B_{4,1}^{II}$

XIII

III				X	IV			
(1)	(2)	(3)	(4)		(1)	(2)	(3)	(4)
—	—	—	—	— 13	25	25	25	25
—	—	—	—	— 12	27	52	77	102
—	—	—	—	— 11	27	79	156	258
—	—	—	—	— 10	42	121	277	535
—	—	—	—	— 9	69	190	467	1002
—	—	—	—	— 8	91	281	748	1750
—	—	—	—	— 7	149	430	1178	2928
—	—	—	—	— 6	221.5	651.5	1829.5	4757.5
—	—	—	—	— 5	335.75	987.25	2816.75	7574.25
—	—	—	—	— 4	426	1413.25	4230	11804.25
9	9	9	—	— 3	567.25	1980.5	6210.5	—
30.25	39.25	—	—	— 2	685	2665.5	—	—
62.25	—	—	—	— 1	780	—	—	—
101.5	48.25	9	—		3445.5	8876	18014.75	30736
$B_{1,1}^{III}$	$B_{2,1}^{III}$	$B_{3,1}^{III}$	$B_{4,1}^{III}$		$B_{1,1}^{IV}$	$B_{2,1}^{IV}$	$B_{3,1}^{IV}$	$B_{4,1}^{IV}$

Se comprueba que obtenemos momentos en que el primer subíndice es igual a la unidad.

En la Tabla XIII hemos dispuesto las marginales X habiendo obtenido, por el mismo procedimiento, los momentos binomiales que tienen el segundo subíndice igual a la unidad.

Antes de utilizar los momentos así calculados es necesario controlarlos; para ello en las Tablas XIII y XIII se suma al último valor de cada una de las columnas el último valor de la columna anterior y el resultado debe ser igual a la suma total de la columna anterior, que figura al pie de ella.

Ahora debemos sustituir los momentos $B_{r,s}$ en las fórmulas [63] para calcular

$$T^{(1)}_{1,1} ; T^{(2)}_{1,1} ; T^{(3)}_{1,1} ; T^{(4)}_{1,1} ; T^{(1)}_{2,1} ; T^{(2)}_{2,1} \\ T^{(3)}_{2,1} ; T^{(1)}_{1,2} ; T^{(2)}_{1,2} ; T^{(4)}_{1,2} ; T^{(2)}_{3,1} ; T^{(2)}_{1,3}$$

que intervienen en las fórmulas [64] resultando

$$T^{(1)}_{1,1} = 1695,5 + 51608,5 + 101,5 + 3445,5 = 56851 \\ T^{(2)}_{1,1} = - 1695,5 + 51608,5 - 101,5 + 3445,5 = 53257 \\ T^{(3)}_{1,1} = 1695,5 + 51608,5 - 101,5 - 3445,5 = 49757 \\ T^{(4)}_{1,1} = - 1695,5 + 51608,5 + 101,5 - 3445,5 = 46569 \\ T^{(1)}_{2,1} = 1600,75 + 110610,75 + 48,25 + 8876 = 121135,75 \\ T^{(2)}_{2,1} = - 1600,75 + 110610,75 - 48,25 + 8876 = 117837,75 \\ T^{(3)}_{2,1} = 1600,75 + 110610,75 - 48,25 - 8876 = 103287,25 \\ T^{(1)}_{1,2} = 2039,75 + 190739 + 52,5 + 8147 = 200978,25 \\ T^{(2)}_{1,2} = - 2039,75 + 190739 - 52,5 + 8147 = 196793,75 \\ T^{(4)}_{1,2} = - 2039,75 + 190739 + 52,5 - 8147 = 180604,75 \\ T^{(2)}_{3,1} = - 1259 + 161921,25 - 9 + 18014,75 = 178668 \\ T^{(2)}_{1,3} = - 1630,25 + 457392,5 - 14,25 + 17424 = 473172$$

[65]

y reemplázandolos en las fórmulas [64] tenemos que

$$M_{11} = 53257$$

$$M_{21} = 2 \times 103287,25 + 49757 = 256331,50$$

$$M_{12} = 2 \times 180604,75 + 46569 = 407778,50$$

$$M_{31} = 6 \times 178668 + 2 \times 121135,75 + 53257 = 1367536,50$$

$$M_{13} = 6 \times 473172 + 2 \times 196793,75 + 53257 = 3285876,50$$

Dividiéndolos por la población $N = 2922$ obtenemos los momentos relativos $m_{r,s}$,

$$\left. \begin{array}{l} m_{11} = 18,226214 \\ m_{21} = 87,724675 \\ m_{12} = 139,554586 \\ m_{31} = 627,067590 \\ m_{13} = 1393,925907 \end{array} \right\} [66]$$

Como en la fórmula de la superficie interviene también el momento doble $m_{2,2}$ tenemos que calcular el respectivo binomial, para lo cual debemos confeccionar la segunda tabla de sumas. Se lo hace en base a la primera, que es la Tabla XI, en la que se anulan las dos verticales y las dos horizontales que rodean a la cruz primitiva.

Por el mismo proceso anterior se confecciona la Tabla XIV con cuyas marginales calcularemos los momentos binomiales en los que alguno de los subíndices es 2.

El control, en este caso, consiste en agregar a la suma de las cuatro celdas que rodean el origen de la Tabla XIV, la suma de los cuatro valores marginales anulados en la Tabla XI y además restarle los valores de las cuatro celdas que en esta última tabla rodean al origen, debiendo obtenerse, como resultado, el total de la Tabla XI. En nuestro caso es

$$34174,75 + 520,25 + 16,75 + 2011,75 = 36723,50$$

$$6999,5 + 643,75 + 61,25 + 900,25 + 12368,75 + 835,25 + 62,25 + 780 = 22651$$

$$1934,5 + 303,75 + 38,75 + 246,5 = 2523,50$$

luego

$$36723,50 + 22651 - 2523,50 = 56851$$

No necesitamos, en este caso, recurrir a la construcción de las tablas de sumas de Tschetwerikoff, puesto que, sólo se precisa según las expresiones [64] el valor de $T^{(1)}_{2,2}$ que está dado por la suma de los valores de las marginales, cuyos resultados, pueden obtenerse, directamente, de la Tabla XIV.

TABLE

X Y \	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	ΣY
14	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	—	121
13	2	7	12	21.5	35	51.5	69.5	87.5	105.5	123.5	141.5	—	656.5
12	3	12	24	52.75	99.25	160.25	227.75	297.5	367.5	437.5	507.5	—	2189
11	4	18	38.5	94.25	190.75	330.25	497	674.75	858.5	1044	1230	—	4980
10	5	24	53.5	142.5	307	565	895.75	1286	1707.75	2145.25	2588.25	—	9720
9	6	30	68.5	196	445.25	854	1405.75	2120.5	2942.25	3819.25	4712.75	—	16600.2
8	7	36	83.5	250.5	589.75	1186.25	2010	3138.75	4505.5	6033	7620	—	25460.2
7	8	42	98.5	305	736.25	1523.25	2653.5	4254.5	6280.25	8627.75	11124.5	—	35653.5
6	9	48	113.5	359.5	882.75	1865.25	3318	5433.5	8208.75	11529.75	15147.75	—	46915.7
5	10	54	118.5	404	1019.25	2201.25	3984.5	6641.5	10225	14632.5	19548	—	58838.5
4	11	60	133.5	458.5	1165.75	2547.25	4668	7886.5	12322.5	17902.5	24261.25	—	71416.7
3	12	66	148.5	513	1312.25	2893.25	5353.5	9143.5	14454	21265	29166.75	—	84327.7
2	13	72	163.5	567.5	1458.75	3239.25	6039.5	10405.5	16603.5	24674.5	34174.75	—	97411.7
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
ΣX	91	472	1061	3372	8251	17427.75	31135.75	51385	78598	112253.5	150244	—	454291
—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	2	—	—	—	—	—	—	—	—	4	16.75	—	20.7
—	3	—	—	—	—	—	—	—	—	1	4.25	—	5.2
—	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1
—	5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	11	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	13	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	14	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	15	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
ΣX	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5	22	—	27

XIV

—1	—2	—3	—4	—5	—6	—7	—8	—9	—10	—11	—12	—13	ΣY
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	7.5	3.5	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	12
—	31.25	12	4.5	1	—	—	—	—	—	—	—	—	48.75
—	104.	40.5	16.5	5.5	2	1	—	—	—	—	—	—	169.5
—	258.25	114	53	21.5	7.5	2.5	—	—	—	—	—	—	456.75
—	520.25	244	118.5	51.5	20	7	—	—	—	—	—	—	961.25
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	921.25	414	193.5	79.5	29.5	10.5	—	—	—	—	—	—	1648.25
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	2011.75	1526.25	1113.5	796.5	538	361	239.5	166	108	71	47	23	7001.5
—	1468.75	1142.25	855	628.5	436.5	299	201	143	95	63	42	21	5395
—	1015.75	813.25	629.5	479.5	347	245	168.5	124	85	57	38	19	4021.5
—	683.75	562.25	449	355	267.5	196	139	106	75	51	34	17	2935.5
—	456.5	485.5	318	259	202	152.5	111	88	65	45	30	15	2127.5
—	320	276	233.5	194.5	155.5	120	90	73	56	39	26	13	1596.5
—	231	203	175.5	149	122.5	97	75	61	47	33	22	11	1227
—	174.5	155	135.5	116	96.5	77	60	49	38	27	18	9	955.5
—	130.5	116	101.5	87	72.5	58	45	37	29	21	14	7	718.5
—	86.5	77	67.5	58	48.5	39	30	25	20	15	10	5	481.5
—	66	59	52	45	38	31	24	20	16	12	8	4	375
—	48	43	38	33	28	23	18	15	12	9	6	3	276
—	32	27	24	21	18	15	12	10	8	6	4	2	177
—	10	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	78
	6735	5396.5	4202.5	3231	2378.5	1720.5	1219	922	658	452	301	150	27366

En efecto es

$$B_{I_{22}} = 1648,25$$

$$B_{II_{22}} = 454291$$

$$B_{III_{22}} = 27$$

$$B_{IV_{22}} = 27366$$

con lo cual

$$T^{(1)}_{22} = 1648,25 + 454291 + 27 + 27366 = 483332,25$$

por tanto resulta:

$$\begin{aligned} M_{22} &= 4 \times 483332,25 + 2 \times 121135,75 + 2 \times 200978,25 + 56851 = \\ &= 2634407,999844 \end{aligned}$$

y dividiendo por la población se tiene:

$$m_{22} = 901,577002 \quad [67]$$

Centramos los momentos relativos dados por [66] y [67] aplicando las fórmulas del repertorio [21], obteniendo los momentos $\mu_{r,s}$. Se recurrió luego a las fórmulas del repertorio [23] para calcular los momentos corregidos $\mu'_{r,s}$ que, finalmente, fueron reducidos para obtener los $q_{r,s}$.

Estos momentos en cuyos subíndices no aparecen ceros, figuran al pie de la Tabla I.

9. Tenemos ahora todos los elementos para comenzar el cálculo de la superficie según la fórmula [24]. Recordemos que es

$$q_{11} = r$$

$$\sigma_x = \sqrt{\mu'_{2,0}} = 3,250067$$

$$\sigma_y = \sqrt{\mu'_{0,2}} = 3,932290$$

Sustituyendo en las fórmulas [25], [26], [27], [28], [29] y [30] obtenemos los siguientes resultados

$$A = 0,061049$$

$$B = 0,000599$$

$$C = 0,000353$$

$$D = 0,001697$$

$$E = 0,000107$$

$$F = -0,000060$$

Substituyendo, también, en las fórmulas [31], [32], [33] y [34] obtenemos

$$T_2(x) = x^2 + 1,344523 x - 10,562936$$

$$T_3(x) = x^3 + 4,159316 x^2 - 32,077279 x - 33,535132$$

$$T_2(y) = y^2 + 1,863323 y - 15,462905$$

$$T_3(y) = y^3 + 5,345171 y^2 - 39,443368 y - 53,839502$$

TABLA XV

$$\bar{Y}_x = 4,488360 \sim \mathcal{Y} = 29,848836 \sim y = o$$

$$T_2(y) = y^2 + 1,863323 y - 15,462905$$

$$T_3(y) = y^3 + 5,345171 y^2 - 39,443368 y - 53,839502$$

Y	\mathcal{Y}	$y = Y - \bar{Y}_x$	$T_2(y)$	$T_3(y)$
16	31	11.511640	138.504854	1725.981081
15	30.9	10.511640	114.618251	1283.687605
14	30.8	9.511640	92.731648	915.104311
13	30.7	8.511640	72.845045	614.331200
12	30.6	7.511640	54.958442	375.318270
11	30.5	6.511640	39.071839	192.065523
10	30.4	5.511640	25.185236	58.572957
9	30.3	4.511640	13.298633	— 31.159427
8	30.2	3.511640	3.412030	— 83.131628
7	30.1	2.511640	— 4.474573	— 103.343647
6	30	1.511640	— 10.361176	— 97.795485
5	29.9	0.511640	— 14.247779	— 72.487140
4	29.8	— 0.488360	— 16.134382	— 33.418614
3	29.7	— 1.488360	— 16.020985	13.410095
2	29.6	— 2.488360	— 13.907588	61.998985
1	29.5	— 3.488360	— 9.794191	106.348058
0	29.4	— 4.488360	— 3.680794	140.457312
— 1	29.3	— 5.488360	4.432608	158.326747
— 2	29.2	— 6.488360	14.546000	153.956367
— 3	29.1	— 7.488360	26.659397	121.346167
— 4	29	— 8.488360	40.772794	54.496150
— 5	28.9	— 9.488360	56.886191	— 52.593686
— 6	28.8	— 10.488360	74.999588	— 205.923339
— 7	28.7	— 11.488360	95.112985	— 411.492811
— 8	28.6	— 12.488360	117.226382	— 675.302101
— 9	28.5	— 13.488360	141.339779	— 1003.351208

TABLA XV (*Conclusión*)

Y	\mathcal{Y}	$y = Y - \bar{Y}_a$	$T_2(y)$	$T_3(y)$
— 10	28.4	— 14.488360	167.453176	— 1401.640134
— 11	28.3	— 15.488360	195.566573	— 1876.168877
— 12	28.2	— 16.488360	225.679970	— 2432.937439
— 13	28.1	— 17.488360	257.793367	— 3077.945818
— 14	28	— 18.488360	291.906764	— 3817.194016
— 15	27.9	— 19.488360	328.020161	— 4656.682032
— 16	27.8	— 20.488360	366.133558	— 5602.409865
— 17	27.7	— 21.488360	406.246955	— 6660.377517
— 18	27.6	— 22.488360	448.360538	— 7836.584986
— 19	27.5	— 23.488360	492.473749	— 9187.032274
— 20	27.4	— 24.488360	538.587146	— 10567.719379
— 21	27.3	— 25.488360	586.700543	— 12134.646303
— 22	27.2	— 26.488360	636.813850	— 13843.813045
— 23	27.1	— 27.488360	688.927337	— 15593.540600
— 24	27.0	— 28.488360	743.040734	— 17712.865982
— 25	26.9	— 29.488360	799.154131	— 19884.752177
— 26	26.8	— 30.488360	857.267528	— 22204.878191
— 27	26.7	— 31.488360	917.380925	— 24733.244022
— 28	26.6	— 32.488360	979.494322	— 27421.849672
— 29	26.5	— 33.488360	1043.607719	— 30294.695140
— 30	26.4	— 34.488360	1109.721116	— 33357.780425
— 31	26.3	— 35.488360	1177.834513	— 36491.163159
— 32	26.2	— 36.488360	1247.947910	— 40078.670450
— 33	26.1	— 37.488360	1320.061307	— 43748.475190
— 34	26.0	— 38.488360	1394.174704	— 47632.519748
— 35	25.9	— 39.488360	1470.288101	— 51736.804123
— 36	25.8	— 40.488360	1548.401498	— 56067.328317
— 37	25.7	— 41.488360	1628.514895	— 60630.092328
— 38	25.6	— 42.488360	1710.628292	— 65431.096158
— 39	25.5	— 43.488360	1794.741689	— 70476.339805
— 40	25.4	— 44.488360	1880.855086	— 75771.823271
— 41	25.3	— 45.488360	1968.968483	— 81323.546554
— 42	25.2	— 46.488360	2059.081880	— 87137.509655
— 43	25.1	— 47.488360	2151.195277	— 93219.712575
— 44	25.0	— 48.488360	2245.308674	— 99576.155312
— 45	24.9	— 49.488360	2341.422071	— 106212.837868
— 46	24.8	— 50.488360	2439.535468	— 113135.760241
— 47	24.7	— 51.488360	2539.648865	— 120350.922433
— 48	24.6	— 52.488360	2641.762262	— 127864.224443

TABLA XVI

$$\bar{X}_a = 1,839151 \sim \mathcal{D} = 29,983915 \sim x = o$$

$$T_2(x) = x^2 + 1,344523 x - 10,562936$$

$$T_3(x) = x^3 + 4,159316 x^2 - 32,077279 x - 33,535132$$

X	\mathcal{X}	$x = X - \bar{X}_a$	$T_2(x)$	$T_3(x)$
16	31.4	14.160850	209.006325	3185.960229
15	31.3	13.160850	180.340102	2544.291455
14	31.2	12.160850	153.673879	1989.906414
13	31.1	11.160850	129.007656	1516.805106
12	31	10.160860	106.341433	1118.987528
11	30.9	9.160850	85.675210	790.453683
10	30.8	8.160850	67.008987	525.203569
9	30.7	7.160850	50.342764	317.237188
8	30.6	6.160850	35.676542	160.554538
7	30.5	5.160850	23.010318	49.155621
6	30.4	4.160850	12.344095	— 22.959565
5	30.3	3.160850	3.677872	— 61.791018
4	30.2	2.160850	— 2.988351	— 73.338739
3	30.1	1.160850	— 7.654574	— 63.602729
2	30	0.160850	— 10.320797	— 38.582987
1	29.9	— 0.839150	— 10.987019	— 4.279512
0	29.8	— 1.839150	— 9.653442	33.307231
— 1	29.7	— 2.839150	— 6.319465	68.178638
— 2	29.6	— 3.839150	— 0.985688	94.333304
— 3	29.5	— 4.839150	6.348089	105.771706
— 4	29.4	— 5.839150	15.681866	96.493841
— 5	29.3	— 6.839150	27.015643	60.499708
— 6	29.2	— 7.839150	40.349420	— 8.210694
— 7	29.1	— 8.839150	55.683197	— 115.637363
— 8	29	— 9.839150	73.016974	— 267.780301
— 9	28.9	— 10.839150	92.350751	— 470.639506
— 10	28.8	— 11.839150	113.684528	— 730.214980
— 11	28.7	— 12.839150	137.018305	— 1052.506721
— 12	28.6	— 13.839150	162.352082	— 1443.514730
— 13	28.5	— 14.839150	189.685859	— 1909.239007
— 14	28.4	— 15.839150	219.019636	— 2455.679552
— 15	28.3	— 16.839150	250.353413	— 3088.8336366
— 16	28.2	— 17.839150	283.687190	— 3814.709447
— 17	28.1	— 18.839150	319.020967	— 4639.298797
— 18	28	— 19.839150	356.354744	— 5568.604414
— 19	27.9	— 20.839150	395.688521	— 6608.626300
— 20	27.8	— 21.839150	437.022298	— 7763.364453
— 21	27.7	— 22.839150	480.356075	— 9044.818875

TABLA XVIII.—SECCIÓN PARA $\mathcal{Z} = 30 \sim x = 0,160849$

y	a	b	c	d	e	f	$\rho(y) \varphi(x)$	$f(x, y)$	Frecuencias teóricas absolutas $f(x, y), N$
	$1 + Ax y$	$a + BT_2(y)x$	$b + C_y T_2(x)$	$c + DT_2(x)T_2(y)$	$d + ET_3(y)x$	$e + F_y T_3(x)$		$f \cdot \rho(y) \cdot \varphi(x)$	
11,511640	1.113041	1.126386	1.084442	— 1.341389	— 1.311684	— 1.285023	0.0000001	— 0.0000001	— 0.0003
10,511640	1.103221	1.114264	1.075964	— 0.931503	— 0.909410	— 0.885064	0.000012	— 0.00001	— 0.0292
9,511640	1.093402	1.102337	1.067680	— 0.556463	— 0.540713	— 0.518682	0.000139	— 0.00007	— 0.2045
8,511640	1.083582	1.090601	1.059597	— 0.216239	— 0.205666	— 0.185950	0.000571	— 0.00001	— 0.2922
7,511640	1.073762	1.079057	1.051686	0.089127	0.095587	0.112988	0.001607	0.0001	0.5844
6,511640	1.063943	1.067708	1.043980	0.359660	0.362966	0.378052	0.003345	0.0012	3.5064
5,511640	1.054123	1.056550	1.036466	0.595365	0.596373	0.609144	0.005649	0.0034	9.9348
4,511640	1.044303	1.045584	1.029143	0.796223	0.795687	0.806143	0.008166	0.0064	19.2852
3,511640	1.034483	1.034812	1.022014	0.962257	0.960826	0.968967	0.010459	0.0101	29.5122
2,511640	1.024664	1.024233	1.015079	1.093445	1.091666	1.097492	0.012149	0.0133	38.8626
1,511640	1.014844	1.013846	1.008335	1.189806	1.188123	1.191634	0.013012	0.0155	45.2910
0,511640	1.005024	1.003651	1.001783	1.251319	1.250071	1.251267	0.013006	0.0163	47.6286
— 0,488360	0.995204	0.993650	0.995425	1.278008	1.277433	1.276314	0.012239	0.0156	45.5832
— 1,488360	0.985385	0.983841	0.989259	1.269861	1.270092	1.266658	0.010920	0.0139	40.3236
— 2,488360	0.975565	0.974225	0.983287	1.226868	1.227935	1.222186	0.009285	0.0114	33.0186
— 3,488360	0.965745	0.964801	0.977506	1.149048	1.150878	1.142814	0.007557	0.0087	25.1292
— 4,488360	0.955926	0.955570	0.971918	1.036382	1.038799	1.028420	0.005905	0.0061	17.8242
— 5,488360	0.946106	0.946533	0.966524	0.888891	0.891616	0.878922	0.004442	0.0039	11.3958
— 6,488360	0.936286	0.937687	0.961322	0.706553	0.709203	0.694194	0.003224	0.0023	6.4284
— 7,488360	0.926466	0.929035	0.956313	0.489390	0.491478	0.474154	0.002260	0.0011	3.2142
— 8,488360	0.916647	0.920575	0.951496	0.237390	0.238328	0.218689	0.001533	0.0004	0.8766
— 9,488360	0.906827	0.912308	0.946872	— 0.049456	— 0.050361	— 0.072315	0.001007	— 7/10 ⁵	— 0.2133
— 10,488360	0.897007	0.904233	0.942441	— 0.371128	— 0.374672	— 0.398941	0.000641	— 0.0003	— 0.7480
— 11,488360	0.887187	0.896351	0.938202	— 0.727647	— 0.734729	— 0.761313	0.000395	— 0.0003	— 0.8766
— 12,488360	0.877368	0.888063	0.934157	— 1.118990	— 1.130613	— 1.159512	0.000236	— 0.0003	— 0.8766
— 13,488360	0.867548	0.881166	0.930303	— 1.545181	— 1.562450	— 1.593664	0.000137	— 0.0002	— 0.5844
— 14,488360	0.857728	0.873862	0.926643	— 2.006197	— 2.030320	— 2.063849	0.000077	— 0.0002	— 0.5844
— 15,488360	0.847908	0.866751	0.923175	— 2.502050	— 2.534341	— 2.570185	0.000042	— 0.0001	— 0.2922
— 16,488360	0.838089	0.859838	0.919900	— 3.032749	— 3.074622	— 3.112781	0.000022	— 7/10 ⁵	— 0.2045
— 17,488360	0.828269	0.853107	0.916817	— 3.598274	— 3.651248	— 3.691722	0.000011	— 4/10 ⁵	— 0.1169

— 19,488360	0.808630	0.840234	0.911231	— 4.833841	— 4.913987	— 4.959091	0.000003	— 1/10 ⁵	— 0.0292
— 20,488360	0.798810	0.834087	0.908727	— 5.503883	— 5.600306	— 5.647724	0.000001	— 6/10 ⁶	— 0.0175
— 21,488360	0.788990	0.828132	0.906415	— 6.208753	— 6.323384	— 6.373117	0.000005	— 3/10 ⁶	— 0.0088
— 22,488360	0.779170	0.822369	0.904295	— 6.948469	— 7.083344	— 7.135392	0.0000003	— 2/10 ⁶	— 0.0058
— 23,488360	0.769351	0.816800	0.902370	— 7.723009	— 7.880266	— 7.934629	9/10 ⁸	— 7/10 ⁷	— 0.0020
— 24,488360	0.759531	0.811423	0.900636	— 8.532387	— 8.714267	— 8.770945	4/10 ⁸	— 4/10 ⁷	— 0.0012
— 25,488360	0.749711	0.806239	0.899095	— 9.376610	— 9.585459	— 9.644452	1/10 ⁸	— 1/10 ⁷	— 0.0003
— 26,488360	0.739891	0.801247	0.897746	— 10.255661	— 10.493926	— 10.555234	4/10 ⁹	— 4/10 ⁸	— 0.0001
— 27,488360	0.730072	0.796449	0.896592	— 11.169555	— 11.437935	— 11.501558	1/10 ⁹	— 1/10 ⁸	— 3/10 ⁵
— 28,488360	0.720252	0.791843	0.895629	— 12.118277	— 12.423132	— 12.489070	4/10 ¹⁰	— 5/10 ⁹	— 1/10 ⁵
— 29,488360	0.710432	0.787430	0.894859	— 13.101845	— 13.444080	— 13.512333	1/10 ¹⁰	— 1/10 ⁹	— 3/10 ⁶
— 30,488360	0.700612	0.783209	0.894281	— 14.120239	— 14.502406	— 14.572974	4/10 ¹¹	— 6/10 ¹⁸	— 2/10 ⁶
— 31,488360	0.690793	0.779182	0.893898	— 15.173467	— 15.599150	— 15.672033	1/10 ¹¹	— 2/10 ¹⁸	— 6/10 ⁷
— 32,488360	0.680973	0.775346	0.893705	— 16.261544	— 16.733500	— 16.808698	3/10 ¹²	— 5/10 ¹¹	— 1/10 ⁷
— 33,488360	0.671153	0.771704	0.893706	— 17.384446	— 17.905846	— 17.983359	9/10 ¹³	— 2/10 ¹¹	— 6/10 ⁸
— 34,488360	0.661334	0.768255	0.893900	— 18.542194	— 19.116313	— 19.196141	1/10 ¹³	— 2/10 ¹²	— 6/10 ⁹
— 35,488360	0.651514	0.764997	0.894286	— 19.734768	— 20.362816	— 20.444959	3/10 ¹⁴	— 6/10 ¹³	— 2/10 ⁹
— 36,488360	0.641694	0.761933	0.894865	— 20.962189	— 21.651981	— 21.736439	4/10 ¹⁵	— 9/10 ¹⁴	— 3/10 ¹⁰
— 37,488360	0.631874	0.759061	0.895636	— 22.224435	— 22.977388	— 23.064161	9/10 ¹⁶	— 2/10 ¹⁴	— 6/10 ¹¹
— 38,488360	0.622055	0.756383	0.896601	— 23.521517	— 24.341318	— 24.430406	9/10 ¹⁷	— 2/10 ¹⁵	— 6/10 ¹²
— 39,488360	0.612235	0.753896	0.897758	— 24.853446	— 25.743886	— 25.835289	9/10 ¹⁸	— 2/10 ¹⁶	— 6/10 ¹³
— 40,488360	0.602415	0.751602	0.899107	— 26.220201	— 27.185173	— 27.278891	9/10 ¹⁹	— 2/10 ¹⁷	— 6/10 ¹⁴
— 41,488360	0.592595	0.749501	0.900649	— 27.621802	— 28.665304	— 28.761337	9/10 ²⁰	— 3/10 ¹⁸	— 9/10 ¹⁵
— 42,488360	0.582776	0.747594	0.902385	— 29.058228	— 30.184359	— 30.282707	4/10 ²¹	— 1/10 ¹⁹	— 3/10 ¹⁶
— 43,488360	0.572956	0.745878	0.904313	— 30.529501	— 31.742466	— 31.843129	3/10 ²²	— 1/10 ²⁰	— 3/10 ¹⁷
— 44,488360	0.563136	0.744355	0.906433	— 32.035600	— 33.339705	— 33.442683	4/10 ²⁴	— 1/10 ²²	— 3/10 ¹⁹
— 45,488360	0.553316	0.743024	0.908745	— 33.576547	— 34.976202	— 35.081495	1/10 ²⁵	— 4/10 ²⁴	— 1/10 ²⁰
— 46,488360	0.543497	0.741888	0.911252	— 35.152317	— 36.652036	— 36.759644	1/10 ²⁷	— 4/10 ²⁶	— 1/10 ²²
— 47,488360	0.533677	0.740943	0.913951	— 36.762923	— 38.367323	— 38.477246	9/10 ³⁰	— 3/10 ²⁸	— 9/10 ²⁵
— 48,488360	0.523857	0.740191	0.916842	— 38.408377	— 40.122177	— 40.234415	1/10 ³²	— 4/10 ³¹	— 1/10 ²⁷
— 49,488360	0.514038	0.739632	0.919926	— 40.088657	— 41.916681	— 42.031234	4/10 ³⁶	— 2/10 ³⁴	— 6/10 ³¹
— 50,488360	0.504218	0.739265	0.923202	— 41.803783	— 43.750957	— 43.867825	1/10 ⁴⁰	— 4/10 ³³	— 1/10 ³⁵
— 51,488360	0.494398	0.739091	0.926671	— 43.553735	— 45.652089	— 45.744272	3/10 ⁴⁵	— 1/10 ⁴⁵	— 3/10 ⁴²
— 52,488360	0.484578	0.739110	0.930334	— 45.338532	— 47.539199	— 47.660697	4/10 ⁶¹	— 2/10 ⁵⁹	— 6/10 ⁶⁶
									373.1035

Para poder trabajar con mayor rapidez y sin cometer equivocaciones damos en las Tablas XV y XVI los valores de $T_2(y)$, $T_3(y)$ y $T_2(x)$, $T_3(x)$, respectivamente, para cada uno de los valores que toman las variables en los puntos en que la superficie teórica será calculada. Sustituyendo en [24] los valores calculados, se tiene:

$$\begin{aligned} z = f(x, y) \sim \varphi(x) \varphi(y) &[1 + 0,061049 xy + 0,000599 x T_2(x) + \\ &+ 0,000353 y T_2(x) + 0,001697 T_2(x) T_2(y) + \\ &+ 0,000107 x T_3(y) - 0,000060 y T_3(x)] \end{aligned} \quad [68]$$

Con el propósito de obtener los valores de la superficie teórica, iniciamos los cálculos para valores de y cuando se han fijado las x , con lo cual, resultaron secciones de la superficie paralelas al plano yz .

Dijimos en el § 2, N° 3, que para el cálculo limitaríamos la variación de \mathcal{G} al intervalo (31,4; 27,7), debido al cambio de escala verificado, deben tomarse los valores correspondientes a x indicados en la columna tercera en la Tabla XVI.

Para cada x tenemos en la misma Tabla XVI los respectivos valores de $T_2(x)$ y $T_3(x)$.

Sustituyendo entonces en la fórmula [68] y luego operando se obtuvieron, entre otras, expresiones de las formas:

$$\begin{aligned} f(7,160850, y) &= 0,002848 \varphi(y) [1 + 0,435900 y + 0,089726 T_2(y) \\ &\quad + 0,000766 T_3(y)] \\ f(0,160850, y) &= 0,128059 \varphi(y) [1 + 0,008491 y - 0,017418 T_2(y) \\ &\quad + 0,000017 T_3(y)] \\ f(-6,839150, y) &= 0,014148 \varphi(y) [1 + 0,423429 y + \\ &\quad + 0,049943 T_2(y) - 0,000732 T_3(y)] \end{aligned}$$

Los valores de $\varphi(x)$ se tomaron de la Tabla VIII, tenida en cuenta la correspondencia entre las variables x' y x según se explicó anteriormente y se anota en el cuadro de la pág. 32, pues el cálculo de la superficie se hace con el origen en el baricentro; es decir haciendo:

$$\begin{aligned} \bar{Y}_a &= 4,488360 \sim y = 0 \\ \bar{X}_a &= 1,839151 \sim x = 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de y correspondientes a los puntos que, la marginal respectiva determina, es decir entre las dos raíces 12,323496 y -53,109112 obtuvimos los resultados teóricos que figuran en la Tabla XVII.

Para que el cálculo realizado una vez fijado el valor de la x , pueda seguirse con facilidad, a título de ilustración agregamos la Tabla XVIII calculada para $\mathcal{G} = 30$, o considerando el origen en la media aritmética, para $x = 0,160849$, en cuyas columnas figuran todos los pasos intermedios.

§ 3. CÁLCULO DE LAS FUNCIONES SIGNALÉTICAS.

1. Reemplazando en la fórmula [35] que define la línea de regresión \bar{y}_x , los valores calculados de las constantes y haciendo variar x , se obtienen sus valores teóricos dados en la penúltima columna de la Tabla XIX donde, además, se indican los pasos intermedios seguidos en este cálculo.

En la última columna están anotados los valores experimentales de \bar{y}_x .

El gráfico nº 3 permite comparar los datos empíricos y los valores teóricos de esta función signalética.

Operando de la misma manera con la fórmula [36] que define la línea de regresión \bar{x}_y , se obtienen los valores indicados en la Tabla XX. En el gráfico nº 4 se comparan los resultados teóricos y los empíricos.

2. Sustituyendo los valores calculados, de las constantes, en las fórmulas [37] y [38] que nos definen los coeficientes de relación de correlación η^2_{yx} y η^2_{xy} respectivamente, hemos obtenido los siguientes resultados

TABLA XIX

LÍNEA DE REGRESIÓN: \bar{y}_x

$$\bar{y}_x = \sigma_y^2 [A_x + C T_2(x) + F T_3(x)]$$

$$\bar{y}_x = 15.462905 [0.061049 x + 0.000353 T_2(x) - 0.000060 T_3(x)]$$

\mathcal{X}	x	0.061049 x	0.000353 $T_2(x)$	-0.000060 $T_3(x)$	\bar{y}_x	$0,1 \bar{y}_x + \mathcal{Y}$ (*)	Valores experim. de: \bar{y}_x
31	10.160849	0.620310	0.037539	-0.067139	9.134093	30.76	31
30.9	9.160849	0.559261	0.030243	-0.047427	8.382085	30.69	30.65
30.8	8.160849	0.498212	0.023654	-0.031512	7.582297	30.61	30.56
30.7	7.160849	0.437163	0.017771	-0.019034	6.740280	30.52	30.49
30.6	6.160849	0.376114	0.012594	-0.009633	5.861601	30.43	30.45
30.5	5.160849	0.315065	0.008123	-0.002949	4.951825	30.34	30.32
30.4	4.160849	0.254016	0.004357	0.001378	4.016505	30.25	30.24
30.3	3.160849	0.192967	0.001298	0.003707	3.061222	30.15	30.16
30.2	2.160849	0.131918	-0.001055	0.004400	2.091558	30.06	30.08
30.1	1.160849	0.070869	-0.002702	0.003816	1.113066	29.96	29.97
30	0.160849	0.009820	-0.003643	0.002315	0.131311	29.86	29.86
29.9	-0.839151	-0.051229	-0.003878	0.000257	-0.848140	29.76	29.75
29.8	-1.839151	-0.112278	-0.003408	-0.001998	-1.819736	29.67	29.67
29.7	-2.839151	-0.173327	-0.002231	-0.004091	-2.777895	29.57	29.54
29.6	-3.839151	-0.234376	-0.000348	-0.005660	-3.717034	29.48	29.48
29.5	-4.839151	-0.295425	0.002241	-0.006346	-4.631604	29.39	29.36
29.4	-5.839151	-0.356474	0.005536	-0.005790	-5.516051	29.29	29.35
29.3	-6.839151	-0.417523	0.009537	-0.003630	-6.364779	29.21	29.23
29.2	-7.839151	-0.478572	0.014243	0.000493	-7.088551	29.14	29.17
29.1	-8.839151	-0.539621	0.019656	0.006938	-7.932887	29.06	29.18
29	-9.839151	-0.600670	0.025775	0.016067	-8.641104	28.98	29.11
28.9	-10.839151	-0.661719	0.032600	0.028238	-9.291366	28.92	29.01
28.8	-11.839151	-0.722768	0.040131	0.043813	-9.878075	28.86	28.90
28.7	-12.839151	-0.783817	0.048367	0.063150	-10.395711	28.81	29.85
28.6	-13.839151	-0.844866	0.057310	0.086611	-10.838646	28.76	29.20
28.5	-14.839151	-0.905915	0.066959	0.114554	-11.201359	28.73	28.15

$$(*) \mathcal{Y} = 29,848836 \sim \bar{Y}_a = 4,488360$$

TABLA XX

LÍNEA DE REGRESIÓN: \bar{x}_y

$$\bar{x}_y = \sigma_x^2 [A y + B T_2(y) + E T_3(y)]$$

$$\bar{x}_y = 29,983915 [0,061049 y + 0.000599 T_2(y) + 0.000107 T_3(y)]$$

\mathcal{Y}	y	$0.061049 y$	$0.000599 T_2(y)$	$0.000107 T_3(y)$	\bar{x}_y	$0,1\bar{x}_y + \mathcal{X}^{(*)}$	Valores experim. de: \bar{x}_y
30.8	9.511640	0.580676	0.055546	0.097916	7.754653	30.76	30.95
30.7	8.511640	0.519627	0.043634	0.065733	6.644023	30.65	30.70
30.6	7.511640	0.458578	0.032920	0.040159	5.615859	30.54	30.58
30.5	6.511640	0.397529	0.023404	0.020551	4.663367	30.45	30.46
30.4	5.511640	0.336480	0.015086	0.006267	3.779767	30.36	30.35
30.3	4.511640	0.275431	0.007966	— 0.003334	2.958287	30.28	30.27
30.2	3.511640	0.214382	0.002044	— 0.008895	2.192136	30.20	30.19
30.1	2.511640	0.153333	— 0.002680	— 0.011058	1.474533	30.13	30.12
30	1.511640	0.092284	— 0.006206	— 0.010464	0.798706	30.06	30.07
29.9	0.511640	0.031235	— 0.008534	— 0.007756	0.157863	29.99	30.00
29.8	— 0.488360	— 0.029814	— 0.009664	— 0.003576	— 0.454776	29.93	29.94
29.7	— 1.488360	— 0.090863	— 0.009597	0.001435	— 1.045995	29.88	29.88
29.6	— 2.488360	— 0.151912	— 0.008331	0.006634	— 1.622562	29.82	29.81
29.5	— 3.488360	— 0.212961	— 0.005867	0.001379	— 2.191270	29.76	29.78
29.4	— 4.488360	— 0.274010	— 0.002205	0.015029	— 2.758891	29.70	29.69
29.3	— 5.488360	— 0.335059	0.002655	0.016941	— 3.332215	29.65	29.70
29.2	— 6.488360	— 0.396108	0.008713	0.016473	— 3.918025	29.59	29.63
29.1	— 7.488360	— 0.457157	0.015969	0.012984	— 4.523091	29.53	29.53
29	— 8.488360	— 0.518206	0.024423	0.005831	— 5.154206	29.47	29.45
28.9	— 9.488360	— 0.579255	0.034075	— 0.005628	— 5.818149	29.40	29.33
28.8	— 10.488360	— 0.640304	0.044925	— 0.022034	— 6.521694	29.33	29.27
28.7	— 11.488360	— 0.701353	0.056973	— 0.044030	— 7.271631	29.25	29.27
28.6	— 12.488360	— 0.762402	0.070219	— 0.072257	— 8.074731	29.17	29.44
28.5	— 13.488360	— 0.823451	0.084663	— 0.107359	— 8.937796	29.09	29.98
28.4	— 14.488360	— 0.884500	0.100304	— 0.149975	— 9.867588	28.99	28.76
28.3	— 15.488360	— 0.945549	0.117144	— 0.200750	— 10.870898	28.89	29.20

$$(*) \mathcal{X} = 29,983915 \sim \bar{X}_a = 1,839151$$

COEFICIENTE DE RELACIÓN DE CORRELACIÓN

$$r_x = \sigma_y^2 \sigma_x^2 \left\{ A^2 + \sigma_x^2 (\beta_{20} - \beta_{10} - 1) C^2 + \sigma_x^4 \frac{q_{09} (\beta_{20} - \beta_{10} - 1) - q_{50} [\sqrt{\beta_{10}} (\beta_{20} + 1)] + q_{40} [\sqrt{\beta_{10}} (q_{50} - \sqrt{\beta_{10}})] - q_{30} [\sqrt{\beta_{10}} (2 \beta_{20} - \beta_{10}) - q_{50}]}{(\beta_{20} - \beta_{10} - 1)} F^2 \right\}$$

$$\eta_{yx}^2 = 0,455278$$

$$r_y = \sigma_y^2 \sigma_x^2 \left\{ A^2 + \sigma_y^2 (\beta_{02} - \beta_{01} - 1) B^2 + \sigma_y^4 \frac{q_{06} (\beta_{02} - \beta_{01} - 1) - q_{05} [\sqrt{\beta_{01}} (\beta_{02} + 1)] + q_{04} [\sqrt{\beta_{01}} (q_{06} - \sqrt{\beta_{01}})] - q_{03} [\sqrt{\beta_{01}} (2 \beta_{02} - \beta_{01}) - q_{05}]}{(\beta_{02} - \beta_{01} - 1)} E^2 \right\}$$

$$\eta_{xy}^2 = 0,504727$$

VALORES DE LAS CONSTANTES

$$\beta_{10} = 0,171140$$

$$\beta_{01} = 0,224536$$

$$\beta_{20} = 3,612027$$

$$\beta_{02} = 3,194946$$

$$\sqrt{\beta_{10}} = -0,413691$$

$$\sqrt{\beta_{01}} = -0,473852$$

$$\sigma_x = 3,250067$$

$$\sigma_y = 3,932290$$

$$T_2(x) = x^2 + 1,344523 x - 10,562936$$

$$T_2(y) = y^2 + 1,863323 y - 15,462905$$

$$T_3(x) = x^3 + 4,519316 x^2 - 32,077279 x + 33,535132$$

$$T_3(y) = y^3 + 5,345174 y^2 - 39,443368 y - 53,839502$$

$$A = 0,061049$$

$$B = 0,000599$$

$$C = 0,000353$$

$$D = 0,001697$$

$$E = 0,000107$$

$$F = -0,000060$$

TABLA XXI. — SEDÁSTICA σ_{yx}^2

$$\sigma_{yx}^2 = \mu'_{02} + \bar{y}_x \frac{\mu'_{03}}{\mu'_{02}} - \bar{y}_x^2 + [Bx + D T_2(x)] \left[\mu'_{04} - \frac{\mu'_{03}^2}{\mu'_{02}} - \mu_{02}^2 \right]$$

$$\sigma_{yx}^2 = 15,462905 - 1,863323 \bar{y}_x - \bar{y}_x^2 + 0,282206 x + 0,799504 T_2(x)$$

x	\mathcal{X}	$-1,863323 \bar{y}_x$	$-\bar{y}_x^2$	$0,282206 x$	$0,799504 T_2(x)$	σ_{yx}^2	Valores ex- perimentales de: σ_{yx}^2
10.160849	31	— 17.019766	— 83.431655	2.867453	85.025401	2.899338	0
9.160849	30.9	— 15.618532	— 70.259349	2.585247	68.497673	0.667944	1.25
8.160849	30.8	— 14.128268	— 57.491228	2.303041	53.573953	— 0.279597	0.484374
7.160849	30.7	— 12.559319	— 45.431374	2.020835	40.249248	— 0.257712	2.244930
6.160849	30.6	— 10.922056	— 34.358366	1.738629	28.523531	0.444650	2.411529
5.160849	30.5	— 9.226849	— 24.520571	1.456423	18.396843	1.568749	3.579559
4.160849	30.4	— 7.484046	— 16.132312	1.174217	9.869153	2.889917	4.463961
3.160849	30.3	— 5.704045	— 9.371080	0.892011	2.940479	4.220264	4.947487
2.160849	30.2	— 3.897248	— 4.374615	0.609805	— 2.389193	5.411648	4.594066
1.160849	30.1	— 2.074001	— 1.238916	0.327599	— 6.119868	6.357724	5.989458
0.160849	30	— 0.244675	— 0.017243	0.045393	— 8.251516	6.994862	6.171786
— 0.839151	29.9	1.580359	— 0.719341	— 0.236813	— 8.784165	7.302944	6.186741
— 1.839151	29.8	3.390756	— 3.311439	— 0.519019	— 7.717968	7.305238	6.925968
— 2.839151	29.7	5.176116	— 7.716701	— 0.801225	— 5.052431	7.068657	7.115070
— 3.839151	29.6	6.926035	— 13.816342	— 1.083431	— 0.788063	6.701106	7.455033
— 4.839151	29.5	8.630174	— 21.451756	— 1.365637	5.075325	6.351009	8.916270
— 5.839151	29.4	10.278185	— 30.426819	— 1.647843	12.637715	6.204143	7.721221
— 6.839151	29.3	11.859639	— 40.510412	— 1.930049	21.599113	6.481198	8.709317
— 8.839151	29.2	13.208260	— 50.247555	— 2.212255	32.259529	8.470878	6.935729
— 8.839151	29.1	14.781531	— 62.930696	— 2.494461	44.518933	9.338218	16.095151
— 9.839151	29	16.101168	— 74.668678	— 2.776667	58.377365	12.496091	2.903602
— 10.839151	28.9	17.312816	— 86.329482	— 3.058873	73.834795	17.222161	
— 11.839151	28.8	18.406044	— 97.576366	— 3.341079	90.891235	23.842739	
— 12.839151	28.7	19.370567	— 108.070807	— 3.623285	109.546682	32.688063	
— 13.839151	28.6	20.195898	— 117.476247	— 3.905491	129.801339	44.078204	
— 14.839151	28.5	20.871750	— 125.470443	— 4.187697	151.654603	58.331118	

TABLA XXII. — SEDÁSTICA $\sigma^2_{x_y}$

$$\sigma^2_{x_y} = \mu'_{20} + \bar{x}_y \frac{\mu'_{30}}{\mu'_{20}} - \bar{x}_y^2 + [Cy + D T_2(y)] \cdot \left[\mu'_{40} - \frac{\mu'_{30}^2}{\mu'_{20}} - \mu'_{20}^2 \right]$$

$$\sigma^2_{x_y} = 10.562938 - 1.344523 \bar{x}_y - \bar{x}_y^2 + 0.096137 y + 0.462167 T_2(y)$$

y	\mathcal{Y}	$-1.344523 \bar{x}_y$	$-\bar{x}_y^2$	$0.096137 y$	$0.462167 T_2(y)$	$\sigma^2_{x_y}$	Valores experimentales de $\sigma^2_{x_y}$
9.511640	30.8	— 10.426309	— 60.134643	0.914421	42.857508	— 16.226085	0.25
8.511640	30.7	— 8.933042	— 44.143042	0.818284	33.666576	— 8.028286	1.595667
7.511640	30.6	— 7.550652	— 31.537872	0.722147	25.399978	— 2.403461	2.064616
6.511640	30.5	— 6.270004	— 21.746992	0.626010	18.057715	1.229667	2.729413
5.511640	30.4	— 5.081984	— 14.286639	0.529873	11.639785	3.363973	2.806653
4.511640	30.3	— 3.977485	— 8.751462	0.433736	6.146189	4.413916	2.970993
3.511640	30.2	— 2.947377	— 4.805460	0.337599	1.576928	4.724628	3.314945
2.511640	30.1	— 1.982544	— 2.174568	0.241461	— 2.068000	4.579287	3.417120
1.511640	30.0	— 1.073879	— 0.637931	0.145325	— 4.788594	4.207859	3.559877
0.511640	29.9	— 0.212250	— 0.024921	0.049188	— 6.584853	3.790102	3.590912
— 0.488360	29.8	— 0.611457	— 0.206821	— 0.046949	— 7.456779	3.463846	4.731598
— 1.488360	29.7	— 1.406364	— 1.094106	— 0.143086	— 7.404371	3.327739	5.347492
— 2.488360	29.6	— 2.181572	— 2.632707	— 0.239223	— 6.427628	3.444952	5.514951
— 3.488360	29.5	— 2.946213	— 4.801664	— 0.335360	— 4.526552	3.845575	3.726555
— 4.488360	29.4	— 3.709392	— 7.611480	— 0.431497	— 1.701142	4.528211	6.039238
— 5.488360	29.3	— 4.480240	— 11.103657	— 0.527634	2.048605	5.460492	5.787218
— 6.488360	29.2	— 5.267875	— 15.350920	— 0.623771	6.722681	6.578803	6.601265
— 7.488360	29.1	— 6.081400	— 20.458352	— 0.719908	12.321094	7.787172	4.982399
— 8.488360	29.0	— 6.929949	— 26.565839	— 0.816045	18.843840	8.954843	5.612115
— 9.488360	28.9	— 7.822635	— 33.850858	— 0.912182	26.290920	9.913453	5.189943
— 10.488360	28.8	— 8.768568	— 42.532493	— 1.008319	34.662335	10.453029	6.566115
— 11.488360	28.7	— 9.776875	— 52.876617	— 1.104456	43.958083	10.316823	3.022226
— 12.488360	28.6	— 10.856662	— 65.201281	— 1.200593	54.178165	9.195891	6.246907
— 13.488360	28.5	— 12.017072	— 79.884197	— 1.296730	65.322582	6.721665	0
— 14.488360	28.4	— 13.267199	— 97.369293	— 1.392867	77.391332	2.459309	6.640000
— 15.488360	28.3	— 14.616172	— 118.176423	— 1.489004	90.384416	— 4.101901	0

3. Finalmente hemos calculado la ecuación sedástica $\sigma^2_{y_x}$ definida según la fórmula [39].

Las operaciones seguidas han sido reunidas en la Tabla XXI donde, en la penúltima columna, figuran los valores teóricos y en la última, los experimentales. El gráfico nº 5 permite compararlos.

El cálculo de la ecuación sedástica $\sigma^2_{y_y}$ se efectúa de manera análoga, según se indica en la Tabla XXII y su representación figura en el gráfico nº 6.

§ 4. COMPARACIÓN Y CONCLUSIONES

1. Como dijimos antes (§ 2, nº 1) la superficie que se ha calculado, con el método de las funciones marginales, es la misma que definió K. Pearson con su método de las quince constantes, circunstancia que permitirá efectuar útiles comparaciones, con el objeto de apreciar si el método de las funciones marginales, conduce a mejores resultados o, en algún sentido, constituye un avance en el tratamiento del importante problema que nos ocupa.

La superficie experimental es la de la Tabla I.

Hemos calculado la superficie teórica aplicando el método de las funciones marginales, resultando la tabla XVII.

El cálculo hecho por Karl Pearson, aplicando su método de las quince constantes, conduce a la Tabla XXIII (22).

Comparando estas tres tablas resulta:

a) Población experimental (Tabla I) $N = 2922$.

Población teórica

1) Por el método de las funciones marginales (Tabla XVII) $N = 2921$.

2) Por el método de las quince constantes de Pearson (Tabla XXIII) $N = 2922$.

Obsérvese que mientras el método de las quince constantes de Pearson, mantiene la fidelidad de la población en un dominio cuyo contorno difiere muy poco del experimental, el método de las fun-

(22) PEARSON, KARL.—*Loc. cit.* (18).

ciones marginales mantiene la fidelidad de la población en un dominio completamente distinto y mayor que el experimental.

b) La superficie teórica, calculada por el método de las quince constantes de Pearson, *para los puntos que corresponden a los del contorno experimental*, toma valores aproximadamente iguales a los experimentales y luego tiende, asintóticamente, a cero.

La superficie teórica calculada por el método de las funciones marginales, *para esos mismos puntos que corresponden a los del contorno experimental*, toma valores muy superiores, sigue luego tomando valores positivos, hasta que atraviesa el plano x y, toma valores negativos y en algunos casos vuelve a tomar valores positivos. Esto se constata con el cálculo hecho para secciones paralelas al plano z y cuyos resultados se anotan en la Tabla XVII.

Como se ve, el método de las funciones marginales, define una superficie teórica en un dominio distinto, mayor que aquel en que la experimental existe. Esto se observa, inmediatamente, en los gráficos que se agregan al final que representan secciones de la superficie, tanto de la experimental como de las dos teóricas que definen los métodos que estamos comparando, por planos paralelos al z y pasando por los puntos x en que la experimental existe.

c) En la curva que define cada sección de la superficie teórica, calculada por el método de las quince constantes de Pearson, el *modo*, o punto de máximo, coincide con el punto de máxima frecuencia experimental, así como son sensiblemente iguales las respectivas frecuencias, para esos puntos.

En las curvas que definen las mismas secciones de la superficie teórica, calculada por el método de las funciones marginales, los *modos*, experimental y teórico, no coinciden, y además la máxima frecuencia teórica es inferior a la máxima frecuencia experimental en todas las secciones. Por tanto, el método de las funciones marginales define una superficie deformada, en relación con la experimental correspondiente: aplastada en los puntos x y que corresponden a las frecuencias máximas, levantada en los que corresponden a los del contorno experimental.

2. En los gráficos n°s. 3 y 4 se representan las líneas de regresión experimentales y las teóricas de las superficies que definen los dos métodos que estamos comparando.

Es en esta parte que se obtienen los mejores resultados, con el método de las funciones marginales, y aunque es un placer consignarlo, surge, fatalmente, el interrogante: ¿Este resultado se mantendrá, en todos los casos, es decir, corresponde a una propiedad del método según la cual con una superficie deformada y definida en un dominio distinto a aquel en que la experimental existe se tendrán, siempre, líneas de regresión teóricas que ajusten bien a las correspondientes experimentales?

Sin más, no puede contestarse afirmativamente. La respuesta que lógicamente fluye es negativa, y lleva a considerar este resultado como una coincidencia ocasional que, en otros casos, podría no verificarse.

Es admisible que superficies distintas tengan las mismas líneas de regresión, sin que pueda en el caso que estudiamos, atribuirse este resultado, a una propiedad del método de las funciones marginales, como en reciente publicación se lo ha hecho, mientras que, analíticamente, no se lo demuestre.

3. Los gráficos nos. 5 y 6 representan las sedásticas experimentales y las de la superficie teórica calculadas por el método de las funciones marginales; no se representan las que corresponden a la misma superficie calculada por el método de las quince constantes de Pearson, porque éste no ha hecho en su trabajo citado (²³) el cálculo de dichas funciones signaléticas.

Ya dijimos que la ecuación sedástica no era otra cosa que el desvío medio cuadrático de la función ligada con respecto a la media aritmética de la distribución que queda de una variable cuando se fija la otra, es decir, la media aritmética de las curvas, definidas por secciones de la superficie con planos paralelos al zx ; o al zy .

Se sabe que una superficie de correlación es una superficie en que las dos variables independientes están en ligazón estocástica, por tanto, en dependencia de probabilidad. Esto quiere decir que, la función de esas variables, que define la superficie, no se puede descomponer en el producto de dos funciones: una de una sola de las variables por otra de sólo la otra variable. Esas funciones se descomponen en el producto de otras dos: una de una sola variable, que es la función independiente, por otra de las dos variables, que es la función ligada.

(²³) PEARSON, KARL, *loc. cit.* (¹⁸).

TABLA XXIII.—Valores teóricos resultantes de la
Alturas barométricas en Southampton.—

X Y	31.1	31.0	30.9	30.8	30.7	30.6	30.5	30.4	30.3	30.2	30.1	30.0	29.9
31.0	(0.00)	(0.08)	(0.10)	(0.14)	(0.16)	(0.10)	—	—	—	—	—	—	—
30.9	(0.01)	(0.10)	0.36	0.62	0.75	0.54	(0.20)	(0.04)	—	—	—	—	—
30.8	(0.02)	0.20	0.58	1.19	1.93	2.18	1.56	(0.60)	(0.05)	—	—	—	—
30.7	(0.04)	0.27	0.68	1.63	3.26	4.79	4.89	3.29	(0.40)	(0.20)	—	—	—
30.6	(0.05)	0.29	0.64	1.70	4.13	7.58	9.95	9.10	5.62	2.13	(0.20)	(0.20)	(0.10)
30.5	(0.15)	(0.27)	0.51	1.43	4.06	9.20	15.12	17.62	14.41	8.10	2.99	0.66	(0.40)
30.4	(0.09)	(0.21)	0.37	1.01	3.19	8.78	17.91	26.07	26.95	19.72	10.14	3.66	1.02
30.3	(0.04)	(0.15)	(0.24)	0.63	2.04	6.67	16.84	30.43	39.10	35.86	23.54	11.18	4.07
30.2	—	—	(0.10)	0.36	1.11	4.08	12.67	28.41	45.16	51.19	41.70	24.71	11.07
30.1	—	—	—	(0.25)	0.56	2.07	7.69	21.39	42.04	58.62	58.59	42.52	23.01
30.0	—	—	—	(0.15)	0.29	0.98	3.85	13.33	31.82	54.51	66.57	58.70	38.18
29.9	—	—	—	—	(0.20)	0.48	1.66	6.64	19.77	41.58	61.91	66.11	51.50
29.8	—	—	—	—	(0.05)	(0.80)	0.71	2.92	10.32	26.40	47.74	61.57	57.35
29.7	—	—	—	—	—	(0.15)	0.32	1.23	4.74	14.30	31.07	48.14	53.52
29.6	—	—	—	—	—	(0.10)	(0.25)	0.54	2.06	6.89	17.53	32.26	42.62
29.5	—	—	—	—	—	(0.04)	(0.10)	0.24	0.90	3.12	8.91	19.05	29.63
29.4	—	—	—	—	—	—	(0.05)	(0.15)	0.39	1.37	4.22	10.22	18.44
29.3	—	—	—	—	—	—	—	(0.04)	0.16	0.57	1.85	5.06	10.45
29.2	—	—	—	—	—	—	—	—	(0.10)	0.22	0.65	2.30	5.40
29.1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	(0.10)	0.21	0.94	2.51
29.0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	(0.10)	0.34	1.03
28.9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	(0.20)	0.36
28.8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	(0.05)	(0.20)
28.7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	(0.05)
28.6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
28.5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
28.4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
28.3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
28.2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
28.1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
28.0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Totales	0.40	1.57	3.58	9.11	21.73	47.85	93.86	162.04	243.99	324.88	377.92	387.87	350.91

aplicación del método de las 15 constantes de K. Pearson

(Medidas en pulgadas).

29.8	29.7	29.6	29.5	29.4	29.3	29.2	29.1	29.0	28.9	28.8	28.7	28.6	Totales
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.58
—	3	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2.62
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	8.31
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	19.45
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	41.69
(0.10)	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	75.02
(0.30)	(0.10)	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	119.52
1.35	0.55	(0.40)	(0.10)	—	—	—	—	—	—	—	—	—	173.19
4.13	1.66	0.70	(0.50)	(0.10)	—	—	—	—	—	—	—	—	227.65
9.89	4.17	1.82	0.76	(0.50)	(0.11)	—	—	—	—	—	—	—	273.99
19.04	8.70	3.99	1.81	0.71	(0.30)	(0.10)	—	—	—	—	—	—	302.98
29.95	15.13	7.35	3.64	1.62	0.58	(0.30)	(0.05)	—	—	—	—	—	308.42
39.04	22.08	11.42	6.11	3.11	1.31	0.42	0.10	(0.05)	—	—	—	—	291.00
42.74	27.31	15.10	8.60	4.96	2.46	0.95	0.28	(0.10)	—	—	—	—	255.97
39.99	29.12	17.27	10.26	6.56	3.83	1.77	0.62	0.16	(0.05)	—	—	—	211.88
32.67	27.34	17.57	10.65	7.25	4.92	2.74	1.15	0.36	(0.15)	—	—	—	166.79
23.84	23.15	16.50	10.12	6.91	5.11	3.52	1.75	0.67	0.19	0.04	—	—	126.64
15.79	17.92	14.62	9.40	6.11	4.85	3.80	2.38	1.05	0.36	0.09	(0.05)	—	94.50
9.50	12.67	12.17	8.75	5.52	4.11	3.51	2.56	1.40	0.56	0.16	(0.10)	—	69.68
5.13	8.03	9.22	7.80	5.25	3.56	2.95	2.42	1.56	0.75	0.26	(0.20)	—	50.89
2.43	4.48	6.14	6.27	4.89	3.31	2.47	2.04	1.51	0.85	0.36	(0.20)	—	36.42
1.00	2.15	3.51	4.33	4.05	3.04	2.16	1.68	1.30	0.84	0.41	(0.25)	(0.05)	25.33
0.35	0.87	1.70	2.51	2.84	2.51	1.88	1.38	1.05	0.73	0.41	(0.25)	(0.05)	16.78
0.10	0.30	0.69	1.22	1.65	1.74	1.47	1.11	0.82	0.59	0.36	(0.20)	(0.05)	10.35
0.02	0.10	0.24	0.49	0.75	1.00	0.99	0.82	0.62	0.44	0.29	(0.15)	(0.05)	6.00
—	(0.04)	0.07	0.17	0.32	0.48	0.56	0.53	0.43	0.31	0.21	(0.13)	(0.03)	3.28
—	—	(0.04)	(0.10)	(0.16)	0.19	0.25	0.28	0.26	0.20	0.14	(0.12)	(0.02)	1.76
—	—	—	(0.02)	(0.08)	(0.09)	0.10	0.13	0.18	0.12	0.09	(0.05)	—	0.81
—	—	—	—	(0.03)	(0.05)	(0.05)	0.05	0.06	0.06	0.05	—	—	0.35
—	—	—	—	(0.01)	(0.01)	(0.02)	0.02	0.02	0.02	0.02	—	—	0.12
—	—	—	—	—	—	—	0.00	0.01	0.01	0.01	—	—	0.03
277.36	205.87	140.52	93.61	63.42	43.56	30.01	19.30	11.56	6.23	2.90	1.70	0.25	2922

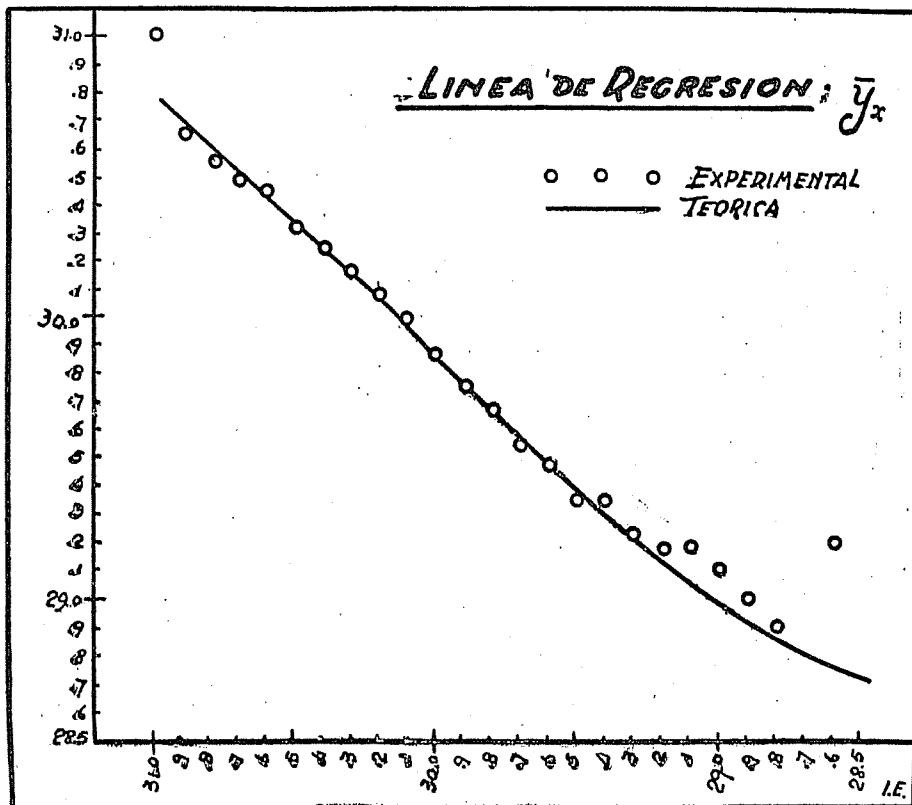


Gráfico N° 3

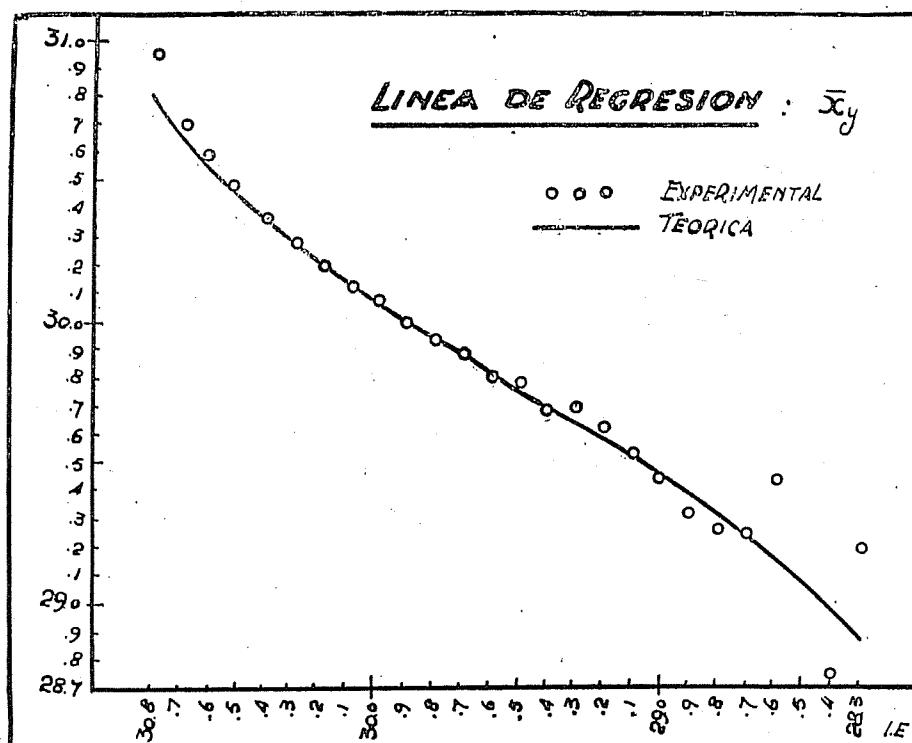
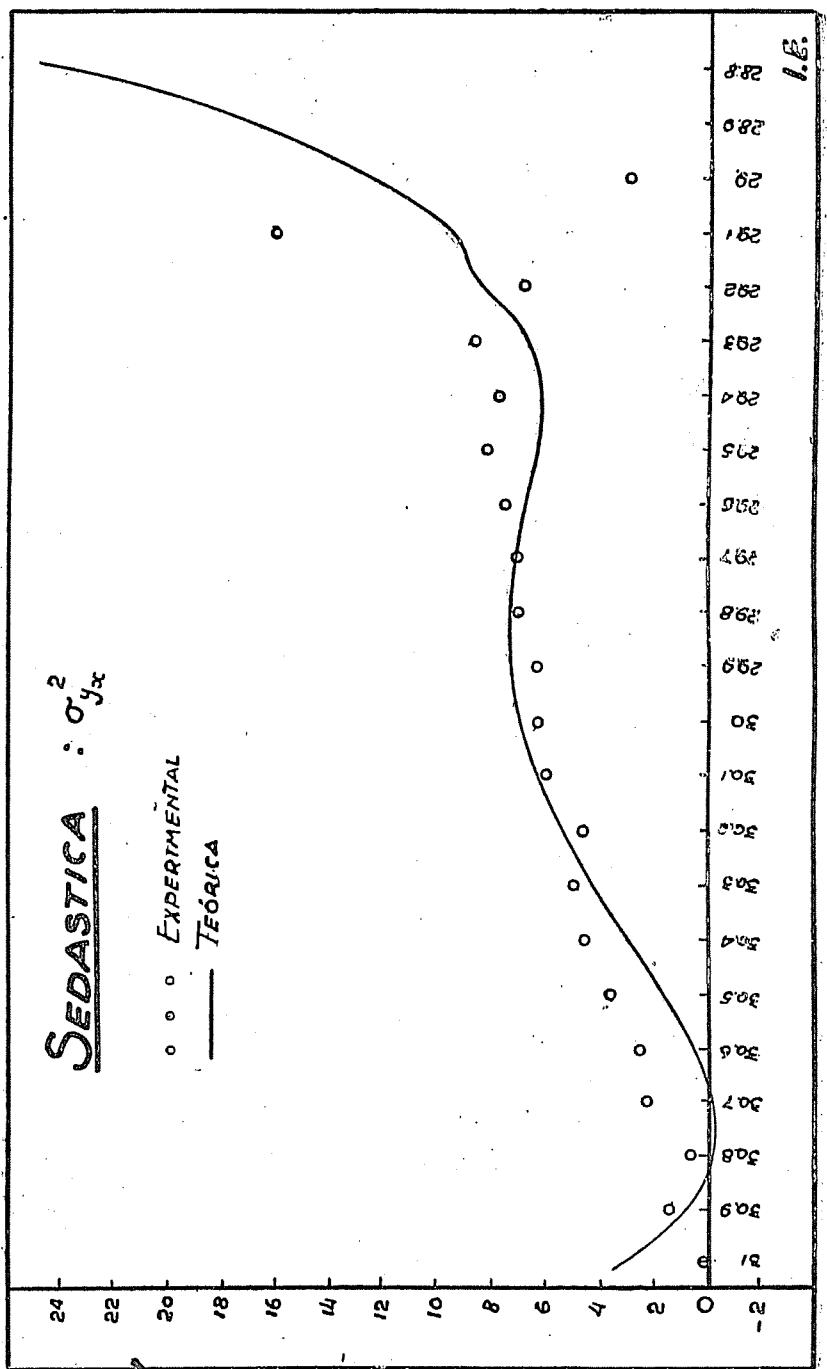
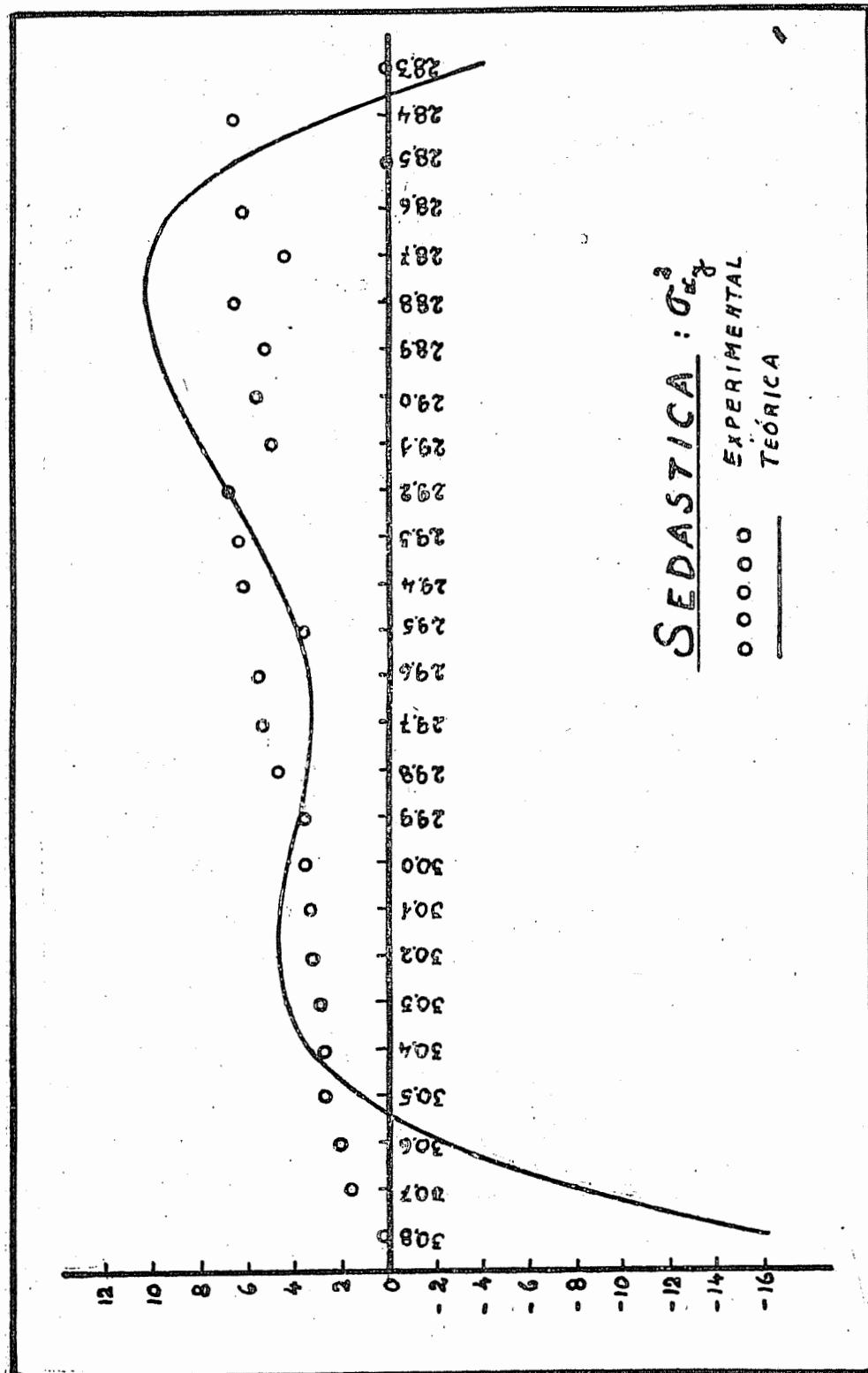


Gráfico N° 4





Si es $z = f(x, y)$ la ecuación de la superficie, será

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \varphi(x) \quad [69]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \varphi(y) \quad [70]$$

donde $\varphi(x)$ y $\varphi(y)$ son las funciones de las marginales x e y , respectivamente, que son las funciones independientes.

La descomposición indicada permite escribir

$$f(x, y) = \varphi(x) \Phi_x(x, y) \quad [71]$$

fórmula cuyo segundo miembro, en cálculo de probabilidades, tiene el siguiente significado: probabilidad de verificarse el suceso x (dada por $\varphi(x)$) por la probabilidad de verificarse el suceso y , cuando el x se ha verificado (dada por $\Phi_x(x, y)$).

Cabe también la descomposición simétrica

$$f(x, y) = \varphi(y) R_y(x, y) \quad [72]$$

con significado análogo al anterior.

$$\Phi_x(x, y) \text{ y } R_y(x, y)$$

son las funciones ligadas.

De [71] y [72] sale

$$\Phi_x(x, y) = \frac{f(x, y)}{\varphi(x)} \quad [73]$$

$$R_y(x, y) = \frac{f(x, y)}{\varphi(y)} \quad [74]$$

Habíamos definido las sedásticas así:

$$\sigma_{v_x}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) [y - \bar{y}_x]^2 dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy}$$

$$\sigma_{x_y}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) [x - \bar{x}_y]^2 dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx}$$

que en virtud de [69], [70], [71] y [72] podemos escribir de esta otra manera

$$\sigma_{y_x}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \Phi_x(x, y) [y - \bar{y}_x]^2 dx}{\varphi(x)}$$

$$\sigma_{x_y}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(y) R_y(x, y) [x - \bar{x}_y]^2 dx}{\rho(y)}$$

y simplificando queda:

$$\sigma_{y_x}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(x, y) [y - \bar{y}_x]^2 dy \quad [75]$$

$$\sigma_{x_y}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} R_y(x, y) [x - \bar{x}_y]^2 dx \quad [76]$$

que justifica la definición dada de dicha ecuación.

Ahora bien; por definir una superficie de frecuencias, es $f(x, y) > 0$; por la misma razón es $\varphi(x) > 0$ y $\rho(y) > 0$, por tanto, también son positivos los cocientes $\frac{f(x, y)}{\varphi(x)}$, $\frac{f(x, y)}{\rho(y)}$, es decir, los integrandos de las fórmulas [75] y [76] son esencialmente positivos, puesto que están formados por el producto de una función que es positiva por desvíos al cuadrado. Quiere, pues, decir que valores negativos en la sedástica no tienen sentido.

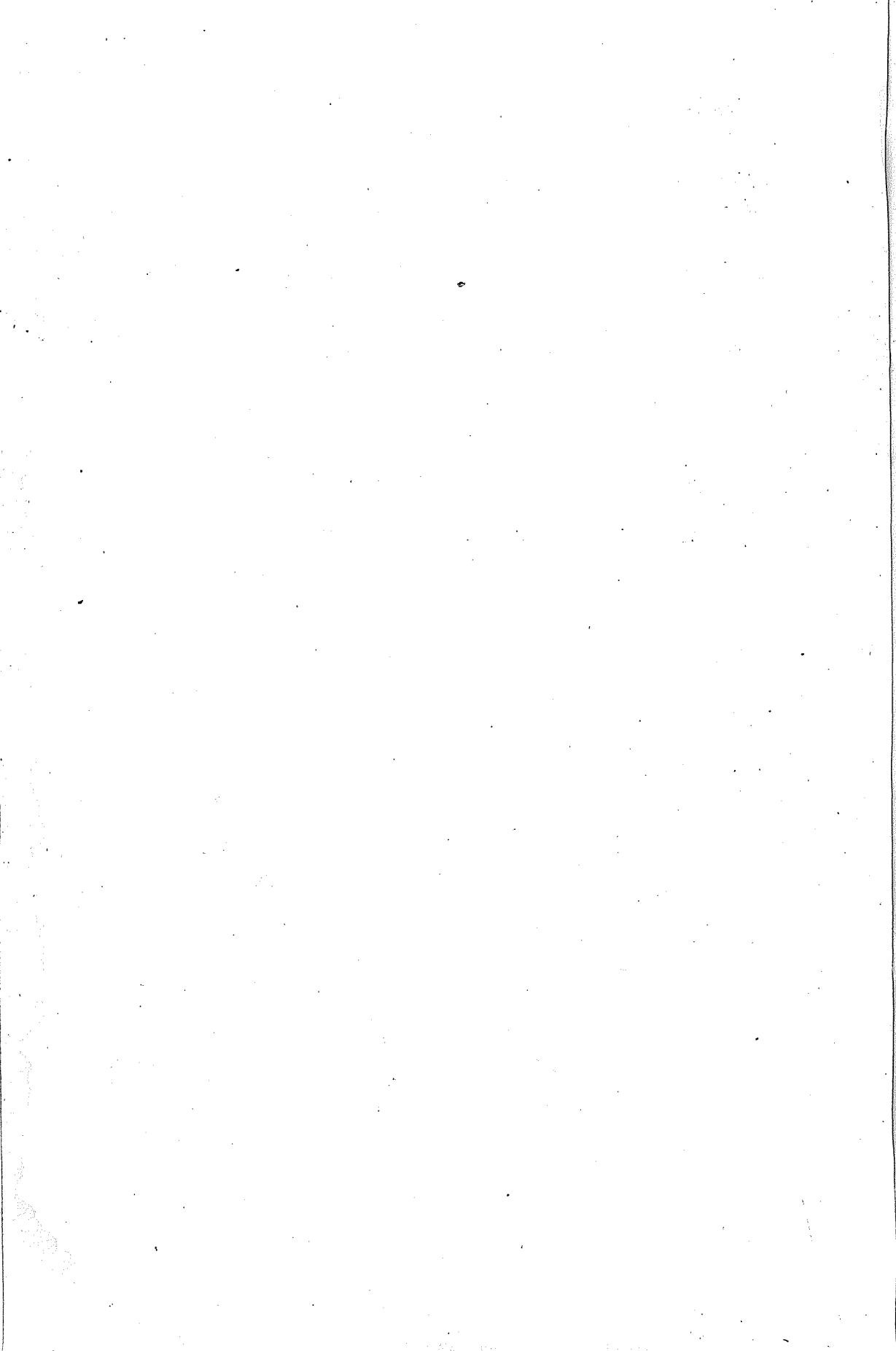
Esto es, precisamente, lo que ocurre con las sedásticas $\sigma_{y_x}^2$ y $\sigma_{x_y}^2$ de la superficie teórica definida por el método de las funciones marginales: en ambas figuran valores negativos, pero mientras en $\sigma_{y_x}^2$ para un intervalo parcial que comprende la parte de mayor densidad de frecuencias, la teórica ajusta, relativamente bien a la experimental; en $\sigma_{x_y}^2$ hay, además de valores negativos, tal discordancia en la marcha de la teórica respecto de la experimental que la primera pierde toda significación con respecto al fenómeno observado.

He aquí cómo, atribuyendo a propiedad del método el resultado, parcialmente satisfactorio, de $\sigma_{y_x}^2$, se habría estado inducido a error, lo que se ha constatado al calcular $\sigma_{x_y}^2$. Es prudente ligar esta observación con lo comentado en el n° 2 de este párrafo, al considerar la validez de los resultados acusados, por el cálculo, para las líneas de regresión teóricas.

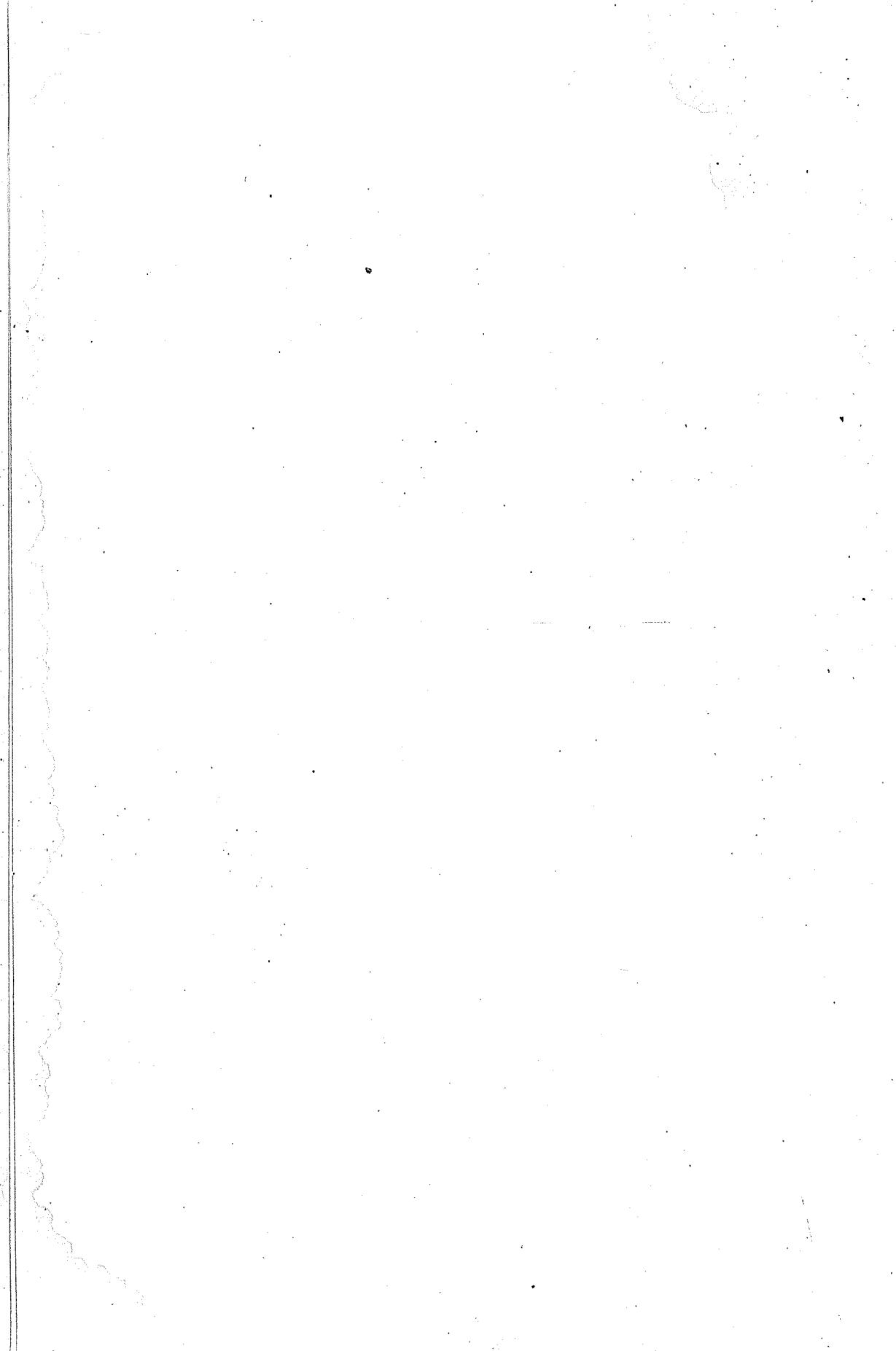
Los valores negativos que aparecen en las sedásticas calculadas tienen fácil explicación, recordando que, como se ha visto, la super-

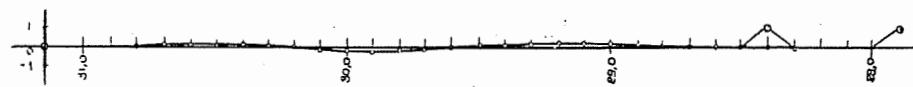
ficie teórica que define el método de las funciones marginales toma, valores negativos.

En conclusión, y como síntesis de la verificación experimental hecha, debemos expresar algo que, a fuerza de ser natural y lógico, aún, a priori, podría haberse dicho: sólo una buena ecuación de la superficie, vale decir, una superficie teórica que ajuste satisfactoriamente a la experimental, puede servir para el estudio y el análisis de dichas superficies o sea de los fenómenos que las mismas representan. De otra manera se está expuesto a los más graves errores y a llegar a conclusiones falsas.

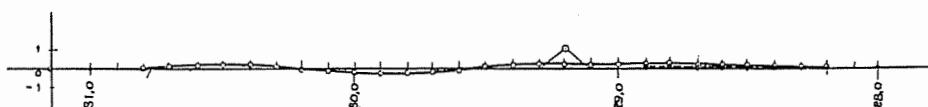


Representaciones gráficas de las secciones obtenidas por planos paralelos al *yz* comparando la superficie experimental (—○—○—) con las teóricas que resultan ajustando por el método de PEARSON (---●---●---) y por el método de las funciones marginales (—○—○—).

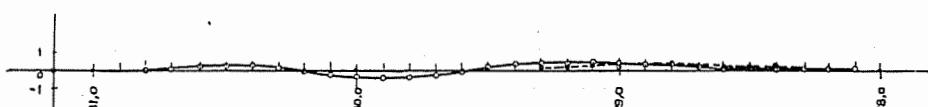




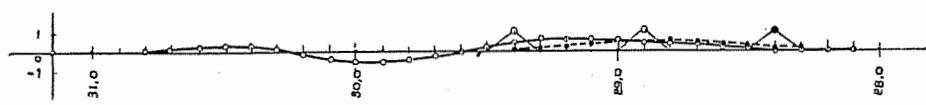
X = 28,5



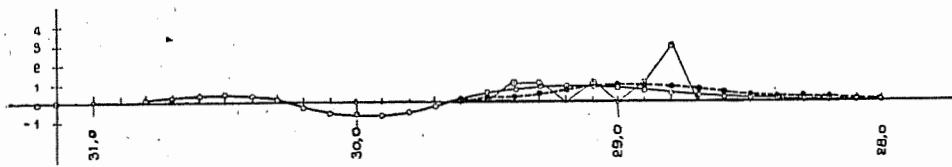
X = 28,6



X = 28,7



X = 28,8

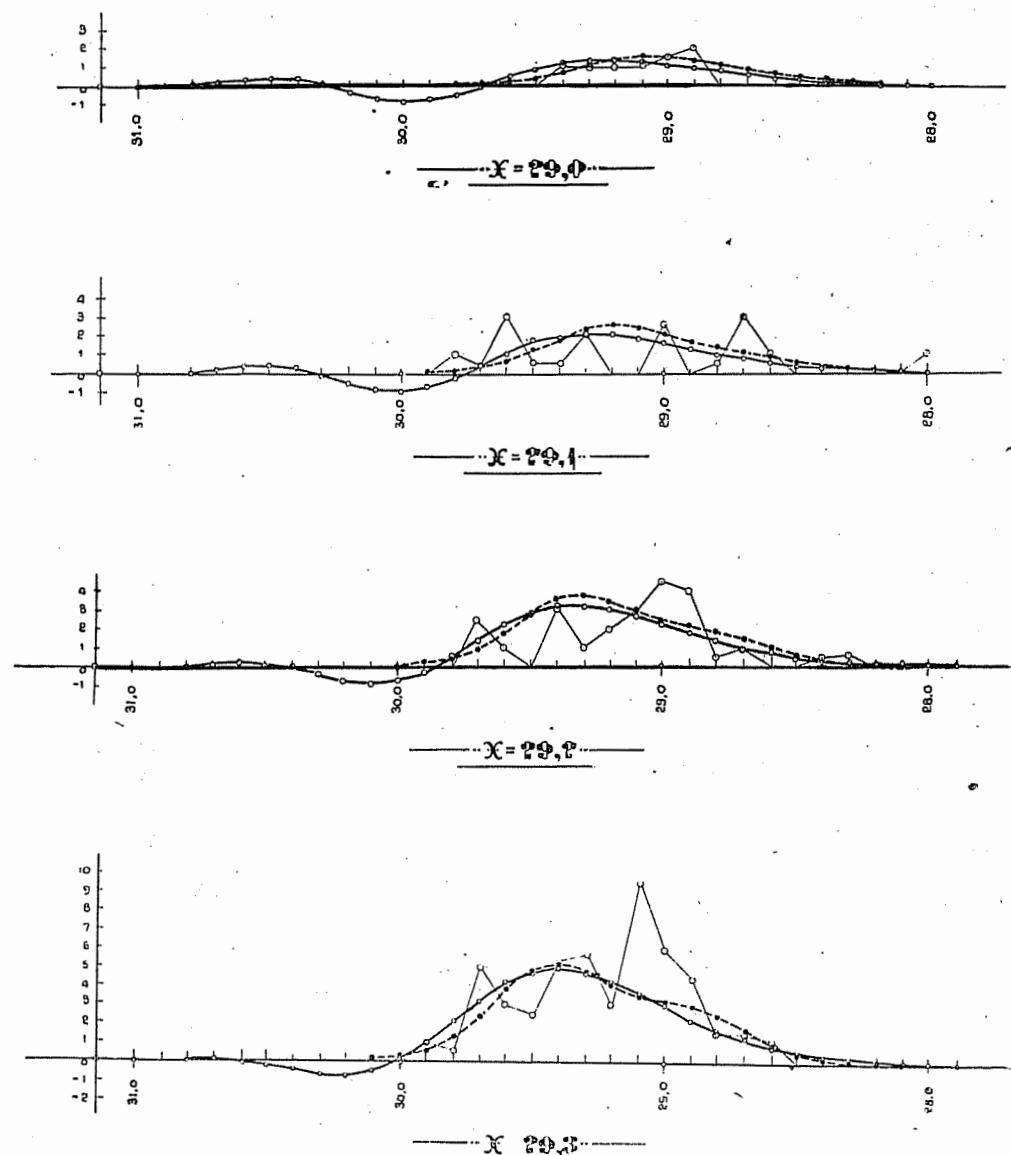


X = 28,9

—○—○— Experimental.

-----●----- Ajustada por el método de Pearson.

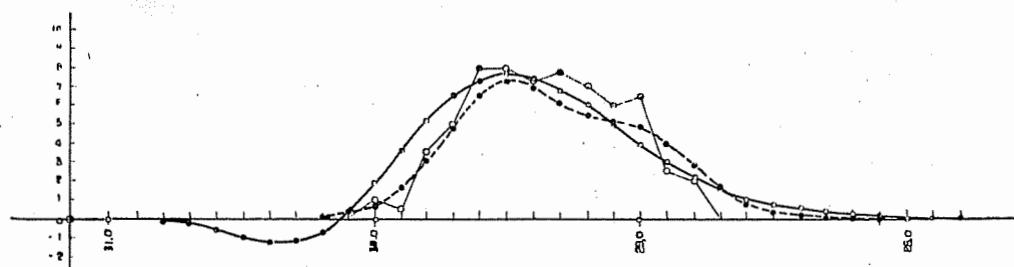
—○—○— Ajustada por el método de las funciones marginales.



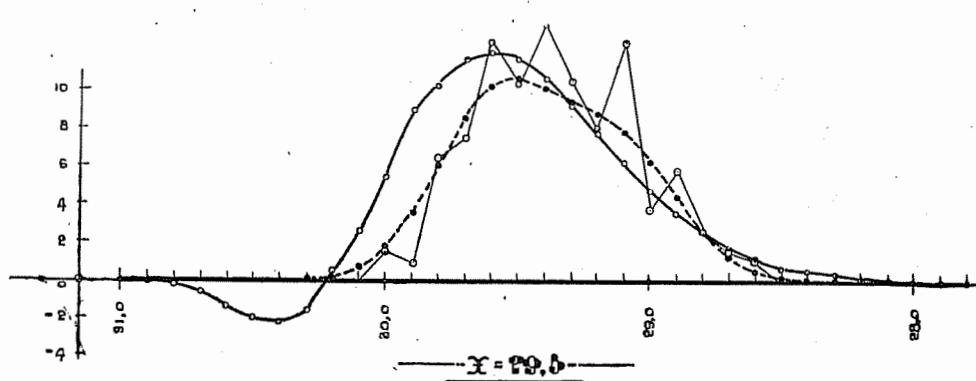
—○— Experimental.

-----●----- Ajustada por el método de Pearson.

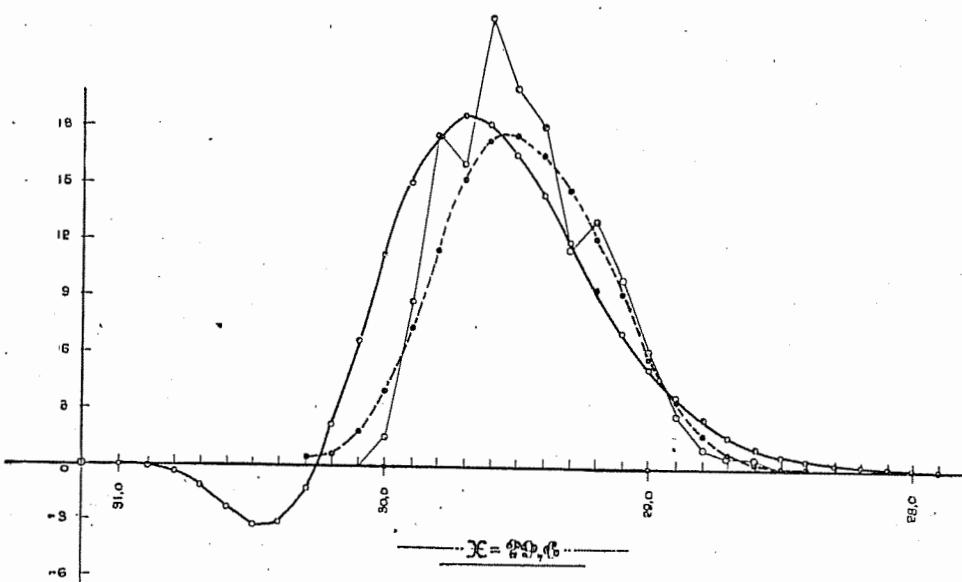
—○— Ajustada por el método de las funciones marginales.



$X = 29.4$



$X = 29.5$



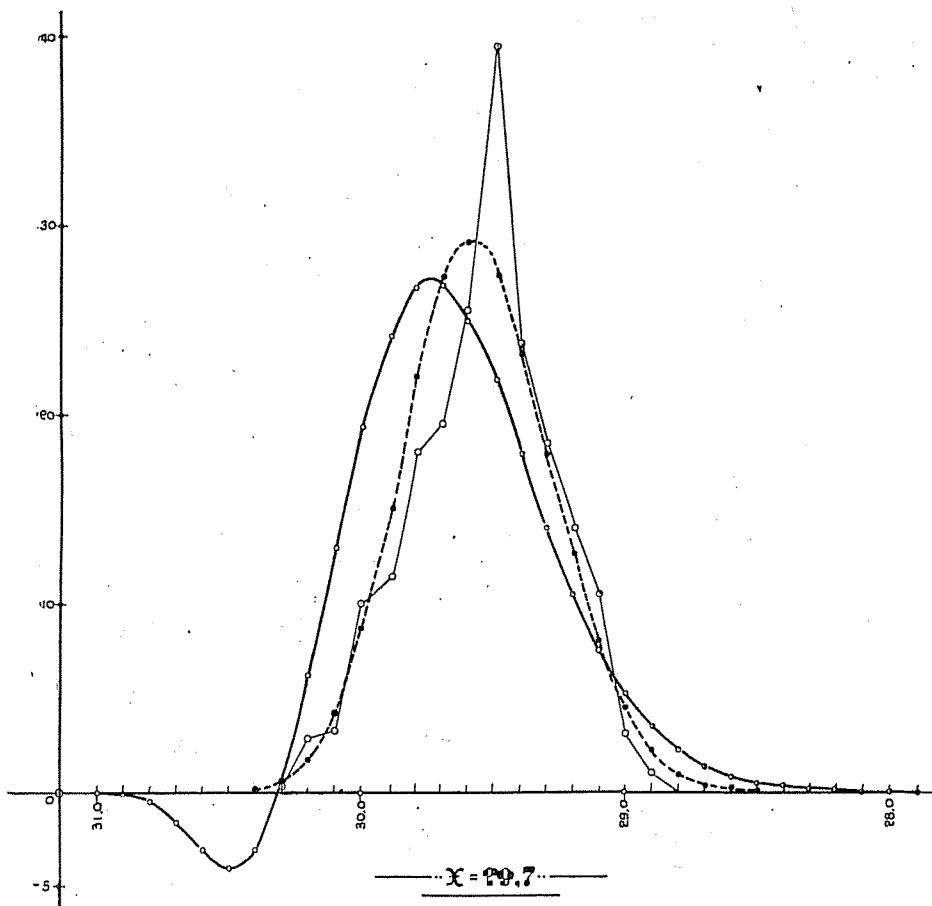
Experimental.

-----○-----

Ajustada por el método de Pearson.

-----○-----

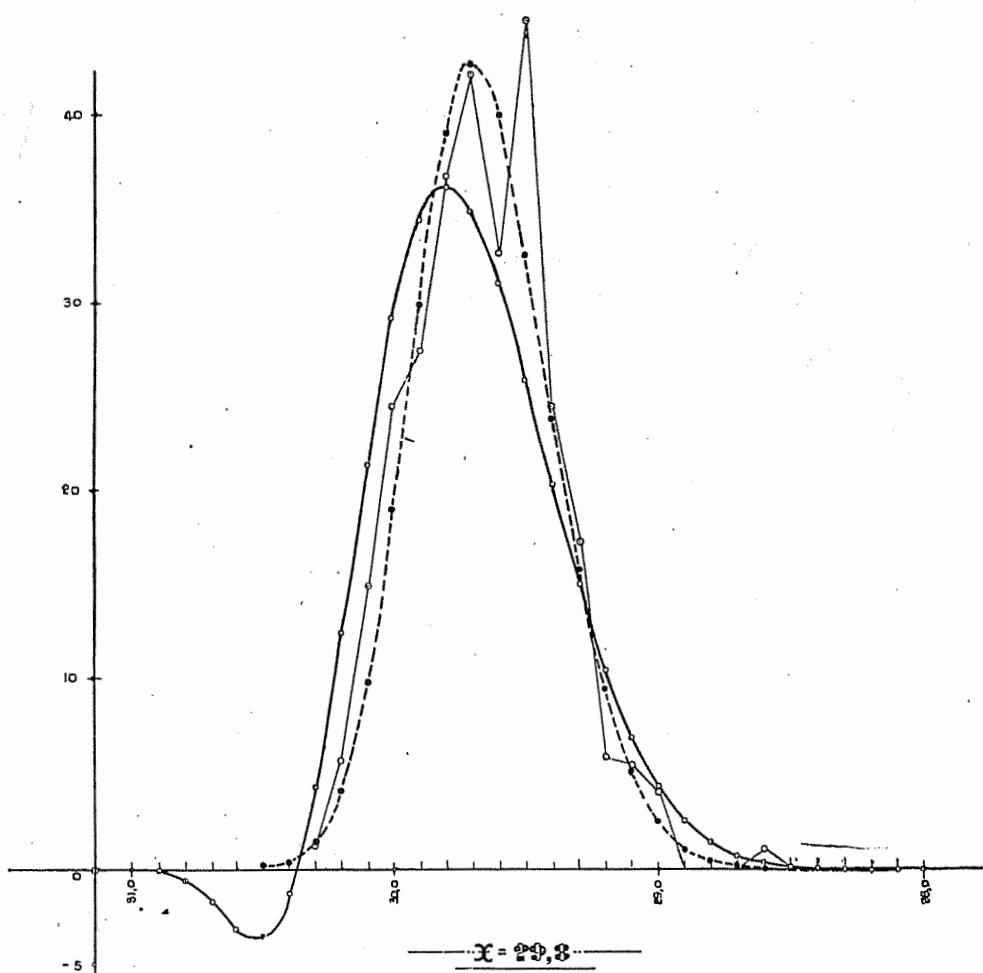
Ajustada por el método de las funciones marginales.



—○— Experimental.

—●— Ajustada por el método de Pearson.

—○— Ajustada por el método de las funciones marginales.



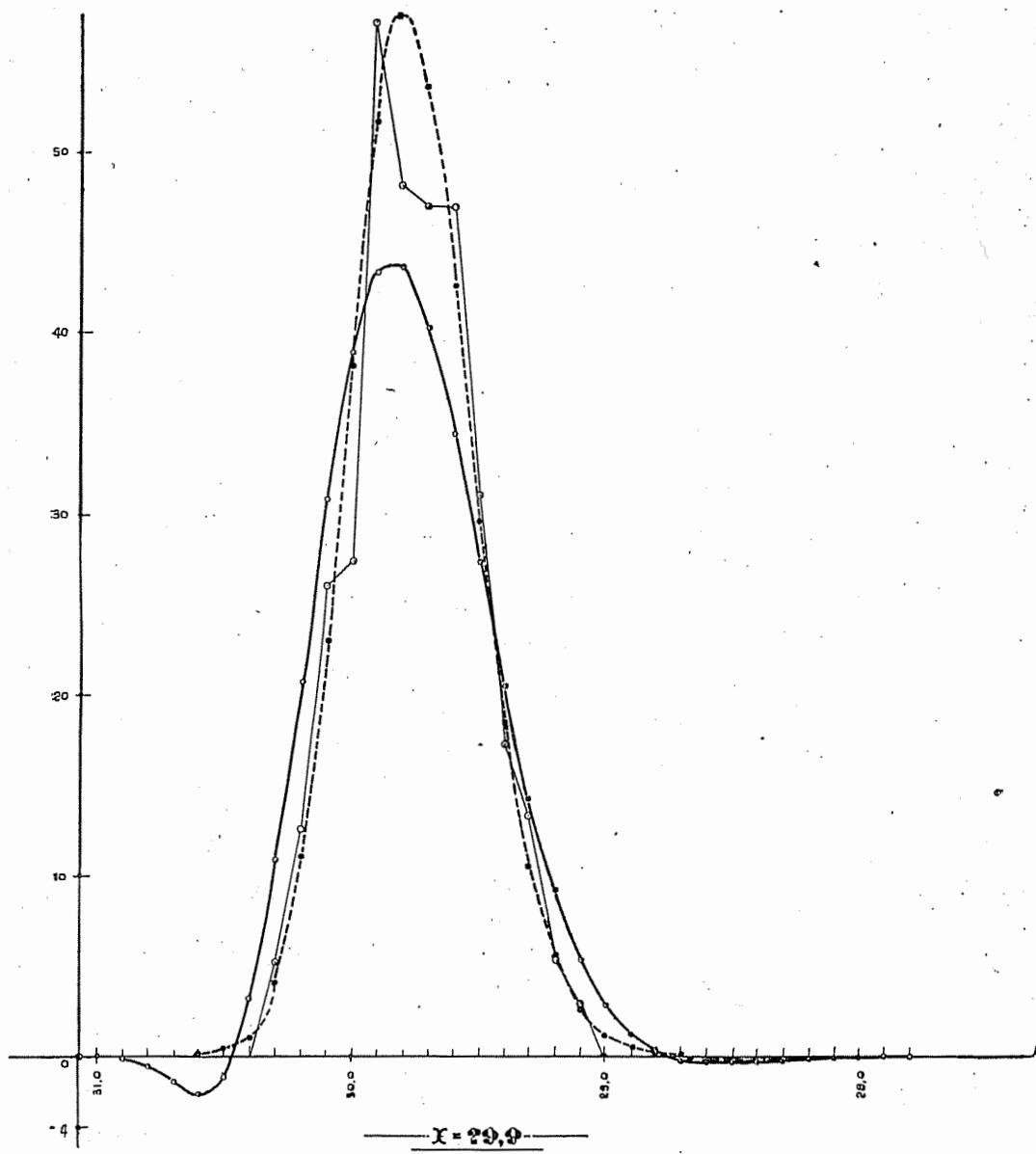
Experimental.

----- ● -----

Ajustada por el método de Pearson.

-----○-----

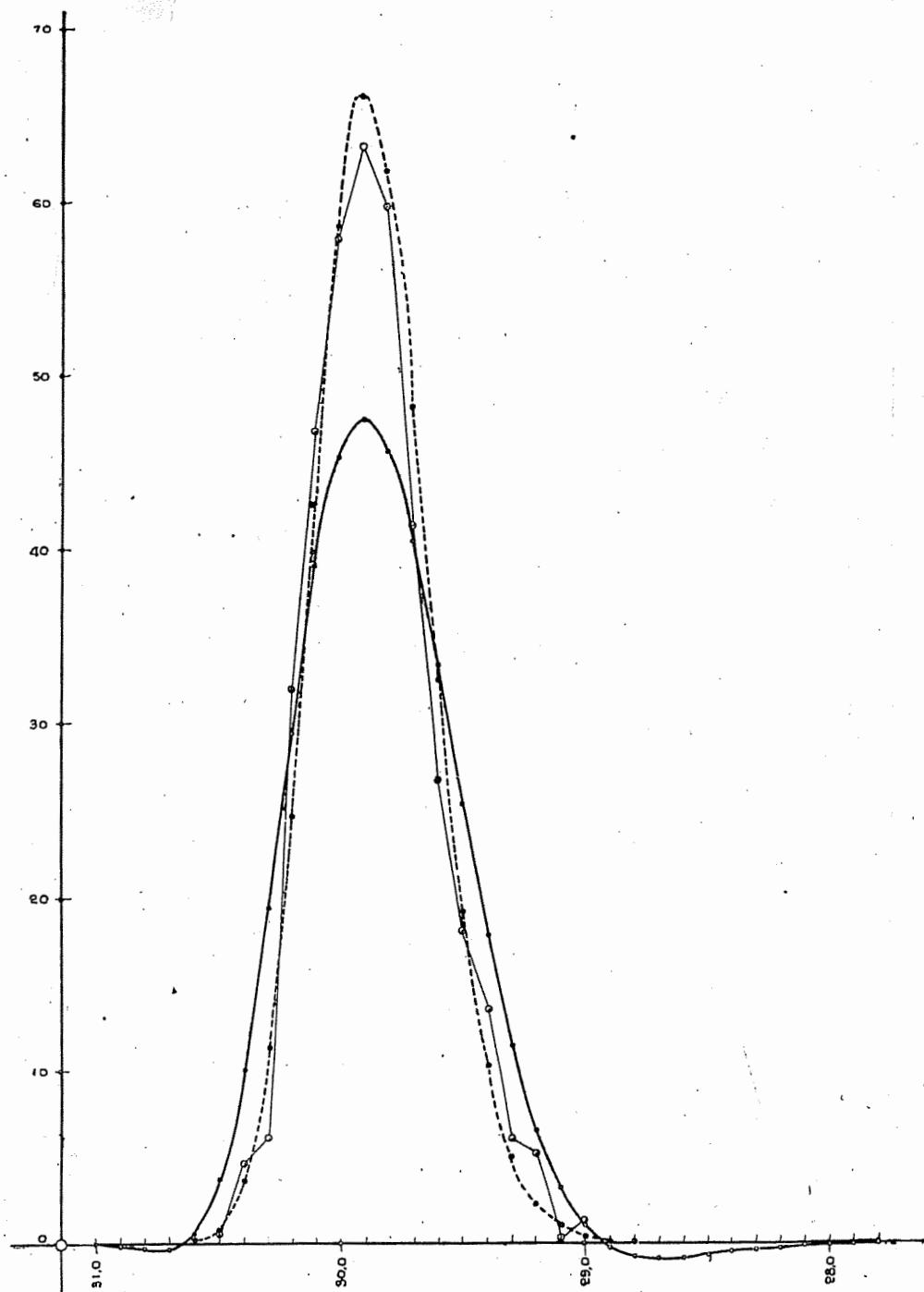
Ajustada por el método de las funciones marginales.



—○— Experimental.

···●··· Ajustada por el método de Pearson.

—○— Ajustada por el método de las funciones marginales.

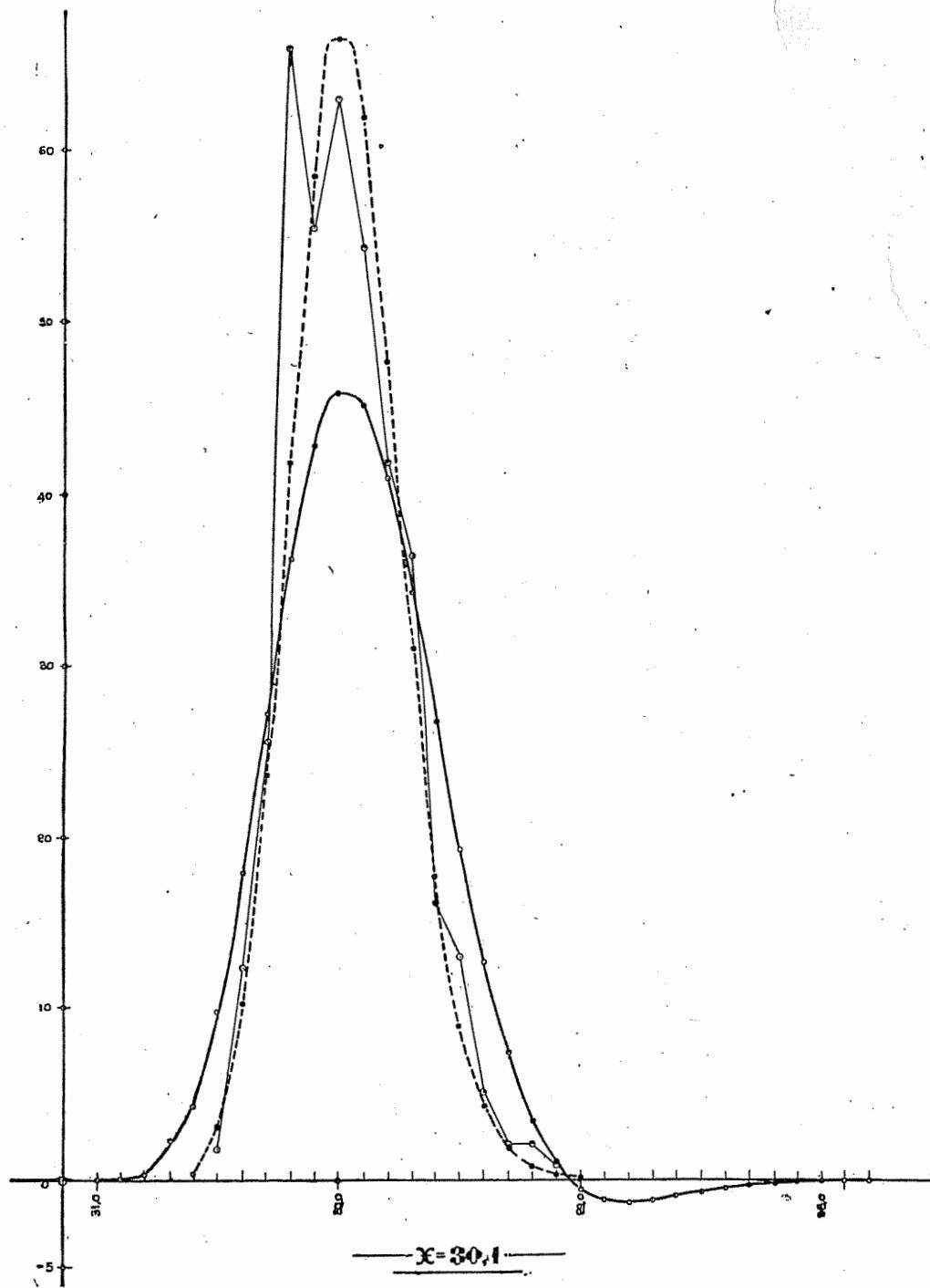


$X = 30.0$

Experimental.

Ajustada por el método de Pearson.

Ajustada por el método de las funciones marginales.

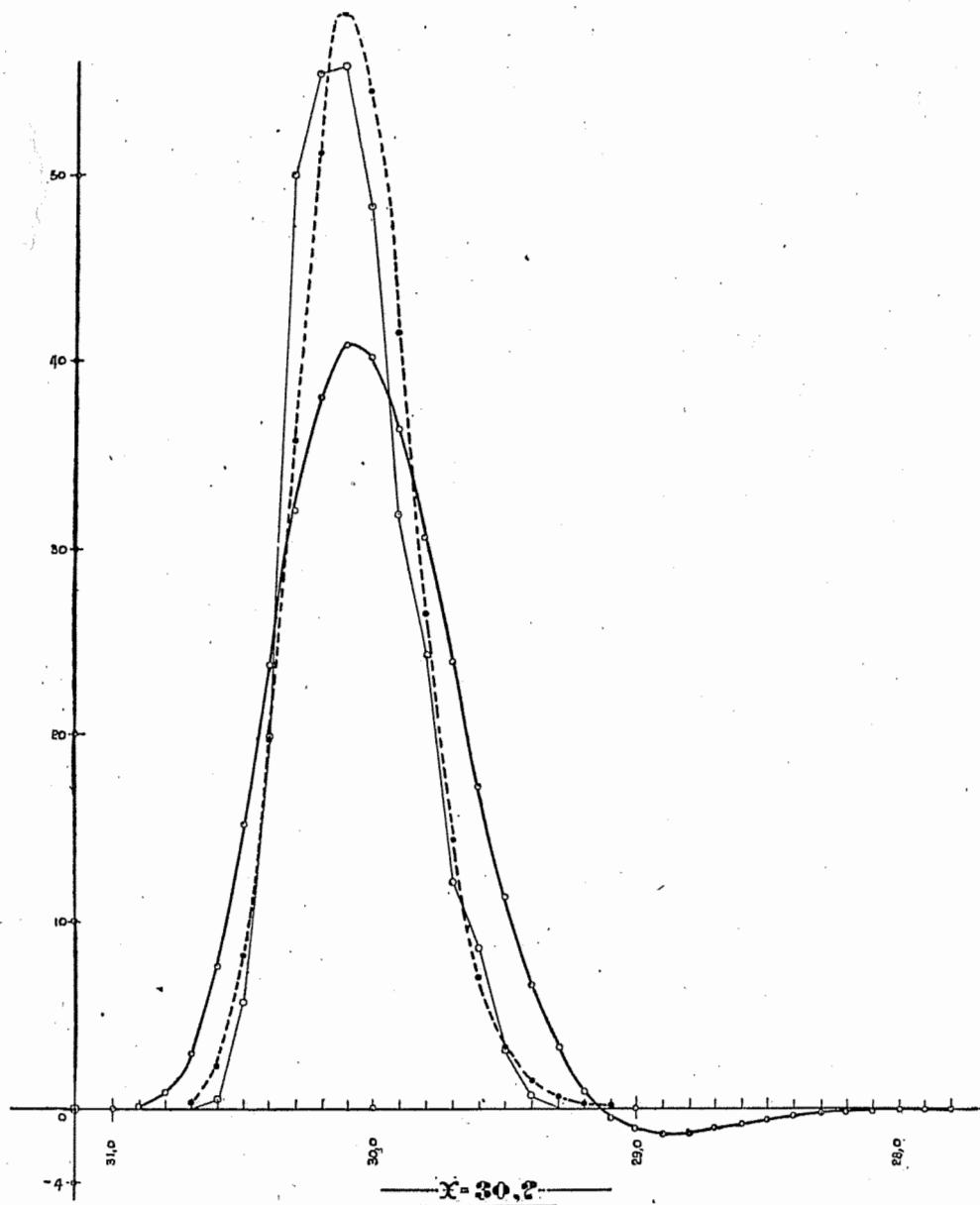


— $X = 30,4$ —

—○— Experimental.

-----●----- Ajustada por el método de Pearson.

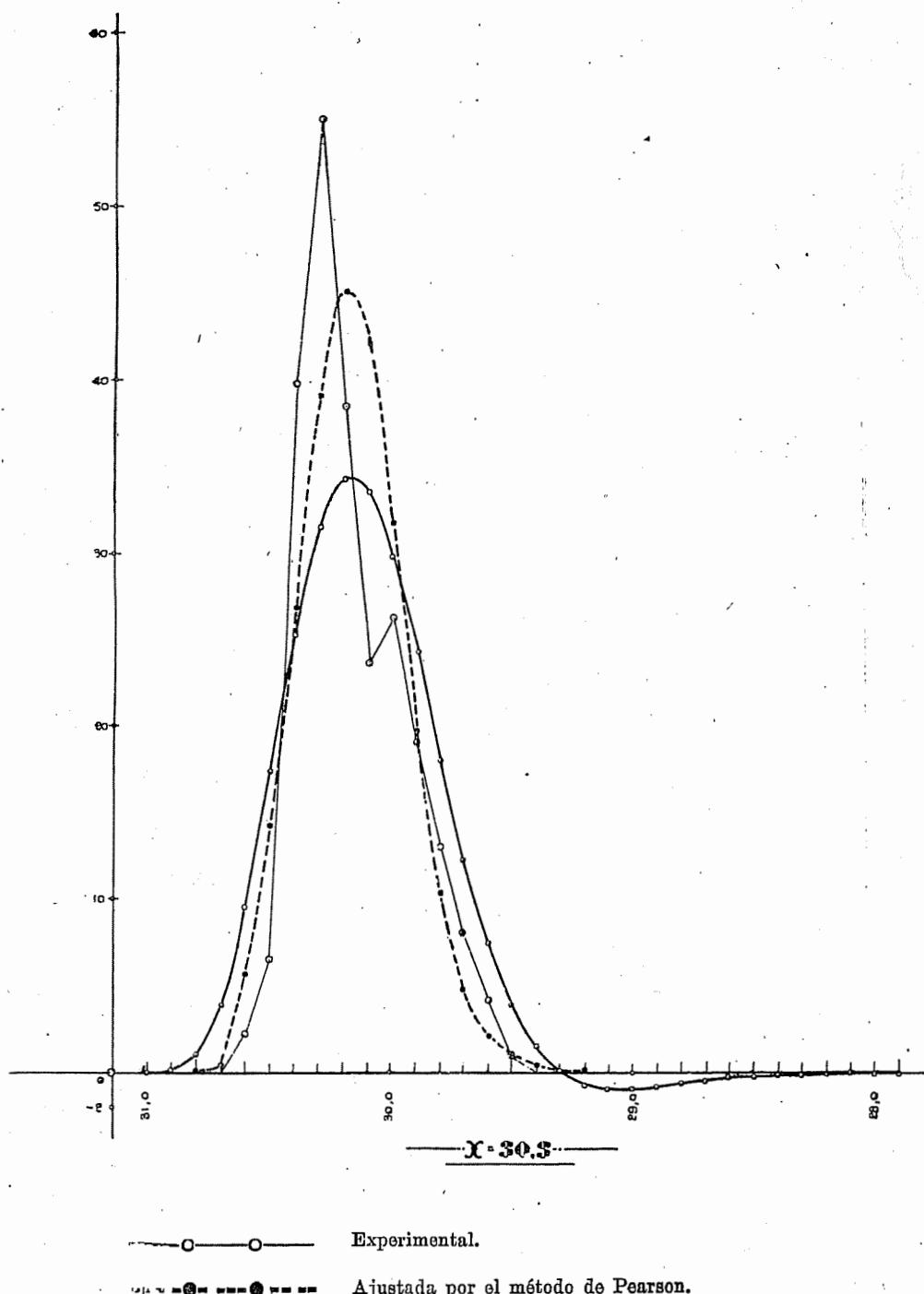
—○— Ajustada por el método de las funciones marginales.

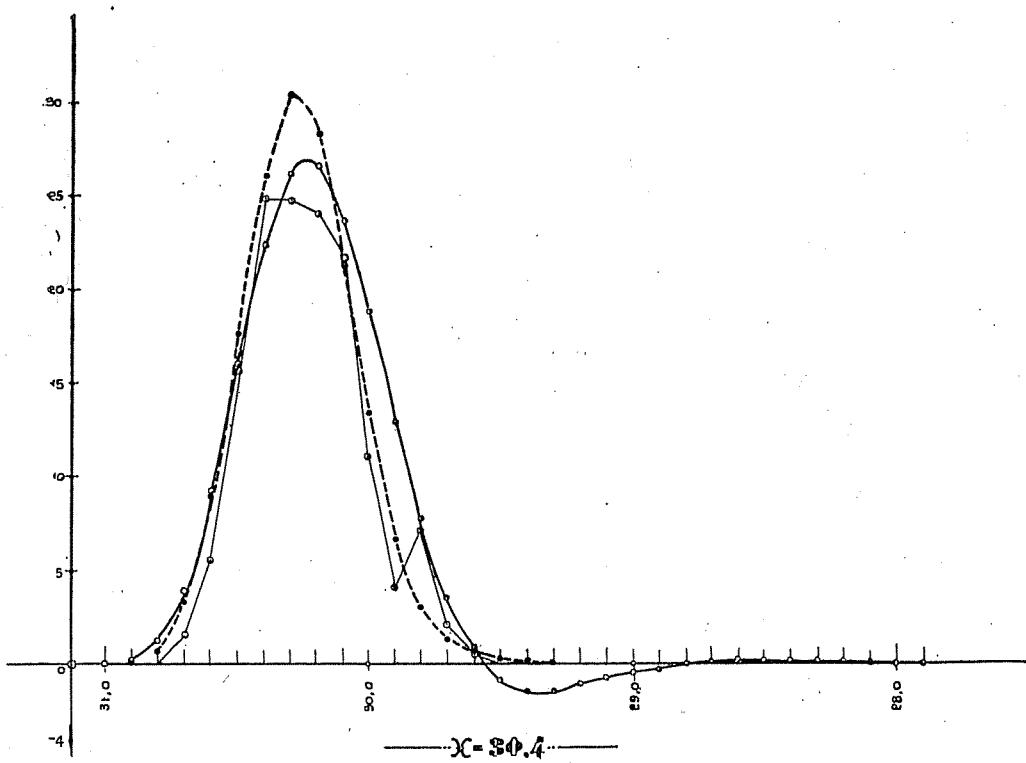


—○— Experimental.

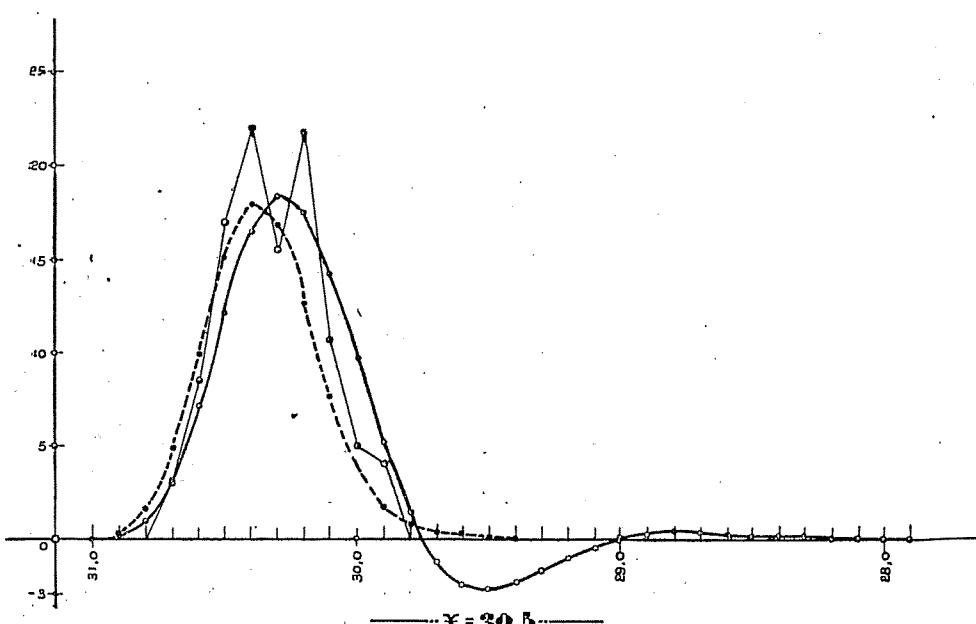
—●— Ajustada por el método de Pearson.

—○— Ajustada por el método de las funciones marginales.





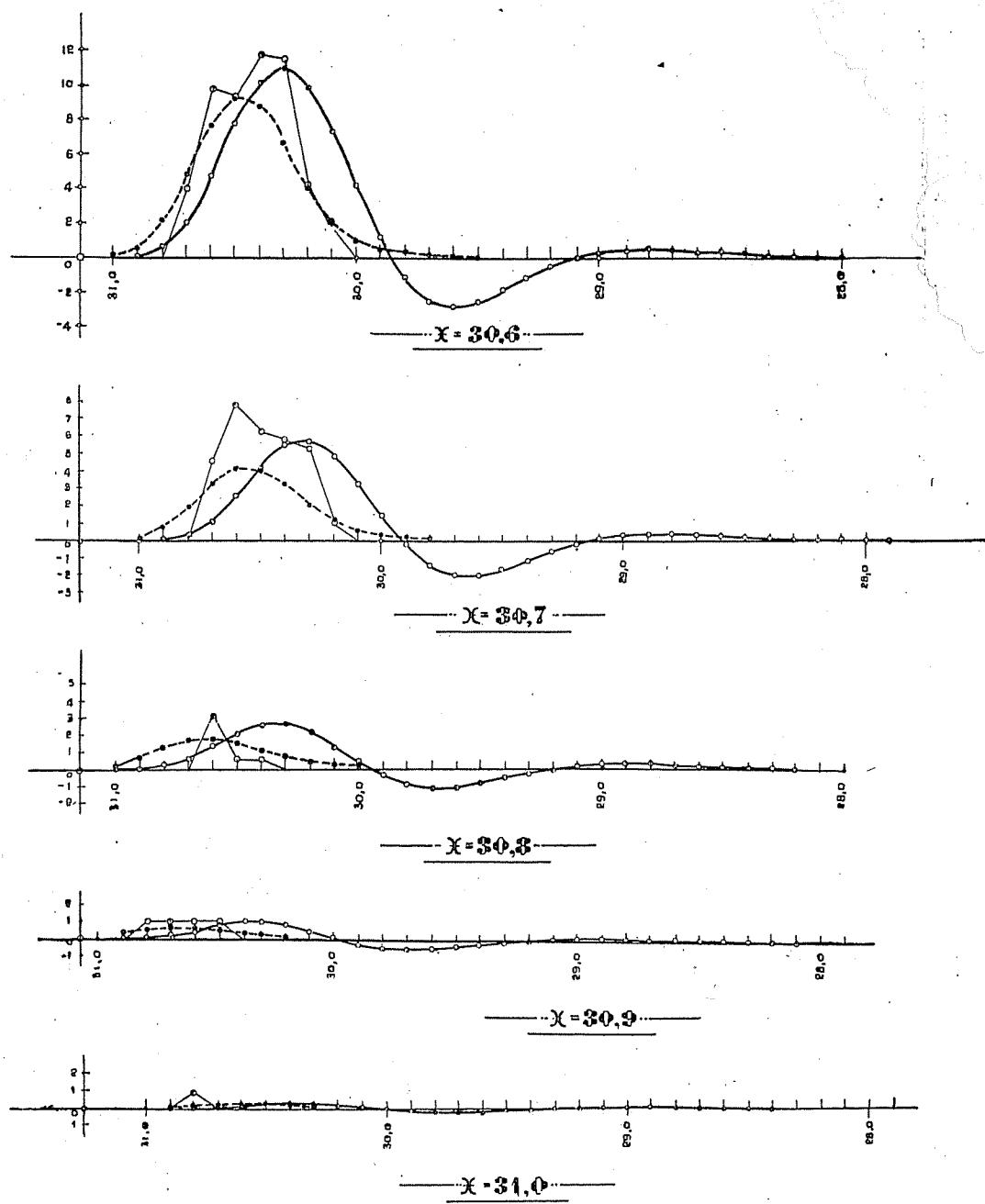
$X = 30.4$



Experimental.

Ajustada por el método de Pearson.

Ajustada por el método de las funciones marginales.



—○— Experimental.

-----●----- Ajustada por el método de Pearson.

—○— Ajustada por el método de las funciones marginales.

BIBLIOGRAFIA

- BULA, CLOTILDE A.— 1. *Las superficies de frecuencias*, en Revista de Ciencias Económicas, febrero de 1938, Buenos Aires.
2. *Exposición del método de Pearson, Estudio de los tipos básicos I, IV y VI* (en prensa).
3. *Teoría y cálculo de los momentos dobles. Centraje. Correcciones de Sheppard. Método simplificador de Mitropolsky*. Rosario, 1940.
- CHARLIER, C. V. L.— *Grundzüge der Mathematischen Statistik*, Lund, 1920.
(Hay versión castellana del Dr. José González Galé. Buenos Aires, 1936).
- ELDERTON, W. PALIN.— *Frequency curves and correlation*, Londres, 1927.
- GASPAR, FERNANDO L.— 1. *Sobre los polinomios ortogonales a dos variables y generalización de la superficie de Bravais*, en Anales de la Soc. Científica, febrero de 1936, E. II, T. CXXI, pág. 74 y sig., Buenos Aires.
2. *La función de primera aproximación y la definición analítica de las superficies de frecuencias experimentales*, en Anales de la Soc. Científica Argentina, enero de 1937, E. I, T. CXXIII, pág. 39 y sig., Buenos Aires.
3. *La ortogonalidad sin ponderación. El problema de Hermite*, en Anales de la Soc. Científica Argentina, setiembre de 1937, E. III, T. CXXIV, págs. 176-193, Buenos Aires.
4. *Sobre los desarrollos en serie de polinomios ortogonales de varias variables, cumpliendo la condición de convergencia en media*, en Anales de la Soc. Científica Argentina, marzo de 1938, E. III, T. CVVX, págs. 174-180, Buenos Aires.
5. *La interpolación en el caso de varias variables, con una introducción de polinomios ortogonales, en el campo discontinuo*. Obras editadas por la Facultad de C. Económicas, Comerciales y Políticas de la Univ. Nacional del Litoral, Serie I, Vol. II, Rosario, 1938.
6. *Sobre algunas series funcionales*. Publicaciones de la facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional del Litoral. Serie: Técnico-Científica, N° 10, Rosario, 1937.
- MITROPOLSKY, A. M.— *Teoría de momentos*. Leningrado, 1933 (en ruso).
- RISSE R. et TRAYNARD C. E.— *Les principes de la Statistique Mathématique*, pag. 37, Paris, 1937.
- TSCHETWERIKOFF, N. S.— *Teoría de momentos sobre la técnica del cálculo de series estadísticas parabólicas* (en ruso). Publicaciones del Instituto de Conjuntura de Moscú. Vol. 2, 1926.
- Véase también:
- BIOMETRIKA VOL. XVII Parts. III and IV, December 1925, pág. 268, *The fifteen Constant Bivariate Frequency Surface*.
VOL. XXII Parts I and II, July 1930, pág. 109. *Skew Bivariate Frequency Surface*.
VOL. XXVI Parts III and IV, December 1934, pág. 379. *Contribution à l'étude de la théorie de la corrélation*.