

Roberto Frucht.

Zur Geometrie auf einer Fläche
mit indefiniter Metrik.

Sobre la Geometría en una
superficie con métrica
indefinida.

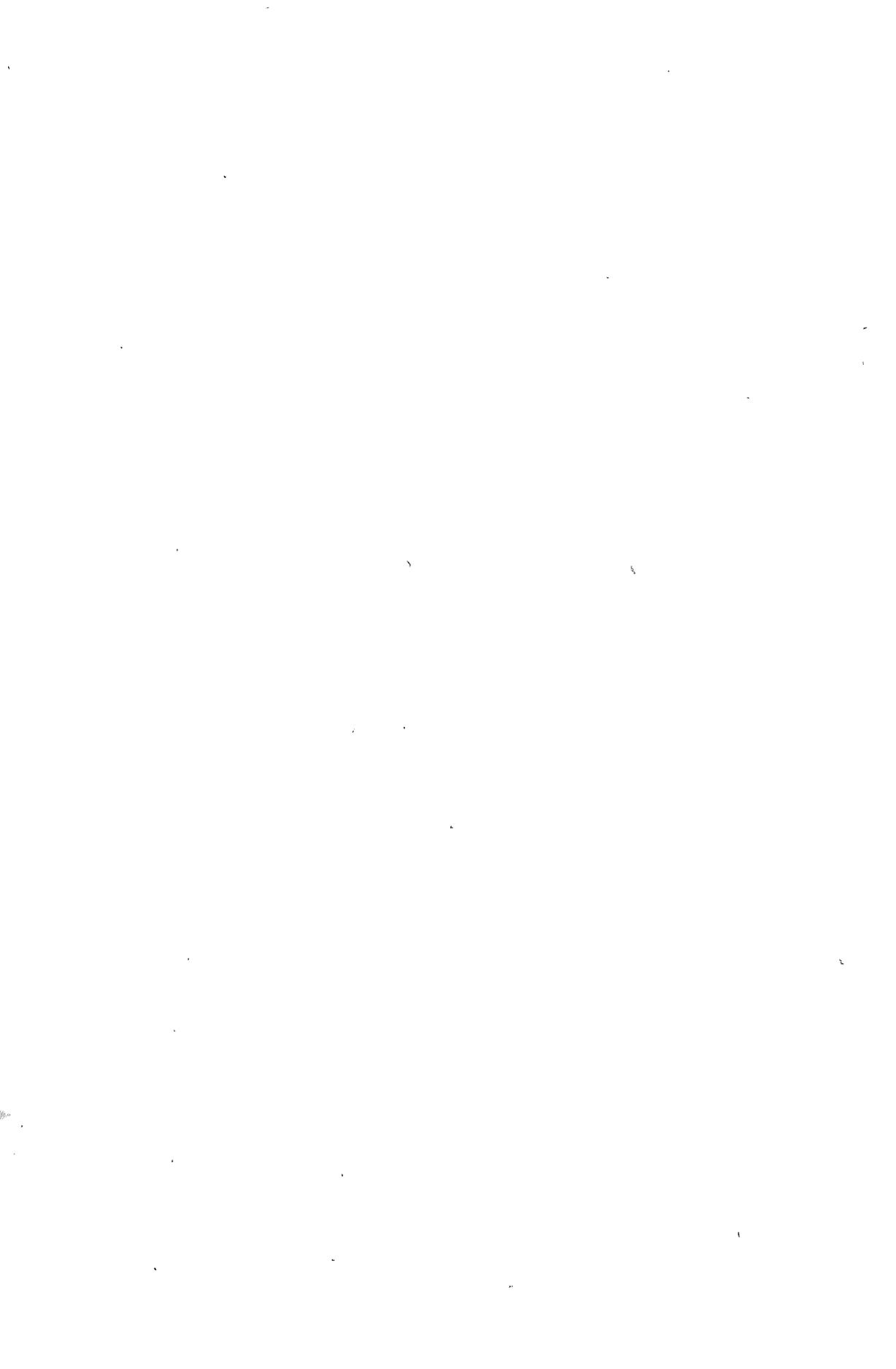
UNION MATEMATICA ARGENTINA

Publicación N° 11



BUENOS AIRES

1940



Roberto Frucht.

Zur Geometrie auf einer Fläche
mit indefiniter Metrik.

Sobre la Geometría en una
superficie con métrica
indefinida.

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Publicación N° 11

BUENOS AIRES

1940



ZUR GEOMETRIE AUF EINER FLÄCHE MIT INDEFINITER METRIK

Von Dr. ROBERT FRUCHT

EINLEITUNG

Wenn man die elementare Flächentheorie, d. h. die Geometrie der Flächen im dreidimensionalen euklidischen Raum entwickelt, so zeigt sich, dass die geometrischen Eigenschaften einer solchen Fläche durch zwei invariante quadratische Differentialformen bestimmt werden. Ein besonders wichtiges Kapitel der Flächentheorie ist aber die (durch Gauss begonnene) Untersuchung der "inneren" Eigenschaften einer Fläche, die nur von den Massverhältnissen auf der Fläche selbst, nicht aber von denen des umgebenden Raumes abhängen. Da die Massverhältnisse auf der Fläche selbst vollkommen durch die erste der beiden soeben genannten quadratischen Differentialformen festgelegt sind, indem diese das Quadrat des "Bogenelements" (d. h. der Entfernung zweier "unendlich" benachbarter Punkte) darstellt, läuft also die Untersuchung der "inneren" Eigenschaften einer Fläche darauf hinaus, diejenigen Eigenschaften der Fläche festzustellen, bei denen nur eine einzige quadratische Differentialform auftritt. Hierher gehören z. B. der Gauss'sche Satz von der Invarianz des Krümmungsmasses ("theorema egregium"), die geodätische Krümmung von Kurven auf der Fläche und die Gauss-Bonnetsche Integralformel; auch die sich für $n = 2$ ergebende Spezialisierung der allgemeineren Riemannschen Geometrie, die eine invariante quadratische Differentialform in n Veränderlichen zu Grunde legt, würde hierher gehören.

Entsprechend ihrer Herleitung als *Quadrat* des Bogenelements:

$$[1] \quad ds^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2$$

ist diese erste Grundform der Flächentheorie positiv definit, d. h.

$$[2] \quad E > 0, \quad EG - F^2 > 0.$$

Bei einigen Sätzen und Begriffsbildungen der "inneren" Geometrie einer Fläche ist diese Voraussetzung aber gar nicht we-

sentlich; z. B. lässt sich das Krümmungsmass einer solchen quadratischen Differentialform

$$[3] K = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left\{ \begin{array}{ccc} -\frac{1}{2}G_{uu} + F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv}, & \frac{1}{2}E_u, & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{array} \right\}$$

(wobei die angehängten Indices partielle Ableitungen bedeuten) ebenso gut durch dieselbe Formel auch bei einer indefiniten Form definieren, sofern nur $EG - F^2 \neq 0$ ist. Hingegen wird schon die Bogenlänge

$$[1a] \quad ds = \sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}$$

selbst nicht immer reel ausfallen, sondern für einige Richtungen auch imaginär (diese Tatsache ist aus der speziellen Relativitätstheorie der "Ereignisse auf einer Geraden" durchaus geläufig, wo es "raumartige und "zeitartige" Richtungen gibt; dieser spezielle Fall ergibt sich, wenn man z. B. u als räumliche, v als zeitliche Variable deutet und $E = 1$, $F = 0$ und $G = c^2$ setzt!), sofern man diese Schwierigkeiten nicht einfach dadurch umgeht, dass man 1a) durch die Definition

$$[1b] \quad ds = \sqrt{|E du^2 + 2F du dv + G dv^2|}$$

ersetzt. Eine ähnliche Schwierigkeit ergibt sich bei der Definition der geodätischen Krümmung auf Grund einer indefiniten Differentialform.

Wegen dieser Schwierigkeiten mag es also auf den ersten Blick nicht geraten erscheinen, sich etwas von einer Geometrie mit einer indefiniten binären quadratischen Differentialform zu versprechen, und dies mag auch der Grund sein, warum eine solche meines Wissens bisher nicht ausgebaut worden ist, zumal da wohl ein zwingender geometrischer Anstoss zur Entwicklung einer solchen Theorie fehlte. Andererseits zeigt sich jedoch, dass die Geometrie einer indefiniten Form viel anschaulicher ist als die übliche Geometrie auf einer Fläche mit definiter Metrik, und zwar aus dem folgenden einfachen Grunde:

Die Nullrichtungen der Form (1), d. h. diejenigen Richtungen $du : dv$, für welche $ds^2 = 0$ ist, sind unter der Voraussetzung (2) imaginär, so dass man sie zwar zur Herleitung geo-

metrisch anschaulicher Ergebnisse *indirekt* verwenden kann, ihnen aber ein direkter geometrisch anschaulicher Inhalt im reellen Gebiet fehlt. Ist hingegen

$$[4] \quad EG - F^2 < 0,$$

so gehen durch jeden Punkt der Fläche zwei verschiedene reelle Nullrichtungen, und diese schliessen sich zu zwei reellen Kurvenscharen zusammen. Auch diese Tatsache ist aus der Flächentheorie wohl bekannt und zwar nicht von der definiten ersten Grundform, die wir bisher betrachtet haben, sondern von der sogenannten zweiten Grundform

$$[5] \quad -d\sigma d\xi = L du^2 + 2M du dv + N dv^2,$$

die bei hyperbolisch gekrümmten Flächen ($LN - M^2 < 0$) indefinit ist. In diesem Falle bezeichnet man die Nullrichtungen als Asymptotenrichtungen und die beiden erwähnten Kurvenscharen als die Asymptotenlinien der Fläche.

Die Existenz solcher reellen Kurvenscharen ermöglicht nun durch die Betrachtung des Flächeninhalts der von ihnen gebildeten Vierecke die den Gegenstand der vorliegenden Arbeit bildende anschauliche Deutung des Gauss'schen Krümmungsmasses (§§ 1 & 2) und der geodätischen Krümmung einer Kurve (§ 3), sowie eine äusserst elementare Herleitung des Gauss-Bonnetschen Integralsatzes (§ 4) — alles natürlich nur für den Fall einer indefiniten quadratischen Differentialform, für welche (4) erfüllt ist. Diese letztere Einschränkung scheint den geometrischen Wert dieser Ergebnisse etwas herabzumindern, wenn man nur an die elementare Flächentheorie denkt, wo die erste Differentialform (1) die Voraussetzung (4) ja nicht erfüllt, sondern nur unter Umständen die zweite, die aber allein (ohne die erste) in geometrischen Fragestellungen eigentlich niemals auftritt.

Anders wird die Sache aber, wenn wir uns der affinen Differentialgeometrie der Flächen zuwenden, denn dort tritt die zweite Grundform der elementaren Flächentheorie in anderer Normierung gerade als erste Grundform auf. Bezeichnen wir die Koeffizienten dieser ersten Grundform der affinen Flächentheorie nach dem Vorgang von Herrn Blaschke wieder mit $E, 2F, G$, so ist für hyperbolisch gekrümmte Flächen (4) erfüllt und die Asymptotenlinien sind reell.

Wir werden also unsere Ergebnisse auch als Aussagen der affinen Differentialgeometrie hyperbolisch gekrümmter Flächen deuten können — die in der affinen Flächentheorie ausserdem noch auftretende kubische Grundform kommt natürlich in unseren Untersuchungen nicht vor — und der Bequemlich-

keit halber werden wir uns auch der Sprache der affinen Flächentheorie bedienen, also z. B. Nullrichtungen von (1) als Asymptotenrichtungen bezeichnen oder das invariante Doppelintegral

$$[6] \quad \Omega = \iint \sqrt{F^2 - EG} \, du \, dv$$

als Affinoberfläche, usw. Doch gelten die abgeleiteten Ergebnisse ebenso gut für andere Gebiete der Geometrie, wo eine invariante quadratische Differentialform (1) auftritt, für welche die Voraussetzung (4) erfüllt ist.

§ 1. Die Konstruktion des vierten Asymptotenvierecks und die darauf beruhende anschauliche Deutung der Gauss'schen Krümmung.

Den folgenden Betrachtungen legen wir eine in einem gewissen Bereich der Parameter u und v definierte quadratische Differentialform (1) zu Grunde, deren Koeffizienten E , $2F$ und G genügend oft differenzierbare (oder noch einfacher analytische) Funktionen von u und v sein und der Bedingung (4) genügen mögen. Wie schon in der Einleitung hervorgehoben, gibt es dann zwei getrennte Scharen von Asymptotenlinien (Nulllinien der Form) derart, dass durch jeden Punkt je eine Kurve aus beiden Scharen geht. Führen wir diese Asymptotenlinien als Parameterlinien eines neuen Koordinatensystem ein (über dessen Anfangspunkt wir noch später zweckmässig verfügen werden), so wird in diesen neuen Parametern, die wir wieder mit u und v bezeichnen, E und G verschwinden und die Form (1) nimmt daher die einfachere Gestalt

$$[7] \quad ds^2 = 2F(u, v) \, du \, dv$$

an, wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit

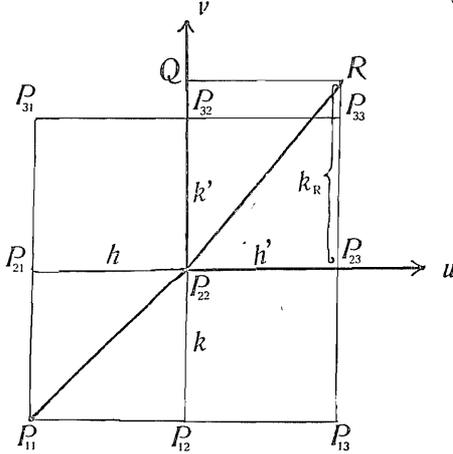
$$[8] \quad F(u, v) > 0$$

annehmen können. Für die Affinoberfläche ergibt sich daher aus (6) der einfache Ausdruck

$$[9] \quad \Omega = \iint F \, du \, dv.$$

Wir konstruieren nun das folgende Asymptotenviereck (Fig. 1): Von einem Punkte P_{11} unseres Bereiches ausgehend schreiten wir längs der positiven u -Richtung solange fort, bis der

Parameter u um den Wert h zugenommen hat; hierbei sei h eine bereits so klein vorgegebene positive Zahl, dass alle weiter unten durchgeführten Reihenentwicklungen zulässig sind. (Wir werden später natürlich den Grenzübergang $h \rightarrow 0$ ausführen). So gelange man zum Punkt P_{12} . Ferner trage man abermals von P_{11} , aber diesmal in der positiven v -Richtung ein



solches Stück ab, dass der Parameter v um die Grösse k wachse, wo auch k eine genügend klein vorgegebene positive Zahl sei; so entstehe der Punkt P_{21} . Der Schnittpunkt der durch P_{21} gehenden u -Linie und der durch P_{12} gehenden v -Linie heisse P_{22} . Wählen wir P_{22} zum Anfangspunkt unserer u - v -Koordinaten, so haben die bisher betrachteten Punkte also die Koordinaten:

$$[9'] \quad P_{11} = \{-h, -k\}; \quad P_{12} = \{0, -k\}; \quad P_{21} = \{-h, 0\}; \quad P_{22} = \{0, 0\},$$

und das "Asymptotenviereck" $P_{11} P_{12} P_{22} P_{21}$ hat nach (9) die Affinoberfläche

$$[10] \quad \omega = \int_{u=-h}^0 \int_{v=-k}^0 F(u, v) du dv.$$

Angrenzend an dieses Asymptotenviereck wollen wir zwei weitere solche Vierecke mit der gleichen Affinoberfläche ω konstruieren und zwar auf die folgende Weise: Wir verlängern zunächst die u -Linien $P_{11} P_{12}$ über P_{12} hinaus und $P_{21} P_{22}$ über P_{22} hinaus um je ein solches Stück h' bis zu den Punkten P_{13} bzw. P_{23} , dass das neu entstehende Asymptotenviereck $P_{12} P_{13} P_{23} P_{22}$ gerade die Affinoberfläche ω habe. Entsprechend verlängern wir die v -Linien $P_{11} P_{21}$ über P_{21} hinaus und $P_{12} P_{22}$ über P_{22} hinaus um ein solches Stück k' , dass das entstehende Asymptotenviereck $P_{21} P_{22} P_{32} P_{31}$ wieder die Affinoberfläche (10) hat.

Durch die drei Asymptotenvierecke $P_{11} P_{12} P_{22} P_{21}$, $P_{12} P_{13} P_{23} P_{22}$ und $P_{21} P_{22} P_{32} P_{31}$, die alle drei die gleiche Affinoberfläche ω haben, ist nun aber ein viertes Asymptotenviereck völlig mitbestimmt, nämlich das Asymptotenviereck $P_{22} P_{23} P_{33} P_{32}$, wo P_{33} der Schnittpunkt der u -Linie durch P_{32} mit der v -Linie durch P_{23} ist. Die Affinoberfläche dieses vierten Asymptotenvierecks, die wir mit ω' bezeichnen wollen, wird im allgemeinen von ω verschieden sein.

Man wird ohne weiteres vermuten, dass die Differenz $\omega - \omega'$ in Zusammenhang mit der Gauss'schen Krümmung K im Punkt P_{22} steht, die für spezielle Form (7) der ersten Grundform nach (3) den einfachen Wert

$$[11] \quad K = - \frac{1}{F} \frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v}$$

annimmt. In der Tat zeigt die Rechnung, die wir im § 2 durchführen werden, dass

$$[12] \quad \omega' = \omega - K \omega^2 + \dots$$

ist, wo die Punkte auf Glieder hindeuten, die in h und k von mindestens fünfter Ordnung sind.

Für die Gauss'sche Krümmung K im Punkt P_{22} ergibt sich hieraus

$$[13] \quad K = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \frac{\omega - \omega'}{\omega^2}$$

Wir haben also folgende anschauliche Deutung der Gauss'schen Krümmung einer indefiniten Metrik erhalten:

Konstruiert man zu drei Asymptotenvierecken der gleichen Affinoberfläche ω und in der gegenseitigen Lage der Fig. 1 das zugehörige vierte Asymptotenviereck, dessen Affinoberfläche ω' sei, so strebt der Quotient $\frac{\omega - \omega'}{\omega^2}$ beim Zusammenschrumpfen der Vierecke gegen den Wert der Gauss'schen Krümmung K im gemeinsamen Berührungspunkt der vier Vierecke.

§ 2. Beweis der Formel (12) für die Gauss'sche Krümmung.

Entwickeln wir in (10) die Funktion $F(u, v)$ unter dem Integralzeichen in eine Potenzreihe nach u und v und führen die Integration gliedweise durch, so erhalten wir

$$[14] \quad \omega = Fhk - \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial u} h^2k - \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial v} hk^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} h^3k + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} h^2k^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} hk^3 + \dots$$

Hierbei sind die Werte der Funktion F und ihrer partiellen Ableitungen (ebenso wie im folgenden) im Punkte P_{22} , d. h. für $u = v = 0$ zu nehmen.

Analog errechnet man für das Asymptotenviereck $P_{12} P_{13} P_{23} P_{22}$ die Affinoberfläche

$$[15] \quad \omega = \int_{u=0}^{h'} \int_{v=-k}^0 F(u, v) du dv = Fh'k + \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial u} h'^2 k - \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial v} h'k^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} h'^3 k - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} h'^2 k^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} h'k^3 + \dots,$$

und wenn man hierin etwa $h' = h + \eta$ einträgt und nur die Glieder bis zur dritten Ordnung berücksichtigt, so dass man η^2 vernachlässigen kann, so erhält man durch Vergleich von (14) und (15) eine lineare Gleichung für η , deren Auflösung für h' den Wert ergibt:

$$[16] \quad h' = h - \frac{\partial \log F}{\partial u} h^2 + \left(\frac{\partial \log F}{\partial u} \right)^2 h^3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v} h^2 k + \dots$$

Ebenso ergibt sich aus der Bedingung, dass das Asymptotenviereck $P_{21} P_{22} P_{32} P_{31}$ die Affinoberfläche ω haben soll:

$$[17] \quad k' = k - \frac{\partial \log F}{\partial v} k^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v} h k^2 + \left(\frac{\partial \log F}{\partial v} \right)^2 k^3 + \dots$$

Die Affinoberfläche des vierten Vierecks $P_{22} P_{23} P_{33} P_{32}$

$$[18] \quad \omega' = \int_{u=0}^{h'} \int_{v=0}^{k'} F(u, v) du dv = Fh'k' + \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial u} h'^2 k' + \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial v} h'k'^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} h'^3 k' + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} h'^2 k'^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} h'k'^3 + \dots$$

kann jetzt durch Einsetzen von (16) und (17) berechnet werden; es ergibt sich für ω' ein etwas länglicher Ausdruck, von dem aber die meisten Glieder wegfallen, wenn wir die Differenz $\omega' - \omega$ bilden, und zwar wird diese letztere

$$[19] \quad \omega' - \omega = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial v} \right) h^2 k^2 = -F \cdot \frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v} h^2 k^2 + \dots,$$

wo die durch Punkte angedeuteten höheren Glieder von mindestens fünfter Ordnung sind, oder (20) wegen (14)

$$[20] \quad \omega' - \omega = \frac{1}{F} \frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v} \omega^2 + \dots$$

Wegen (11) ist hiermit aber die Formel (12) bewiesen.

§ 3. Einführung der geodätischen Linien und des geodätischen Krümmungsdifferentials.

Die im § 2 abgeleiteten Formeln (16) und (17) für die "Seitenlängen" h' und k' des vierten Asymptotenvierecks liefern aber nicht nur die soeben angegebene Deutung der Gauss'schen Krümmung, sondern auch eine anschauliche Definition der geodätischen Linien, die zur indefiniten Metrik (7) gehören. Wir betrachten dazu einfach den "Streckenzug" $P_{11} P_{22} P_{33}$, der sich also durch Anfügung der "Diagonale" des vierten an die des ersten Asymptotenvierecks ergibt; im Grenzfall zusammenschumpfender Vierecke erhalten wir so ein "Stück" einer geodätischen Linie.

In der Tat! Setzen wir in (16) und (17) im Grenzfall $h = du$, $k = dv$, $h' = du + d^2u$ und $k' = dv + d^2v$ ein, so erhalten wir bei Division durch dt^2 die Differentialgleichungen der geodätischen Linien

$$[21] \quad \begin{cases} \frac{d^2u}{dt^2} = - \frac{\partial \log F}{\partial u} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \\ \frac{d^2v}{dt^2} = - \frac{\partial \log F}{\partial v} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \end{cases}$$

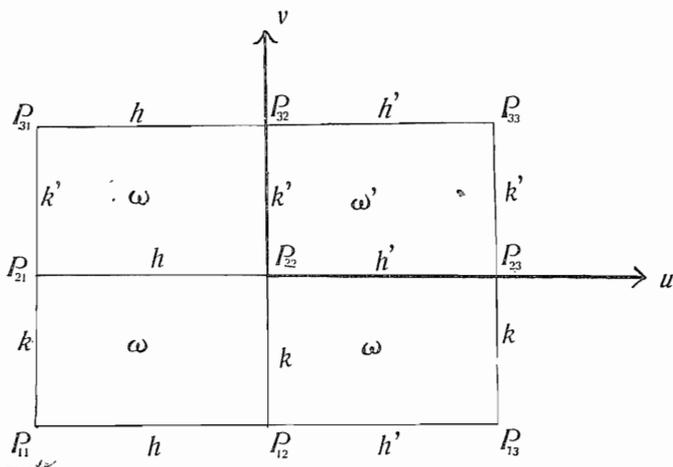
Die Bezeichnung "geodätische Linien" rechtfertigt sich hierbei durch die Tatsache, dass die üblichen Differentialgleichungen der geodätischen Linien in einem beliebigen Koordinaten-

system $[u_1, u_2]$ $\left(\frac{d^2u^i}{dt^2} = - \sum_{rs} \Gamma^i_{rs} \frac{du_r}{dt} \frac{du_s}{dt} \right)$ gerade in (21) über-

gehen, wenn man berücksichtigt, dass für die Form (7) von den Dreieindicesymbolen $\Gamma^i_{r,s}$ alle verschwinden mit Ausnahme

$$\text{von } \Gamma^1_{22} = \frac{\partial \log F}{\partial u} \text{ und } \Gamma^2_{22} = \frac{\partial \log F}{\partial v}.$$

Die soeben angedeutete anschauliche Einführung der geodätischen Linien *) legt es nahe, für eine Kurve, die nicht geodätische Linie ist, in der folgenden Weise eine anschauliche Definition einer "geodätischen Krümmung" vorzunehmen. Ha-



ben die Punkte $P^{a\beta}$ dieselbe Bedeutung wie in §§ 1 und 2 und in Fig. 1, so sei (siehe Fig. 2) eine durch P_{11} und P_{22} gehende Kurve $v = v(u)$ gegeben, für die wir annehmen wollen, dass $\frac{dv}{du} > 0$ sei. Bei Verfolgung der Kurve über P_{22} hinaus wird sich zeigen, dass sie die v -Linie durch P_{13} P_{23} P_{33} , d. h. die Asymptotenlinie $u = h'$, im allgemeinen in einem von P_{33} verschiedenen Punkt R schneiden wird. (In der Fig. 2 ist angenommen, dass R ausserhalb von P_{23} P_{33} liegt, doch ändert sich an den folgenden Betrachtungen nichts, wenn R innerhalb von P_{23} P_{33} liegt). Wir ziehen noch die durch R gehende u -Linie und erhalten so ein Asymptotenviereck P_{22} P_{23} RQ , dessen Affinoberfläche ω'' nur dann gleich der Affinoberfläche ω' von P_{22} P_{23} P_{33} P_{32} sein wird, wenn $R = P_{33}$, also im Grenzfall, wenn die betrachtete Kurve eine geodätische Linie ist. Daher wird die Differenz $\omega'' - \omega'$ als ein Mass für die Abweichung unserer Kurve von einer geodätischen Linie zu brauchen sein.

Die Durchrechnung dieses Gedankengangs verläuft folgendermassen: Wenn wir die Ordinate von R mit k bezeichnen (die Abszisse ist ja gleich h'), so wird wegen (18)

$$[22] \quad \omega'' - \omega' = F h' (k - k') + \dots,$$

(*) Man könnte in weiterer Verfolgung dieses Gedankengangs auch den Parallelismus von Levi-Civita auf anschaulichen Wege einführen, doch wollen wir hierauf nicht näher eingehen.

wo der Wert von F an der Stelle P_{22} , d. h. für $u = v = 0$ zu nehmen ist, und hierbei ist

$$[23] \quad k_{\text{R}} = v (h') = \frac{dv}{du} h' + \frac{1}{2} \frac{d^2v}{du^2} h'^2 + \dots,$$

wo die Werte von $\frac{dv}{du}$ und $\frac{d^2v}{du^2}$ hier und im folgenden ebenfalls im Punkte P_{22} zu nehmen sind, oder wegen (16):

$$[24] \quad k_{\text{R}} = \frac{dv}{du} h + \left(\frac{1}{2} \frac{d^2v}{du^2} - \frac{\partial \log F}{\partial u} \frac{dv}{du} \right) h^2 + \dots$$

Andererseits folgt wegen

$$[25] \quad k = -v (-h) = \frac{dv}{du} h - \frac{1}{2} \frac{d^2v}{du^2} h^2 + \dots$$

aus (17)

$$[26] \quad k' = \frac{dv}{du} h - \left\{ \frac{1}{2} \frac{d^2v}{du^2} + \frac{\partial \log F}{\partial v} \left(\frac{dv}{du} \right)^2 \right\} h^2 + \dots$$

Setzen wir (24) und (26) in (22) ein, so ergibt sich

$$[27] \quad \omega'' - \omega' = F h k' \cdot \left\{ \frac{d^2v}{du^2} - \frac{\partial \log F}{\partial u} \frac{dv}{du} + \frac{\partial \log F}{\partial v} \left(\frac{dv}{du} \right)^2 \right\} h^2 + \dots$$

oder mit Rücksicht auf (16) und (25):

$$[28] \quad \begin{aligned} \omega'' - \omega' &= F h k^2 \cdot \left\{ \frac{\frac{d^2v}{du^2}}{\left(\frac{dv}{du} \right)^2} - \frac{\frac{\partial \log F}{\partial u}}{\frac{dv}{du}} + \frac{\partial \log F}{\partial v} \right\} + \dots \\ &= F (hk) \sqrt[3]{\frac{dv}{du} \left\{ \frac{\frac{d^2v}{du^2}}{\left(\frac{dv}{du} \right)^2} - \frac{\frac{\partial \log F}{\partial u}}{\frac{dv}{du}} + \frac{\partial \log F}{\partial v} \right\}} + \dots \end{aligned}$$

und daher endlich wegen (14):

$$[29] \quad \frac{\omega'' - \omega'}{\omega^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{F} \, du \, dv} \left\{ \left(\frac{\frac{d^2v}{du^2}}{\frac{dv}{du}} - \frac{\partial \log F}{\partial u} \right) du + \frac{\partial \log F}{\partial v} dv \right\} + \dots$$

Einen in u und v (abgesehen vom Vorzeichen) symmetrischen Ausdruck erhält man, wenn man unsere Kurve $v = v(u)$ lieber in Parameterdarstellung $u = u(t)$, $v = v(t)$ schreibt und

$$[29'] \quad \frac{dv}{du} = \frac{\dot{v}}{\dot{u}}, \quad \frac{d^2v}{du^2} = \frac{1}{\dot{u}^3} \begin{vmatrix} \dot{u} & \dot{v} \\ \ddot{u} & \ddot{v} \end{vmatrix},$$

einträgt (die aufgesetzten Punkte bedeuten Ableitungen nach t); man erhält so die Grenzwertformel für zusammenschumpfende Asymptotenvierecke:

$$[30] \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \frac{\omega'' - \omega'}{\omega^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{F \dot{u} \dot{v}}} \left\{ \frac{\dot{u} \ddot{v} - \ddot{u} \dot{v}}{\dot{u} \dot{v}} - \frac{\partial \log F}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial \log F}{\partial v} \dot{v} \right\}$$

Hierin unterscheidet sich die rechte Seite nur um einen (imaginären) Zahlenfaktor von der in der üblichen Weise definierten geodätischen Krümmung einer Kurve in einer definiten Metrik; in der Tat liefert die bekannte Formel für die geodätische Krümmung $\frac{1}{\rho_{g^{def.}}}$ in beliebigen Koordinaten, die man in den Lehrbüchern der Differentialgeometrie nachschlagen kann, für den Fall $E = G = 0$ ($i = \sqrt{-1}$):

$$[31] \quad \frac{1}{\rho_{g^{def.}}} = \frac{i}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{F \dot{u} \dot{v}}} \left(\frac{\dot{u} \ddot{v} - \ddot{u} \dot{v}}{\dot{u} \dot{v}} - \frac{\partial \log F}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial \log F}{\partial v} \dot{v} \right)$$

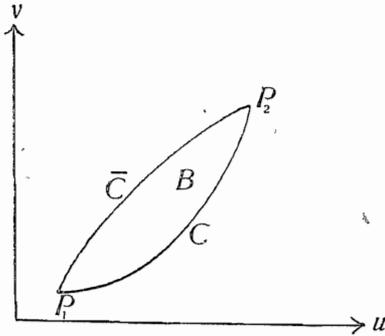
Die hierbei auftretenden Vorzeichen- bzw. Reellitätsschwierigkeiten für den uns interessierenden Fall einer indefiniten Grundform werden umgangen, wenn man im Sinne der oben gegebenen Herleitung, statt die geodätische Krümmung selbst zu definieren, sich auf den aus (29) folgenden Differentialausdruck

$$[32] \quad \frac{ds}{\rho_g} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\frac{d^2v}{du^2}}{\frac{dv}{du}} - \frac{\partial \log F}{\partial u} \right) du + \frac{\partial \log F}{\partial v} dv \right\}$$

beschränkt, den man etwa als “*geodätisches Krümmungsdifferential*” bezeichnen könnte. Mit seinem Integral längs eines endlichen Kurvenbogens werden wir uns im § 4 beschäftigen und so das “indefinite Analogon” zum Gauss-Bonnetschen Satz der Flächentheorie erhalten.

§ 4. Das Integral des geodätischen Krümmungsdifferentials und der Gauss-Bonnetsche Satz für das Kurvenzweieck.

Wir betrachten das Stück einer Kurve $C: v=v(u)$ zwischen zwei Punkten $P_1 = [u_1, v_1]$ und $P_2 = [u_2, v_2]$; der Einfachheit halber wollen wir voraussetzen, dass auf diesem Kurvenstück



durchwegs $\frac{dv}{du} > 0$ ist (siehe Fig. 3). Integrieren wir das oben eingeführte “geodätische Krümmungsdifferential” (32) längs C von P_1 bis P_2 , so erhalten wir das *Kurvenintegral*

$$[33] \quad \int_C \frac{ds}{\varrho_g} = \frac{1}{2} \int_C \frac{\frac{d^2v}{du^2}}{\frac{dv}{du}} du - \frac{1}{2} \int_C \left(\frac{\partial \log F}{\partial u} du - \frac{\partial \log F}{\partial v} dv \right)$$

Von den beiden rechts auftretenden Kurvenintegralen lässt sich aber das erste auch als gewöhnliches Integral auswerten:

$$[34] \quad \frac{1}{2} \int_C \frac{\frac{d^2v}{du^2}}{\frac{dv}{du}} du = \frac{1}{2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{v''(u)}{v'(u)} du = \frac{1}{2} \log \frac{v'(u_2)}{v'(u_1)}$$

mit

$$v'(u) = \frac{dv}{du}, \quad v''(u) = \frac{d^2v}{du^2}$$

Ferner ist

$$[35] \int_C \left(\frac{\partial \log F}{\partial u} du + \frac{\partial \log F}{\partial v} dv \right) = \int_C d(\log F) = \log \frac{F(u_2, v_2)}{F(u_1, v_1)}$$

daher

$$[36] \frac{1}{2} \int_C \frac{\partial \log F}{\partial v} dv = \frac{1}{2} \log \frac{F(u_2, v_2)}{F(u_1, v_1)} - \frac{1}{2} \int_C \frac{\partial \log F}{\partial u} du.$$

Tragen wir (34) und (36) in (33) ein, so ergibt sich

$$[37] \int_C \frac{ds}{\varrho_g} = \frac{1}{2} \log \frac{v'(u_2)}{v'(u_1)} + \frac{1}{2} \log \frac{F(u_2, v_2)}{F(u_1, v_1)} - \int_C \frac{\partial \log F}{\partial u} du.$$

Wir betrachten nun eine zweite Kurve $\zeta : v = w(u)$, die "oberhalb" von ζ gleichfalls von P_1 nach P_2 laufen möge (d. h. $w(u) \equiv v(u)$, $w(u_1) = v_1$, $w(u_2) = v_2$), und bilden auch für diese das Integral ihres geodätischen Krümmungsdifferentials von P_1 bis P_2 . Für die Differenz dieser Integrale längs C und längs \bar{C} folgt dann aus (37):

$$[38] \int_C \frac{ds}{\varrho_g} - \int_{\bar{C}} \frac{ds}{\varrho_g} = \frac{1}{2} \log \frac{v'(u_2)}{v'(u_1)} - \frac{1}{2} \log \frac{w'(u_2)}{w'(u_1)} - \int_C \frac{\partial \log F}{\partial u} du + \int_{\bar{C}} \frac{\partial \log F}{\partial u} du.$$

Die beiden letzten Kurvenintegrale auf der rechten Seite lassen sich aber als ein Doppelintegral der negativen Gauss'schen Krümmung über die Affinoberfläche des zwischen den Kurven C und \bar{C} gelegenen u - v -Bereiches, den wir mit β bezeichnen und als einfach zusammenhängend voraussetzen, auffassen, denn nach (9) und (11) lässt sich in diesem Doppelintegral eine Integration ausführen:

$$[39] - \iint_C K d\Omega = \int_C \int_C \frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v} du dv = \int_{u_1}^{u_2} du \int_{v(u)}^{w(u)} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \log F}{\partial u} \right) dv = \int_{u_1}^{u_2} \left\{ \frac{\partial \log F(u, w(u))}{\partial u} - \frac{\partial \log F(u, v(u))}{\partial u} \right\} du$$

und so ergibt sich tatsächlich

$$[40] \quad - \int_C \int_{\bar{C}} K d\Omega = \int_C \frac{\partial \log F}{\partial u} du - \int_{\bar{C}} \frac{\partial \log F}{\partial u} du.$$

Tragen wir dies in (38) ein, so erhalten wir für unsere indefinite Metrik den Gauss-Bonnetschen Integralsatz für das Kurvenzweieck in der Form:

$$[41] \quad \int_C \int_{\bar{C}} K d\Omega + \int_C \frac{ds}{\varrho_g} - \int_{\bar{C}} \frac{ds}{\varrho_g} = \frac{1}{2} \log \frac{v'(u_2) \cdot w'(u_1)}{v'(u_1) \cdot w'(u_2)}.$$

Hierbei kan man die rechte Seite noch folgendermassen deuten: Bezeichnen wir das Doppelverhältnis, welches im Punkt P_i die Tangenten von C und \bar{C} (in dieser Reihenfolge) mit den beiden Asymptotenrichtungen bilden, mit $D_i(C, \bar{C})$ ($i = 1, 2$), so ist z. B.

$$[42] \quad D_1(C, \bar{C}) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & du \\ 0 & dv \end{vmatrix}_1 \times \begin{vmatrix} 0 & du \\ 1 & dv \end{vmatrix}_1}{\begin{vmatrix} 1 & du \\ 0 & dv \end{vmatrix}_1 \times \begin{vmatrix} 0 & du \\ 1 & dv \end{vmatrix}_1} = \frac{v'(u_1)}{w'(u_1)}$$

und daher

$$[43] \quad \int_C \int_{\bar{C}} K d\Omega + \int_C \frac{ds}{\varrho_g} - \int_{\bar{C}} \frac{ds}{\varrho_g} = \frac{1}{2} \log \frac{D_2(C, \bar{C})}{D_1(C, \bar{C})}$$

In dieser Formulierung steht die Formel (43) für eine indefinite Metrik in vollkommener Analogie zum gewöhnlichen Gauss-Bonnetschen Satz für eine positiv definitive Grundform, wenn man ihn für ein Kurvenzweieck ausspricht; denn in diesem letzteren Falle würden auf der rechten Seite statt der von uns gefundenen Logarithmen von Doppelverhältnissen die Winkel zwischen C und \bar{C} in P_1 bzw. P_2 auftreten. Der Winkel zweier Richtungen ergibt sich aber bekanntlich aus dem Logarithmus des Doppelverhältnisses dieser Richtungen und der beiden isotropen Richtungen (Nullrichtungen der Grundform) durch Multiplikation mit $i/2$. Der Unterschied zum definiten Fall liegt also nur in dem Faktor i auf der rechten Seite, der aber auch auf der linken Seite von (43) implizit in $1/\varrho_g$ und $d\Omega$ auftritt. (Vgl. hierzu (31) mit (30) und (6) mit der im definiten Fall geltenden Definition der Oberfläche: $\sqrt{EG-F^2} du dv$).

SOBRE LA GEOMETRIA EN UNA SUPERFICIE CON METRICA INDEFINIDA

Por ROBERTO FRUCHT

INTRODUCCION

Al desarrollar la teoría elemental de superficies, esto es, la geometría de las superficies en el espacio euclideo tridimensional, se demuestra que las propiedades de dichas superficies están determinadas por las dos formas diferenciales cuadráticas invariantes. Un capítulo particularmente interesante de esta teoría de superficies, es el estudio (que ya fué iniciado por Gauss) de las propiedades "intrínsecas" de una superficie, las cuales dependen únicamente de la superficie misma, pero no del espacio en que está definida. Puesto que las propiedades métricas de una superficie se derivan de la primera de las mencionadas formas diferenciales cuadráticas, la cual expresa el cuadrado del "elemento de arco" (esto es la distancia entre dos puntos "infinitamente" próximos), las propiedades "intrínsecas" de una superficie se refieren a las propiedades en las cuales interviene únicamente esa forma diferencial cuadrática. A esto se refiere por ejemplo el teorema de Gauss sobre la invariancia de la curvatura total ("theorema egregium"), la curvatura geodésica de las curvas de una superficie y la fórmula integral de Gauss-Bonnet; se puede incluso considerar como perteneciente a esta teoría, el caso particular para $n = 2$ de la geometría general de Riemann derivada de una forma diferencial cuadrática de n variables.

Por tratarse del *cuadrado del elemento de arco* la primera forma diferencial cuadrática de la teoría de superficies [1], es positiva definida, esto es, se verifica [2].

Para algunos teoremas y propiedades de la geometría "intrínseca" de una superficie, estas hipótesis no son necesarias; por ejemplo, la curvatura total de una de estas formas diferenciales cuadráticas [3] (los sub-índices representando derivadas parciales), se puede igualmente expresar por esta misma fórmula, en el caso de una forma diferencial cuadrática con la sola condición de ser $E G - F^2$ distinto de cero. Según esto el elemento de arco [1a] no será siempre real sino que en algunas direcciones podrá ser imaginario (esto es corriente en la teoría de la relatividad en lo referente a "sucesos sobre una recta" en donde intervengan "direcciones de espacio" y "direcciones de tiempo"; esto ocurre p. ej. cuando u es la variable de espacio, v la variable de tiempo, $E = 1$, $F = 0$ y $G = -C^2$), pero se puede sencillamente resolver esta dificultad poniendo, por definición [1b] en lugar de [1a].

Una dificultad de este tipo aparece en la definición de curvatura geodésica a partir de una forma diferencial indefinida.

A causa de estas dificultades, no parece a primera vista muy recomendable ocuparse de una geometría con una forma diferencial cuadrática binaria indefinida, y esta debe ser la causa, de que, al menos que nosotros sepamos, no se haya construido dicha geometría, si bien quizás haga falta para la edificación de tal teoría un más profundo desarrollo geométrico. Se observa sin embargo que la geometría de una forma indefinida es más intuitiva que la geometría ordinaria de una superficie o con métrica definida, a causa de los siguientes razonamientos simples:

Las direcciones nulas de la forma [1], esto es, aquellas direcciones $du : dv$ para las cuales $ds^2 = 0$, son con las hipótesis [2] imaginarias, se pueden por tanto aplicar solo indirectamente a la interpretación de resultados geométricos intuitivos, pero en cambio falta un contenido directo geométrico e intuitivo en el campo real. Si es [4] en cada punto de la superficie hay dos direcciones reales nulas distintas, que constituyen dos haces de curvas reales. Esto es bien conocido en la teoría de superficies, si bien no para la primera forma fundamental sino para la llamada segunda forma fundamental [5] la cual para superficies con curvatura hiperbólica ($LN - M^2 < 0$) es indefinida. En este caso las direcciones nulas se llaman direcciones asintóticas y los mencionados haces de curvas, líneas asintóticas de la superficie.

La existencia de estos haces de curvas reales facilita, mediante la consideración del cuadrilátero que forman, el estudio del tema de este trabajo, que versa sobre la significación intuitiva, de la curvatura de Gauss (§ § 1 y 2), de la curvatura geodésica de una curva (§ 3), y también una obtención muy elemental de la fórmula integral de Gauss-Bonnet (§ 4), todo ello naturalmente, solo para el caso de una forma diferencial cuadrática indefinida que cumpla [4]. Esta última limitación parece disminuir el valor geométrico de estos resultados pues si nos referimos a la teoría elemental de superficies, la primera forma diferencial cuadrática no cumple la condición [4] que es cumplida únicamente por la segunda, pero esta no aparece nunca en las consideraciones geométricas sin ir acompañada de la primera.

El caso es distinto si consideramos la geometría diferencial afín de superficies, ya que en ella la segunda forma fundamental aparece, de una manera algo distinta, como la primera forma fundamental. Indiquemos los coeficientes de esta primera forma fundamental de la teoría afín de superficies según Blaschke (*) con $E, 2F, G$, con lo cual para superficies de curvatura hiperbólica se cumple [4] y las líneas asintóticas son reales.

Podremos así generalizar nuestros resultados a la geometría diferencial hiperbólica de superficies curvas — la forma fundamental cúbica de la geometría afín de superficies, no interviene naturalmente en estas consideraciones — y para mayor comodidad utilizaremos el lenguaje de la geometría afín de superficies, así por ejemplo las direcciones nulas de [1] se llamarán direcciones asintóticas y el invariante integral doble [6] área afine.

Además los resultados que se obtienen son válidos también para otros capítulos de la geometría en los que interviene la forma diferencial cuadrática invariante que satisface la hipótesis [4].

§ 1. CONSTRUCCION DE LOS CUATRO CUADRILATEROS DE ASINTOTAS Y SIGNIFICACION INTUITIVA DE LA CURVATURA DE GAUSS QUE DE ELLA SE DERIVA

Las consideraciones que van a seguir se referirán siempre a una forma diferencial cuadrática del tipo [1], definida en un cierto dominio de u y v ; sus coeficientes $E, 2F$ y G serán generalmente funciones diferenciables, (o más sencillamente analíticas) de u y v que verifican la con-

*) Wilhelm Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie. II: Affine Differentialgeometrie. (Bearbeitet von Kurt Reidemeister.) Berlin, 1923. — La curvatura de Gauss de esta forma fundamental está allí indicada con la letra S , p. ej. § 49, (5).

dición [4]. Como ya dijimos en la introducción existen entonces, dos haces distintos de líneas asíntóticas, (líneas nulas de la forma), tales que por cada punto pasa una curva de cada haz. Tomando estas líneas asíntóticas como líneas paramétricas de un nuevo sistema de coordenadas, (cuyo arigen lo elegiremos más tarde en donde nos convenga), con estos nuevos parámetros, que seguiremos representando por u y v , E y G desaparecen, y la forma [1] toma la simple expresión [7], en la cual sin limitar la generalidad podemos suponer [8].

Para el área afine [9], teniendo en cuenta [6] deduciremos la sencilla expresión [9].

Construyamos ahora el siguiente cuadrilátero de asíntotas (fig. 1): desde un punto P_{11} de nuestro dominio sigamos a lo largo de la dirección positiva de las u , hasta que este parámetro tome el valor h ; h tiene que ser un número positivo suficientemente pequeño para que todos los desarrollos en serie que ejecutemos sean válidos. (Más tarde efectuaremos naturalmente el paso al límite $h \rightarrow 0$). Así obtendremos el punto P_{12} . Análogamente desde P_{11} en la dirección positiva de las v sigamos hasta el valor k de v , donde k es un número positivo suficientemente pequeño, así obtendremos el punto P_{21} . Obtendremos P_{22} por la intersección de la u -línea que pasa por P_{21} con la v -línea que pasa por P_{12} . Este punto P_{22} lo tomaremos con el origen de nuestro sistema de coordenadas, con lo cual los otros puntos tendrán las coordenadas (9'), y el "cuadrilátero de asíntotas" $P_{11} P_{12} P_{22} P_{21}$ tiene como área afine [10].

Lindando con este cuadrilátero de asíntotas, construiremos de la siguiente forma, otros dos cuadriláteros de la misma área afine ω : para ello prolonguemos primero la u línea $P_{11} P_{12}$ del lado de P_{12} y la $P_{21} P_{22}$ del lado de P_{22} un segmento h' hasta obtener los puntos P_{13} y P_{23} respectivamente, de manera que el área afine del cuadrilátero de asíntotas $P_{12} P_{13} P_{23} P_{22}$ sea igual a ω . De la misma manera prolongamos las v -líneas $P_{11} P_{21}$ y $P_{12} P_{22}$ del lado de P_{21} y P_{22} respectivamente, un segmento k' tal que el cuadrilátero de asíntotas $P_{21} P_{22} P_{32} P_{31}$ tenga igualmente ω como área afine.

Estos tres cuadriláteros $P_{11} P_{12} P_{22} P_{21}$, $P_{12} P_{13} P_{23} P_{22}$, y $P_{21} P_{22} P_{32} P_{31}$, de igual área afine ω determinan un cuarto cuadrilátero de asíntotas, $P_{22} P_{23} P_{33} P_{32}$ donde P_{33} es la intersección de la u -línea que pasa por P_{32} con la v -línea que pasa por P_{23} . El área afine de este cuarto cuadrilátero de asíntotas, la indicaremos con ω' y será en general distinta de ω .

Se puede presumir que la diferencia $\omega - \omega'$ está en dependencia con la curvatura de Gauss K en P_{22} la cual para el caso de la forma especial [7] de la primera forma fundamental toma, teniendo en cuenta [3], el sencillo valor [11].

En efecto, el cálculo, que hacemos en el § 2 prueba [12] donde los puntos significan términos de al menos quinto grado en h y k .

Para la cuadratura de Gauss en el punto P_{22} se tiene por tanto [13], es decir:

Se construye sobre tres cuadriláteros de asíntotas de igual área afine ω y en la posición indicada en la figura 1 el correspondiente cuarto cuadrilátero de asíntotas cuya área afine es ω' , entonces el cociente $\frac{\omega - \omega'}{\omega^2}$ tiende hacia el valor de la curvatura de Gauss K en el punto común a los cuatro cuadriláteros cuando éstos tienden todos a reducirse a dicho punto.

§ 2. DEMOSTRACION DE LA FORMULA [12] PARA LA CURVATURA DE GAUSS

Desarrollemos en [10] la función $F(u, v)$ bajo el signo integral en una serie de potencias de u y v e integremos término a término, así tendremos [14].

En esta fórmula (así como en las siguientes) los valores de la función F y de sus derivadas parciales se toman en el punto P_{22} esto es para $u = v = 0$.

Análogamente se calcula el área afine [15] del cuadrilátero de asíntotas $P_{12} P_{13} P_{23} P_{22}$.

Poniendo $h' = h + \eta$ y considerando solo los términos hasta el tercer orden, puesto que η^2 se puede despreciar, se obtiene comparando [14] y [15] una ecuación lineal en η cuya solución para h' nos da [16].

Asimismo la condición de tener el cuadrilátero de asíntotas $P_{21} P_{22} P_{32} P_{31}$ el área afine ω da [17].

El área afine [18] del cuarto cuadrilátero $P_{22} P_{23} P_{33} P_{32}$ puede ya calcularse teniendo en cuenta [16] y [17]. Se obtiene así para ω' una expresión bastante larga, pero la mayoría de los términos desaparecen al formar la diferencia $\omega' - \omega$ obteniéndose [19], donde los puntos indican términos de al menos quinto orden y teniendo en cuenta [14], se obtiene [20].

Teniendo en cuenta [11] queda así demostrada la fórmula [12].

§ 3. INTRODUCCION DE LAS LINEAS GEODESICAS Y DE LA CURVATURA DIFERENCIAL GEODESICA

Las fórmulas [16] y [17], obtenidas en el § 2 para las longitudes h' y k' de los lados del cuarto cuadrilátero de asíntotas nos dan no solamente la significación de la curvatura de Gauss, anteriormente expuesta, sino también una definición intuitiva de las líneas geodésicas para el caso de la métrica indefinida [7]. Consideremos para esto el camino $P_{11} P_{22} P_{33}$ que se obtiene añadiendo la diagonal del cuarto cuadrilátero de asíntotas a la del primero; al pasar al límite y reducirse todos los cuadriláteros a un punto este camino tiende a un elemento de geodésica.

En efecto: reemplacemos en [16] y [17] al efectuar el paso al límite $h = du$, $k = dv$, $h' = du + du^2$ y $k' = dv + dv^2$ y dividiendo por dt^2 obtendremos [21] que son las ecuaciones de las líneas geodésicas.

Se prueba que efectivamente estas ecuaciones son las de las líneas geodésicas, recordando que éstas son [21'] en un sistema de coordenadas generales (u_1, u_2) , las cuales se reducen a [21] observando que para la forma [7] los símbolos de tres índices Γ^i_{rs} se anulan a excepción de Γ^1_{11} y Γ^2_{22} .

Esta interpretación intuitiva de las líneas geodésicas (*) nos permite para una línea que no sea geodésica dar una definición intuitiva de la curvatura geodésica. Para ello supongamos los puntos $P_{\alpha\beta}$ con la mis-

(*) Por este mismo camino podría obtenerse igualmente el paralelismo de Levi-Civita, pero por ahora, no entraremos en ello.

ma significación que en los § § 1 y 2 y figura 1 y consideremos (figura 2) una curva $v = v(u)$ que pasa por los puntos P_{11} y P_{22} y para la cual se tenga $\frac{dv}{du} > 0$. Prolongando esta curva por P_{22} se demuestra que corta en general a la v -línea que pasa por P_{13} P_{23} P_{33} (es decir la línea asintótica $u = h'$), en un punto R distinto de P_{33} . (En la figura 2 se ha tomado R exterior a P_{23} P_{33} pero las consideraciones que siguen son válidas aunque dicho punto sea interior a P_{23} P_{33}). Tracemos la u -línea por el punto R hasta obtener un cuadrilátero de asíntotas P_{22} P_{23} R Q , cuya área afine ω'' sea solamente igual al área afine ω' de P_{22} P_{23} P_{33} P_{32} , cuando $R = P_{33}$, esto es en el caso límite de ser la línea considerada una geodésica. De este modo la diferencia $\omega'' - \omega'$ se puede considerar como una medida de la separación entre nuestra línea y una geodésica.

El cálculo de todo lo que acabamos de exponer es el siguiente:

Si la ordenada de R la indicamos con k_r (la abscisa es h'), teniendo en cuenta [18] resulta [22], donde el valor de F se refiere al punto P_{22} es decir para $u = v = 0$. De aquí se tiene [23], donde los valores $\frac{dv}{du}$ y $\frac{d^2v}{du^2}$ los tomamos (e igualmente hacemos en lo sucesivo) en el punto P_{22} . Ahora bien, según [16] resulta [24]. Además teniendo en cuenta [15] deducimos [26] de [17].

Reemplazando [24] y [26] en [22] se obtiene [27].

Volviendo a tener en cuenta [16] y [25] deducimos [28], y de aquí finalmente a causa de [14] tenemos [29].

Expresando la curva $v = v(u)$ en forma paramétrica $u = u(t)$, $v = v(t)$ y poniendo [29'], se obtiene una expresión simétrica (a excepción del signo) en u y v la cual nos da para el caso límite de reducirse el cuadrilátero de asíntotas a un punto, la fórmula [30].

El segundo miembro de esta expresión se diferencia únicamente en un factor imaginario de la curvatura geodésica ordinaria de una curva en el caso de una métrica definida. En efecto, la conocida fórmula para la curvatura geodésica en cualquier sistema de coordenadas (véase cualquier texto de geometría diferencial) es [31] para el caso $E = G = 0$, ($i = \sqrt{-1}$).

Las dificultades de signo y realidad, para el caso que nos interesa de una métrica indefinida, desaparecen si en lugar de la curvatura geodésica nos limitamos a la expresión diferencial invariante [32] deducida de [29] y que se podrá llamar "curvatura diferencial geodésica". En el § 4 nos ocuparemos de la integral [32] a lo largo de un arco de curva finita obteniendo así el análogo del teorema de Gauss-Bonnet para una métrica indefinida.

§ 4. LA INTEGRAL DE LA CURVATURA DIFERENCIAL GEODESICA Y EL TEOREMA DE GAUSS-BONNET PARA HUSOS CURVOS

Consideremos el segmento de curva $\underline{C} : (v = v(u))$ entre dos puntos $P_1 (u_1, v_1)$ y $P_2 (u_2, v_2)$. Para simplificar supondremos que en toda esta curva es $dv/du > 0$ (ver figura 3). Integrando la curvatura diferencial geodésica, introducida en [32], a lo largo de \underline{C} desde P_1 a P_2 , obtenemos la integral de línea [33].

La primera de las dos integrales curvilínea del 2º miembro se puede calcular como una integral ordinaria [34].

Además tenemos [35] de donde deducimos [36] y substituyendo [34] y [36] en [33] se obtiene [37].

Consideremos ahora una segunda curva \bar{C} ($v = w(u)$ que vaya asimismo de P_1 a P_2 pero por encima de C (esto es: $w(u) \geq v(u)$, $w(u_1) = v_1$, $w(u_2) = v_2$), y formemos para ella la integral de su curvatura diferencial geodésica desde P_1 hasta P_2 . La diferencia de estos dos integrales a lo largo de C y \bar{C} es [38] en virtud de [37].

Las dos últimas integrales curvilíneas del segundo miembro de la igualdad anterior se pueden expresar como la integral doble de la curvatura de Gauss negativa, sobre la superficie afín del recinto comprendido entre las curvas C y \bar{C} que designaremos por B y que supondremos simplemente conexo. Teniendo en cuenta [9] y [11] podemos integrar parte de esta integral doble quedando [39] y así obtenemos efectivamente [40].

Substituyendo en [38] obtenemos para nuestra métrica indefinida, la fórmula integral de Gauss-Bonnet para husos curvos, en la forma [41].

Al segundo miembro podemos darle la siguiente interpretación: formamos la razón doble entre las direcciones de las tangentes P_i a C y \bar{C} , y las dos direcciones asintóticas y representémosla por D_i (C, \bar{C}), ($i=1, 2$), por ejemplo [42] y de aquí [43].

De esta manera la fórmula [43] es completamente análoga para el caso de una métrica indefinida, a la fórmula de Gauss-Bonnet para una forma positiva definida al referirse a un huso curvo; pues en este último caso en el segundo miembro aparece en lugar de los logaritmos de las razones dobles, los ángulos entre C y \bar{C} en P_1 y P_2 respectivamente. El ángulo de dos direcciones viene dado como es sabido por el logaritmo de la razón doble de estas dos direcciones y de las direcciones isótropas (direcciones nulas de la forma fundamental) multiplicadas por $i/2$. La diferencia con el caso definido está únicamente en el factor i del segundo miembro, el cual aparece sin embargo de una manera implícita $1/Q_g$ y $d\Omega$. (Compárese, para ello [31] con [30] y [6] con la definición de area $\sqrt{EG - F^2} du dv$, válida para la métrica definida).

Buenos Aires, 1939.

ALBERTO GONZALEZ DOMINGUEZ

SOBRE UNA MEMORIA

DEL

Prof. J. C. VIGNAUX

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Publicación N.º 12

BUENOS AIRES

1940

SOBRE UNA MEMORIA DEL Prof. J. C. VIGNAUX

por ALBERTO GONZALEZ DOMINGUEZ

Nos proponemos en esta nota hacer un análisis objetivo y completo de la memoria siguiente:

J. C. VIGNAUX.—*Extensión del teorema de Abel-Stolz, y sobre algunas transformaciones funcionales lineales* (continuación); Anales de la Sociedad Científica Argentina, Tomo CXXVI, entrega VI, 1938, pp. 401-428).

He aquí todo el contenido de la memoria, página por página, y párrafo por párrafo, sin omitir nada:

Párrafo 1 (pág. 401):

“En la presente memoria —dice el autor— nos proponemos exponer “varios resultados nuevos ^[1] relativos a la transformación limitada de “Laplace”, definida por la relación,

$$[1] \quad f(z) = \int_0^1 e^{-xz} \varphi(x) dx;$$

“de la transformación de Le Roy

$$g(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(x) dx}{1-xz},$$

“y de la transformación de Heine:

$$h(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(x) dx}{x-z} \dots \quad ”$$

Párrafo 2 (págs. 402-404):

Introducción histórica y resumen de la memoria.

Párrafo 3 (págs. 404-405):

Define lo que entiende por “transformación limitada de Laplace”, en los siguientes términos: “dada una función $\varphi(x)$, acotada e integrable Lebesgue en el intervalo $(0, 1)$, la integral definida

$$f(z) = \int_0^1 e^{-tz} \varphi(t) dt$$

“define en todo el plano de la variable compleja $z = x + iy$, una función compleja de z , que llamaremos transformada limitada de Laplace de la función $\varphi(t)$, o, simplemente, transformada limitada (L_1), e indicaremos con la notación $f(z) = L_1[\varphi(x)]$.

“A las funciones $\varphi(x)$ y $f(z)$ las denominaremos función generatriz “L, y función determinante L_1 , respectivamente.”

(*) La bastardilla es nuestra,

Enuncia y demuestra a continuación el siguiente teorema:

“La función $f(z)$ es holomorfa en todo el plano”; luego da su desarrollo de Taylor y deduce que la función $f(z)$ es de tipo exponencial.

Estos *nuevos* teoremas, que demuestra el autor con lujo de detalles, para lo cual necesita dos páginas, 405-406, figuran hace largos años en textos elementales, por ejemplo, en el conocido manual de Pincherle, “Gli Elementi della Teoria delle Funzioni Analitiche”, Bologna, Zanichelli, 1923, donde en las 6 primeras líneas de la página 314 demuestra mucho más; y Bochner le gana en concisión a Pincherle, pues liquida el tema en 3 líneas (Nos. 13. 14, 15 de pág. 145; y Titchmarsh se limita a desdenarlo por trivial y conocido. En cambio, el Prof. Vignaux considera la primicia digna de ocupar tamaño espacio (págs. 405-406) no ya en un libro didáctico, sino en una memoria de tan altas pretensiones.

Párrafos 4 y 5 (págs. 405-411):

Definición de lo que el autor entiende por problema de los momentos de “Le Roy Hausssdorf”, a saber:

“determinar una función *única* que satisfaga a la condición

$$a_n = \int_0^1 x^n \varphi(x) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots, n \dots)''$$

El autor no dice a qué categoría debe pertenecer la función $\varphi(x)$, incógnita. Suponemos que exige que $\varphi(x)$ sea acotada e integrable, según ha supuesto antes. Este problema, tal como lo entiende el Sr. Vignaux, es insoluble, como se deduce de las primeras propiedades de la integral de Riemann, o aún de Cauchy.

Página 408:

Demuestra el teorema: Si se verifica la (1), se verifica también:

$$f(z) = \frac{1}{z} \left[\varphi(1) e^{-z} - \varphi(0) \right] + \frac{1}{z} \int_0^1 e^{-zx} \varphi'(x) dx.$$

Exactísimo. No hay más que integrar por partes. Igualmente, derivando n veces, llega a una fórmula donde en el segundo miembro aparece, bajo el signo de integral, la derivada enésima de $\varphi(x)$. Estos “teoremas”, eran ya conocidos en los tiempos de Laplace (siglo XVIII), y quizás aun antes.

Otro “teorema” (pág. 409, línea 5, empezando por arriba): Si se verifica:

$$f(z) = \int_0^1 e^{-xz} \varphi(x) dx, \quad g(z) = \int_0^1 e^{-xz} \psi(x) dx,$$

se verifica también:

$$f(z) \pm g(z) = \int_0^1 e^{-xz} (\varphi(x) \pm \psi(x)) dx.''$$

Huelgan los comentarios.

Página 410:

El teorema que demuestra, de manera no rigurosa, es un caso muy particular del conocidísimo teorema sobre la "Faltung", de integrales de Laplace, que figura en libros bien conocidos, incluso para el intervalo $(-\infty, \infty)$, y funciones meramente sumables (y no sumables y acotadas, como supone Vignaux). Suponiendo las funciones nulas para $(-\infty, 0)$, y $(1, \infty)$, se obtienen los teoremas del autor, sin necesidad de los largos cálculos (puramente formales), que él utiliza.

Páginas 410-411:

Con motivo del "cociente" de transformadas (que define de manera exclusivamente formal, al estilo del siglo XVIII, pues para conocer ese cociente hay que resolver una ecuación integral de primera especie, y el autor no da condiciones ni siquiera para que esa ecuación admita solución), comete un grueso error de concepto. Dice, en efecto (pág. 411):

"Haciendo el producto del segundo miembro, la relación anterior se puede " escribir:

$$\int e^{-xz} \varphi(x) dx = \int e^{-xz} \left[\frac{1}{2} \int_0^x \psi(x-y) \omega(y) dy \right] dx,$$

" de donde resulta, según un conocido teorema de Lerch-Vitali

$$2 \varphi(x) = \int_0^x \psi(x-y) \omega(y) dx."$$

La conclusión a que llega el autor es lamentablemente equivocada. Suponiendo que la función $\omega(x)$ exista, para lo cual el autor no da ningún criterio, la igualdad anterior puede no verificarse. Consulte el autor cualquier libro moderno de Cálculo.

Párrafo 6 (pág. 411):

Incompleta y confusa noticia sobre el problema de la inversión.

Párrafo 7 (págs. 412-415):

Demuestra que la integral doble

$$f(z, w) = \iint e^{-z^x - y^w} \varphi(x, y) dx dy$$

($\varphi(x, y)$ acotada e integrable Lebesgue), es función holomorfa de z y w , escribe su desarrollo de Taylor, y afirma que sus derivadas parciales se obtienen derivando bajo el signo de integral.

Todo esto es tan trivial y conocido como en el caso de una variable, y con idéntica facilidad se demuestra, por ejemplo, para una función de 10.000 variables.

Párrafo 9 (página 414-415):

Plantea el siguiente problema:

“Dada la sucesión doble a_{mn} , determinar una función “única”, $\varphi(x, y)$, de las variables x, y , tal que

$$a_{mn} = \int x^m y^n \varphi(x, y) dx dy \quad (m, n = 0, 1, \dots).”$$

Le aconsejamos al Prof. Vignaux que deje las cosas donde están, y no trate de resolver el problema, tan incorrectamente enunciado, el cual si tiene una solución, tiene infinitas; vea cualquier libro moderno de Cálculo Infinitesimal. El autor no tiene noticia, por lo visto, de que el problema, *bien planteado*, ha sido objeto de múltiples investigaciones, por Schoenberg, Hildebrandt, Haviland, . . . incluso para intervalo infinito, y n variables. Ponemos la bibliografía completa a su disposición, si así lo desea.

Párrafo 10 (pág. 415-416):

He aquí un teorema característico del Prof. Vignaux, que ya conocían perfectamente los alumnos de los cursos elementales: la integral de una suma es igual a la suma de las integrales.

El caso del producto (pp. 415-416) no es tan trivial, y se siente orgulloso de haberlo resuelto en 1938 para dos variables (An. Soc. Cient. Arg. T. CXXVI, 1938, pág. 14). Podía haberse ahorrado el esfuerzo de demostrar malamente esta regla de Cálculo; pues aun sin molestarse en leer memorias, pudo haber aprendido en libros didácticos (“Lehrbücher”), que ponemos a su disposición, la demostración perfecta, no para *dos*, sino para n variables; y no sólo para el modestísimo intervalo $(0, 1)$, sino para $(-\infty, \infty)$; y para funciones meramente sumables, y no sumables y *acotadas*, como supone cómodamente Vignaux.

Párrafos 11-12 (págs. 416-422):

Extiende los teoremas anteriores sobre suma y producto de integrales de Laplace ordinarias a las integrales de Laplace de variable compleja dual. Como estas integrales se reducen inmediatamente (según el mismo autor no puede menos de observar en la página 417), a un par de integrales de Laplace ordinarias, todos los teoremas que para ellas demuestra son tan triviales como los precedentemente reseñados. [*].

Párrafo 13 (págs. 422-423):

Propiedades de la integral doble de Laplace de variable compleja dual. Por la misma razón que los anteriores (reducción inmediata a integrales

(*) Por la sencillez del tema fué propuesto como ejercicio en el curso pasado a los alumnos del Seminario Matemático de la Facultad de Buenos Aires y algunos de ellos, dejando de lado las propiedades triviales, que son las mismas ya sabidas, encontraron algunas pequeñas novedades dignas de nota respecto del campo ordinario. Ninguna de estas propiedades se encuentra sin embargo en este capítulo, en el cual se aplican con asombroso coraje los clásicos teoremas de integración precisamente en los casos en que su uso está prohibido sin las precauciones que enseñan los textos. Lo muy poco que sería preciso demostrar no lo demuestra, admitiendo ciertas propiedades, como una gratuitamente atribuida a la Srta. Cibrario.

Sobre la exactitud de las citas y su ortografía podría escribirse otro folleto.

de Laplace ordinarias), estos teoremas son completamente triviales. Menos mal que el autor, en un arranque de sinceridad, lo confiesa (página 423): "Las propiedades de esta integral doble se deducen a partir de la expresión (2), y razonando como en el caso de una variable".

Párrafo 14 (págs. 423-425):

Pintoresca noticia histórica (incluso por la ortografía) sobre el problema de los momentos.

Párrafo 15:

No existe.

Párrafo 16 (págs. 425-426):

Menciona el problema de los momentos de Cauchy, y aun cuando dice con mucha razón (nos place consignar que la memoria contiene esta afirmación rigurosa) que "cuando la curva c es cerrada, la solución es inmediata, y ella está contenida en los resultados fundamentales de Cauchy "sobre las series de potencias", después invierte dos largas páginas en reproducir cosas conocidas hace más de un siglo.

Párrafo 17 (págs. 426-428):

El problema que llama de los "momentos factoriales", sobre una curva cerrada, cuya solución ha anunciado alborozadamente en la página 425, no es tal problema. Esperemos que el autor se dé cuenta de su equivalencia con el de Cauchy leyendo el final de esta reseña.

Las fórmulas que figuran en la mitad superior de la página 427 tienen un parecido comprometedor con las de una clásica memoria de Frobenius (Crelle, vol. 73, 1871, pp. 1-30); parecido que se trasmuta en identidad si en las fórmulas de Frobenius de las páginas 5 y 6, se reemplaza la sucesión $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, que en ellas aparece, por la sucesión particular $0, 1, 2, 3, \dots$; ¡Admirable retroceso al cabo de 67 años!

Página 428:

Las novedosísimas consideraciones anteriores culminan en el descubrimiento del siguiente teorema: "*Dada una función holomorfa en el exterior del contorno cerrado c , y continua sobre c , su desarrollo en serie de facultad convergente queda perfectamente determinado*". (*).

Las fórmulas anteriores tenían un peligroso parecido con las de Frobenius. El presente teorema, que data de los lejanos tiempos de la guerra franco-prusiana (1871), se llama también de Frobenius. Para mayor desgracia figura incluso en textos elementales, por ejemplo en el archiconocido de Pincherle, "Gli Elementi della Teoria delle Funzioni Analitiche", Bologna, Zanichelli, donde puede leerse, en la página 329: "ogni funzioni analitica regolare per $x \rightarrow \infty$ é sviluppabile in serie di fattoriali". El Prof. Vignaux, quién sabe con qué propósito, hizo el agregado, arbitrario e inútilmente restrictivo: "y continua sobre c ", con tan mala fortuna que ha estropeado el teorema y no ha despistado a nadie.

(*) Subrayado por el autor. Sin duda ha querido decir serie de facultades.

Párrafo final Nº 18 (pág. 428):

El autor cierra dignamente esta segunda parte de la memoria con el siguiente párrafo que abre un horizonte de vastas proyecciones: “Por ahora nos limitaremos a estas consideraciones, y dejamos planteada la cuestión de los momentos factoriales sobre una curva abierta y el de los momentos factoriales de tipo Stieltjes, o del tipo Le Roy-Hausdorff o del tipo Hamburger”.

“ Se puede generalizar también este problema considerando integrales de “Stieltjes”. (*)”.

Este es el difícilísimo problema que el autor, tras inútiles esfuerzos para resolverlo se limita a enunciar, en la esperanza de que algún ilustre matemático le dedique sus desvelos y con su solución se inmortalice, inmortalizando de paso-al que lo propuso.

Consideramos que vale la pena detenerse sobre este punto, pues ello va a permitirle al más profano apreciar cabalmente la extraordinaria originalidad de este problema, y la de su creador.

Un lector que sólo conozca las cuatro reglas y posea el concepto más elemental de integral puede comprender perfectamente lo que sigue.

El problema clásico de los momentos consiste en establecer las condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir una sucesión dada de números reales $m_0, m_1, m_2, m_3, \dots, m_n, \dots$, para que exista una función $f(x)$, perteneciente a una dada categoría, tal que se cumplan las infinitas igualdades:

$$\begin{aligned}
m_0 &= \int f(x) x^0 dx \\
m_1 &= \int f(x) x^1 dx \\
m_2 &= \int f(x) x^2 dx \\
&\dots\dots\dots \\
m_n &= \int f(x) x^n dx ,
\end{aligned}$$

entendiéndose que los límites de integración son a y b . (*)

El nuevo problema de los momentos factoriales, que plantea, orgulloso, el Prof Vignaux, consiste en averiguar las condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir una sucesión dada de números reales c_0, c_1, c_2, \dots

(*) El autor le asigna a este resultado, con el cual corona su obra, especialísima importancia. Recalca, en efecto, en la página 404 (final del párrafo 2): “Finalmente, en la tercera parte se estudia una nueva cuestión: la de los momentos factoriales”. Y en su ansia muy loable de inmortalidad, firmemente empeñado en que su problema “el problema de Vignaux”, sea bien conocido, lo antes posible, por todos los matemáticos del orbe, les lanza nuevamente su cartel de desafío, cual despiadada esfinge rediviva, recordándoles en otra publicación posterior (Anales de la Soc. Cient. Arg., marzo 1939, pág. 185), la deuda de honor que tienen contraída al no atacar la magna cuestión “que hemos denominado problema de los momentos factoriales”.

(*) Si a y b son finitos, es el caso de Hausdorff; si $b = +\infty$ el de Stieltjes; si $a = -\infty, b = +\infty$, el de Hamburger.

para que exista una función $f(x)$ tal que se verifiquen las infinitas ecuaciones

$$\int f(x) dx = c_0, \quad \int x f(x) dx = c_1, \quad \int x(x+1) f(x) dx = c_2, \dots$$

Ahora bien: todo alumno de quinto grado de la escuela primaria entenderá las siguientes igualdades:

$$1 = 1$$

$$x = x$$

$$x^2 = x(x+1) - x$$

$$x^3 = x(x+1)(x+2) - 3x(x+1) + x;$$

y cualquier estudiante de arquitectura podrá multiplicar ambos miembros de estas igualdades por $f(x)$ e integrar luego sin mayor esfuerzo, obteniendo:

$$\int f(x) dx = \int f(x) dx,$$

$$\int x f(x) dx = \int x f(x) dx,$$

$$\int x^2 f(x) dx = \int x(x+1) f(x) dx - \int x f(x) dx,$$

$$\int x^3 f(x) dx = \int x(x+1)(x+2) f(x) dx - 3 \int x(x+1) f(x) dx + \int x f(x) dx;$$

o sea $m_0 = c_0$,

$$,, \quad m_1 = c_1,$$

$$,, \quad m_2 = c_2 - c_1$$

$$,, \quad m_3 = c_3 - 3c_2 + c_1,$$

y así sucesivamente. (*).

Las sencillísimas restas que anteceden, demuestran de modo irrefutable que, si la función $f(x)$ es solución del problema de "momentos factoriales" de Vignaux para la sucesión (c_n) , es también solución del problema clásico de momentos para la nueva sucesión (m_n) y recíprocamente.

Ergo, el "problema de Vignaux" es el mismo problema de Hausdorff, de Stieltjes o de Hamburger.

He aquí, pues, descifrado por un Edipo cualquiera, con una sencillísima operación de *resta*, el pavoroso enigma que el Prof. Vignaux, con religioso temor, no ha osado siquiera abordar.

Poincaré ha dicho en alguna parte que no era capaz de hacer una suma sin equivocarse. Bien podemos disculpar a su émulo platense que se haya atrancado en una resta.

(*) Es bien sabido como se llega a la expresión general de m_n mediante los famosos números de Stirling, conocidos hace más de 200 años.

J. C. VIGNAUX: "Extensiones del teorema de Abel-Stolz y sobre algunas transformaciones funcionales lineales" (conclusión); Anales de la Sociedad Científica Argentina, Tomo CXXVII, marzo de 1939, pp. 161-185).

Merece esta memoria por múltiples razones (tantas como teoremas), estudio aparte, que aparecerá en el próximo número del Suplemento. Con todo, no podemos resistir a la tentación de dar a conocer a nuestros lectores, para muestra, siquiera uno de los revolucionarios teoremas que contiene.

El Prof. Vignaux considera integrales del tipo siguiente, que llama de *Le Roy*:

$$A) \quad f(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(x) dx}{1-xz},$$

donde $\varphi(x)$ es real, acotada e integrable Lebesgue en el intervalo $(0, 1)$, y z es un número complejo arbitrario, no perteneciente al intervalo $(1, \infty)$; y considera los "momentos" sucesivos de $\varphi(x)$:

$$1) \quad a_n = \int_0^1 x^n \varphi(x) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

En la página 172 de la memoria figura el siguiente notabilísimo teorema con su demostración, no menos notable: "Si se da una función definida por su desarrollo de Taylor

$$2) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

"cuyo radio de convergencia se supone igual a la unidad, y sus puntos singulares estén en el intervalo $(1, \infty)$; entonces la $f(z)$ puede expresarse en toda su estrella rectilínea por una integral de *Le Roy*. En efecto, dada "la sucesión a_n se puede determinar una función $\varphi(x)$ solución de la (1)."

Después de este catastrófico descarrilamiento en la estación de salida, es inútil seguir copiando.

Basta aplicar, por vía de ejemplo, el teorema anterior a la sencillísima serie geométrica: $f(z) = \sum z^n$.

Esta satisface a todas las condiciones impuestas en el teorema, pues su radio de convergencia es 1, y su único punto singular es también el punto 1, perteneciente al semirayo $(1, \infty)$, según exige el teorema.

Como en este caso sencillísimo todos los a_n son iguales a 1, la correspondiente función $\varphi(x)$, deberá satisfacer, de acuerdo con la fórmula (1) del Prof. Vignaux, a la siguiente relación:

$$1 = \int_0^1 \varphi(x) x^n dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Pero por las propiedades bien sabidas de las integrales, el límite del 2^o miembro para $n \rightarrow \infty$ es 0, luego resulta la estupefaciente igualdad

$$1 = 0.$$

He aquí una de las consecuencias menos sorprendentes del teorema del Prof. Vignaux,

(Continuara),

Después de visto y admirado el más valioso resultado original a que llega la memoria, procederemos al examen detenido de esta desconcertante producción. La cual comienza así:

“Aquí nos vamos a ocupar —dice el autor— del estudio de la correspondencia funcional que establece la integral de Le-Roy

$$f(z) = \int_C \frac{\varphi(x)}{1-xz} dx \quad [1]$$

“entre una función dada $\varphi(x)$ y la función $f(z)$ definida por la integral [1]. Luego propondremos algunas generalizaciones de la misma”.

Hemos repasado cuidadosamente las 25 páginas de la memoria y en ellas no aparece el estudio de la integral curvilínea, ni mucho menos sus prometidas generalizaciones (*); y esto a pesar de su anuncio:

“Trataremos *primeramente* el caso en que la [1] esté tomada sobre el “intervalo real (0,1)”.

Y no cabe esperarlas en otro capítulo, que quizás podría aparecer en un próximo número de los “*Anales*”; pues éste ostenta el bien visible rótulo “*Conclusión*”; y no por error de imprenta, ya que en los sucesivos números cambia de tema.

Es muy posible que se trate de una de las tantas incumplidas promesas con que el autor matiza sus memorias; pero más favorable es otra explicación que surge al comparar ambos capítulos. El capítulo II trata, como ya hemos dicho, de la transformación

$$f(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(t) dt}{1-zt} \quad [1']$$

que el señor Vignaux llama de Le Roy y en el capítulo II trata de la transformación

$$f(z) = \int \frac{\varphi(x) dx}{x-z}, \quad [1'']$$

que Pincherle estudió en fecha remota (**), llamándola de Heine.

Una y otra son en el fondo una y misma transformación perfectamente conocida, y el lector notará inmediatamente que de una a otra se pasa por un simplicísimo cambio de la variable z ; y que las conclusiones obtenidas para una se aplican a la otra *mutatis mutandis*. Algunos autores, como Bernstein, Hausdorff, Féjer, ... prefieren la forma ['] mientras que

(*) Para ser exactos, declaremos haber encontrado cuatro líneas (números 1, 2, 3, 4, de página 173) en que se limita a decir que los resultados anteriores se *pueden* extender.

(**) La cita que hace el autor es, como de costumbre, inexacta. El libro que cita: *Funzione analitiche*, no dice lo que afirma el Sr. Vignaux.

otros como Stieltjes, Pincherle, Borel, Perron, Wintner, Titchmarsh... eligen por el contrario la forma [1"]. Lo nunca visto es tratarlas a la par como cosas esencialmente distintas y hasta con diferentes nombres de pila.

Siendo inverosímil que el autor no se haya dado cuenta de la identidad de esencia, es probable que después de desarrollar la teoría por ambos métodos, para elegir el mejor, un disculpable *lapsus* en la ordenación de originales, haya producido esta lamentable repetición, agravada con la no menos lamentable omisión de las dos promesas exactamente iguales en uno y otro capítulo. En efecto, dice así en pág. 157:

“Pincherle considera la integral

$$f(z) = \int \frac{\varphi(t) dt}{t-z}$$

“sobre una curva C abierta o cerrada del plano, siendo $\varphi(t)$, una función de la variable t sobre C . En este capítulo vamos a estudiar esta correspondencia funcional, dando algunas propiedades nuevas y estableciendo su relación con el problema de la prolongación analítica. Finalmente *proponemos algunas generalizaciones*”.

La frase subrayada es, como se ve, idéntica a la antes reproducida, salvo el cambio de adverbio; y el incumplimiento es también idéntico.

En efecto, ni da *propiedades nuevas*, ni establece su relación con el problema de la prolongación analítica (v. nuestro ejemplo de pág. 8) ni propone generalizaciones.

Siquiera en el capítulo II proponía una generalización, si no de la integral curvilínea, que olvida desde la primera página, al menos de la rectilínea; y hasta llegaba a inventar la *nueva* transformación:

$$f(z) = \int_a^1 \frac{\varphi(x) dz}{(1-xz)^\alpha}$$

la cual, en uso del legítimo derecho que asiste a todo progenitor, bautizaba con el sonoro nombre de “transformación (R) de orden α ”.

Lo malo es que la neófita tenía ya dos siglos de vida y todo el mundo la conocía bajo el nombre de “transformación de Euler”. Y peor todavía es que el único teorema (de trivialidad desconsoladora) descubierto por su padre adoptivo, era ya sabido en el S. XVIII.

Para reducir a la mitad el trabajo de algún problemático lector de la memoria que comentamos; damos una tabla de equivalencias entre los capítulos II y III, cuya identidad casi completa hemos explicado suficientemente.

Nótese que al final deja de ser exacta la coincidencia entre ambos capítulos, y ello es debido a la dualidad de fuentes en que se ha inspirado. Pero tanto los teoremas comunes como los no comunes a los dos capítulos, eran ya bien conocidos de todos los profesionales, y hasta figuran en libros de texto. Repetirlos dándolos como nuevos es ya un hecho insólito; pero repetirlos por duplicado en una misma memoria inutilizando la demostración original ajena con desdichados retoques propios, es ejemplo único en la literatura matemática.

Página	Línea	Página	Línea
161	9-11	177	19-22
161	15-21	178	1-4
162	1-5	178	5-11
„	6-11	„	12-20
„	12-13	„	21-22
„	14-25	„	23-30
162	26-29	179	1-4
163	1-10	„	5-10
„	11-21	„	11-17
„	22-25	„	18-23
164-166	1-12	180-181	1-3
168	1-20	181	4-21

La repetición de cada teorema, dando nombres distintos a la variable, salta a la vista de cualquier lector, quien podrá comprobar el anterior cuadro de equivalencias. Que los dos ejemplares de cada teorema no son sino transcripciones desfiguradas de teoremas ajenos, resultará del análisis minucioso que haremos a continuación. Hay, sin embargo, alguna excepción: cuando se trata de propiedades tan triviales o archisabidas que los textos las dan por evidentes o ya conocidas de todos, mientras el Sr. Vignaux se complace en ocupar con ellas páginas y páginas.

Por ejemplo: el teorema del Cap. II, pág. 162:

*La función $f(z)$ es holomorfa en todo el plano con la cortadura $(+1, +\infty)$ o su equivalente de pág. 178 en el Cap. III, son casos particularísimos e insignificantes del bien conocido teorema de Stieltjes que data nada menos que de 1894, el cual es mucho más general, por ser infinito el intervalo y por la clase de integral; teorema que figura en textos tan conocidos como el de Perron sobre fracciones continuas (2ª ed., Leipzig, 1929, pág. 369, o el de Wintner sobre matrices (Leipzig, 1929, pág. 91); teorema que durante casi medio siglo ha sido utilizado frecuentemente por los matemáticos, sin molestarse siquiera en dar su demostración, por suponerla conocida de todos los lectores. Así por ej. Borel (*Leçons sur les Séries Divergentes*, IIª ed., 1928, pág. 67) dice: “L’intégrale J définit manifestement une fonction holomorphe dans tout le plan, sauf sur la partie négative de l’axe réel, qui est une coupure”.*

Y esto a pesar de que Borel considera intervalo infinito, para el cual la demostración no es trivial; y todavía es más general el caso tratado por Stieltjes.

Aunque lo expuesto es suficiente para que el lector forme juicio de la memoria, vamos a analizar párrafo por párrafo, todo su contenido:

Párrafo 19, pág. 163.—Afirma que las derivadas de la función $f(z)$ se calculan derivando bajo el signo integral; la propiedad es cierta en este caso, pero el autor no se preocupa de averiguar si se cumplen las condiciones requeridas; en cambio ocupa amplísimo espacio para escribir la función, su derivada primera, su derivada 2ª, su derivada enésima, y el valor de la derivada enésima para $z=0$, llenando así media página.

Párrafo 20, pág. 163.—Llegamos, por fin, a un resultado novedoso, que en esta memoria nos sorprende, pues tiene verdadero interés: “pro-
“baremos ahora —anuncia el autor— que el producto de dos transforma-
“das (R) es una transformada (R)”.

El autor entiende por transformada (R) la definida por la integral

$$f(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(t) dx}{1-zt},$$

“donde $\varphi(t)$ es una función *integrable* y *acotada* en $(0,1)$ ”. Así la define el Sr. Vignaux, quien anuncia, en nota al pie, que seguirá un razonamiento *análogo* al de Borel (loc. cit., pág. 78) y este anuncio estimula nuestro interés, puesto que Borel supone las funciones *derivables*.

Desgraciadamente, esta esperanza se desvanece al cotejar la memoria del autor con el libro de Borel. En efecto, cualquier lector que sepa leer las fórmulas matemáticas, formará inmediatamente el siguiente cuadro de identidades:

Sr. Vignaux				M. Borel	
Capítulo II		Capítulo III		<i>Leçons sur les séries divergentes</i>	
Página	Línea	Página	Línea	Página	Línea
163	11-21	179	11-17	77	16-18
163	22-25	{ 179	18-20	79	12-13
		{ 180	1-3		
164	1-3	180	4-6	79	16-18
164	4-8	180	7-9	80	13-17
164	9-11	180	18-20	80	18-21
164	12-21	180	10-17	81	1-6(*)
165-166	1-12	{ 180	21-23	{ 81	3-23
		{ 181	1-3	{ 82	1-6

¿Cómo es posible entonces que por una simple transcripción tan fiel de las páginas del conocido libro, con meras modificaciones de forma (todas infortunadas) logre demostrar un teorema mucho más amplio que el de Borel? (**). ¿Por qué arte mágico dos demostraciones esencialmente idénticas pueden dar teoremas tan distintos?

(*) Si el lector compara las fórmulas de Borel con las reproducidas por el autor, notará que en éstas falta excluir el intervalo $(v-\varepsilon, v+\varepsilon)$ en las integrales simples; pero esta *simplificación*, que disimula la fuente de sus cálculos, es inadmisibles, como arriba se ha explicado, careciendo por tanto de sentido las fórmulas que no son idénticas a las de Borel.

Tampoco vale para las integrales simples la disculpa de que el autor sobreentiende que se tome el valor principal, pues como demuestra el ejemplo que arriba aducimos, tal valor principal no existe dentro de las hipótesis del Sr. Vignaux.

(**) Haciendo honor a la justicia, la transcripción no es completamente literal, pues hay algunas pequeñas modificaciones, desgraciadamente todas desafortunadas. En efecto, como dice muy exactamente Borel, (pág. 79) “l’intégrale J a un sens, malgré la présence du facteur $v-u$ en dénominateur, puisque ce facteur se retrouverait en numérateur dans la paren-

La contestación está en una nota al pie de pág. 166, donde dice: "se ha supuesto que las funciones generatrices $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ sean derivables, a fin de simplificar los cálculos".

No deja de ser extraño que al ilustre profesor de la Sorbona se le haya escapado el hecho de que su teorema es válido sin necesidad de exigir que las generatrices sean derivables, mientras que lo ha visto, con aguda perspicacia, el distinguido profesor argentino. Pero este nuevo lauro de nuestro fecundo analista se desvanece inmediatamente apenas se piensa en cualquier función discontinua. He aquí la más sencilla de todas:

$$\psi(v) = 1 \text{ para } 0 \leq v < u,$$

$$\psi(v) = 0 \text{ para } u < v \leq 1.$$

Para esta función la integral del Sr. Vignaux:

$$\int_0^1 \frac{\psi(v) dv}{u-v} = T(u)$$

(fórmula 4ª empezando por abajo, de la pág. 164), se reduce a la siguiente:

$$T(u) = \int_0^1 \frac{\psi(v) dv}{u-v} = \int \frac{dv}{u-v},$$

y la primera fórmula de pág. 165 del Sr. Vignaux:

$$T(u) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_0^{u-\delta} \frac{\varphi(v) dv}{u-v} + \int_{u-\delta}^1 \frac{\varphi(v) dv}{u-v} \right]$$

nos da, para esta sencillísima función, *integrable y acotada*, según ha supuesto el mismo,

$$T(u) \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{u-\delta} \frac{dv}{u-v} = \lim_{\delta \rightarrow 0} [\log \delta - \log u] = -\infty.$$

Resulta, pues, que la integral *carece de valor principal*, mientras que el señor Vignaux afirma rotundamente en la pág. 164: "*existe el valor principal en el sentido de Cauchy*".

Nos quedaba todavía la esperanza de que el autor estuviera en posesión de algún método para demostrar ese anunciado teorema, mucho más general que el de Borel, a pesar de haberse limitado a reproducir el de éste, pero como ve el lector, *lasciate ogni speranza*. El teorema es irremediabilmente falso.

"thèse. Mais il n'en serait plus de même si l'on décomposait l'intégrale J "en deux autres, en séparant les deux termes de la parenthèse. Chacune de "ces intégrales serait dépourvue de sens".

El señor Vignaux se cree autorizado a calcular esta integral doble por medio de dos integraciones sucesivas, sin darse cuenta de que las fórmulas que escribe carecen totalmente de sentido.

Es muy probable que suceda lo mismo con aquellos teoremas que anunció el año 1932 asegurando estar en posesión de su demostración. Confianzo en su formal aseveración: "*Nous avons démontré les théorèmes suivants*", fueron publicados sus enunciados en los *Comptes rendus* (*), como es costumbre hacer con todo profesor universitario que hace bajo su palabra tal afirmación, a reserva de justificarla posteriormente; pero hasta la fecha seguimos esperando que pruebe la verdad de lo afirmado tan solemnemente.

En cuanto a la *comodidad* a que alude en su nota al pie de pág. 163, y que los lectores ingenuos le habrán agradecido, entiéndase que la comodidad es para el autor. Si el teorema lanzado a la ventura hubiese resultado providencialmente cierto, ¿quién habría osado discutirle su paternidad?

Es muy cómodo indudablemente enunciar teoremas al acaso, por si les favorece el azar, omitiendo por *comodidad* su demostración; pero este método aleatorio no está exento de peligros (**).

Pág. 166-167. Los dos teoremas que demuestra en ellas son de Pincherle, salvo el cambio $1/x$; véase, en efecto, su conocida nota en los Rendiconti Accad. Lincei, que el autor ha *olvidado* de citar.

Párrafo 21, pág. 168.—Otro *olvido* de citas. El desarrollo en serie de Taylor de la integral [1'] de Cap. II, o su equivalente de Cap. III, N^o 28, pág. 181, figura en textos tan conocidos como el de Wintner (loc. cit. pág. 101) y el de Pincherle (loc. cit. pág. . .), así como también las observaciones que hace a continuación (Wintner loc. cit. pág. 99).

Párrafo 22, pág. 168-169.—Cita el libro de Borel (sin decir la página) y sigue exactamente su mismo razonamiento.

Párrafo 23, pág. 170.—El autor representa la integral [1'] por medio de una integral de Borel, cosa ya sabida, incluso para el caso extraordinariamente más general de intervalo infinito y de integral de Stieltjes. Véase por ejemplo la memoria de S. Bernstein. (Acta math. tomo 32 (1929) pág. 58) donde figura fórmula idéntica a la [3] del señor Vignaux y también observaciones idénticas a las del mismo Vignaux. Igualmente sabido es el teorema análogo de cap. III., párrafo 29, pág. 182 para la integral de Heine.

Párrafo 23, pág. 171.—El Dr. Vignaux insiste, como ya viene haciendo desde hace mucho tiempo, en atribuirse la paternidad de la prolongación de la estrella de Borel, que dice haber logrado en 1924, "en el caso que la función definida por su desarrollo de Taylor, tiene uno o dos puntos singulares".

(*) Sur la méthode de sommation de Riemann. Vol. 195, pág. 750 y 751. LL

(**) En el teorema idéntico de cap. III supone derivable la generatriz, siguiendo paso a paso el libro de Borel. ¿Cabe quizás atribuir a olvido disculpable la omisión de tan indispensable condición en pág. 163? Desgraciadamente para su salvación, el mismo autor ha cerrado esta puerta de escape, atracándola con su nota ya citada de pág. 166; y por si esto fuera poco, agrega una explícita declaración en pág. 167 cuando al pasar a un nuevo teorema (que por cierto es de Pincherle y no del autor) dice: "consideremos nuevamente la relación [1] y supongamos además "que la generatriz $\varphi(x)$ sea derivable".

La verdad es otra. El Sr. Vignaux en una larga memoria en la Revista Matemática (Nos. 21, 22, 23) se limitó a *comprobar* para las más sencillas funciones *elementales* (logaritmo, progresión geométrica, ...) la prolongación del campo, sin atreverse siquiera con la modesta serie binómica.

En la memoria citada anuncia que abordará “en una próxima publicación” el caso de las funciones con “*uno o dos puntos singulares situados sobre un diámetro del círculo de convergencia*” sin atreverse ni aun a tocar el caso en que estos dos puntos son cualesquiera. Ahora, en cambio, lo da ya por resuelto con aquellos elementales ejercicios de cálculo. ¿Creerá acaso el Sr. Vignaux que las precitadas funciones elementales son las únicas funciones analíticas con *uno o dos puntos singulares*?

No le conviene volver sobre este punto, pues demasiado sabe a estas horas que ese modesto caso de dos puntos singulares es insignificante dentro del caso general, que está completamente resuelto muchos años antes de que él se ocupara de tales asuntos. Hoy no repetiría la frase final de su memoria:

“El problema general, sin duda de gran importancia para la teoría, ofrece grandes dificultades.”

En efecto, tal problema, *ni tiene gran importancia ni ofrece dificultades, grandes ni medianas*. Es un sencillo ejercicio de cambio de variable.

Párrafo 24, pág. 172.—El método de prolongación analítica que propone el autor para extender el campo de convergencia de una serie de Taylor de radio 1, expresión de una función cuyos puntos singulares están en el intervalo $(1, \infty)$, es completamente ilusorio, como lo demuestra irrefutablemente el caso de la simplicísima serie geométrica

$$f(z) = \sum z^n$$

que cumple todas las condiciones impuestas por el profesor Vignaux. Véase la prueba contundente de nuestra aserción en la página 8 de este trabajo.

El lector quedará maravillado de la eficacia de un método que ya *fracta* casa en la más simple de todas las series, y conduce al revolucionario resultado:

$$1 = 0.$$

Párrafo 25, pág. 173.—Ya hemos dicho antes a lo que ha quedado reducida su anunciada generalización de la integral de Le Roy. Menos mal que compensa esta trivialidad con el planteo de una *nueva* teoría. Se trata, en efecto, con sus propias palabras, del estudio de “la transformada de “Le Roy, adoptando integrales en el sentido de Stieltjes, es decir:

$$f(z) = \int_0^1 \frac{d\varphi(x)}{1-xz},$$

“que, llamaremos *transformación* de Le Roy-Stieltjes. Nos limitaremos “aquí a señalar estas *nuevas* cuestiones, que será tema de estudios posteriores” (*).

(*) El subrayado es nuestro; la concordancia de sujeto y verbo es del autor.

Estas *nuevas* cuestiones, tienen ya medio siglo de vida. Conviene que el autor lea la famosísima memoria de Stieltjes (Ann. de Toulouse, 189b, pág. 1-122, Obras Completas, vol. II, pág. 125) donde hay todo un extenso capítulo, que se ha hecho célebre, consagrado al estudio que el señor Vignaux propone como nuevo en 1939. Con la agravante de que los problemas que desvelan al laureado analista argentino, están resueltos, no solamente para el minúsculo intervalo (0,1), objeto de sus afanes, sino también para (0, ∞), donde ya aparecen serias dificultades.

Por si esto fuera poco, el sencillo caso del intervalo (0,1), que nuestro autor no ha resuelto todavía, figura ya en el conocido texto antes citado de Wintner, pág. 101, y siguientes:

Párrafo 26, pág. 174-176.—Las consideraciones que hace sobre las transformadas dobles de Le Roy, son completamente triviales y valen lo mismo para cualquier número de variables. Véase lo ya dicho en la página 3 de nuestro trabajo.

Termina el capítulo proponiendo este problema:

“es necesario resolver el siguiente problema, que llamaremos de los *momentos dobles de Le-Roy-Hausdorff*: *dada la sucesión doble* $a_{m,n}$ *determinar una función única* $\varphi(x, y)$ *de dos variables reales, tal que*

$$a_{m,n} = \int_0^1 \int_0^1 x^m y^n \varphi(x, y) dx dy \quad (m, n = 0, 1, \dots)''.$$

Este problema, tal como lo enuncia el autor, es insoluble; pero bien planteado ha sido ya resuelto hace tiempo. De la copiosa bibliografía, baste recomendar las memorias de Hallenbach, Schönberg, Haviland, Hildebrandt, ...

Aquí termina en realidad la memoria, aunque todavía siguen nueve páginas más, que componen el capítulo III; pero su contenido lo hemos ido analizando a la par del II puesto que la integral [1''] es la misma [1'] tratada en el capítulo II, cambiando el nombre de la variable.

No uno sino infinitos capítulos podría haber agregado el autor a su memoria, sin por ello haberla dotado de contenido apreciable; y así como ha fabricado el capítulo III sin más que cambiar el nombre de la variable z , podría haber fabricado infinitos otros, con otros tantos intrascendentes cambios. Y eso, sin tocar el intervalo de integración; pues así como ha embutido en su capítulo II la memoria de Pincherle, que considera el intervalo (1, ∞), cambiando meramente x por $1/x$, calcúlese cuantos nuevos capítulos podrían fabricarse con otros tantos intervalos. Con tales hinchazones, solamente se logra rebajar más y más el peso específico de la ya ingrátida memoria, cuyas 76 páginas, trabajosamente henchidas con nobles materiales ajenos burdamente desfigurados, agravian al lector sin lograr en cambio disimular la miseranda orfandad de ideas.

Fausto I. Toranzos

**Sobre las singularidades
de las
curvas de Jordan**

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Publicación Núm. 13.

BUENOS AIRES

1939

SOBRE LAS SINGULARIDADES

DE LAS CURVAS DE JORDAN

Por FAUSTO I. TORANZOS

Concepto de tangente.—No existe uniformidad de criterios respecto al concepto de tangente a una curva real, por lo que se hace necesario especificar la definición de tangente que se utiliza. Nosotros usaremos algunas veces el concepto de tangente a una curva de Jordan en el sentido dado por Rosenthal (*) y otras en el dado por Severi (**), por lo cual es necesario probar su equivalencia. El concepto de *semitangente* a una curva en el sentido dado por Rosenthal y aplicado a las curvas de Jordan es el siguiente: sea P_i una sucesión de puntos sobre una curva de Jordan, tales que, siendo t el parámetro se verifique:

$$t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n < \dots \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0.$$

Consideremos el haz de semirrectas $P_0 P_n$. Si existe una semirrecta límite del haz, diremos que es una *semitangente a la izquierda* en P_0 a la curva. Análogamente se define la *semitangente a la derecha*.

El concepto de tangente de Severi es el siguiente: "Sea P un punto de una línea l de Jordan plana (esto se extiende análogamente al S_n) y tomemos un entorno suyo, contorno incluso, en el cual habrá un conjunto de puntos de l , que es finito y limitado. Consideremos de todas las semirrectas de origen P que proyectan los puntos de l contenidos en el entorno, que también es finito y limitado. Hagamos decrecer el radio del entorno, de modo que tienda a cero. Cada entorno, hemos dicho, determina un conjunto de semirrectas finito y limitado, y como el conjunto de todos estos conjuntos *limitados* de semirrectas es finito (por pertenecer a un haz), en virtud del teorema de Bolzano generalizado, existe por lo menos una semirrecta de acumulación, que llamaremos *semirrecta tangente a l en P* . Toda recta que contiene la semirrecta tangente en P , se llama *recta tangente*."

(*) ROSENTHAL.—Über die Singularitäten der reellen ebenen Kurven. Mathematische Annalen-Band 73.

(**) SEVERI F.—Topología.—Buenos Aires, 1931, pág. 21.

Probaremos que si hay tangente en el sentido de Rosenthal, ésta lo será también en el de Severi; en efecto, basta elegir como radios de los entornos usados por Severi, las distancias $P_0 P_i$.

Recíprocamente probaremos que si hay tangente en el sentido de Severi, ésta lo es en el de Rosenthal; en efecto, elegimos como punto P_i de Rosenthal, aquel de los puntos de la curva pertenecientes al entorno de orden i de Severi, tal que el t_i correspondiente sea el extremo superior de los t del entorno.

Severi demuestra que una curva simple de Jordan tiene por lo menos una semi-tangente en cada punto. Recta tangente es toda recta que contenga una semi-tangente.

La función $\omega(t)$.—Sea P_0 un punto de una curva simple de Jordan que tomaremos como origen de coordenadas polares, y sea $\omega(t)$ el argumento de las cuerdas que pasan por P_0 y por un punto de la curva. Consideremos un intervalo del parámetro: $t_1 \leq t \leq t_0$ (t_i corresponde al punto P_i). Probaremos el siguiente:

Teorema: $\omega(t)$ es continua en todo punto del intervalo distinto de t_0 .

En efecto, sea t un valor del intervalo y P el punto correspondiente, elegimos en el intervalo t_1 , t un valor del parámetro t_2 . Consideremos los triángulos P_2, P_0, P_1 y sea α el ángulo formado por $P_2 P_0$: $\alpha = |\omega(t) - \omega(t_2)|$.

Habremos probado la continuidad de $\omega(t)$ en t cuando para cada ε encontremos un t_2 tal que $\alpha < \varepsilon$.

Para eso trazaremos por P_0 y a ambos lados de $P_0 P$, rectas que formen con ella ángulos $\alpha < \varepsilon$, por la continuidad del arco P_0, P_1 una por lo menos de las rectas trazadas cortará a este arco en un punto P' ; tomaremos $t_2 = t'$ con lo que tendremos $\alpha < \varepsilon$, lo que prueba la continuidad de $\omega(t)$.

Diremos que una recta que pasa por un punto P de una curva simple de Jordan es *infinitosecante* en este punto si el conjunto de los puntos de intersección de la recta con la curva tiene al punto P como punto de acumulación. Según la definición de tangente toda infinitosecante es una tangente.

Hemos visto que la función $\omega(t)$ estudiada en un intervalo $t_1 \leq t \leq t_0$ es continua para todo $t < t_0$; en el punto

$t = t_0$, no es necesariamente continua ni finita; pueden ocurrir los siguientes casos:

$\omega(t)$ continua a la izquierda en t .	$\left\{ \begin{array}{l} \omega(t_0 - 0) \text{ finita. Hay semitangente unicamente a la izquierda.} \\ \omega(t_0 - 0) \text{ infinita.} \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} \text{a) } P \text{ punto aislado del conjunto de las intersecciones.} \\ \text{b) } P \text{ punto de acumulaci3n de intersecciones, es decir la tangente es infinitosecante.} \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \text{1er. caso} \\ \text{2}^\circ \text{ } \\ \text{3er. } \end{array} \right\}$
		$\left. \begin{array}{l} \alpha \leq 2\pi \\ \alpha > 2\pi \text{ (finito)} \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \text{4}^\circ \\ \text{5}^\circ \end{array} \right\}$
		$\left. \begin{array}{l} \alpha \text{ (infinito)} \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \text{6}^\circ \end{array} \right\}$

Clasificaci3n de los puntos de una curva de Jordan.—Adoptaremos como criterio el comportamiento de la funci3n $\omega(t)$, siendo sosten del haz el punto que se estudia. Damos conjuntamente la interpretaci3n geom3trica de cada caso. Resultan los siguientes tipos de puntos:

Tipo I - $\omega(t)$ caso 1º.—Son los 3nicos que pueden pertenecer a curvas de orden finito, tienen una sola semitangente a la izquierda no infinitosecante.

Tipo II - $\omega(t)$ caso 2º.—Llamaremos a estos puntos *sinuosos de amplitud cero*; tienen una sola semitangente a la izquierda, que es infinitosecante.

Tipo III - $\omega(t)$ caso 4º.—Llamaremos a estos puntos *sinuosos de amplitud α* ; en cada uno existe un 3ngulo $\alpha \leq 2\pi$ de semitangentes a la izquierda del punto.

Tipo IV - $\omega(t)$ casos 3º, 5º y 6º.—Llamaremos a estos puntos *espirales*. Se caracterizan porque toda semirrecta que tiene como origen el punto es infinitosecante y por lo tanto es semitangente.

Daremos ahora algunos teoremas referentes al conjunto de singularidades de una curva de Jordan:

TEOREMA I.—*En toda curva j de Jordan hay puntos que no son espirales.*

En efecto, sea P_0 un punto del plano que no pertenezca a la curva j ; si recorremos el segmento $P_0 P_1$ en el sentido P_0, P_1 por ser j un conjunto cerrado habrá un primer punto de intersección P' con j , el cual no puede ser espiral por definición, puesto que la semirrecta P_0, P' no es una infinitosecante.

TEOREMA II.—*En una curva de Jordan el conjunto A de valores del parámetro t para los puntos correspondientes no son espirales, es denso en cualquier intervalo.*

Mostraremos el teorema probando que en todo intervalo del parámetro t hay algún punto del conjunto A . Sea t_1, t_2 un intervalo del parámetro t que tenga a t_0 como punto interior. Sea además σ un entorno circular suficientemente pequeño para que no contenga puntos de j que no sean del intervalo $P(t_1), P(t_2)$. Sea M un punto de σ no perteneciente a j . El segmento $M P_0$ recorrido en el sentido M, P_0 encontrará la curva en un primer punto Q que pertenece al entorno $t_1 t_0$ y al conjunto A con lo que queda demostrado el teorema.

OBSERVACION 1ª.—*Hay curvas de Jordan tales que todos sus puntos sean del tipo III.*

Ejemplo: la curva de Koch se construye de la siguiente manera: se divide un segmento $a=MN$ en tres partes, sobre la segunda de ellas se construye un triángulo equilátero, suprimiéndose ese segmento, sobre cada uno de los restantes segmentos y sobre los otros dos lados del triángulo se repite la construcción, y así sucesivamente. Los vértices de ángulos formados con esta construcción son puntos definitivos. Tomemos uno de ellos, por ejemplo, el A vértice del primer triángulo construido. El ángulo NAM es de semitangentes; por lo tanto es un punto sinuoso de amplitud: $\alpha = 30^\circ$.

OBSERVACION 2ª.—*Hay curvas de Jordan en las que el conjunto de puntos espirales es denso en cualquier intervalo.*

Ejemplo: Consideremos la serie $0 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots$

Sean $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ los términos de esa serie y $s_0, s_1, \dots, s_n, \dots$ la sucesión de sumas de los $n + 1$ primeros términos.

Consideremos los puntos:

$$A_n \begin{cases} x = \frac{5}{6} S_i, & Y = \frac{5}{9} a_i & \text{para } n = 2i \\ x = \frac{5}{6} S_{i-1}, & Y = \frac{5}{9} a_i & \text{para } n = 2i - 1, \end{cases}$$

y los puntos:

$$B_n \begin{cases} x = 1 - \frac{2}{3} S_i, & Y = -\frac{4}{9} a_i & \text{para } n = 2i \\ x = 1 - \frac{2}{3} S_{i-1}, & Y = -\frac{4}{9} a_i & \text{para } n = 2i - 1, \end{cases}$$

las dos sucesiones tienen como límite el punto: $M (\frac{5}{9}, 0)$; en efecto: $\lim_{i \rightarrow \infty} S_i = \frac{2}{3}$, $\lim a_i = 0$ y reemplazando resulta lo que se quería demostrar.

Uniendo los puntos A_i ordenadamente por una poligonal lo mismo que los B_i , resulta un arco de Jordan que tiene el punto M como punto espiral y los mismos extremos A_0 y B_0 que el segmento $A_0 B_0$.

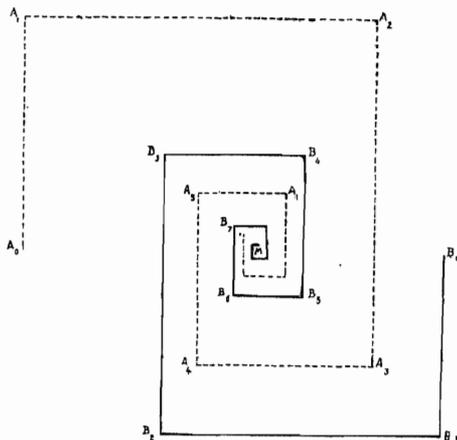
Aplicar la operación E a un segmento a , es reemplazar el segmento por una construcción semejante a la dada, en la que los extremos del segmento sean los homólogos de A_0 y B_0 . Aplicar la operación E' a un segmento b es reemplazar este segmento por una construcción semejante a la indicada en la cual los extremos de b son homólogos, uno de M y otro de A_0 o de B_0 .

Dividamos el segmento $A_1 A_2$ de la construcción en 9 p. + 8 partes; con las 4 primeras y las 4 últimas se forman dos segmentos a' y con cada 9 de los restantes otros p segmentos a . Apliquemos a los a' la operación E' y a los a la operación E . Queda así el segmento $A_1 A_2$ reemplazado por $p + 2$ arcos de Jordan, cada uno con un punto del tipo IV, que estará seguramente sobre el segmento $A_1 A_2$. Repitamos esta operación en todos los segmentos $A_i A_{i+1} > \frac{1}{10} A_0 B_0$ y llamaremos operación π (*). Apliquemos nuevamente la operación π a todos los segmentos mayores que $\frac{1}{10^2}$, luego a los mayores que

(*) Sólo habrá una pequeña variante en los segmentos como el $A_3 A_4$ en los cuales la división deberá hacerse en $9p + 12$ partes.

$\frac{1}{10^3}$ y así siguiendo obtenemos una sucesión de curvas. Demostremos que el límite es una curva de Jordan.

Construcción E



Modelo de construcción π



Para asegurarse de que las construcciones $A_4 A_5$ por ejemplo no van a superponerse con las $B_3 B_2$ que es el inmediato próximo, basta elegir p de manera que satisfaga a la desigualdad

$$\frac{8}{9p + 8} < \frac{1}{16} \text{ como es inmediato demostrarlo.}$$

Para demostrar el teorema habrá que probar que se puede elegir el parámetro de manera que el conjunto de valores correspondientes a puntos como el M es denso.

Para probarlo establecemos el siguiente homeomorfismo:

Sea la sucesión $S_0 = 0$,
$$S_i = \sum_{n=1}^i \frac{1}{2^{n+1}} .$$

Hagamos corresponder a los puntos A_i los valores $t_i = S_i$ y a los puntos B_i , $t_i = 1 - S_i$, a los segmentos $A_i A_{i+1}$ el intervalo $t_i t_{i+1}$. Si para cada segmento de la construcción π repetimos este homeomorfismo, tendremos el homeomorfismo de todas las curvas. Se ve inmediatamente que el conjunto de puntos extremos de segmentos es denso.

(Original recibido en agosto de 1939).

MANUEL BALANZAT

Fórmulas Integrales
de la
Intersección de Conjuntos

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Publicación N° 14

BUENOS AIRES

1940

FORMULAS INTEGRALES DE LA INTERSECCION DE CONJUNTOS

Por MANUEL BALANZAT

Consideremos un conjunto de puntos C_1 , medible en el sentido de Lebesgue y fijo. Supongamos además otro conjunto C_2 móvil en el mismo espacio de una manera rígida, es decir, sin que se pueda deformar. En algunos casos uno de estos conjuntos se puede reducir a un conjunto de un número finito de puntos.

La *posición* del conjunto móvil, vendrá determinada por un cierto número de parámetros, $t_1, t_2, t_3, \dots, t_r$ (a lo sumo serán $\frac{p(p+1)}{2}$, siendo p el número de dimensiones pero pueden ser menos si se trata de un conjunto infinito que admita desplazamientos que lo dejen invariable, como son las bandas de plano limitadas por rectas paralelas, las bandas de espacio limitadas por planos paralelos, la parte de espacio interior a un cilindro, etc...). Para cada posición del conjunto móvil C_2 su *intersección* con el fijo C_1 será otro conjunto, medible Lebesgue y cuya medida que representaremos por $m(C_1, C_2)$ será una función de la posición de C_2 o sea de $t_1, t_2, t_3, \dots, t_r$. Eligiendo convenientemente estos parámetros la integral

$$\int m(C_1, C_2) dt_1 dt_2 dt_3 \dots dt_r$$

se puede calcular en función de las medidas de C_1 y C_2 .

El objeto de este trabajo es la generalización para conjuntos cualesquiera de estas fórmulas integrales que, para casos más simples, han sido demostradas en diversos trabajos de Geometría Integral. Nosotros necesitaremos únicamente suponerlas conocidas para segmentos, cuadrados o cubos y de ahí pasaremos al caso general de ser conjuntos medibles cualesquiera.

I. PROBLEMAS SOBRE LA RECTA

1) Consideremos un conjunto de puntos L_1 fijo sobre la recta y otro L_2 móvil, ambos medibles Lebesgue y de medida finita. La posición del segundo queda determinada por la abscisa x de uno cualquiera de sus puntos; para cada valor de x consideremos la medida del conjunto intersección de L_1 y L_2 . Representémosla por $m_1(L_1, L_2)$, es evidentemente una función de x y vamos a demostrar que

$$[1] \quad \int_{-\infty}^{+\infty} m_1(L_1, L_2) dx = m_1(L_1) \cdot m_1(L_2).$$

En efecto, consideremos primeramente el caso en que ambos conjuntos sean acotados, en este caso si l' y l'' son los diámetros, bastará considerar la integral en un intervalo finito (a, b) de longitud a lo más igual a $l'' + l'$, ya que fuera de él $m_1(L_1, L_2)$ será siempre cero. La fórmula [1] se reduce a

$$[2] \quad \int_a^b m_1(L_1, L_2) dx = m_1(L_1) \cdot m_1(L_2).$$

Para el caso en que L_1 y L_2 se reduzcan a dos segmentos la demostración se hace directamente sin dificultad:

En efecto, sean l_1 y l_2 las longitudes de los segmentos y supongamos por ejemplo $l_1 \geq l_2$. Si α es el origen del segmento fijo, su otro extremo será $\alpha + l_1$ y si el segmento móvil tiene por extremos x y $x + l_2$, la integral buscada será:

$$\int_{\alpha-l_2}^{\alpha} (x+l_2-\alpha) dx + \int_{\alpha}^{\alpha+l_1-l_2} l_2 dx + \int_{\alpha+l_1-l_2}^{\alpha+l_1} (\alpha+l_1-x) dx = l_1 \cdot l_2.$$

Consideremos ahora el caso en que L_1 sea un segmento y L_2 un conjunto cualquiera medible. Entonces existe un conjunto abierto O que contiene a L y cuya medida difiere de la de éste en menos de ϵ .

Como todo conjunto abierto es igual a una suma ΣE_i de segmentos sin parte común, se puede poner:

$$\begin{aligned} m_1(L_1, L_2) &= m_1(L_1, O - E) = m_1(L_1, O) - m_1(L_1, E) = \\ &= m_1(L_1, \Sigma E_i) - m_1(L_1, E) = \Sigma m_1(L_1, E_i) - m_1(L_1, E), \end{aligned}$$

donde los E_i son segmentos sin parte común y E es un conjunto de medida menor que ε .

Tenemos por tanto:

$$\int_b^a m_1(L_1, L_2) dx = \int_a^b [\Sigma m_1(L_1, E_i) - m_1(L_1, E)] dx = \\ = \Sigma \int_a^b m_1(L_1, E_i) dx - \int_a^b m_1(L_1, E) dx .$$

Como la fórmula [2] es válida para el caso de dos segmentos tenemos:

$$\Sigma \int_a^b m_1(L_1, E_i) dx = \Sigma m_1(L_1) \cdot m_1(E_i) = m_1(L_1) \cdot m_1(O) = \\ = m_1(L_1) \cdot m_1(L_2) + m_1(L_1) \cdot m_1(E) .$$

y por tanto,

$$\int_a^b m_1(L_1, L_2) dx = m_1(L_1) \cdot m_1(L_2) + m_1(L_1) \cdot m_1(E) - \int_a^b m_1(L_1, E) dx$$

Ahora bien, como $m_1(E) < \varepsilon$ y con igual razón lo será $m_1(L_1, E)$, tendremos

$$m_1(L_1) m_1(E) < \varepsilon m_1(L_1)$$

y

$$\int_a^b m_1(L_1, E) dx < \varepsilon (b - a) ,$$

y haciendo tender ε a cero deducimos:

$$[3] \quad \int_a^b m_1(L_1, L_2) dx = m_1(L_1) \cdot m_1(L_2)$$

para el caso en que L_1 es un segmento y L_2 es un conjunto cualquiera medible Lebesgue.

El paso de esta fórmula al caso general en que L_1 y L_2 son dos conjuntos cualesquiera, se hace análogamente, descomponiendo L_1 en la forma $L_1 = \Sigma E_i - E$ donde los E_i son segmentos sin puntos comunes y la medida E es menor que ε .

Siguiendo el mismo procedimiento anterior establecemos que

$$\int_a^b m_1(L_1, L_2) dx = \Sigma \int_a^b m_1(E_i L_2) dx - \int_a^b m_1(E L_2) dx$$

y teniendo en cuenta la fórmula [3] deducimos igualmente

$$\int_b^a m_1(L_1, L_2) dx = m_1(L_1) \cdot m_1(L_2) + m_1(E) \cdot m_2(L_2) - \int_a^b m_1(E, L_2) dx.$$

Haciendo tender ε a cero se deduce

$$\int_b^a m_1(L_1, L_2) dx = m_1(L_1) m_2(L_2)$$

que puede ponerse en la forma

$$[4] \quad \int_{-\infty}^{+\infty} m_1(L_1, L_2) dx = m_1(L_1) m_2(L_2)$$

ya que $m_1(L_1, L_2)$ es nula en el exterior de (a, b) .

Hemos demostrado por consiguiente la fórmula para el caso en que los dos conjuntos son medibles y *acotados*, pasemos ahora al caso general en que pueden ser *no acotados*, aunque siempre de medida *finita*.

Podemos efectuar la descomposición de L_1 y L_2 en una infinidad numerable de conjuntos acotados y disjuntos E_i y F_j , tales que $L_1 = \Sigma E_i$ y $L_2 = \Sigma F_j$ y por tanto

$$m_1(L_1) = \Sigma m_1(E_i) \quad m_1(L_2) = \Sigma m_1(F_j)$$

de donde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} m_1(L_1, L_2) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Sigma_{ij} m_1(E_i, F_j) dx = \Sigma_{ij} \int_{-\infty}^{+\infty} m_1(E_i, F_j) dx$$

y teniendo en cuenta lo establecido en [4]:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} m_1(L_1, L_2) dx &= \Sigma_{i,j} m_1(E_i) \cdot m_1(F_j) = \Sigma_i m_1(E_i) \Sigma_j m_1(F_j) \\ &= m_1(L_1) m_1(L_2) \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

2) *Caso en que uno de los conjuntos se reduce a un número finito de puntos.*

Consideremos ahora el caso de un conjunto L medible Lebesgue, fijo sobre la recta y un conjunto móvil N compuesto de un

número finito de puntos n . Consideremos para cada posición de L el número de puntos comunes a N y L . Representémosle por $m_0(N, L)$; vamos a demostrar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} m_0(N, L) dx = n m_1(L)$$

donde $m_1(L)$ es la medida de Lebesgue de L .

En efecto consideremos primeramente el caso en que el conjunto N se reduzca a un solo punto, entonces $m_0(N, L)$ es la función característica del conjunto L y como sabemos que la integral de la función característica de un conjunto es la medida de éste, el teorema está demostrado.

Si el conjunto N se compone de un número finito de puntos n , consideremos las funciones $m_0^i(N, L)$ ($1 \leq i \leq n$) correspondientes a cada uno de los puntos del conjunto, tendremos

$$m_0(N, L) = \sum_1^n m_0^i(N, L)$$

y teniendo en cuenta que el teorema ha sido demostrado para el caso de un punto único deduciremos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} m_0(N, L) dx = \sum_1^n \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i dx = n m_1(L)$$

que es lo que queríamos demostrar.

3) Problemas análogos pueden estudiarse para conjuntos de puntos situados sobre la circunferencia (curva plana de curvatura constante) y la hélice (curva alabeada de torsión y curvatura constantes) sobre las que puede desplazarse un conjunto sin sufrir deformación alguna; para ello basta observar que tomando como equivalentes a los segmentos lineales, los arcos de circunferencia o hélice, puede construirse, para los conjuntos arbitrarios de puntos situados sobre dichas curvas una teoría de la medida lineal de Lebesgue; deduciéndose por consiguiente, proposiciones análogas a las anteriores sin más que cambiar en los enunciados la palabra conjunto lineal por la de conjunto sobre la circunferencia o sobre la hélice.

II. PROBLEMAS EN EL PLANO

1) Consideremos en el plano dos conjuntos A_1 y A_2 medibles Lebesgue y de medida finita. Supongamos uno de ellos A_1 fijo y el otro A_2 móvil; la posición de este último vendrá determinada por las coordenadas, x, y , de uno de sus puntos y una rotación φ alrededor del mismo.

Para cada sistema de valores de estos parámetros determinemos la medida del conjunto intersección de los dos dados, sea $m_2(A_1, A_2)$, esta medida, es evidentemente una función de x, y, φ ; consideremos la integral

$$\int m_2(A_1, A_2) dK;$$

a pesar de tratarse de una integral triple empleamos por brevedad un solo signo integral, y dK en lugar de $dx dy d\varphi$; dK es la llamada *densidad cinemática* en Geometría Integral (1).

Vamos a demostrar que

$$[1] \quad \int m_2(A_1, A_2) dK = 2\pi m_2(A_1) \cdot m_2(A_2)$$

En efecto, para el caso en que los conjuntos A_1 y A_2 sean dos cuadrados el teorema ha sido demostrado (2). Supongamos ahora que los dos conjuntos sean cualesquiera pero medibles y acotados; en ese caso podemos descomponerlos en la forma $A_1 = O_1 - E$, $A_2 = O_2 - F$ donde O_1 y O_2 son dos conjuntos abiertos, y E y F son dos conjuntos de medida menor que ε .

Por consiguiente tendremos

$O_1 = A_1 + E$, $O_2 = A_2 + E$ y $O_1 \times O_2 = A_1 \times A_2 + A_1 \times F + A_2 \times E + E \times F$ representado por el signo \times la intersección de los conjuntos. De aquí deducimos:

$$[2] \quad \int m_2(A_1, A_2) dK = \int m_2(O_1, O_2) dK - \int m_2(A_1, F) dK - \int m_2(E, A_2) dK - \int m_2(E, F) dK$$

(1) Ver W. Blaschke "Vorlesungen über Integralgeometrie I", Hamburger Mathematische Einzelschriften. 1936. pág. 20.

(2) Ver Blaschke, loc. cit. o L. A. Santaló "Geometría Integral 4. Sobre la medida cinemática en el plano". Hamburg. Abhandlungen, 11.

pero por ser O_1 y O_2 conjuntos abiertos se pueden descomponer en la forma $O_1 = \sum E_i, O_2 = \sum F_j$ donde los E_i y F_j son respectivamente cuadrados rampantes. Por tanto y teniendo en cuenta que la fórmula [1] es válida para cuadrados, y que las fronteras comunes de éstos no influyen en m_2 ,

$$[3] \quad \int m_2(O_1, O_2) dK = \int \sum_{ij} m_2(E_i, F_j) dK =$$

$$\sum_{ij} \int m_2(E_i, F_j) dK = 2\pi \sum_{ij} m_2(E_i) \cdot m_2(F_j) = 2\pi m_2(O_1) \cdot m_2(O_2)$$

y teniendo en cuenta que

$$m_2(O_1) = m_2(A_1) + m_2(E) \quad \text{y} \quad m_2(O_2) = m_2(A_2) + m_2(F)$$

obtenemos

$$m_2(O_1) \cdot m_2(O_2) = m_2(A_1) \cdot m_2(A_2) +$$

$$m_2(E) \cdot m_2(A_2) + m_2(A_1) \cdot m_2(F) + m_2(E) \cdot m_2(F)$$

y teniendo en cuenta [2] y [3]:

$$\int m_2(A_1, A_2) dK = 2\pi m_2(A_1) \cdot m_2(A_2) + 2\pi m_2(E) \cdot m_2(A_2) +$$

$$+ 2\pi m_2(A_1) \cdot m_2(F) + 2\pi m_2(E) \cdot m_2(F) - \int m_2(A_1, F) dK -$$

$$- \int m_2(E, A_2) dK - \int m_2(EF) dK$$

Ahora bien, los términos segundo, tercero y cuarto del segundo miembro de la igualdad anterior son, respectivamente, menores que

$$2\pi m_2(A_2) \cdot \varepsilon, \quad 2\pi m_2(A_1) \cdot \varepsilon \quad \text{y} \quad 2\pi \varepsilon^2.$$

Por otra parte, como los conjuntos A_1 y A_2 son acotados para valores de x e y mayores que dos números fijos a y b la intersección de ambos será un conjunto nulo, luego podemos limitar la integración al dominio de las variables x, y, φ ($0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$) de volumen finito $2\pi ab$; en este caso como las funciones que se integran en el quinto, sexto y séptimo términos, del segundo miembro de la igualdad anterior, son menores que ε , estos términos, por el teorema del valor medio serán menores que $\varepsilon \cdot 2\pi a \cdot b$.

Por consiguiente haciendo tender ε a cero deducimos que

$$\int m_2 (A_1 A_2) dK = 2 \pi m_2 (A_1) \cdot m_2 (A_2)$$

quedando por tanto, demostrada la fórmula para conjuntos acotados.

Para conjuntos no acotados descompongamos A_1 y A_2 en una suma numerable de conjuntos acotados, disjuntos y medibles, cosa siempre posible pues basta tomar M_i y N_j como intersecciones, de los conjuntos A_1 y A_2 , respectivamente con la corona circular de radios n y $n - 1$, y tendremos

$$\int m_2 (A_1, A_2) dK = \int \sum_{ij} m_2 (M_i, N_j) dK$$

y como la fórmula [1] la hemos demostrado para conjuntos acotados tendremos

$$\int m_2 (A_1, A_2) dK = 2\pi \sum_{ij} m_2 (M_i) \cdot m_2 (N_j) dK = 2\pi m_2 (A_1) \cdot m_2 (A_2)$$

que es lo que queríamos demostrar.

2) *Caso en que uno de los conjuntos se reduce a un número finito de puntos.*

Consideremos ahora un conjunto plano medible Lebesgue A , fijo, y un conjunto móvil N , compuesto de un número finito de puntos; la posición de este último quedará como en el caso anterior determinada por los tres parámetros x, y, φ ; a cada sistema de valores de estos parámetros podemos hacer corresponder el número de puntos de N que son también puntos del conjunto A , representemos esta función de x, y, φ por $m_0 (N, A)$ y vamos a demostrar que

$$[4] \quad \int m_0 (N, A) dK = 2 \pi n m_2 (A).$$

En efecto consideremos primeramente el caso en que el conjunto N se reduce a un solo punto, en ese caso $m_0 (N, A)$ no depende de φ y podemos poner, por tanto,

$$\iiint m_0 (N, A) dx dy d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \iint m_0 (N, A) dx dy$$

pero como $m_0(N, A)$ es en este caso la función característica del conjunto A , se tendrá

$$\iint m_0(N, A) dx dy = m_2(A)$$

y por tanto

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \iint m_0(N, A) dx dy = \int_0^{2\pi} m_2(A) d\varphi = 2\pi m_2(A)$$

que es lo que queríamos demostrar.

Para el caso en que el conjunto se componga de n puntos tendremos considerando las funciones $m_0^i(N, A)$ correspondientes a cada uno de los puntos del conjunto

$$m_0(N, A) = \sum_1^n m_0^i(N, A)$$

y teniendo en cuenta que el teorema ha sido demostrado para el caso de un solo punto deduciremos:

$$\int m_0(N, A) dK = \sum_1^n \int m_0^i(N, A) dK = 2\pi n m_2(A)$$

que es lo que queríamos demostrar.

(3) *Caso en que uno de los conjuntos es de extensión infinita.*

Hasta ahora hemos considerado figuras acotadas o no acotadas, pero de medida finita; vamos ahora a estudiar algunas fórmulas integrales en las que intervienen figuras de extensión infinita.

Sea, por ejemplo, un par de rectas paralelas situadas a una distancia constante l , supongamos esta figura móvil en el plano; su posición queda determinada conociendo la de la paralela que equidista de las dos dadas; la posición de esta queda determinada por los parámetros ϱ y θ siendo ϱ la distancia a la recta desde un origen fijo y θ el ángulo que forma la normal a la recta con una dirección fija.

Si A es un conjunto plano fijo, de medida finita $m_2(A)$ y acotado, para cada posición de la banda determinemos la me-

dida del conjunto intersección de A y la banda de plano limitada por las dos paralelas; llamemos $m_2(B, A)$ dicha medida y vamos a demostrar que

$$[5] \quad \int m_2(B, A) d B = \pi l m_2(A)$$

esta fórmula, en la que es $d B = d \varrho d \theta$ la *densidad cinemática* para bandas paralelas, es válida para el caso de ser A un cuadrado. (3).

Descompongamos, de una manera análoga a lo hecho anteriormente, el conjunto A en la forma $A = O - E = \Sigma E_i - E$ donde los E_i son cuadrados no rampantes (aunque pueden tener fronteras comunes) y E es un conjunto de medida menor que ε .

Tenemos por consiguiente, ya que podemos considerar, para la medida superficial, los conjuntos E_i que tienen comunes partes lineales como si fueran conjuntos desunidos,

$$\int m_2(B, A) d B = \Sigma \int m_2(B, E_i) d B - \int m_2(B, E) d B$$

pero como la fórmula [5] es válida para cuadrados tenemos

$$\begin{aligned} \Sigma \int m_2(B, E_i) d B &= \pi l \Sigma m_2(E_i) = \pi l m_2(O) = \\ &= \pi l m_2(E) + \pi l m_2(A). \end{aligned}$$

donde

$$\pi l m_2(E) < \pi l \varepsilon.$$

Por otra parte, si el conjunto es acotado, a partir de un cierto valor ϱ_0 de ϱ las bandas no cortan a A , luego podemos integrar entre cero y ϱ_0 para ϱ y entre cero y 2π para θ y por tanto

$$\int m_2(B, E) d B < 2\pi \varrho_0 \varepsilon$$

y haciendo tender ε a cero, deducimos

$$\int m_2(B, A) d B = \pi l m_2(A)$$

(3) Ver L. A. Santaló, *Geometría Integral 7. Nuevas aplicaciones del concepto de medida cinemática en el plano*". Rev. Ac. Ciencias de Madrid, 1936.

quedando por tanto demostrada la fórmula para conjuntos acotados.

Para los no acotados, aplicaremos el procedimiento anterior descomponiendo a A en una suma de una infinidad numerable de conjuntos acotados y disjuntos obteniendo así el resultado.

Si en lugar de considerar la banda consideramos un conjunto de rectas paralelas, cuya sección normal sea un conjunto de medida lineal l , descomponiendo análogamente dicho conjunto en una serie de bandas paralelas menos un conjunto de sección arbitrariamente pequeña, se demuestra la validez de la fórmula [5] para este caso más general.

4) *Caso en que uno de los conjuntos se reduce a una recta.*

Consideremos ahora una recta móvil en el plano y un conjunto de puntos A medible en el plano. La posición de la recta queda determinada por dos parámetros, ρ que es la distancia a un punto fijo y θ , el ángulo que forma con una dirección fija.

Para cada posición de la recta determinemos la medida *lineal* de su intersección con A ; sea $m_1(R, A)$ esta medida. Vamos a demostrar que:

$$[6] \quad \int m_1(R, A) dG = \pi m_2(A)$$

donde $dG = d\rho d\theta$, es la densidad para conjuntos de rectas en el plano.

La fórmula [6] ha sido demostrada para el caso en que A es un cuadrado ⁽⁴⁾, vamos a probarla ahora para un conjunto abierto O ; este puede en efecto descomponerse en una suma $\sum E_i$ de una infinidad numerable de cuadrados que pueden tener fronteras comunes; éstas serán también numerables, luego excluyendo del dominio de integración el conjunto numerable de puntos (ρ, θ) que corresponde a las fronteras comunes tendremos

$$\begin{aligned} \int m_1(R, O) dG &= \int \sum m_1(R, E_i) dG = \sum \int m_1(R, E_i) dG = \pi \sum m_2(E_i) = \\ &= \pi m_2(O). \end{aligned}$$

Descompongamos ahora el conjunto A en la forma $A = O - E$,

(4) Ver Deltheil, "Probabilités géométriques".

donde O es un conjunto abierto cuya medida difiere de la de A en menos de ε . Por tanto

$$[7] \quad \int m_1(R, A) dG = \int m_1(R, O) dG - \int m_1(R, E) dG = \pi m_2(O) - \int m_2(R, E) dG$$

para acotar el segundo miembro no podemos, como en los casos anteriores, acotar el valor de la función que se integra, ya que de que E sea de medida *superficial* menor que ε no se deduce que lo sea $m_1(R, E)$ que puede incluso ser infinita.

Pero observando que si E es medible existe un conjunto abierto O tal que $m(O) < 2\varepsilon$ y $O \supset E$ tendremos que como $R \times O \supset R \times E$,

$$m_1(R \times O) \supseteq m_1(R, E)$$

y por tanto

$$\int m_1(R, E) dP \leq \int m_1(R, O) dP = \pi m_2(O) \leq 2\pi\varepsilon$$

luego haciendo tender ε a cero en la fórmula [7] queda demostrada la proposición.

III. PROBLEMAS EN EL ESPACIO

1) Consideremos en el espacio dos conjuntos V_1 y V_2 móvil el primero y fijo el segundo. La posición de aquél queda determinada por seis parámetros, a saber: las tres coordenadas x, y, z de uno de sus puntos, más las coordenadas esféricas θ y φ de una dirección por este punto, más una rotación τ alrededor de esta dirección; si para cada posición determinamos la medida del conjunto de intersección de V_1 y V_2 , esta medida será una función de los seis parámetros y vamos a demostrar que

$$[1] \quad \int m_3(V_1, V_2) dK = 8\pi^2 m_3(V_1) m_3(V_2)$$

donde se ha puesto $dK = \sin \theta d\theta d\varphi dx dy dz d\tau$ expresión diferencial que es la llamada *densidad cinemática del espacio* en Geometría Integral. Es sabido que esta fórmula es válida para el caso de ser los conjuntos dos cubos ⁽⁵⁾.

Para estudiar el caso general supongamos que los conjuntos sean acotados, ya que la generalización para los no acotados

(5) Blaschke: loc. cit. II, pág. 103.

sería análoga a la que se hizo en el caso del plano. Por ser los conjuntos acotados la integración puede limitarse a un dominio determinado por las condiciones

$$x' \leq x \leq x'', y' \leq y \leq y'', z' \leq z \leq z'', 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \tau \leq 2\pi,$$

y por tanto su volumen en el espacio de seis dimensiones es igual a $4\pi^3 (x'' - x') \times (y'' - y') \times (z'' - z')$, igual a un número finito H .

Como la fórmula [1] es válida para el caso en que los dos conjuntos sean cubos, nosotros vamos a considerar primeramente el caso en que uno de ellos V_1 sea un cubo y el otro un conjunto medible acotado cualquiera. En ese caso descompongamos V_2 en la forma $V = 0 - E - \Sigma E_i = E$ donde 0 es un conjunto abierto y por tanto los E_i son cubos no rampantes, con fronteras comunes o no. Por tanto obtendremos

$$\int m_3(V_1, V_2) dK = \Sigma \int m_3(V_1, E_i) dK - \int m_3(V_1, E) dK$$

Ahora bien, como la fórmula ha sido demostrada para el caso de dos cubos, tendremos:

$$\begin{aligned} \Sigma \int m_3(V_1, E_i) dK &= 8\pi^2 m_3(V_1) \cdot m_3(E_i) = 8\pi^2 m_3(V_1) \cdot m_3(0) \\ &= 8\pi^2 m_3(V_1) \cdot m_3(V_2) - 8\pi^2 m_3(V_1) \cdot m_3(E) \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \int m_3(V_1, V_2) dK &= 8\pi^2 m_3(V_1) \cdot m_3(V_2) - 8\pi^2 m_3(V_1) \cdot m_3(E) - \\ &\quad - \int m_3(V_1, E) dK \end{aligned}$$

y como

$$8\pi^2 m_3(V_1) m_3(E) < 8\pi^2 m_3(V_1) \varepsilon, \quad \int m_3(V_1, E) dK \leq \varepsilon H$$

haciendo tender ε a cero quedará demostrada la fórmula [1] para el caso en que uno de los conjuntos sea un cubo.

En el caso general en que V_1 y V_2 son conjuntos cualesquiera, descomponiendo V_1 en la forma $\Sigma E_i - E$ tendremos:

$$\int m_3(V_1, V_2) dK = \Sigma \int m_3(V_1, E_i) dK - \int m_3(V_1, E) dK$$

y como la fórmula [1] acabamos de demostrarla para el caso de un conjunto cualquiera y un cubo, tendremos:

$$\int m_3(V_1, V_2) dK = \sum 8\pi^2 m_3(V_1) \cdot m_3(E_i) - \int m_3(V_1 E) dK$$

$$= 8\pi^2 m_3(V_1) \cdot m_3(V_2) + 8\pi^2 m_3(V_1) \cdot m_3(E) - \int m_3(V_1 E) dK$$

y haciendo tender ε a cero, como el segundo y tercer miembro del último término son respectivamente menores que $8\pi^2 m_3(V_1) \varepsilon$ y εH tendremos demostrada la fórmula [1] para el caso general.

2) *Caso en que uno de los conjuntos se reduce a un número finito de puntos.*

Consideremos ahora un conjunto V medible Lebesgue fijo, y un conjunto móvil N compuesto de un número finito de puntos; la posición de este último quedará como en el caso anterior determinada por los seis parámetros $x, y, z, \theta, \varphi, \tau$; si para cada sistema de valores de estos parámetros, esto es para cada posición del conjunto N , determinamos el número de puntos del conjunto A que son también puntos de N , obtenemos una función de los seis parámetros, representémosla por $m_0(N, V)$ y vamos a demostrar que

$$[2] \quad \int m_0(N, V) dK = 8\pi^2 n m_3(V)$$

En efecto: consideremos primeramente, el caso en que el conjunto N se reduce a un solo punto, en ese caso $m_0(N, V)$ no depende de θ, φ, τ y podemos poner por tanto

$$\int \int \int \int \int \int m_0(N, V) \text{sen} \theta \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot d\tau =$$

$$\int \int \int m_0(N, V) dx \cdot dy \cdot dz \int_0^\pi \text{sen} \theta \cdot d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\tau$$

pero como $m_0(N, V)$ es en este caso la función característica del conjunto V se tendrá:

$$\int \int \int m_0(N, V) dx dy dz = m_3(V)$$

y por tanto

$$\int m_0(N, V) dK = \int_0^{2\pi} \text{sen} \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\tau \cdot m_3(V) = 8\pi^2 m_3(V)$$

que es lo que queríamos demostrar.

Si el conjunto N se compone de un número n de puntos entonces $m_0(N, V)$ es la suma de las funciones m_0^i que se obtendrían considerando aisladamente cada uno de los puntos del conjunto N , y por tanto obtendríamos

$$\int m_0(N, V) dK = \sum \int m_0^i(N, V) dK = 8\pi n m_3(V)$$

que es lo que queríamos demostrar.

3) *Caso en que uno de los conjuntos es de extensión infinita.*

Del mismo modo que consideramos en el plano una banda formada por dos rectas paralelas, podemos considerar ahora una banda formada por dos planos paralelos; la posición de ésta, supuesta móvil, queda determinada por la posición del plano paralelo a las bases y equidistante de ambas. Esta posición queda determinada por los tres parámetros ρ, θ, φ siendo ρ su distancia a un punto fijo y θ, φ las coordenadas esféricas de su normal. Sea V un conjunto medible y fijo y determinemos para cada posición de la banda la intersección de ésta con V ; sea $m_3(B, V)$ dicha medida, vamos a demostrar que

$$[4] \quad \int m_3(B, V) d.B = 2\pi l m_3(V)$$

donde $d.B = \sin \theta d\theta d\varphi d\rho$ es la llamada *densidad cinemática* para franjas de planos paralelos, y l es la distancia entre las bases.

Esta fórmula ha sido demostrada para el caso en que V es un cubo (6). En el caso general descomponiendo V en la forma $V = O - E = \sum E_i - E$ donde los E_i son cubos no rampantes y E es de medida menor que ε ; de igual manera que en el caso anterior tendremos:

$$\begin{aligned} \int m_3(BV) dB &= \sum \int m_3(BE_i) dB - \int m_3(B, E) dB = \\ &= 2\pi \sum l \cdot m_3(E_i) - \int m_3(B, E) dB = 2\pi l m_3(O) - \int m_3(B, E) dB. \end{aligned}$$

El primer término del segundo miembro, al tender ε a cero tiende a $2\pi l m_3(V)$ y el segundo, si V es acotado, es menor que εH siendo H un número finito igual al volumen del dominio

(6) Ver L. A. Santaló, loc. cit.

de integración que por ser V acotado lo podemos tomar de dimensiones finitas; como el primer miembro no depende de ε se deduce

$$\int m_3(B, V) d B = 0$$

como queríamos demostrar.

La generalización para conjuntos no acotados se hace idénticamente que en los casos anteriores.

Si consideramos el conjunto de planos paralelos tales que su sección por una recta normal sea un conjunto de medida l , un razonamiento análogo al hecho en el caso de las bandas planas, nos demostraría la validez de la fórmula [4] en esta hipótesis.

4) Podemos, en el espacio, considerar otra figura de extensión ilimitada, el cilindro; suponiéndolo móvil su posición queda determinada por los cinco parámetros $x, y, \theta, \varphi, \tau$ que son: x e y las coordenadas planas de la intersección de una generatriz con un plano normal, θ, φ las coordenadas esféricas de la dirección de la generatrices y τ un giro alrededor de la misma. Consideremos un conjunto medible V , que podemos suponerlo acotado ya que la generalización para los no acotados se obtendrá de manera idéntica a los casos anteriores. Determinemos la medida de la intersección del cilindro con V ; sea $m(C, V)$ la medida de esta intersección vamos a demostrar que:

$$[5] \quad \int m_3(C, V) d C = 8 \pi^2 S m_3(V)$$

donde S es el área de la sección recta del cilindro y $d C = \sin \theta d \theta d \varphi d x d y d \tau$ es la densidad para conjuntos de cilindros (7).

La demostración, por ser la fórmula cierta para el caso de ser V un cubo, es análoga a la del caso anterior; descomponiendo V en la forma $O - E = \Sigma E_i - E$ tendremos de igual manera que en el caso anterior:

$$\begin{aligned} \int m_3(C, V) d C &= \sum \int m_3(C, E_i) d C - \int m_3(C, E) d C = \\ &= 8 \pi^2 S \sum m_3(E_i) - \int m_3(C, E) d C = 8 \pi^2 S m_3(O) - \int m_3(C, E) d C. \end{aligned}$$

(7) Ver L. A. Santaló, "Integralgeometrie 5. Uber das kinematische Mass in Raum". París, 1935. (Colección "Actualités scientifiques et industrielles").

Haciendo tender ε a cero el primer término del segundo miembro tiende a $8 \pi^2 S m_3 (V)$.

Por ser V acotado podemos limitar la integración a un dominio determinado por las condiciones

$$x' \leq x \leq x'', \quad y' \leq y \leq y'', \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi.$$

Su volumen en el espacio de cinco dimensiones será $\Delta = 4 \pi^3 (x'' - x') (y'' - y')$, y por tanto tendremos

$$\int m_3 (C, E) dC \leq \Delta \varepsilon$$

luego esta integral tiende a cero al tender ε a cero.

Por tanto, deducimos:

$$\int m_3 (C, V) dC = 8 \pi^2 S m_3 (V)$$

que es lo que queríamos demostrar.

El cilindro considerado aquí puede estar determinado por un conjunto plano medible cualquiera y por consiguiente estará formado por el conjunto de rectas paralelas a una dirección dada que pasan por los puntos de dicho conjunto plano. La generalización del resultado anterior para este caso se obtendría descomponiendo el conjunto plano en la misma forma que lo hicimos anteriormente, quedando el cilindro descompuesto en prismas cuadrangulares, menos un cilindro tal que la medida de su sección sea arbitrariamente pequeña; la repetición del razonamiento empleado para el caso anterior nos daría el resultado.

5) *Caso en que uno de los conjuntos se reduce a un plano.*

Supongamos ahora un plano móvil; su posición quedará determinada por tres parámetros: ϱ distancia a un punto fijo y θ y φ coordenadas esféricas de su normal. Consideremos un conjunto medible V y para cada posición del plano móvil determinemos la medida plana de su intersección con V ; sea $m_2 (P, V)$ esta medida, vamos a demostrar que

$$[6] \quad \int m_2 (P, V) dE = 2 \pi m_3 (V)$$

donde $dE = \sin \theta d\theta d\varphi d\varrho$ es la *densidad* para conjuntos de planos.

En efecto, esta fórmula es válida para cuadrados ⁽⁸⁾, y vamos a demostrarla ahora para conjuntos abiertos; para ello basta tener en cuenta que con un razonamiento análogo al empleado en el caso de la recta y un conjunto plano, podemos desprestigiar las fronteras comunes a los cubos en que podemos descomponer O , haciendo luego un razonamiento análogo se obtiene la demostración. Ahora bien, poniendo V en la forma $O - E$ tendremos:

$$\int m_2(P, V) dE = \int m_2(P, O) dE - \int m_2(P, E) dE = 2\pi m_3(V) - \int m_2(P, E) dE.$$

Puesto que E es medible podemos encontrar un conjunto abierto O' tal que $O' \supset E$ y $m_3(O') < 2\varepsilon$ y por tanto $m_2(P, E) \leq m_2(P, O')$, luego

$$\int m_2(P, E) dE \leq \int m_2(P, O') dE \leq 4\pi\varepsilon$$

y haciendo tender ε a cero deducimos

$$\int m_2(P, V) dE = 2\pi m_3(V)$$

como queríamos demostrar.

6) *Caso en que uno de los conjuntos se reduce a una recta.*

Si en lugar de un plano tomamos una recta móvil y consideramos la medida lineal $m_2(R, V)$ de su intersección con un conjunto medible en el espacio, V , tendremos que se verifica también:

$$[7] \quad \int m_1(R, V) dG = 2\pi m_3(V)$$

donde $dG = \sin\theta d\theta d\varphi dx dy$ es la densidad para conjuntos de rectas en el espacio (las rectas vienen determinadas por las coordenadas x, y de su intersección por un plano normal y por sus coordenadas esféricas θ y φ).

La fórmula es válida para cubos ⁽⁹⁾; consideremos un conjunto abierto O , éste puede descomponerse en la forma ΣE_i don-

(8) Ver Deltheil, "Probabilités Géométriques".

(9) Ver Deltheil, "Probabilités Géométriques".

de los E_i son cubos que pueden tener fronteras comunes, pero la integral de la fórmula [7] es nula para el caso en que V sea un cuadrado, luego como el conjunto numerable de los cuadrados (o partes de cuadrados) que forman las fronteras comunes no interviene en la integral, tendremos por tanto:

$$\int m_1(R, O) dE = \int \sum m_1(R, E_i) dE = \sum \int m_1(R, E_i) dE = 2\pi \sum m_3(E_i) = \\ = 2\pi m_3(O).$$

Para pasar de este caso al caso de un conjunto cualquiera V se hace el mismo razonamiento que en el caso anterior obteniendo la fórmula [7].

Todos los resultados obtenidos en este trabajo no varían al invertir el movimiento, esto es al tomar como fijo el conjunto móvil e inversamente el móvil como fijo, con la condición de que las posiciones de ambos conjuntos vengán determinadas por los *mismos parámetros*, así, por ejemplo, se puede invertir el movimiento en el caso de un conjunto medible y de un conjunto de un número finito de puntos y no se puede invertir al considerar bandas o cilindros y conjuntos. Si en lugar de considerar conjuntos totalmente móviles consideramos conjuntos que estén solo sujetos a traslaciones, las fórmulas que hemos obtenido se siguen verificando, sin más diferencia que en el segundo miembro desaparecen los coeficientes por ser todos iguales a la unidad; así en el caso de dos conjuntos planos se obtiene $m_2(A_1) \times m_2(A_2)$, en el caso de una recta y un conjunto se obtiene $m_2(A)$ etc....

GUILLERMO KNIÉ

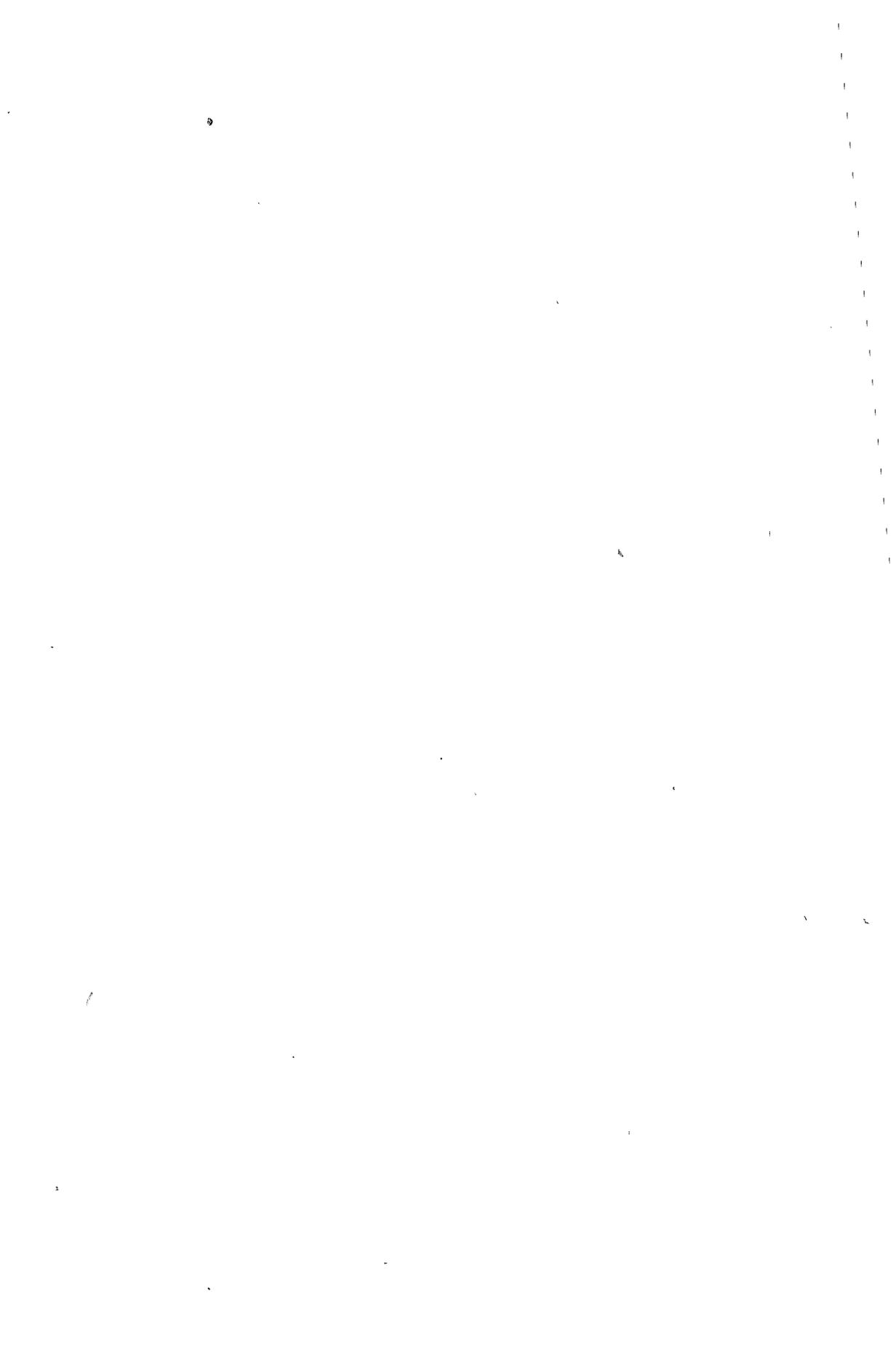
EL PROBLEMA DE VARIOS ELECTRONES
EN LA
MECÁNICA CUANTISTA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Publicación N.º 15

BUENOS AIRES

1940



GUILLERMO KNIE

EL PROBLEMA DE VARIOS ELECTRONES

EN LA

MECANICA CUANTISTA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Publicación N.º 15

BUENOS AIRES

1940



EL PROBLEMA DE VARIOS ELECTRONES EN LA MECANICA CUANTISTA

por GUILLERMO KNIE

El problema del átomo pesado que implica la presencia de varios electrones, es demasiado complicado para ser resuelto exactamente.

Por eso, desde los principios de la mecánica cuantista, para su solución se han desarrollado métodos de aproximación. En lo que sigue examinaremos varios de estos y su fundamentación teórica, lo que servirá para aclarar las relaciones que existen entre dos de ellos. El primero y más conocido de todos es el del *self consistent field* de Hartree⁽¹⁾. Consiste en someter cada electrón separadamente a una ecuación ondulatoria, suponiendo que él se mueva independientemente de los otros en un campo que es el mismo para todos y para el cual, es característico la supresión del efecto que el electrón ejerce sobre sí mismo. El parámetro de energía en esta ecuación no es la energía total, sino que hay que restar de ésta, la energía debida al potencial de un electrón con respecto a otro tomada para todos los pares de electrones que se pueden formar exceptuando el uno del cual se trata. El ejemplo más sencillo está representado por el átomo de helio en el estado fundamental. Según Hartree tenemos la ecuación (en unidades atómicas $e = m = h = 1$)

$$\left\{ -\frac{1}{2} \Delta_1 - \frac{1}{r_1} + \int \frac{|\psi(x_2)|^2 dx_2}{r_{12}} \right\} \varphi(x_1) = \left\{ E - \int \bar{\psi}(x_2) H_2 \psi(x_2) dx_2 \right\} \varphi(x_1). \quad (1)$$

Aquí H_2 representa el operador de energía del segundo electrón: $-\frac{1}{2} \Delta_2 - \frac{1}{r_2}$. Δ_1 es el operador de Laplace aplicado a las coordenadas del primer electrón, r_1 la distancia del primer electrón al núcleo, Δ_2 y r_2 las mismas cantidades para el segundo electrón. Como en el estado fundamental del helio ambos electrones tienen la misma función ondulatoria, la ecuación que resulta de cambiar los índices 1 y 2 será la misma. La idea de Hartree era un acierto. Esto se ha visto más tarde cuando se trató de ponerla sobre una base teórica. Schrödinger había deducido su ecuación por medio de un

(1) HARTREE, Proc. Cambr. Phil. Soc. vol. 24, p. 111 (1927).

principio de variación. Fock demostró en el año 1930⁽²⁾ que el mismo principio de variación usado por Schrödinger dá automáticamente las ecuaciones de Hartree, si se supone que la función ondulatoria del sistema se puede escribir como un producto de funciones de las cuales cada una contiene solamente las coordenadas de un solo electrón. Con esta restricción queda comprobado, pues, que el método de Hartree representa la mejor solución que se puede encontrar bajo la condición mencionada.

Veremos ahora en el ejemplo del átomo de helio como del principio de variación resultan las ecuaciones de Hartree. Poniendo $-\frac{1}{2}\Delta_1 - \frac{1}{r_1} = H_1$ y $-\frac{1}{2}\Delta_2 - \frac{1}{r_2} = H_2$ el operador de energía de nuestro problema es $L = H_1 + H_2 + \frac{1}{r_{12}}$. Si la función ondulatoria total es ψ , tenemos: $\iint \delta \bar{\psi} (L - E) \psi dx_1 dx_2 = 0$ (hay que variar la parte real de ψ y la parte imaginaria o, lo que es lo mismo, $\bar{\psi}$ y ψ independientemente). Si ponemos $\psi = \psi(x_1)\psi(x_2)$, obtenemos $\int dx_1 \delta \bar{\psi}(x_1) \int \bar{\psi}(x_2) (H_1 + \frac{1}{r_{12}} + H_2 - E) \psi(x_1)\psi(x_2) dx_2 = 0$.

(Por la simetría completa del problema basta variar una de las funciones)

$$\int dx_1 \delta \bar{\psi}(x_1) [H_1 + \int \frac{|\psi(x_2)|^2 dx_2}{r_{12}} + \int \bar{\psi}(x_2) H_2 \psi(x_2) dx_2 - E] \psi(x_1) = 0$$

Como esto es válido para variaciones arbitrarias de $\bar{\psi}(x_1)$, se obtiene

$$\left\{ H_1 + \int \frac{|\psi(x_2)|^2 dx_2}{r_{12}} + \int \bar{\psi}(x_2) H_2 \psi(x_2) dx_2 - E \right\} \psi(x_1) = 0 \quad (2)$$

Aquí la primera integral depende de las coordenadas del primer electrón y representa evidentemente la energía potencial mutua de los dos electrones. La segunda integral es una constante y debe entrar en el parámetro de energía. Se vé que (2) es idéntico a (1). El caso considerado es aquel en el cual el método del self consistent field da en cierto sentido su máximo de aproximación a la realidad. Esto se debe a la circunstancia de que la función ondulatoria del helio en su estado fundamental $\psi(x_1)\psi(x_2)$ ya es simétrica en

(2) Fock, Zeitschr. für Phys. vol. 61, 126.

las coordenadas de los dos electrones. Si esto no es el caso, la verdadera función ondulatoria no puede ser un simple producto de funciones sino una suma de tales productos. En cuanto Hartree trabaja con funciones no simétricas, su método es defectuoso. El error cometido así consiste en no tomar en cuenta las fuerzas de intercambio.

Si el número de electrones es tres, se forman tres nuevos términos. A la energía potencial hay que agregar $\int \frac{|\psi(x_2)|^2 dx_2}{r_{12}}$ y al parámetro de energía $\int \bar{\psi}(x_2) H_2 \psi(x_2) dx_2$ y $\iint \frac{|\psi(x_2)|^2 |\psi(x_3)|^2 dx_2 dx_3}{r_{23}}$ y así sucesivamente. Además las funciones no pueden ser más todas iguales.

Si el número de electrones de un átomo es muy grande, el método del self consistent field resulta también pesado, entonces es más recomendable un procedimiento estadístico dado por Fermi (1). Consiste en una combinación de la ecuación del potencial con una relación entre la densidad de un gas de electrones y el potencial, obtenida por la aplicación del principio de Pauli a la estadística del gas de electrones. Si v es el potencial y n la densidad de los electrones, tenemos la ecuación de Poisson $\Delta v = 4 \pi n e$ y

$$n = \frac{\frac{9}{2} \frac{3}{2} m^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2}} v^{\frac{3}{2}}}{3 h^3} \text{ lo cual en el caso de simetría esférica dá:}$$

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dv}{dr} = \frac{\frac{13}{2} \pi^2 m^{\frac{3}{2}} e^{\frac{5}{2}} v^{\frac{3}{2}}}{3 h^3} \quad (3)$$

Esta ecuación junto con las condiciones en los límites determina completamente el potencial y el conocimiento del potencial como función de la distancia al núcleo es suficiente para calcular cualquier magnitud relacionada con el estado estacionario del átomo.

El método de más vasto alcance — en cuanto toma en cuenta también las fuerzas de intercambio — es el de Dirac (2) que se basa sobre el empleo de la matriz de densidad. Como pensamos comparar este método con el de Fermi conviene describirlo brevemente. El forma a la vez un ejemplo excelente para los cálculos semi-clásicos que deben substituir frecuentemente el procedimiento riguroso cuántico que muy a menudo no puede llevarse a cabo por

(1) Zeitschr. f. Phys. tomo 48 p. 73 (1928).

(2) Proc. Cambr. Phil. Soc. tomo 26, p. 376 (1930).

la gran complejidad de los cálculos. Sean $\psi_1(x_1), \psi_2(x_2) \dots$ las funciones ondulatorias del electrón $r, 2, \dots$. Entonces $\bar{\psi}_1(x_1) \cdot \psi(x_1), \bar{\psi}_2(x_2) \cdot \psi(x_2) \dots$ son las densidades respectivas. La densidad total será: $\sum_r \bar{\psi}_r(x_r) \psi(x_r)$. Dirac considera esta suma como elemento diagonal de una matriz. Todos los elementos de esta matriz se obtienen sustituyendo por $\bar{\psi}_r$ y $\psi(r)$ todas las funciones de un sistema ortogonal y completo que satisface las ecuaciones del «self consistent field» del átomo de que se trata. Si designamos la densidad con la letra ρ , esta matriz en la manera de escribir de Dirac es $(q'/\rho/q'')$. Ahora Dirac forma $i\hbar \frac{d}{dt} (q'/\rho/q'')$ y obtiene al efectuar esta operación una ecuación que formalmente es idéntica a la ecuación fundamental de la mecánica cuantista: $\frac{\hbar}{i} \dot{\rho} = H\rho - \rho H$.

Esto le permite identificar H con el operador de la energía del sistema. En el estado estacionario $\dot{\rho} = 0$, tenemos pues: $H\rho - \rho H = 0$. El análogo clásico de esto es: $\frac{\delta H}{\delta r} \cdot \frac{\delta \rho}{\delta p} - \frac{\delta H}{\delta p} \cdot \frac{\delta \rho}{\delta r} = 0$ (1) siendo p el impulso conjugado a r y todas las cantidades conmutables. En el estado fundamental del átomo para cualquier valor de r el espacio está saturado en una región para la cual el momento p es menor que cierto valor P . En el punto $p = P$ ρ salta de repente de un valor finito a 0. Resulta pues que $\frac{\delta \rho}{\delta r} = 0$ y $\frac{\delta \rho}{\delta p}$ muy grande para $p = P$. Por consiguiente debe ser $(\frac{\delta H}{\delta r}) = 0$. Esto nos da inmediatamente la relación siguiente entre P — el momento máximo electrónico — y r : $\frac{d}{dr} (r^2 \frac{d}{dr} (\frac{\mathcal{P}^2}{2m} - \frac{2e^2}{\pi h} \mathcal{P})) = \frac{4e^2}{3\pi h^3} r^2 \mathcal{P}^3$ (4) (2).

Debo observar todavía que en el transcurso del cálculo Dirac ha conseguido hacer invariante la ecuación para transformaciones ortogonales de las funciones ondulatorias del sistema. Como la simetrización de la función ondulatoria es una transformación ortogonal, esto significa la introducción de las fuerzas de intercambio. Estas están representadas por el término lineal en P . Queremos demostrar ahora que si prescindimos de este término, el resultado de Dirac es equivalente al de Fermi. Se trata, pues, de demostrar la identidad de (3) con $\frac{d}{dr} (r^2 \frac{d \mathcal{P}^2}{dr}) = \frac{8e^2 m}{3\pi h^3} r^2 \mathcal{P}^3$. Por de pronto el h de Dirac es la constante de Planck dividida por 2π , lo que nos dá en el

(1) Ver DIRAC: Die Prinz. der Quantenmechanik, pr. E. p. 98.

(2) En el citado trabajo de DIRAC h tiene por error el exponente 2.

numerador un factor $8\pi^3$, así que ahora tenemos $\frac{d}{dr}(r^2 \frac{d\mathcal{P}^2}{dr}) =$
 $\frac{12}{2^2} \frac{e^2 \pi^2 m r^3}{3 h^3} \mathcal{P}^3$. Por otra parte (3) puede escribirse así: $\frac{d}{dr}(r^2 \frac{dv}{dr}) =$
 $\frac{13}{2} \frac{\pi^2 m^2 e^2}{3 h^3} \frac{5}{v^2} \frac{3}{r^2}$. La identificación completa la conseguimos ahora

por un teorema que se encuentra en una forma primitiva en el primer trabajo de Bohr (1). Cuando un electrón se mueve en una órbita circular en un campo central de fuerza de atracción inversamente proporcional a r^n con una velocidad pequeña en comparación con la velocidad de la luz, se tiene la relación $E_{\text{cin}} = \frac{n+1}{2} E_{\text{pot}}$. Si la órbita no es circular, la relación es válida todavía para los valores medios \bar{E}_{cin} y \bar{E}_{pot} . (para la generalización de este teorema vea Sommerfeld, *Atombau und Spektrallinien* 4. ed. p. 771). En nuestro caso el electrón con el momento máximo P se mueve todavía con una velocidad bastante inferior con respecto a la de la luz (en la primera órbita de Bohr del átomo de hidrógeno la velocidad es 3.10^7 cm) y las condiciones para la aplicación del teorema son dadas. Tenemos pues: $\frac{\mathcal{P}^2}{2m} = -\frac{n+1}{2} ve$. Como n es siempre negativo, para $|n| > 1$ podemos escribir en lugar de éso: $\mathcal{P}^2 =$
 $= |n+1| v e m$ ó $\mathcal{P} = (|n+1| v e m)^{\frac{1}{2}}$. Si sustituimos este valor en la ecuación de Dirac, obtenemos una concordancia perfecta de las dos fórmulas si tomamos $n = -3$. El significado físico de ésto es que el resto del átomo tiene sobre el electrón de momento máximo el efecto de un dipolo la fuerza del cual como se sabe decrece con la tercera potencia de la distancia.

En cuanto a la magnitud del efecto de intercambio, se vé que la razón del coeficiente de P al coeficiente de P^2 es $\sim \frac{e^2 m}{h}$ lo que tiene la dimensión de un momento. Si se considera que para la primera órbita de Bohr en el átomo de hidrógeno se tiene: $pr = h$ y $\frac{e^2}{r^2} = \frac{P^2}{m r}$ resulta que $\frac{e^2 m}{h}$ representa el momento de un electrón de la primera órbita de Bohr. Como esta cantidad $\sim 3.10^{-21}$ resulta que el efecto de intercambio no es muy importante en un átomo pesado en el cual P es grande.

(1) Phil. Mag. vol. 26, p. 24 (1913).



ALEJANDRO TERRACINI

**Sobre la existencia de superficies
cuyas líneas principales son dadas**

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Publicación Nº 16

BUENOS AIRES

1940 .



SOBRE LA EXISTENCIA DE SUPERFICIES CUYAS

LINEAS PRINCIPALES SON DADAS

por ALEJANDRO TERRACINI

Las líneas más importantes trazadas sobre una superficie S del espacio proyectivo de cinco dimensiones S_5 son sin duda sus *líneas principales* ⁽¹⁾. De estas líneas pueden darse varias definiciones, entre las cuales recordamos las siguientes:

a) Hay ∞^1 hiperplanos que cortan la superficie S según una línea que tiene un punto cuspidal en un punto dado x de la superficie; hay generalmente *cinco* de estos ∞^1 hiperplanos para cada uno de los cuales el punto x viene a ser un tacnodo. Las correspondientes rectas tangentes en el punto x son las *cinco tangentes principales*. Estas tangentes principales envuelven sobre la superficie S los *cinco sistemas de curvas principales* ⁽²⁾.

b) Las tangentes principales en el punto x pueden definirse como las que pertenecen a aquellas curvas de la superficie S que pasan por el punto x de tal manera que sus S_3 osculadores en el mismo punto x coincidan con los S_3 que son 2-tangentes a la superficie en el punto x según la dirección de las mismas curvas ⁽³⁾.

c) A lo largo de una curva principal dos planos tangentes consecutivos resultan incidentes según un orden de aproximación σ más grande que 2 (que es el valor ordinario de σ para dos planos tangentes consecutivos de una superficie de S_5) y por consiguiente $\equiv 4$ ⁽⁴⁾.

(1) Para poder admitir también líneas principales imaginarias (como lo sobreentenderemos en lo sucesivo de esta Memoria) suponemos que la superficie S sea analítica aunque esta hipótesis no es siempre necesaria.

(2) CORRADO SEGRE: *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*, Rend. del Circ. Matem. di Palermo, t. XXX, 1910, Núm. 24.

(3) E. BOMPIANI: *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero*, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XLVIII, 1913.

(4) A. TERRACINI: *Sull'incidenza di spazi infinitamente vicini (Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari, Pavia, 1936)*. V. también CORRADO SEGRE: *Sulle linee principali di una superficie di S_5 e una proprietà caratteristica della superficie di Veronese*, Rend. della R. Acc. dei Lincei, (5), vol. XXX, 1921.

Tomó últimamente nuevo interés el estudio de las curvas principales, después que BLASCHKE ⁽¹⁾ acudió a ellas en unas investigaciones de carácter topológico, en cuanto coordinó unas particularidades topológicas de un 5-tejido (5-Gewebe) ⁽²⁾ de líneas planas con unas circunstancias especiales que pueden afectar las curvas principales de una superficie.

Pero, a pesar del hecho que la primera aparición de las curvas principales se remonta a treinta años atrás, pocas cosas son conocidas sobre ellas.

Por ejemplo, no se sabe todavía si, dada a priori arbitrariamente la ecuación diferencial de las líneas principales, puede afirmarse la existencia de una superficie que tenga efectivamente esas líneas principales. Esta laguna ha sido indicada también por W. BLASCHKE y G. BOL en su nuevo libro: *Geometrie der Gewebe* (Berlin, 1938).

Yo logro en este trabajo llenar esa laguna, probando que puede contestarse afirmativamente a la pregunta. Ya resumí los resultados de mis investigaciones en una breve comunicación a la Académie des Sciences de París ⁽³⁾, y doy ahora una relación más detallada de ellas.

Del siguiente tratamiento del argumento resultará también que, dada la ecuación de las curvas principales, hay todavía un cierto grado de indeterminación en las superficies que tienen esas curvas principales. Por consiguiente, las propiedades proyectivas de las superficies pueden reflejar particularidades topológicas de sus curvas principales sólo en un grado limitado. Por lo tanto, el lazo descubierto por BLASCHKE, aunque se refiere a un caso especial, parece particularmente notable. Pero por la misma razón no parece probable que puedan esperarse muchas otras ulteriores relaciones de este género.

1.—Sean x_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) coordenadas proyectivas homogéneas de los puntos x de un espacio de cinco dimensiones S_5 . Las

(1) *Über die Tangenten einer ebenen Kurve fünfter Klasse*, Abh. d. mathem. Sem. der Hamburger Universität, vol. 9, 1933.

(2) Un 5-tejido está constituido por cinco familias ∞^1 de curvas tales que todas estas familias cubran simplemente una misma región. Las particularidades mencionadas son: I) refiriéndonos a un 5-tejido, que su rango sea máximo; II) refiriéndonos a una superficie, que a lo largo de cada curva de cada sistema de líneas principales los planos tangentes estén en un hiperplano.

(3) A. TERRACINI: *Sur l'existence de surfaces ayant des lignes principales données*, Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de Paris, 1939.

($\Delta \neq 0$), la ecuación (1.2) puede dividirse por Δ y escribirse en la forma:

$$(1.5) \quad Hdu^5 + Ldu^4dv + Mdu^3dv^2 + Ndu^2dv^3 + Pdu^1dv^4 + Kdv^5 = 0,$$

donde

$$(1.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} H = \frac{h}{\Delta} = \tau; \quad L = \frac{l}{\Delta} = 3\varepsilon - \beta; \quad M = \frac{m}{\Delta} = \alpha - 3\delta + 3\mu; \\ N = \frac{n}{\Delta} = \varrho - 3\lambda + 3\gamma; \quad P = \frac{p}{\Delta} = 3\eta - \nu; \quad K = \frac{k}{\Delta} = \omega. \end{array} \right.$$

Todo esto, hasta este punto, es bien sabido. Pero, por lo que sé, me parece que la observación siguiente no ha sido todavía efectuada. Una transformación de la forma.

$$(1.7) \quad x = \vartheta(u, v) X$$

lleva los primeros miembros de cada una de las ecuaciones (1.1) y (1.4) a las expresiones análogas formadas empleando X en lugar de x , a menos del factor ϑ^6 . Por lo tanto las expresiones H, L, M, N, P, K , son invariantes por la transformación (1.7).

Además, transformemos las coordenadas curvilíneas de manera de conservar cada uno de los sistemas de líneas paramétricas, poniendo:

$$(1.8) \quad u = u(u_1), \quad v = v(v_1).$$

Se controla fácilmente que la forma diferencial fraccionaria:

$$(1.9) \quad \frac{Hdu^5 + Ldu^4dv + Mdu^3dv^2 + Ndu^2dv^3 + Pdu^1dv^4 + Kdv^5}{3 du^2 dv^2}$$

queda invariada después de la transformación (1.8). Por consiguiente la forma diferencial fraccionaria (1.9) ligada con una superficie del espacio S_5 (que no representa ninguna ecuación de Laplace) depende únicamente de la superficie y de la elección de las líneas paramétricas.

Podemos llamar a la forma (1.9) forma diferencial fundamental de la superficie S , a pesar del hecho que depende de las curvas paramétricas.

2.—De la precedente observación sobre la forma diferencial fundamental (1.9) sigue que debe ser posible encontrar una significación geométrica de ella.

Para hallar tal significación, consideremos un punto $x=x(u, v)$ sobre la superficie, una dirección ⁽¹⁾ por este punto —que es dada como razón de las diferenciales du, dv — y el hiperplano ξ que es 2-tangente a la superficie S en el punto x según la dirección dada, es decir el hiperplano que contiene los planos tangentes en cada uno de los puntos x y $x(u+du, v+dv)$. Si C es una curva de la superficie que pasa por el punto x en esta dirección, y \bar{x} es otro punto de la línea C que esté en proximidad del punto x , cada una de las líneas paramétricas que pasan por el punto \bar{x} corta la curva paramétrica del otro sistema que pasa por el punto x en un punto. Sean x_1 y x_2 los puntos así logrados, donde p. e. x_1 pertenece a la curva u (es decir $v=\text{const.}$) que pasa por x . La recta $\bar{x}x_1$ corta el hiperplano ξ en un punto X_1 . Finalmente sea m un punto arbitrario de la misma recta $\bar{x}x_1$ que no se acerca indefinidamente al punto x cuando $\bar{x} \rightarrow x$.

El término principal de la razón anarmónica:

$$(2.1) \quad (\bar{x} \ x_1 \ X_1 \ m)$$

cuando $\bar{x} \rightarrow x$ coincide con la forma diferencial fundamental (1.9) ⁽²⁾.

Si substituimos la recta $\bar{x}x_1$ con $\bar{x}x_2$ y los puntos X_1, m con X_2, n definidos de manera análoga, también el término principal de la razón anarmónica:

$$(2.2) \quad (\bar{x} \ x_2 \ X_2 \ n)$$

coincide con la misma forma diferencial fundamental.

Podemos observar que cada una de las razones anarmónicas consideradas no es simétrica respecto a los sistemas de líneas paramétricas; pero, a pesar de eso, ambas razones anarmónicas llevan a la misma forma diferencial.

Para demostrar el teorema, observo que el $S_4 \xi$ es determinado por los puntos:

$$x, x_u, x_v, x_{uu} du + x_{uv} dv, x_{uv} du + x_{vv} dv.$$

(1) Suponemos que esta dirección es distinta de las de ambas líneas paramétricas que pasan por el punto x .

(2) Esta propiedad muestra cierta analogía con la definición de las llamadas formas elementales de una superficie en el espacio ordinario dada por E. BOMPIANI: *Le forme elementari e la teoria proiettiva delle superficie*, Boll. dell'Un. mat. italiana, 1926.

Razonaré sobre la razón anarmónica (2.1); pero lo mismo podría hacerse sobre la razón anarmónica (2.2). Expresemos los puntos de la recta $\bar{x}x_1$ como combinaciones lineales $A\bar{x} + Bx_1$ de los puntos \bar{x}, x_1 . Ahora:

$$(2.3) \quad \bar{x} = x + dx + \frac{1}{2}d^2x + \frac{1}{6}d^3x + \dots$$

y:

$$(2.4) \quad x_1 = x + x_u du + \frac{1}{2}(x_{uu}d^2u + x_{uv}du^2) + \\ + \frac{1}{6}(x_{uuu}d^3u + 3x_{uuv}dud^2u + x_{uuu}du^3) \dots$$

El valor de la razón B/A en el punto X_1 está determinado por la ecuación:

$$(2.5) \quad |x, x_u, x_v, x_{uu}du + x_{uv}dv, x_{uv}du + x_{vv}dv, A(1/2d^2x + 1/6d^3x \dots) + \\ + 1/2B(x_{uu}du^2 + x_{uu}dud^2u + 1/3x_{uuu}du^3 + x_{uuv}du^2dv + x_{uvv}dudv^2 + \\ + 1/3x_{vvv}dv^3 + \dots)| = 0.$$

Por consiguiente tenemos como término principal

$$(2.6) \quad \frac{A}{B} = -\frac{3\Delta du^2 dv^2}{\Omega}$$

con tal que el determinante escrito en el denominador no sea cero, lo que puede suponerse si la superficie S no representa ninguna ecuación de Laplace. En este caso, substituyendo $x_{uuu}, x_{uuv}, x_{uvv}, x_{vvv}$ según las ecuaciones fundamentales (1.3) obtenemos:

$$(2.7) \quad \frac{B}{A} = -\frac{Hdu^5 + Ldu^4dv + Mdu^3dv^2 + Ndu^2dv^3 + Pdudv^4 + Kdv^5}{3du^2dv^2}$$

Para el punto m , el límite de B/A cuando $\bar{x} \rightarrow x$ tiene que ser -1 para que sean eliminados los términos de (2.3) y (2.4) que no dependen de las diferenciales. Por lo tanto el término principal de la razón anarmónica (2.1) es el mismo que el de la razón anarmónica formada por $\infty, 0, -1$ y el valor de B/A expresado por (2.7), es decir coincide con (1.9).

3.—Aunque nos interesen principalmente las superficies que no representan ninguna ecuación de LAPLACE, vale la pena hallar qué vienen a ser los términos principales de las razones anarmónicas (2.1) y (2.2) cuando la superficie representa una ecuación de

LAPLACE. En este caso los seis puntos $x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{uv}, x_{vv}$ son ligados por una ecuación lineal homogénea de tipo no parabólico o parabólico. Supongo que los S_3 osculadores de las curvas paramétricas no sean contenidos en los correspondientes S_4 osculadores de la superficie ⁽¹⁾. También ahora considero p. e. (2.1). El tratamiento del n.2 puede aplicarse también ahora hasta la fórmula (2.5) incluida. De esta fórmula, en las circunstancias actuales, sigue

$$(3.1) \quad \frac{B}{A} = \frac{\Omega}{|x, x_u, x_v, x_{uu} \, du + x_{uv} dv, x_{uv} du + x_{vv} dv, x_{uuu}| du^3}.$$

Por consiguiente, usando este valor de B/A en lugar del valor dado por (2.7), nos encontramos en condición de concluir que si la superficie representa una ecuación de Laplace, el término principal de la razón anarmónica (2.1) cuando $\bar{x} \rightarrow x$, coincide con la forma diferencial escrita en el segundo miembro de (3.1), con el signo cambiado.

Es importante observar que en el caso actual:

1) La estructura de la nueva forma diferencial es completamente distinta de la del caso precedente. Ahora, por ejemplo, el numerador y el denominador resultan del mismo grado. Más precisamente en el caso actual —como se averigua fácilmente— numerador y denominador de dicho término principal admiten un divisor común de segundo grado (que igualado a cero representa el doble sistema de las características). Por lo tanto numerador y denominador pueden reducirse a formas de tercer grado. La segunda, evidentemente, es proporcional a du^3 , mientras que la primera, si la igualamos a cero, representa los tres sistemas ulteriores de líneas principales (v. la última citación hecha al fin de esta Memoria). Cuando la ecuación de LAPLACE es de tipo parabólico, caben ulteriores reducciones.

(1) Esta hipótesis no sería nunca realizada si el S_4 osculador a la superficie en el punto x contuviese el S_3 osculador en el mismo punto a cada curva trazada sobre la superficie que pasa por el punto \bar{x} . Pero en este caso la superficie estaría en un espacio S_4 . Observamos también que el contenido del n. 3 se aplica al caso expresamente enunciado en el texto, en que la superficie representa sólo una ecuación de LAPLACE; si representase dos de ellas, sería una superficie desarrollable, y entonces numerador y denominador de la fracción escrita en el segundo miembro de (3.1) serían ambos idénticamente nulos.

2) Las dos razones anarmónicas (2.1) y (2.2) no llevan ya a la misma forma diferencial.

4.—Volvamos ahora al caso general, y consideremos los problemas siguientes:

PROBLEMA A.—*¿Siendo dada arbitrariamente la ecuación diferencial (1.5), existe una superficie tal que la ecuación de sus líneas principales coincida con (1.5)?*

PROBLEMA B.—*¿Siendo dada arbitrariamente la forma diferencial fraccionaria (1.9) existe una superficie tal que su forma diferencial fundamental coincida con (1.9)?*

Las superficies que eventualmente satisfagan a la condición enunciada en el problema B) tienen que ser buscadas entre las superficies que no representan ninguna ecuación de LAPLACE, como es claro. En cuanto al problema A), esto no es ya necesario; pero veremos que la pregunta que constituye el contenido del problema A) siempre se contesta afirmativamente, aun no considerando las eventuales soluciones que pueden ser suministradas por superficies que representan ecuaciones de LAPLACE. Por lo tanto nos limitaremos, en ambos casos, a estudiar superficies que no representan ninguna ecuación de LAPLACE.

Una tal superficie será representada por un sistema de ecuaciones fundamentales del tipo (1.3). Ella está determinada de manera única, a menos de una transformación homográfica, cuando las 24 funciones que aparecen como coeficientes en aquellas ecuaciones son efectivamente conocidas. Por lo tanto consideraremos como incógnitas, en lugar de la superficie S , a las 24 funciones mencionadas.

De cualquier manera que se encare la cuestión, es imposible evitar una cierta complicación, que es inherente a la complejidad intrínseca del argumento. Sólo podemos tratar de reducir la complicación en lo posible. Esta consideración justifica un examen previo de la manera más conveniente de dirigir el tratamiento.

Si el segundo problema admitiese una respuesta afirmativa, ésta ya contendría en sí, al mismo tiempo, una análoga contestación afirmativa al primer problema. Por eso, parecería conveniente encarar directamente el problema B). Ahora bien, al examinar superficialmente este problema, podríamos sentirnos inducidos a tra-

tar de comprobar que siempre es resoluble, debido a la circunstancia que las 24 funciones incógnitas están sujetas a:

1) las condiciones de integrabilidad del sistema (1.3), que son en número de 18 (esas condiciones se encuentran escritas explícitamente más adelante):

2) las ecuaciones que traducen las condiciones efectivamente implicadas por el problema B): estas condiciones llevan a 6 ecuaciones ulteriores en las 24 funciones incógnitas.

En consecuencia el problema B) lleva a un sistema de 24 ecuaciones en 24 funciones incógnitas. Sin embargo, considerando la observación del n. 1, parece menos probable que tal sistema sea compatible. En efecto, si existe un conjunto de 24 funciones que satisfacen a ese sistema, éste tiene que ser todavía satisfecho cuando aquellas funciones son reemplazadas por las nuevas 24 funciones en que aquéllas se transforman cuando las coordenadas homogéneas de los puntos se multiplican por una función arbitraria. Con palabras poco diferentes, esto equivale a decir que mediante la transformación (1.7) la función μ se transforma en otra función $\bar{\mu}$ tal que: ⁽¹⁾

$$(4.1) \quad \mu' = \bar{\mu} + \frac{\vartheta_u}{\vartheta},$$

y por consiguiente siempre es posible escoger la función $\vartheta(u, v)$ de manera que el nuevo valor de la función μ resulte idénticamente nulo. Luego el conjunto de las 24 ecuaciones de condición realmente implica sólo 23 funciones incógnitas.

En estas condiciones he preferido estudiar el problema A) en lugar del problema B). El tratamiento efectivo de este problema enseñará que la respuesta es afirmativa, como ya lo hemos mencionado. Al mismo tiempo resultará confirmado que, por lo contrario, generalmente el problema B) no admite soluciones.

Naturalmente las condiciones de integrabilidad del sistema de ecuaciones fundamentales (1.3) desempeñan un papel notable. Ocurre, como lo veremos, que ellas pueden resolverse en términos

(1) Las funciones $\beta, \tau, \varepsilon, \eta, \omega, \nu$ quedan invariadas, mientras:

$$\alpha = \bar{\alpha} + 3 \frac{\vartheta_u}{\vartheta}; \quad \gamma = \bar{\gamma} + \frac{\vartheta_v}{\vartheta}; \quad \delta = \bar{\delta} + 2 \frac{\vartheta_u}{\vartheta}; \quad \lambda = \bar{\lambda} + 2 \frac{\vartheta_v}{\vartheta}; \quad \varrho = \bar{\varrho} + 3 \frac{\vartheta_v}{\vartheta}.$$

finitos respecto a 12 de las funciones incógnitas, y precisamente a las que aparecen como coeficientes de x , x_u , x_v . Sigue que es posible volver a escribirlas conservando como funciones incógnitas solamente:

$$(4.2) \quad \alpha, \beta, \tau, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta, \lambda, \mu, \nu, \varrho, \omega.$$

Existe el inconveniente que de esta manera aquellas condiciones vienen a ser extremadamente engorrosas. Traté de disminuir este inconveniente teniendo en cuenta solamente los términos que sirven efectivamente para establecer el teorema de existencia.

5—Como es obvio, las condiciones de integrabilidad del sistema de ecuaciones fundamentales (1.3) se escriben confrontando los valores de x_{uuuv} logrados mediante la primera y la segunda ecuación, los valores de x_{uuvv} logrados mediante la segunda y la tercera, los valores de x_{uvvv} logrados mediante la tercera y la cuarta. Siempre se tiene que escribir que los coeficientes de x , x_u , x_v , x_{uu} , x_{uv} , x_{vv} logrados de las dos maneras, coinciden ordenadamente entre sí. De esta manera se obtienen 18 condiciones. Indicaré p. e. con $(12x)$ la condición obtenida confrontando los coeficientes de x implicados en la ecuación lograda al derivar la primera y la segunda de las ecuaciones fundamentales,, con $(34x_{vv})$ la condición obtenida confrontando los coeficientes de x_{vv} implicados en la ecuación lograda al derivar la tercera y la cuarta.

Es conveniente empezar a escribir las condiciones siguientes, que ofrecen la ventaja de dar enseguida seis de las funciones incógnitas expresadas por medio de las funciones (4.2):

$$\begin{aligned} (12x_{uu}) \quad b^{(2)} &= \alpha_v - \gamma_u + \beta\eta + \tau\omega - \gamma\delta - \varepsilon\eta, \\ (23x_{uu}) \quad b^{(3)} &= \gamma_v - \eta_u + \gamma^2 + \delta\eta + \varepsilon\omega - \eta\alpha - \lambda\gamma - \mu\eta, \\ (34x_{uu}) \quad b^{(4)} &= \eta_v - \omega_u + \eta\gamma + \lambda\eta + \mu\omega - \alpha\omega - \nu\gamma - \varrho\eta, \\ (12x_{vv}) \quad c^{(1)} &= \varepsilon_u - \tau_v + \gamma\tau + \delta\varepsilon + \varepsilon\mu - \alpha\varepsilon - \beta\mu - \tau\varrho, \\ (23x_{vv}) \quad c^{(2)} &= \mu_u - \varepsilon_v + \eta\tau + \lambda\varepsilon + \mu^2 - \gamma\varepsilon - \delta\mu - \varepsilon\varrho, \\ (34x_{vv}) \quad c^{(3)} &= \varrho_u - \mu_v + \omega\tau + \nu\varepsilon - \varepsilon\eta - \lambda\mu. \end{aligned}$$

Escribamos ahora las condiciones $(12x_{uv})$ y $(34x_{uv})$. Teniendo en cuenta los valores de $c^{(2)}$ y $b^{(3)}$ que ya han sido determinados, ellas dan también los valores de las restantes b y c , expresados por medio de las mismas funciones (4.2), es decir:

$$(12x_{uv}) \quad b^{(1)} = \mu_u - \varepsilon_v + \delta_u - \beta_v + \eta\tau + \mu^2 - \gamma\varepsilon - \delta\mu - \varepsilon\varrho$$

$$\begin{aligned}
 & +\gamma\beta+\delta^2+2\varepsilon\lambda-\alpha\delta-\beta\lambda-\tau\nu, \\
 (34x_{uv}) \quad & c^{(4)} = \gamma v - \eta u + \lambda u - v u + \gamma^2 + \varepsilon\omega - \eta\alpha - \lambda\gamma - \mu\eta + 2\eta\delta \\
 & + \lambda^2 + \mu\nu - \alpha\beta - \gamma\nu - \rho\lambda.
 \end{aligned}$$

Cada una de las expresiones logradas para las b y las c contiene, además de las funciones (4.2) sólo sus primeras derivadas, y resulta lineal respecto a estas derivadas.

También cada una de las a puede ahora expresarse de manera análoga:

$$\begin{aligned}
 (12x_v) \quad & a^{(1)} = c_u^{(2)} - c_v^{(1)} + \gamma c^{(1)} + (\delta - \alpha) c^{(2)} + (\varepsilon - \beta) c^{(3)} - \tau c^{(4)}, \\
 (12x_u) \quad & a^{(2)} = b_v^{(1)} - b_u^{(2)} - \gamma b^{(1)} + (\alpha - \delta) b^{(2)} + (\beta - \varepsilon) b^{(3)} + \tau b^{(4)}, \\
 (34x_v) \quad & a^{(3)} = c_u^{(4)} - c_v^{(3)} + \omega c^{(1)} + (v - \gamma) c^{(2)} + (\rho - \lambda) c^{(3)} - \mu c^{(4)}, \\
 (34x_u) \quad & a^{(4)} = b_v^{(3)} - b_u^{(4)} - \omega b^{(1)} + (\eta - \nu) b^{(2)} + (\lambda - \rho) b^{(3)} + \mu b^{(4)}.
 \end{aligned}$$

Cada una de las expresiones logradas para las a contiene, además de las funciones (4.2), sus derivadas primeras y segundas, y es lineal respecto a las derivadas segundas.

En los segundos miembros de estas ecuaciones no sustituimos materialmente las b y las c según sus expresiones que encontramos anteriormente. Pero ya es claro que de esta manera también las a pueden expresarse por medio de las funciones (4.2).

Finalmente tenemos seis condiciones más de integrabilidad, a saber:

$$\begin{aligned}
 (12x) \quad & \gamma a^{(1)} + (\delta - \alpha) a^{(2)} + (\varepsilon - \beta) a^{(3)} - \tau a^{(4)} + a_v^{(2)} - a_v^{(1)} = 0, \\
 (34x) \quad & -\omega a^{(1)} + (\eta - \nu) a^{(2)} + (\lambda - \rho) a^{(3)} + \mu a^{(4)} + a_v^{(3)} - a_u^{(4)} = 0, \\
 (23x) \quad & -\eta a^{(1)} + (\gamma - \lambda) a^{(2)} + (\delta - \mu) a^{(3)} + \varepsilon a^{(4)} + a_v^{(2)} - a_u^{(3)} = 0, \\
 (23x_{uv}) \quad & \gamma u + \rho u + \lambda u = a_v + \delta v + \mu v, \\
 (23x_u) \quad & b_v^{(2)} - b_u^{(3)} = a^{(3)} + \eta b^{(1)} + (\lambda - \gamma) b^{(2)} + (\mu - \delta) b^{(3)} - \varepsilon b^{(4)}, \\
 (23x_v) \quad & c_u^{(3)} - c_v^{(2)} = a^{(2)} - \eta c^{(1)} + (\gamma - \lambda) c^{(2)} + (\delta - \mu) c^{(3)} + \varepsilon c^{(4)}.
 \end{aligned}$$

Podemos considerar estas seis últimas condiciones como las únicas condiciones de integrabilidad, con tal que las a , b , c sean substituídas según las 12 condiciones precedentes. Indicaremos esas seis ecuaciones, según la forma que tomarían después de la substitución efectiva, como ecuaciones (I), (II),, (VI), sin escribirlas de nuevo completamente. Por el momento, sólo observamos que cada una de ellas es lineal respecto a las derivadas de orden máximo

implicadas en la misma. Sin embargo es conveniente poner en evidencia los términos que contienen esas derivadas de orden máximo, para tener una guía en cuanto a la manera más conveniente de aprovechar las mismas ecuaciones. Ellos son:

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad & -\alpha_{uvv} - \beta_{vvv} + \gamma_{uuu} + \delta_{uvv} + \varepsilon_{uvv} - \tau_{vvv} + \dots = 0, \\
 \text{(II)} \quad & -\varrho_{uvv} - \nu_{uvv} + \mu_{vvv} + \lambda_{uvv} + \eta_{uvv} - \omega_{uuu} + \dots = 0, \\
 \text{(III)} \quad & -\alpha_{uvv} + \varrho_{uvv} - \beta_{vvv} + \nu_{uuu} + \delta_{uvv} - \lambda_{uvv} - \varepsilon_{vvv} + \eta_{uuu} + \dots = 0, \\
 \text{(IV)} \quad & \gamma_u + \varrho_u + \lambda_u - \alpha_v - \delta_v - \mu_v = 0, \\
 \text{(V)} \quad & 2\eta_{uu} + \nu_{uu} - 3\gamma_{uv} - \lambda_{uv} + \varrho_{uv} + \alpha_{vv} - \mu_{vv} + \dots = 0, \\
 \text{(VI)} \quad & 2\varepsilon_{vv} + \beta_{vv} - 3\mu_{uv} - \delta_{uv} + \alpha_{uv} + \varrho_{uu} - \gamma_{uu} + \dots = 0.
 \end{aligned}$$

6.—Emprendamos ahora la discusión de las condiciones ulteriores impuestas por el problema A). Siendo dada a priori la ecuación diferencial (1.5), H, L, M, N, P, K son 6 funciones dadas de u, v . Por eso, según las fórmulas (1.6), las doce funciones (4.2) son sujetas a las seis nuevas condiciones:

$$(6.1) \quad \begin{cases} \tau = \sigma H; & 3\varepsilon - \beta = \sigma L; & \alpha - 3\delta + 3\mu = \sigma M; \\ \varrho - 3\lambda + 3\gamma = \sigma N; & 3\eta - \nu = \sigma P; & \omega = \sigma K; \end{cases}$$

donde $\sigma = \sigma(u, v)$ indica una nueva función incógnita.

Resumiendo, tenemos ahora trece funciones incógnitas, es decir la función $\sigma(u, v)$ y las doce funciones (4.2): ellas son ligadas por las seis ecuaciones a derivadas parciales (I), (II), ..., (VI) y por las seis ecuaciones en términos finitos (6.1).

Como es natural, eliminamos seis de las funciones incógnitas por medio de las ecuaciones (6.1). Por ejemplo podemos despejar de éstas $\alpha, \beta, \tau, \omega, \nu, \varrho$ y logramos:

$$(6.2) \quad \begin{cases} \alpha = -3\mu + 3\delta + M\sigma; & \beta = 3\varepsilon - L\sigma; & \tau = H\sigma; \\ \omega = K\sigma; & \nu = 3\eta - P\sigma; & \varrho = -3\gamma + 3\lambda + N\sigma. \end{cases}$$

Substituyendo en las ecuaciones (I), (II), ..., (VI), éstas contendrán sólo las siete funciones incógnitas:

$$(6.3) \quad \gamma, \delta, \varepsilon, \eta, \lambda, \mu, \sigma.$$

Nuestro problema A) queda así esquematizado por el sistema constituido por las ecuaciones (I), (II), ..., (VI) después de la substitución. Desde ahora pues la cuestión queda reducida al es-

tudio de este sistema de seis ecuaciones a derivadas parciales en las siete funciones incógnitas (6.3). Llamaremos (Σ) a este sistema.

Pero, antes de transformar dichas ecuaciones, conviene observar que su forma sugiere eliminar las derivadas terceras de las dos funciones incógnitas ε, η en las tres primeras ecuaciones por medio de (V) y (VI). Por esta razón sustituímos las ecuaciones (I), (II), (III) por las nuevas ecuaciones:

$$(I') = 5(I) + 2(VI)_u; \quad (II') = 5(II) + 2(V)_v;$$

$$(III') = 5(III) - 4(V)_u + 4(VI)_v,$$

donde por ejemplo $5(I) + 2(VI)_u$ indica la combinación lineal de la ecuación (I) y de la obtenida derivando (VI) respecto a u , siendo 5 y 2 los coeficientes de la combinación lineal. El sistema (Σ) es representado por las ecuaciones (I'), (II'), (III'), (IV), (V) (VI) así como lo era por las ecuaciones originales (I), (II), (III), (IV), (V), (VI).

Considerando todo esto, el sistema (Σ) puede escribirse:

$$(I') \quad 6\lambda_{uuu} - 3\gamma_{uuu} + 3\mu_{uvv} - 6\delta_{uvv} + 2N\sigma_{uuu} - 3M\sigma_{uvv} + 3L\sigma_{vvv} - 5H\sigma_{vvv} + \dots = 0,$$

$$(II') \quad -6\lambda_{vvv} + 3\gamma_{vvv} - 3\mu_{vvv} + 6\delta_{vvv} - 5K\sigma_{uuu} + 3P\sigma_{uvv} - 3N\sigma_{vvv} + 2M\sigma_{vvv} + \dots = 0,$$

$$(III') \quad 14\lambda_{uvv} - 7\gamma_{uvv} + 7\mu_{uvv} - 14\delta_{uvv} - P\sigma_{uuu} + 5N\sigma_{uvv} - 5M\sigma_{uvv} + L\sigma_{vvv} + \dots = 0,$$

$$(IV) \quad 4\lambda_u - 2\gamma_u + 2\mu_v - 4\delta_v + N\sigma_u - M\sigma_v + (N_u - M_v)\sigma = 0,$$

$$(V) \quad 5\eta_{uu} - 6\gamma_{uv} + 2\lambda_{uv} - 4\mu_{vv} + 3\delta_{vv} - P\sigma_{uu} + N\sigma_{uv} + M\sigma_{vv} + \dots = 0,$$

$$(VI) \quad 5\varepsilon_{vv} - 6\mu_{uv} + 2\delta_{uv} - 4\gamma_{uu} + 3\lambda_{uu} + N\sigma_{uu} + M\sigma_{uv} - L\sigma_{vv} + \dots = 0.$$

Ahora una ulterior transformación es sugerida por el examen de estas ecuaciones. Las derivadas terceras de las funciones incógnitas $\gamma, \delta, \lambda, \mu$ se eliminan si sustituímos las ecuaciones (I'), (II'), (III') por las ecuaciones:

$$(I'') = (I') - \frac{3}{2}(IV)_{uu}; \quad (II'') = (II') + \frac{3}{2}(IV)_{vv};$$

$$(III'') = (III') - \frac{7}{2}(IV)_{uv}.$$

Logramos así:

$$(I'') \quad \frac{1}{2}N\sigma_{uuu} - \frac{3}{2}M\sigma_{uvv} + 3L\sigma_{vvv} - 5H\sigma_{vvv} + \dots = 0,$$

$$(II'') \quad -5K\sigma_{uuu} + 3P\sigma_{uvv} - \frac{3}{2}N\sigma_{uvv} + \frac{1}{2}M\sigma_{vvv} + \dots = 0,$$

$$(III'') \quad -P\sigma_{uuu} + \frac{3}{2}N\sigma_{uvv} - \frac{3}{2}M\sigma_{uvv} + L\sigma_{vvv} + \dots = 0.$$

Inicialmente el sistema (Σ) estaba constituido por las ecuaciones (I), (II), ..., (VI) que ya sustituimos por las ecuaciones (I'), (II'), (III'), (IV), (V), (VI); a su vez éstas pueden substituirse por las ecuaciones (I''), (II''), (III''), (IV), (V), (VI), siendo el conjunto de las mismas equivalente al primero. Desde ahora consideraremos el sistema (Σ) como formado por estas últimas ecuaciones.

Desgraciadamente vemos que los términos que contienen las derivadas de orden máximo, que han sido los únicos tenidos en cuenta hasta ahora, no nos permiten llegar a una conclusión acerca de la existencia de un sistema de integrales del sistema (Σ), porque en las tres primeras ecuaciones esos términos contienen sólo la función incógnita σ , mientras que las últimas contienen todas las siete funciones incógnitas (6.3).

Por lo tanto formemos de nuevo las seis ecuaciones (I''), (II''), ..., (VI) teniendo en cuenta también las derivadas segundas en las tres primeras de ellas, excepto para la función σ , para la cual ya serán suficientes las derivadas terceras. Por este medio podremos llegar a nuestro objeto.

Más precisamente trataremos estas ecuaciones de manera que puedan resolverse respecto a unas derivadas de las funciones incógnitas, cuyos índices de derivación sean todos u . Ahora la ecuación (IV) da el valor de γ_u , y las derivadas de γ cuyos índices comprenden al menos una u , pueden deducirse de ella. Las ecuaciones (V) y (VI) dan respectivamente los valores de η_{uu} y λ_{uu} . Entonces, después de cálculos y reducciones bastante engorrosas, se logra escribir el sistema (Σ) en la forma siguiente:

$$(I'') \quad \sigma [20H\gamma_{vv} - 16L\delta_{vv} - 2P\epsilon_{uu} + 4N\epsilon_{uv} - 6M\epsilon_{vv} - 20H\eta_{uv} + 8L\lambda_{uv} - 10H\lambda_{vv} + 16L\mu_{vv}] + \frac{1}{2}N\sigma_{uuu} - \frac{3}{2}M\sigma_{uvv} + 3L\sigma_{uvv} - 5H\sigma_{vvv} + \dots = 0,$$

$$(II'') \quad \sigma [-10K\delta_{uu} + 8P\delta_{uv} + 18N\delta_{vv} - 20K\epsilon_{uv} + 16P\epsilon_{vv} + 4M\eta_{uv} - 2L\eta_{uv} - 12N\lambda_{uv} + 20K\mu_{uu} - 16P\mu_{uv} - 12N\mu_{vv}] - 5K\sigma_{uuu} + 3P\sigma_{uvv} - \frac{3}{2}N\sigma_{uvv} + \frac{1}{2}M\sigma_{vvv} + \dots = 0,$$

$$(III'') \quad \sigma [-2L\gamma_{vv} - P\delta_{uu} + 2N\delta_{uv} + 13M\delta_{vv} + 5K\epsilon_{uu} - 6P\epsilon_{uv} + 7N\epsilon_{vv} +$$

$$+6L\eta_{uv}-5H\eta_{vv}-8M\lambda_{uv}+L\lambda_{vv}+2P\mu_{uu}-4N\mu_{uv}-10M\mu_{vv}] \\ -P\sigma_{uuu}+\frac{3}{2}N\sigma_{uuv}-\frac{3}{2}M\sigma_{uvv}+L\sigma_{vvv}+\dots=0,$$

$$(IV) \quad \gamma_u = 2\lambda_u + \mu_u - 2\delta_v + \frac{N}{2}\sigma_u - \frac{M}{2}\sigma_v + \frac{N_u - M_v}{2}\sigma = 0,$$

$$(V) \quad \eta_{uu} = 2\lambda_{uv} + 2\mu_{vv} - 3\delta_{vv} + \frac{1}{5}(P\sigma_{uu} + 2N\sigma_{uv} - 4M\sigma_{vv}) + \dots = 0,$$

$$(VI) \quad \lambda_{uu} = \varepsilon_{vv} - 2\mu_{uv} + 2\delta_{uv} - \frac{1}{5}(N\sigma_{uu} - 3M\sigma_{uv} + L\sigma_{vv}) + \dots = 0.$$

Ahora de las tres primeras de estas ecuaciones pueden despejarse σ_{uuu} , δ_{uu} , ε_{uu} , con tal que el determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}N & 0 & -2P\sigma \\ -5K & -10K\sigma & 0 \\ -P & -P\sigma & 5K\sigma \end{vmatrix}$$

sea diferente de cero, es decir con tal que sea:

$$(7.1) \quad K(2P^2 - 5KN) \neq 0.$$

8.—Por el momento, supongamos que la desigualdad (7.1) sea satisfecha, postergando hasta el n° 9 el examen del significado geométrico de esta hipótesis.

Podemos suponer sin restricción que μ sea idénticamente nulo (v. (4.1)); así tenemos solamente seis funciones incógnitas, es decir γ , δ , ε , η , λ , σ . Del sistema (Σ) podemos despejar cada una de las derivadas:

$$\sigma_{uuu}, \delta_{uu}, \varepsilon_{uu}, \gamma_u, \eta_{uu}, \lambda_{uu}.$$

Para ellas resultan expresiones del tipo:

$$(8.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{uuu} = \varphi^{(1)}(\gamma, \gamma_v, \gamma_{vv}, \delta, \delta_u, \delta_v, \delta_{uv}, \delta_{vv}, \varepsilon, \varepsilon_u, \varepsilon_v, \varepsilon_{uv}, \varepsilon_{vv}, \\ \eta, \eta_u, \eta_v, \eta_{uv}, \eta_{vv}, \lambda, \lambda_u, \lambda_v, \lambda_{uv}, \lambda_{vv}, \sigma, \sigma_u, \sigma_v, \\ \sigma_{uu}, \sigma_{uv}, \sigma_{vv}, \sigma_{uuu}, \sigma_{uuv}, \sigma_{uvv}), \\ \delta_{uu} = \varphi^{(2)}(\dots), \\ \varepsilon_{uu} = \varphi^{(3)}(\dots), \\ \gamma_u = \varphi^{(4)}(\delta_v, \lambda_u, \sigma, \sigma_u, \sigma_v), \\ \eta_{uu} = \varphi^{(5)}(\gamma, \gamma_v, \delta, \delta_u, \delta_v, \delta_{uv}, \varepsilon, \varepsilon_u, \varepsilon_v, \eta, \eta_u, \eta_v, \lambda, \lambda_u, \lambda_v, \\ \lambda_{uv}, \sigma, \sigma_u, \sigma_v, \sigma_{uu}, \sigma_{uv}, \sigma_{vv}), \\ \lambda_{uu} = \varphi^{(6)}(\gamma, \gamma_v, \delta, \delta_u, \delta_v, \delta_{uv}, \varepsilon, \varepsilon_u, \varepsilon_v, \varepsilon_{uv}, \eta, \eta_u, \eta_v, \\ \lambda, \lambda_u, \lambda_v, \sigma, \sigma_u, \sigma_v, \sigma_{uu}, \sigma_{uv}, \sigma_{vv}), \end{array} \right.$$

donde $\varphi^{(2)}$ y $\varphi^{(3)}$ dependen de las mismas funciones y derivadas

de las cuales depende $\varphi^{(1)}$. No es necesario especificar la forma de las funciones $\varphi^{(2)}$.

Por consiguiente las ecuaciones (8.1) constituyen un sistema de un tipo un poco más general que el de SOFIA KOWALEWSKI. El teorema de completa integrabilidad subsiste también en estas condiciones más generales ⁽¹⁾.

Por lo tanto podemos afirmar la existencia de un sistema de integrales que corresponden a un grupo conveniente de condiciones iniciales como lo haremos en el teorema del n° 10.

9.—Pero, antes de enunciar nuestro resultado acerca del problema A), es preciso que establezcamos hasta qué punto la hipótesis (7.1) es realmente inevitable.

Esta hipótesis rige ciertamente excepto en el caso donde:

$$(9.1) \quad K = 0,$$

o bien:

$$(9.2) \quad 2P^2 - 5KN = 0.$$

Luego tenemos un primer caso de excepción si las líneas paramétricas v (o sea $u = \text{const.}$) son curvas principales. Si este caso particular tuviese lugar, cambiaríamos las líneas paramétricas de tal manera que el nuevo valor de K no fuese ya idénticamente cero, y entonces nos reduciríamos al caso general. Hay sólo un caso en el cual, aun cambiando las líneas paramétricas, es imposible evitar la excepción presentada por (9.1): este caso se presenta cuando la ecuación diferencial dada (1.5) de las líneas principales se reduce a una identidad, lo que ocurre cuando la superficie S buscada debe tener curvas principales indeterminadas. Pero en este caso podemos acudir a un teorema bien conocido de CORRADO SEGRE⁽²⁾: una superficie que tenga curvas principales indeterminadas es necesariamente una desarrollable, o una superficie de VERONESE. Aun dejando aparte esta efectiva enumeración de las superficies que tienen líneas principales indeterminadas, lo que realmente tiene interés para nosotros en este mo-

(1) C. RQUIER: *Les systemes d'équations aux dérivées partielles*, Paris, 1910, v. p. 472.

(2) *Le linee principali di una superficie di S_r e una proprietà caratteristica della superficie di Veronese*, Nota II, Rend. della R. Acc. dei Lincei, (5), vol. XXX, 1921.

mento —relativamente a nuestro teorema de existencia— es que cuando la hipótesis (9.1) es invariante respecto a las transformaciones de las coordenadas curvilíneas, la existencia de la superficie buscada puede considerarse como cierta a priori.

Discutamos ahora (9.2). También en este caso, si se averigua la hipótesis particular considerada, se puede tratar de acudir a una transformación de las coordenadas curvilíneas tal que no deje subsistir aquella fórmula. También ahora debemos únicamente interesarnos por la manera según la cual podemos evitar la dificultad cuando esa fórmula resulta invariante respecto a cualquier transformación de las coordenadas curvilíneas.

Entre tanto debemos preguntarnos cuándo ocurre que una forma quintica binaria en las dos variables y_2, y_1 :

$$\Phi = Hy_1^5 + Ly_1^4y_2 + My_1^3y_2^2 + Ny_1^2y_2^3 + Py_1y_2^4 + Ky_2^5$$

presenta y conserva la particularidad (9.2) cualquiera que sea la transformación lineal homogénea a la cual se sometan las variables homogéneas y_1, y_2 . Se ve fácilmente que la condición necesaria y suficiente es que la forma Φ sea la quinta potencia de una forma lineal.

En efecto, podemos suponer $K \neq 0$. El significado geométrico de la hipótesis (9.2) es que el grupo de cinco puntos que (en coordenadas proyectivas homogéneas y_1, y_2) es representado por la ecuación $\Phi = 0$ goza de la propiedad que el punto A ($y_1 = 0, y_2 = 1$) tiene su tercer grupo polar reducido a un punto doble B . Además esta propiedad tiene que ser conservada cuando el punto A queda fijo y Φ se transforma por medio de una substitución lineal arbitraria en las variables y_1, y_2 . Ahora bien, elegimos inicialmente las coordenadas proyectivas y_1, y_2 de manera que en el punto $B^{(1)}$ resulte $y_1 = 1, y_2 = 0$, de donde sigue $P = N = 0$. Entonces, imponiendo que la condición (9.2) sea conservada por la transformación particular:

$$y_1 = y_1' + ay_2', \quad y_2 = y_2'$$

donde a es una cantidad arbitraria, se concluye de inmediato que $M = L = H = 0$. Luego $\Phi = Ky_2'^5$; y volviendo a un sistema arbitrario de coordenadas proyectivas y_1, y_2 sigue subsistiendo la circunstancia que Φ es la quinta potencia de una forma lineal.

Por consiguiente, si la hipótesis (9.2) no puede evitarse me-

(1) Que es necesariamente distinto del punto A porque $K \neq 0$.

diante un cambio de las coordenadas curvilíneas, esto significa que el primer miembro de la ecuación (1.5) es la quinta potencia de una forma diferencial lineal. Entonces la cuestión a que tenemos que contestar es: ¿existe alguna superficie cuyos cinco sistemas de líneas principales se reducen a un solo sistema contado cinco veces? Sin ocuparnos aquí de las superficies más generales que gozan de esta propiedad, para nosotros es suficiente observar que la existencia de superficies que se hallan en estas condiciones puede concluirse acudiendo a ejemplos particulares. Ahora bien, en una Memoria precedente ⁽¹⁾ he determinado toda la clase de las superficies del espacio S_5 que poseen un sistema quintuple de líneas principales *planas* ⁽²⁾.

10.—Estamos ahora en condición de contestar a la pregunta formulada en el problema A) por medio del siguiente teorema general:

Siendo dada arbitrariamente la ecuación diferencial de las curvas principales, siempre existen superficies que poseen esas curvas principales. Más precisamente, sea prefijada arbitrariamente la ecuación:

$$(10.1) \quad Hdu^5 + Ldu^4dv + Mdu^3dv^2 + Ndu^2dv^3 + Pdu^1dv^4 + Kdv^5 = 0,$$

dónde:

$$(10.2) \quad K \neq 0$$

y:

$$(10.3) \quad 2P^2 - 5KN \neq 0.$$

Para obtener una superficie S que no represente ninguna ecuación de Laplace, cuyas curvas principales son dadas por la ecuación diferencial (10.1), esto es, para obtener el sistema de ecuaciones fundamentales (1.3) de la superficie S, podemos dar arbitrariamente, además de la condición $\mu = 0$ (que concierne solamente al factor de proporcionalidad ϑ de las coordenadas homogéneas del punto que describe la superficie S), las funciones de la sola variable v a la cual tiene que reducirse cada una de las funciones:

(1) A. TERRACINI: *Sui sistemi semplicemente infiniti di piani nello spazio a cinque dimensioni*. Atti delle Scienze di Torino, vol. 73, 1938.

(2) Ellas (si no representan ninguna ecuación de LAPLACE) se logran como lugares de las "cónicas focales" de los planos que pertenecen a una familia ∞^1 tal que dos planos consecutivos siempre se corten en un mismo punto según un orden de aproximación $\sigma \leq 6$.

$$\gamma, \delta, \delta_u, \varepsilon, \varepsilon_u, \eta, \eta_u, \lambda, \lambda_u, \sigma, \sigma_u, \sigma_{uu}$$

para un valor inicial $u = u_0$ ⁽¹⁾, Mediante estas condiciones iniciales todas las funciones que aparecen como coeficientes en el sistema de ecuaciones fundamentales (1.3) quedan unívocamente determinadas.

Si no se cumple una de las desigualdades (10.2) o (10.3), podemos reducirnos al caso precedente mediante una transformación de las coordenadas curvilíneas u, v , excepto en el caso en que el primer miembro de la ecuación (10.1) se reduce idénticamente a cero o es la quinta potencia de una forma diferencial lineal. Pero en estos dos casos excepcionales la existencia de la superficie buscada queda asegurada ya por otros medios.

11.—Hasta ahora nos ocupamos únicamente del problema A). Ahora tenemos que considerar de nuevo el problema B). Pero es claro que en general, a la pregunta formulada en este problema tenemos que contestar negativamente, porque, de otra manera, sería necesario que el precedente sistema (Σ) —en el cual todavía podemos suponer $\mu = 0$ — admitiera una solución donde la función incógnita σ fuera una función arbitraria de las dos variables u, v . Por lo contrario, la solución de este sistema depende únicamente de las funciones arbitrarias de la sola variable v que han sido indicadas en el n.10.

12.—Volviendo al problema A), la forma de la cual hemos formulado su resolución lleva a la conclusión que, dada una superficie cualquiera en el espacio S_5 , siempre existen muchas otras superficies S' que pueden representarse sobre S de manera que se correspondan todos los sistemas de líneas principales. De aquí sigue la observación hecha al fin de la introducción de esta Memoria. Sin ocuparnos ahora de desarrollar ulteriormente este asunto, nos limitamos a dar el ejemplo siguiente de una tal representación, donde las superficies S y S' pertenecen a tipos completamente distintos. Es bien sabido⁽²⁾ que si la superficie S repre-

(1) El prefijaj la función de la variable v a la cual tiene que reducirse γ para $u = u_0$ tiene como consecuencia (junto con la condición $u=0$) fijar el factor de las coordenadas homogéneas, como se ve observando la fórmula (4.1) y las demás fórmulas contenidas en la nota del n. 4.

(1) CORRADO SEGRE: *Le linee principali di una superficie di S_5 e una proprietà caratteristica della superficie di Veronese*, Nota I, Ren. della R. Acc. dei Lincei, (5), vol. XXX, 1921.

senta una ecuación de LAPLACE no parabólica, dos de sus sistemas de líneas principales son dados por las características, mientras que los tres sistemas restantes son envueltos sobre la superficie por una terna bien determinada de tangentes cuya Hessiana coincide con el par de tangentes a las características. Ahora bien, si partimos de una tal superficie S y formamos la ecuación diferencial de sus curvas principales, podemos adoptar esta ecuación como ecuación (10.1) y así, según nuestro teorema general, logramos varias superficies S' que no representan ninguna ecuación de LAPLACE. Como es claro, cada una de ellas corresponde a la superficie S con conservación de los cinco sistemas de líneas principales, aunque las estructuras proyectivas de S y S' son tan profundamente distintas entre sí, que S representa una ecuación de Laplace, y S' ninguna.

Alejandro Terracini

Tucumán, 25 de Junio de 1940.

LUIS A. SANTALO

VALOR MEDIO DEL NUMERO DE PARTES
EN QUE UNA FIGURA CONVEXA ES
DIVIDIDA POR n RECTAS ARBITRARIAS

UNION MATEMATICA ARGENTINA
Publicación N.º 17

BUENOS AIRES
1941

LUIS A. SANTALO

VALOR MEDIO DEL NUMERO DE PARTES
EN QUE UNA FIGURA CONVEXA ES
DIVIDIDA POR n RECTAS ARBITRARIAS

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Publicación N.º 17

BUENOS AIRES

1941



VALOR MEDIO DEL NUMERO DE PARTES EN QUE UNA FIGURA CONVEXA ES DIVIDIDA POR n RECTAS ARBITRARIAS

por L. A. SANTALÓ

Sea una figura convexa K de área F y perímetro L . Suponiendo trazadas n rectas que cortan a K , el número de regiones en que queda dividida depende de la posición de las rectas. Por ejemplo, para $n=4$, en la fig. 1 el número N de regiones es 9 y en la fig. 2 es 7. Queremos hallar el *valor medio* del número de estas regiones para todas las posiciones posibles de las n rectas. Este número N veremos que está relacionado muy simplemente con el número N' de puntos de intersección de las rectas entre sí que son interiores a K ; así en la fig. 1 es $N'=4$ y en la fig. 2 es $N'=2$. Empezaremos para hallar el valor medio de este último número N' para pasar luego al buscado.

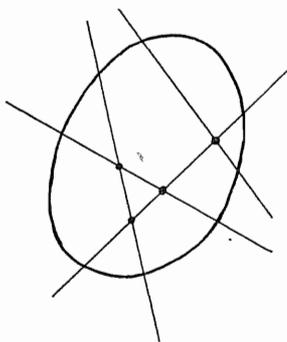


Fig. 1

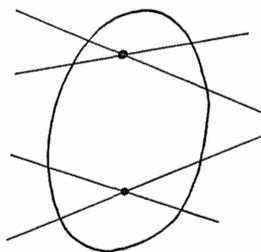


Fig. 2

1. Recordemos que como medida de un conjunto de rectas se entiende simplemente el valor de la integral doble, extendida al conjunto considerado, de la expresión $dG = dp d\Theta$ siendo p la distancia de la recta a un origen fijo y Θ el ángulo de la normal a la recta con una dirección también fija (fig. 3). Solamente habrá lugar, en esta nota, a considerar conjuntos de rectas para los que la integral anterior existe. Por ejemplo la medida de las rectas que cortan a un segmento de longitud l

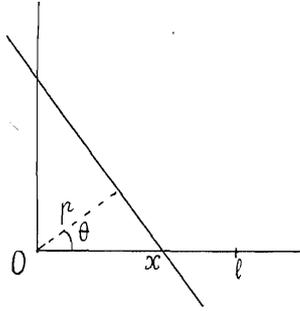


Fig. 3

se puede calcular directamente: si se supone que la posición del segmento es la O, l de la fig. 3, llamando x a la abscisa del punto de intersección será

$$\int dp d\Theta = \int_0^l dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \Theta d\Theta = 2l \quad (1)$$

Se puede ver que este valor es independiente de la posición del segmento en el plano.

En general si hay m segmentos de longitudes l_i , llamando v al número de ellos que son cortados por una recta G en cada posición de la misma, sumando las integrales (1) correspondientes a cada segmento, se obtiene

$$\int v dG = 2 \sum_{i=1}^m l_i \quad (2)$$

extendida la integración a todas las posiciones de la recta.

Para el problema que nos ocupa debemos también recordar que la medida de las rectas que cortan a una figura convexa K es igual a su longitud, o sea

$$\int_{G \cdot K \neq \emptyset} dG = L \quad (3)$$

indicando por $G \cdot K \neq O$ que la integración está extendida a todas las rectas que cortan a K o sea, cuya intersección con K es distinta de cero.

Llamando s a la longitud de la cuerda que la recta G determina en la figura convexa K también debemos recordar la fórmula casi inmediata

$$\int s \, dG = \pi F \quad (4)$$

fácil de obtener integrando primero $s \, dp$ (lo que dá el área F) y luego haciendo variar Θ de O a π .

2. Por *valor medio* del número de puntos N' de intersección de las n rectas que son interiores a K se entiende lo siguiente. El número N' es una función de las n rectas G_i , o sea de sus $2n$ coordenadas p_i, Θ_i ($i = 1, 2, \dots, n$); si se sabe calcular la integral

$$J' = \int N' \, dG_1 \, dG_2 \, dG_3 \dots dG_n \quad (5)$$

extendida a todas las posiciones de las n rectas en las cuales cortan a K , como además la medida de todas estas posiciones posibles según (3) vale

$$\int_{G_i \cdot K \neq 0} dG_1 \, dG_2 \, dG_3 \dots dG_n = L^n \quad (6)$$

el *valor medio* de N' será, por definición, el cociente entre (5) y (6).

3. Hay pues que calcular J' . Llamando N'_{ij} a una función de G_i y G_j (o sea de $p_i, \Theta_i, p_j, \Theta_j$) tal que valga uno si G_i y G_j se cortan dentro de K y cero si se cortan fuera (por uniformidad pondremos también $N'_{ii} = 0$). Por cada posición de las N rectas es

$$N' = \sum_{i,j} N'_{ij}$$

y el número de las N'_{ii} es igual al de combinaciones de las n rectas tomadas 2 a 2 o sea $\binom{n}{2}$.

Llamando s_i a la longitud de la cuerda que G_i determina en K , según (1) y (4) se tiene

$$\int_{G_i \cdot K} N'_{ii} dG_i dG_i = 2 \int s_i dG_i = 2 \pi F$$

Luego

$$\begin{aligned} J' = \int N' dG_1 dG_2 \dots dG_n &= \sum_{i,j} \int N'_{ij} dG_1 dG_2 \dots dG_n = \\ &= \binom{n}{2} 2 \pi F L^{n-2} \end{aligned} \quad (7)$$

Dividiendo (7) por (6) se obtendrá por tanto, como valor medio de puntos de intersección N' que son interiores a K

$$\boxed{\bar{N}' = \binom{n}{2} \frac{2 \pi F}{L^2}} \quad (8)$$

4. Para pasar de N' al número N de regiones en que las n rectas dividen a K se observa en primer lugar que las posiciones de las rectas en las cuales pasan más de 2 por un mismo punto son posiciones especiales de medida cero, es decir, sin influencia en las integrales (5) o (6) ni por tanto en los valores medios. Para las demás posiciones vamos a demostrar que se cumple la relación

$$N = N' + n + 1 \quad (9)$$

Por ejemplo en la figura 1 es $N' = 4$, $n = 4$, $N = 9$ y en la fig. 2 es $n = 4$, $N' = 2$, $N = 7$.

Para demostrar (9) consideremos la red formada por las n rectas y el contorno de K . El número de *vértices* es igual a N' más los $2n$ puntos que las rectas determinan en el contorno de K . El número de *regiones* es por definición N . Para el número de lados se observa que por cada uno de los N' vértices interiores pasan 4 y por cada uno de los vértices del contorno

pasan 3; como cada lado pertenece a 2 vértices el número de ellos será por tanto. $1/2 (4 N' + 6 n) = 2 N' + 3 n$. Pero el teorema de EULER para superficies abiertas dice que el número de regiones más el de vértices es igual al de lados más uno, luego

$$N + N' + 2 n = 2 N' + 3 n + 1$$

de donde resulta la igualdad (9) que queríamos demostrar.

El valor medio del número de regiones N , teniendo en cuenta (8) y (9) será por tanto

$$\bar{N} = \binom{n}{2} \frac{2 \pi F}{L^2} + n + 1$$

5. El número total de lados de la red formada por el contorno de K más las cuerdas que las rectas G_i determinan en esta figura convexa hemos visto que era $2 N' + 3 n$. El número de lados del contorno es $2 n$, luego el número de lados interiores será $2 N' + n$. Llamando λ_i al número de lados de la región C_i , al sumar las λ_i para todas las regiones se observa que cada lado interior aparece cortado dos veces y cada lado del contorno una sola vez, por tanto

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i = 2 (2 N' + n) + 2 n = 4 N' + 4 n.$$

De aquí que el valor medio del número de lados de las regiones en que una figura convexa K queda dividida por n rectas arbitrarias que la cortan es

$$\bar{\lambda} = \frac{4 \bar{N}' + 4 n}{\bar{N}} = \frac{4 \bar{N}' + 4 n}{\bar{N}' + n + 1} < 4.$$

\bar{N}' está dado por (8).

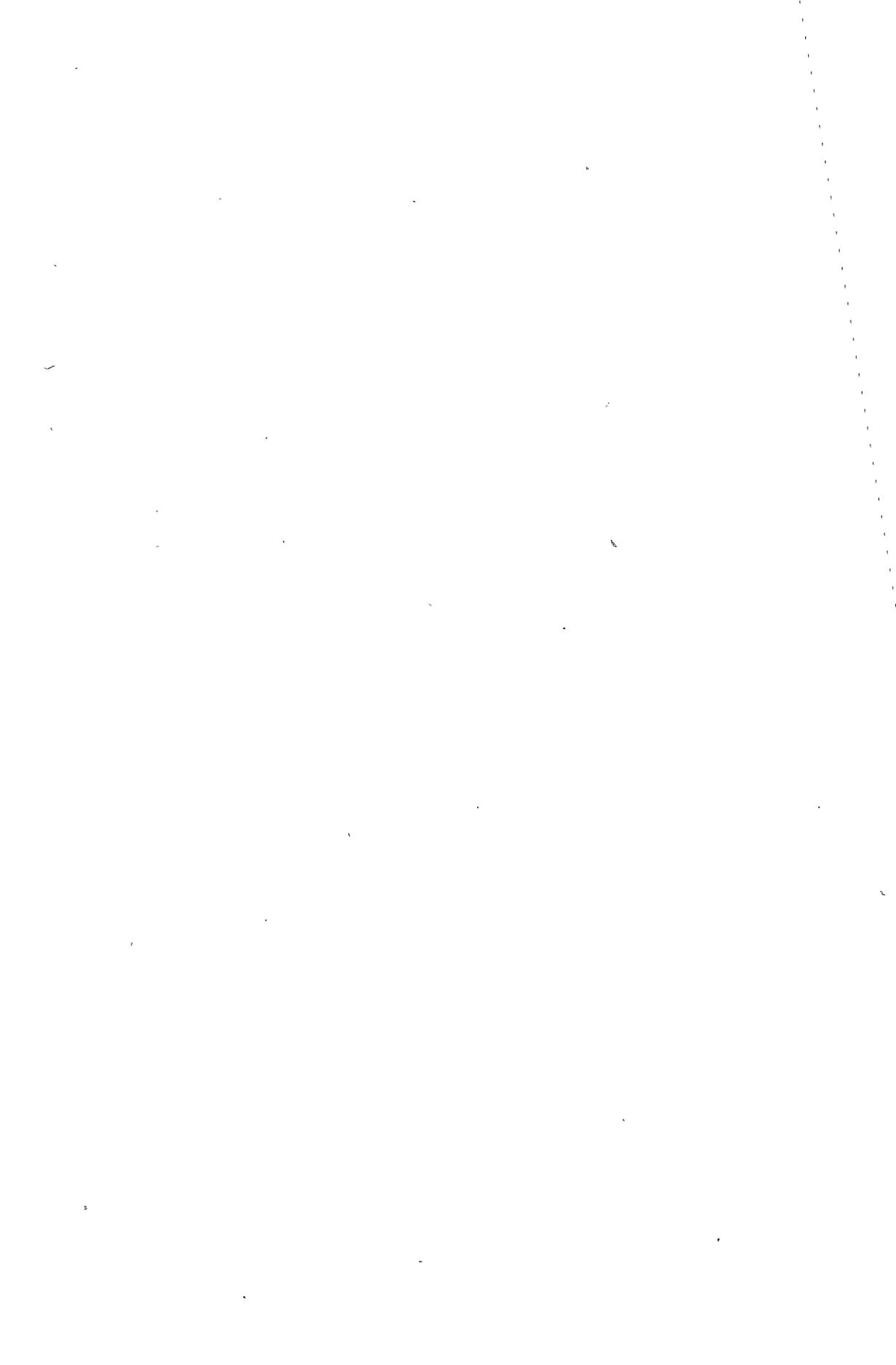
AUREL WINTNER

On the iteration of distribution functions
in the calculus of probability

Sobre la iteración de funciones de
distribución en el cálculo de probabilidades

UNION MATEMATICA ARGENTINA
Publicación N.º 18

BUENOS AIRES
1941



AUREL WINTNER

On the iteration of distribution functions
in the calculus of probability

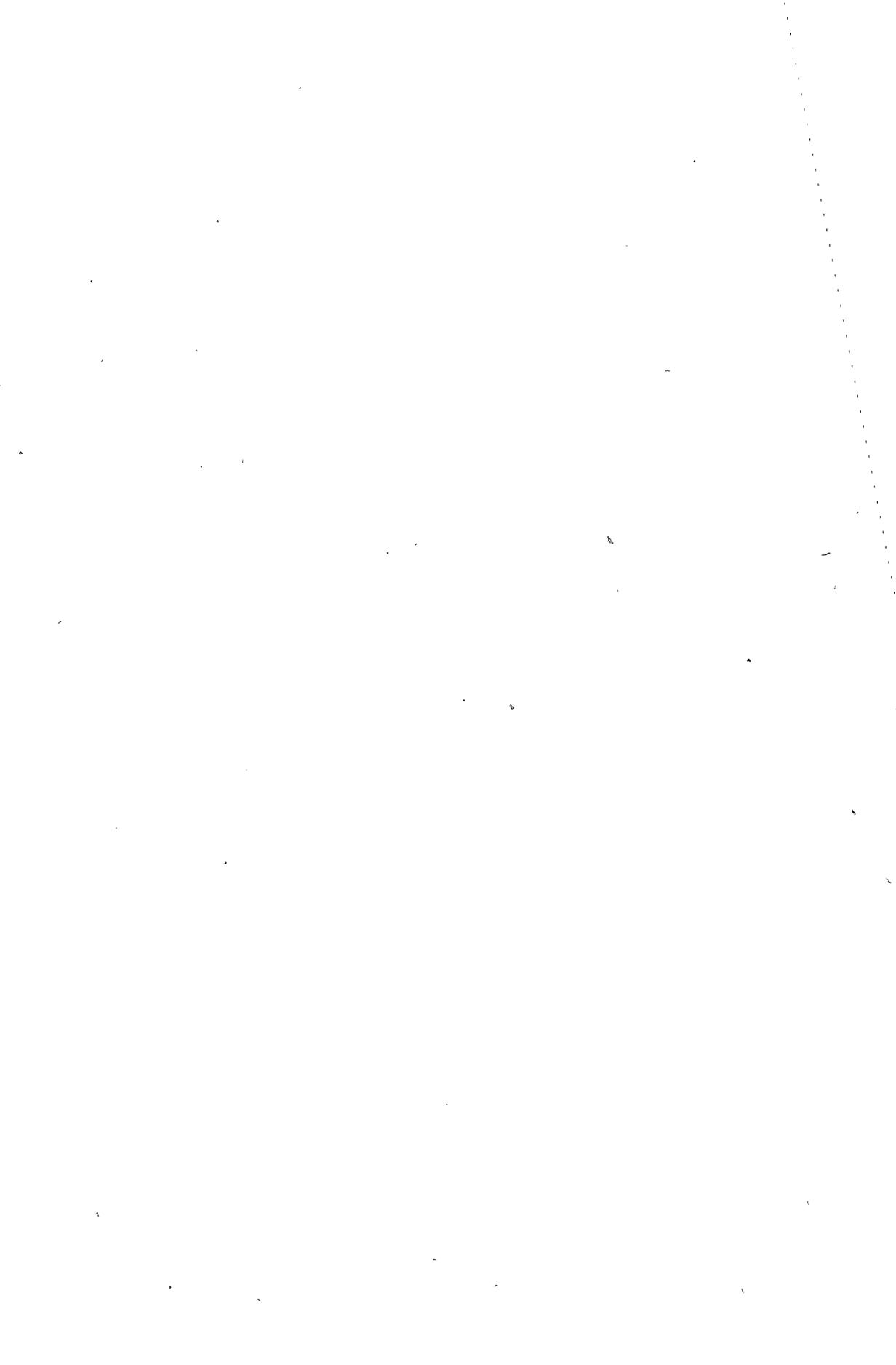
Sobre la iteración de funciones de
distribución en el cálculo de probabilidades

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Publicación N.º 18

BUENOS AIRES

1941



ON THE ITERATION OF DISTRIBUTION FUNCTIONS IN THE CALCULUS OF PROBABILITY

by AUREL WINTNER
(Baltimore, Maryland, U. S. A.)

Starting with a distribution function $\Phi(x)$, $-\infty < x < +\infty$, define a sequence of distribution functions $\Phi_1(x) = \Phi(x)$, $\Phi_2(x), \dots$ by placing $\Phi_n(x) = \phi^n(n^{1/2}x)$, where $\phi^n(x)$ denotes the distribution function which is recursively defined as the convolution of $\phi^{n-1}(x)$ and $\phi^1(x) = \Phi(x)$. It is understood that by a distribution function $\phi(x)$ is meant a monotone function satisfying the boundary conditions $\phi(-\infty) = 0$, $\phi(+\infty) = 1$, and that the convolution of two distributions functions $\Phi_I(x)$, $\Phi_{II}(x)$ is the distribution function whose Fourier-Stieltjes transform L is the product of $L(u; \Phi_I)$ and $L(u; \Phi_{II})$, where

$$(1) \quad L(u; \Phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iux) d\Phi(x); \quad -\infty < u < +\infty.$$

Thus, the sequence $\{\Phi_n(x)\}$ belonging to a given $\Phi(x)$ may also be defined by

$$(2) \quad L(u; \Phi_n) = (L(n^{-1/2}u; \Phi))^n.$$

The distribution functions $\Phi_n(x)$ belonging to a given $\Phi(x)$ form the sequence which occurs in a fundamental limit theorem in calculus of probability. In fact, this theorem⁽¹⁾ implies that if Φ has a finite second moment

$$(3) \quad \mu_2(\Phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 d\Phi(x),$$

then, as $n \rightarrow +\infty$, the distribution function $\Phi_n(x)$ either tends

(1) Cf. P. Lévy, Bull. Soc. Math. de France, vol. 52 (1924), pp. 49-68.

to a symmetric normal distribution function or to no limit distribution function at all; the alternative being decided by whether or not the first moment

$$(4) \quad \mu_1(\Phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, d\Phi(x)$$

vanishes. In the first case, the numerical value of the precision of the limiting distribution (which then is normal and symmetric) is known to be determined by the standard deviation of Φ , i. e., by the non-negative square root of the number

$$\delta(\Phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_1(\Phi))^2 \, d\Phi(x).$$

It is understood that $\delta(\Phi) = 0$ only when $\Phi(x) = 1/2 + 1/2 \operatorname{sgn}(x - c)$ for some $c = \text{const.}$, in which case (4) vanishes if and only if $c = 0$. Correspondingly, the Dirac distribution function $1/2 + 1/2 \operatorname{sgn} x$ must be considered as representing a (symmetric) normal distribution of infinitely high precision.

This enumeration of all possibilities as to the behavior of the sequence $\{\Phi_n(x)\}$ for $n \rightarrow +\infty$ assumes that the probability distribution represented by the initial distribution function $\Phi(x)$ is dispersed only in such a way that the second moment (3) is finite. The literature of the subject does not seem to contain a corresponding general treatment of the remaining case⁽²⁾, where $\mu_2(\Phi) = +\infty$. The object of the present note is to deal with this singular case. The result may roughly be described by saying that, if $\mu_2(\Phi) = +\infty$, the behavior of the distribution function $\Phi_n(x)$ for large n is such as to correspond to a (normal) distribution of infinitely low precision.

In order to formulate the result in a precise form, let a sequence of distribution functions $\beta^{(1)}(x), \dots, \beta^{(n)}(x), \dots$ be called *flat* if the probability distribution represented by $\beta^{(n)}(x)$ is swept into infinity as $n \rightarrow +\infty$, i. e., if there exists for every $\varepsilon > 0$ and every $R > 0$ an $N = N(\varepsilon, R)$ in such a way that

⁽²⁾ M. Kac and A. Khintchine have considered this case under the assumption that the first moment (4) exists as an absolutely convergent integral; cf. Comptes Rendus, vol. 202 (1936), pp. 1963-1965.

the total variation of the monotone function $\beta^{(n)}(x)$ on the interval $-R < x < R$ is less than ε for every $n > N$. In order that such be the case, it is sufficient, though not necessary, that

$$(5) \quad L(u; \beta^{(n)}) \rightarrow 0 \text{ for every } u \neq 0, \text{ as } n \rightarrow +\infty.$$

That (5) is not a necessary condition, is illustrated by the flat sequence which is defined by $\beta^{(n)}(x) = 1/2 + 1/2 \operatorname{sgn}(x-n)$, since for this sequence $|L(u; \beta^{(n)})| \equiv 1$, by (1). On the other hand, a known proof of the continuity theorem of Fourier-Stieltjes transforms⁽³⁾, when adapted in an obvious manner to the case at hand, makes it evident that (5) is a sufficient condition for the flatness of $\{\beta^{(n)}(x)\}$.

The theorem to be proved states that $\{\Phi_n(x)\}$ is a flat sequence whenever $\mu^2(\Phi) = +\infty$. Consequently, if $\mu^2(\Phi) = +\infty$, then, as $n \rightarrow +\infty$, the distribution function $\Phi_n(x)$ either does not tend to a limit function, or, if it does, $\lim \Phi_n(x)$ is a constant, instead of being a distribution function.

According to (5) and (2), it will be sufficient to show that if $\mu^2(\Phi) = +\infty$, then

$$(6) \quad (L(n^{-1/2} u; \Phi))^n \rightarrow 0 \text{ for every } u \neq 0, \text{ as } n \rightarrow +\infty.$$

For a given distribution function $\Phi(x)$, for which $\mu_2(\Phi) = +\infty$ may but need not hold, let $\bar{\Phi}(x)$ denote the distribution function $1 - \Phi(-x)$. Thus, (1) shows that $L(u; \Phi)$ and $L(u; \bar{\Phi})$ are complex conjugate for every u . Accordingly, if $\Phi'(x)$ denotes the convolution of $\Phi(x)$ and $\bar{\Phi}(x)$, then $L(u; \Phi') = |L(u; \Phi)|^2$. Hence, the assertion (6) is equivalent to the relation which one obtains by writing Φ' for Φ in (6). On the other hand, (3) shows that $\mu_2(\Phi) = \mu_2(\bar{\Phi})$. It follows, therefore, from standard relations for the momenta of convolutions⁽⁴⁾, that also the assumption $\mu_2(\Phi) = +\infty$ of (6) remains unchanged if one writes Φ' for Φ . But $L(u; \Phi') = |L(u; \Phi)|^2$ is real; so that, on writing Φ for Φ' , one has

⁽³⁾ Cf. E. K. HAVILAND, Amer. Journ. of Math., vol. 57 (1935), pp. 382-388.

⁽⁴⁾ Cf. B. JESSEN and A. WINTNER, Trans. of Amer. Math. Soc., vol. 38 (1935), pp. 54-55.

$$(7) \quad L(u; \Phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(ux) d\Phi(x),$$

by (1). Consequently, it is sufficient to prove that the assumption $\mu_2(\Phi) = +\infty$ implies the assertion (6) in the particular case (7).

Since $\Phi(x)$ is a distribution function, (7) implies that

$$L(u; \Phi) - 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos ux - 1) d\Phi(x) = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2(1/2 ux) d\Phi(x).$$

Hence, the assertion (6) may be written in the form

$$(8) \quad (1 - 2c_n/n)^n \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow +\infty),$$

where $c_n = c_n(u)$ denotes, for every fixed $u \neq 0$, the number

$$(9) \quad c_n = n \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2(n^{-1/2} ux) d\Phi(x).$$

But (8) is certainly true if $c_n \rightarrow +\infty$ as $n \rightarrow +\infty$. Hence, it is sufficient to show that if $\mu_2(\Phi) = +\infty$, then the expression (9) tends with n to $+\infty$ for every fixed $u \neq 0$.

Now, if $R > 0$ is arbitrary, then

$$c_n \geq n \int_{-R}^R \sin^2(n^{-1/2} ux) d\Phi(x).$$

Hence,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} c_n \geq u^2 \int_{-R}^R x^2 d\Phi(x); \quad \text{while} \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R x^2 d\Phi(x) = \mu_2(\Phi),$$

by (3). Since $u \neq 0$ and $\mu_2(\Phi) = +\infty$, it follows that $c_n \rightarrow +\infty$ as $n \rightarrow +\infty$; so that the proof is complete.

There arises the question whether in the flat case the n^{th} distribution function must tend to a constant as $n \rightarrow \infty$, or that it is possible that the n^{th} distribution function flattens out in such a way as to tend to no limiting position. The discussion of this question seems to require more detailed considerations⁽⁵⁾ than the summary Fourier analysis applied above. In addition one can ask whether, in case the constant limit exists, the constant can or cannot have a value distinct from one of the three values 0, $\frac{1}{2}$, 1, which are trivially possible.

The Johns Hopkins University.

⁽⁵⁾ E. R. VAN KAMPEN AND AUREL WINTNER, American Journal of Mathematics, vol. 50 (1937), pp. 635-654.



SOBRE LA ITERACION DE FUNCIONES DE DISTRIBUCION EN EL CALCULO DE PROBABILIDADES

por AUREL WINTNER

(Baltimore, Maryland, U. S. A.)

Partiendo de una función de distribución $\Phi(x)$, $-\infty < x < +\infty$, se puede definir una sucesión de funciones de distribución $\Phi_1(x) = \Phi(x)$, $\Phi_2(x)$, ... poniendo $\Phi_n(x) = \Phi^n(n^{1/2}x)$, donde $\Phi^n(x)$ indica la función de distribución definida por recurrencia como la convolución (en alemán «faltung») de $\Phi^{n-1}(x)$ y $\Phi^1(x) = \Phi(x)$. Por función de distribución $\Phi(x)$ se entiende una función monótona que satisface las condiciones límites $\Phi(-\infty) = 0$, $\Phi(+\infty) = 1$ y por convolución de dos funciones de distribución $\Phi_I(x)$, $\Phi_{II}(x)$ indicamos la función de distribución cuya transformada L de Fourier-Stieltjes es el producto de $L(u; \Phi_I)$ y $L(u; \Phi_{II})$, siendo

$$(1) \quad L(u; \Phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iux) d\Phi(x) \quad ; \quad -\infty < u < +\infty$$

Por tanto, la sucesión $\{\Phi_n(x)\}$ perteneciente a una $\Phi(x)$ dada puede ser definida por

$$(2) \quad L(u; \Phi_n) = (L(n^{-1/2}u; \Phi))^n$$

Las funciones de distribución $\Phi_n(x)$ pertenecientes a una $\Phi(x)$ dada forman la sucesión que aparece en un teorema límite fundamental del cálculo de probabilidades. En efecto, este teorema ⁽¹⁾ implica que si $\Phi(x)$ tiene un momento segundo finito

$$(3) \quad \mu_2(\Phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 d\Phi(x),$$

entonces, para $n \rightarrow \infty$, las funciones de distribución $\Phi_n(x)$ o bien tienden a una función de distribución normal y simétrica o bien no tienden a ninguna función de distribución; la alternativa se decide según que sea nulo o no el primer momento

$$(4) \quad \mu_1(\Phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x d\Phi(x)$$

⁽¹⁾ P. Lévy, Bull. Soc. Math. de France, vol. 52 (1924), pág. 49-68.

En el primer caso, el valor numérico de la precisión de la distribución límite (la cual es entonces normal y simétrica) se sabe que está determinado por la desviación tipo de Φ , es decir, por la raíz cuadrada no negativa del número

$$\delta(\Phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - \mu_1(\Phi)]^2 d\Phi(x)$$

Evidentemente que $\delta(\Phi) = 0$ solamente cuando $\Phi(x) = 1/2 + 1/2 \operatorname{sgn}(x - c)$ para alguna $c = \text{constante}$. en cuyo caso (4) se anula cuando y solamente cuando $c = 0$. Análogamente, la función de distribución de Dirac $1/2 + 1/2 \operatorname{sgn} x$ puede ser considerada como representación de una distribución normal y simétrica de precisión infinitamente elevada.

Esta enumeración de todas las posibilidades sobre el comportamiento de la sucesión $\{\Phi_n(x)\}$ para $n \rightarrow \infty$ lleva consigo que la distribución de probabilidad representada por la función de distribución inicial $\Phi(x)$ es dispersa solo en el caso en que el segundo momento (3) es finito. La literatura sobre esta cuestión no parece contener un tratamiento general análogo del caso restante (2), cuando $\mu_2(\Phi) = +\infty$.

El objeto de la presente nota es estudiar este caso singular. El resultado puede ser enunciado groseramente diciendo que, si $\mu_2(\Phi) = +\infty$, el comportamiento de la función de distribución $\Phi_n(x)$ para grandes n es el que corresponde a una distribución normal de precisión infinitamente baja.

Para formular este resultado en una forma precisa, llamemos *lisa* a una sucesión de funciones de distribución $\beta^{(1)}(x), \beta^{(2)}(x), \dots, \beta^{(n)}(x), \dots$, tal que la distribución de probabilidad representada por $\beta^{(n)}(x)$ es barrida al infinito para $n \rightarrow \infty$, es decir, si existe para cada $\varepsilon > 0$ y para cada $R > 0$ un $N = N(\varepsilon, R)$ tal que la variación total de la función monótona $\beta^{(n)}(x)$ en el intervalo $-R < x < R$ sea menor que ε para cada $n > N$. Para que esto suceda es suficiente, aunque no necesario que

$$(5) \quad L(u; \beta^{(n)}) \rightarrow 0 \text{ para cada } u \neq 0, \text{ cuando } n \rightarrow +\infty.$$

Que (5) no es condición necesaria se comprueba considerando la sucesión lisa definida por $\beta^{(n)}(x) = 1/2 + 1/2 \operatorname{sgn}(x - n)$, puesto que según (1) para esta función es $|L(u; \beta^{(n)})| \equiv 1$. Por otra parte, una conocida demostración del teorema de continuidad de la transformada de Stieltjes-Fourier (3), adaptada a este caso particular da

(2) M. KAC y A. KHINTCHINE han considerado este caso bajo la hipótesis de que el primer momento (4) existe y es una integral absolutamente convergente. Comptes Rendus, vol. 202 (1936) pág. 1963-1965.

(3) E. K. HAVILAND, Amer. Journ. of Math., vol. 57 (1935), pág. 382-388.

de manera inmediata que (5) es una condición suficiente para que $\{\beta^{(n)}(x)\}$ sea lisa.

El teorema que queremos demostrar prueba que $\{\phi_n(x)\}$ es una sucesión lisa siempre que $\mu_2(\Phi) = +\infty$. En consecuencia si $\mu_2(\Phi) = +\infty$, para $n \rightarrow \infty$ la función de distribución $\phi_n(x)$ o bien no debe tender a ninguna función límite o bien el $\lim \phi_n(x)$ es una constante en lugar de ser una función de distribución.

Teniendo en cuenta (5) y (7) será suficiente probar que si $\mu_2 = +\infty$, entonces

$$(6) \quad (L(n^{-1/2} u; \phi))^n \rightarrow 0 \text{ para todo } u \neq 0, \text{ cuando } n \rightarrow +\infty.$$

Para una función de distribución dada $\Phi(x)$ para la cual puede o no verificarse que $\mu_2(\Phi) = \infty$, representaremos por $\bar{\Phi}(x)$ la función de distribución $1 - \Phi(x)$. Así (1) prueba que $L(u; \Phi)$ y $L(u; \bar{\Phi})$ son complejos conjugados para cada u . Según esto, si $\bar{\Phi}(x)$ indica la convolución de $\Phi(x)$ y $\bar{\Phi}(x)$, entonces $L(u; \bar{\Phi}') = |L(u; \Phi)|^2$. Por tanto la condición (6) es equivalente a la relación que se obtiene escribiendo $\bar{\Phi}'$ en lugar de Φ en (6). Por otra parte (3) prueba que $\mu_2(\Phi) = \mu_2(\bar{\Phi})$. En consecuencia, por relaciones conocidas entre los momentos de las convoluciones⁽⁴⁾ se ve que también la hipótesis $\mu_2(\Phi) = +\infty$ de (6) subsiste si se escribe $\bar{\Phi}'$ en lugar de Φ . Pero $L(u; \bar{\Phi}') = |L(u; \Phi)|^2$ es real, de manera que escribiendo $\bar{\Phi}$ en lugar de $\bar{\Phi}'$, se tiene, por (1):

$$(7) \quad L(u; \bar{\Phi}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(ux) d\bar{\Phi}(x)$$

En consecuencia es suficiente demostrar que la hipótesis $\mu_2(\Phi) = +\infty$ implica la afirmación (6) en el caso particular (7).

Puesto que $\bar{\Phi}(x)$ es una función de distribución, (7) implica que

$$L(u; \bar{\Phi}) - 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos ux - 1) d\bar{\Phi}(x) = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sen}^2(1/2 ux) d\bar{\Phi}(x).$$

De aquí, que la igualdad (6) puede ser escrita en la forma

$$(8) \quad (1 - 2 \frac{c_n}{n})^n \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow +\infty)$$

donde $c_n = c_n(u)$ indica para cada valor fijo de $u \neq 0$, el número

⁽⁴⁾ B. JESSEN y A. WINTNER, Trans. of Amer. Math. Soc. vol. 38 (1935), págs. 54-55.

$$(9) \quad c_n = n \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sen}^2 (n^{-1/2} u x) d\phi(x).$$

Pero (8) es seguramente cierto si $c_n \rightarrow \infty$ para $n \rightarrow +\infty$. De aquí que sea suficiente probar que si $\mu_2(\phi) = +\infty$, entonces la expresión (9) tiende a infinito con n para cada valor fijo de $u \neq 0$.

Ahora bien, si $R > 0$ es arbitrario, entonces

$$c_n \geq n \int_{-R}^{+R} \text{sen}^2 (n^{-1/2} u x) d\phi(x).$$

De aquí, por (3)

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} c_n \geq u^2 \int_{-R}^{+R} x^2 d\phi(x); \quad \text{pues } \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} x^2 d\phi(x) = \mu_2(\phi).$$

Puesto que $u \neq 0$ y $\mu_2(\phi) = +\infty$ se deduce que $c_n \rightarrow +\infty$ para $n \rightarrow +\infty$, con lo cual la demostración está terminada.

Queda en pie la cuestión de si para sucesión lisa la n^{a} función de distribución debe tender a una constante para $n \rightarrow \infty$, o bien si es posible que la n^{a} función de distribución se haga lisa de tal manera que no tienda a ninguna posición límite. El estudio de esta cuestión parece requerir consideraciones más precisas⁽⁵⁾ que el simple análisis de Fourier aplicado anteriormente.

Por último se puede preguntar si en el caso que exista la constante límite, ésta puede o no tener un valor distinto de los tres valores 0, $1/2$, 1, los cuales son evidentemente posibles.

The Johns Hopkins University.

(Original recibido en Enero de 1940).

⁽⁵⁾ E. R. VAN KAMPEN y AUREL WINTNER, American Journal of Mathematics, vol. 59 (1937), págs. 635-654.

ESTHER FERRARI

SOBRE LA PARADOJA
DE BERTRAND

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Publicación N.º 19

BUENOS AIRES

1941

ESTHER FERRARI

SOBRE LA PARADOJA
DE BERTRAND

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Publicación N.º 19

BUENOS AIRES

1941

SOBRE LA PARADOJA DE BERTRAND

por ESTHER FERRARI

Muy conocido es el siguiente problema de Bertrand:

«On trace au hasard une corde dans un cercle. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit?».

Teniendo en cuenta que si un triángulo equilátero está inscripto en una circunferencia de radio R , la distancia de sus lados al centro es $R/2$; el problema se puede enunciar así:

Dados dos círculos concéntricos de radios R y $R/2$, si se traza al azar una cuerda en el círculo de radio R ¿cuál es la probabilidad de que la cuerda corte también al otro círculo?

Bertrand dá tres soluciones de este problema, que conducen a tres resultados diferentes, expuestos en casi todos los tratados de probabilidades. La cuestión parecía agotada, pero no hace mucho apareció en la revista de la Academia de Ciencias de Estocolmo una memoria de prestigioso autor ⁽¹⁾, cuyas conclusiones son muy discutibles. La crítica de este trabajo y el claro planteamiento del problema constituyen el objeto de este trabajo de seminario, realizado como alumna del Instituto Matemático de la Universidad de Buenos Aires.

Como Bertrand utiliza ciertos principios de simetría que ocultan el concepto, vamos a puntualizar la esencia de su razonamiento, poniendo de manifiesto el significado de probabilidad que es el de *medida* de un conjunto parcial de elementos, respecto de un conjunto total. La medida es, como se sabe, una función aditiva de conjunto, no siendo necesario en este problema postular la aditividad infinita. Según sea el sistema de coordenadas adoptado será distinta la expresión de la medida, la cual tiene, como se sabe ⁽²⁾, la forma

$$\int_A f(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

donde $f(\xi, \eta)$ es una función positiva arbitraria.

⁽¹⁾ HENRIK PETRINI, Le paradoxe de Bertrand. Arkiv for matematik, astronomi och fysik. Band 25 A. N ° 16. 1936.

⁽²⁾ H. POINCARÉ. Calcul des probabilités, 2ª edición, pág. 120.

Refiriéndose a la indeterminación originada por esta función arbitraria dice Deltheil: «Para una clase extensa de problemas esta indeterminación desaparece imponiendo la condición siguiente: el resultado del cálculo debe ser invariante para un desplazamiento de conjunto de la figura. Este punto de vista liga las probabilidades geométricas a la *teoría de la medida* de los conjuntos.

Consideremos el círculo de radio $R = 1$ y la cuerda AB :

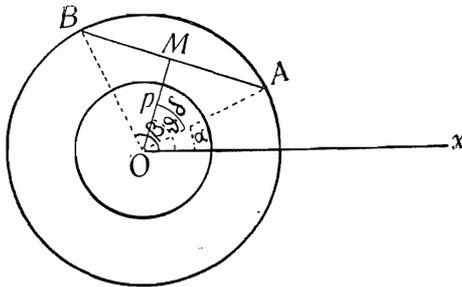


Fig. 1

1.^a Solución: Dice Bertrand ⁽³⁾:

“Si l'une des extrémités de la corde est connue, ce renseignement ne change pas la probabilité; la symétrie du cercle ne permet d'y attacher aucune influence, favorable ou défavorable à l'arrivée de l'événement demandée.

L'une des extrémités de la corde étant connue, la direction doit être réglée par le hasard. Si l'on trace les deux côtés du triangle équilatéral ayant pour sommet le point donné, ils forment entre eux et avec la tangente trois angles de 60°.

La corde pour être plus grande que le côté du triangle équilatéral, doit se trouver dans celui des trois angles qui est compris entre les deux autres. La probabilité pour que le hasard entre trois angles égaux qui peuvent le recevoir le dirige dans celui-là semble par définition égale 1/3”.

Este razonamiento de Bertrand equivale a esto:

Como coordenadas de la cuerda se toman los ángulos polares α y β ; y se toma como probabilidad elemental $d\alpha \cdot d\beta$. El párrafo transcrito, traducido en el lenguaje del cálculo integral, equivale a esto: El punto A puede encontrarse en cualquier punto de la circunferencia. Luego α puede tomar todos los valores comprendidos entre 0 y 2π .

Fijo A, si AB es el lado del triángulo equilátero inscripto $\beta = \alpha \pm 120^\circ$

(3) J. BERTRAND. *Calcul des Probabilités*. Paris, 1889; pág. 4.

La probabilidad P de las cuerdas mayores que el lado del triángulo equilátero inscrito, es por consiguiente:

$$P = \frac{\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{4\pi/3} d\beta}{\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{2\pi} d\beta} = \frac{1}{3}$$

2.^a Solución. — Dice Bertrand:

“Si l'on connaît la direction de la corde, ce renseignement ne change pas la probabilité; la symétrie du cercle ne permet d'y attacher aucune influence favorable ou défavorable à l'arrivée de l'événement demandé.

La direction de la corde étant donnée, elle doit, pour être plus grande que le côté du triangle équilatéral, couper l'un ou l'autre des rayons qui composent le diamètre perpendiculaire, dans la moitié la plus voisine du centre. La probabilité pour qu'il en soit ainsi semble, par définition égale à $\frac{1}{2}$ ”.

Este breve razonamiento equivale a esto:

Como coordenadas de la cuerda tomamos las de la recta, o sea la distancia p ($0 \leq p \leq 1$) y el ángulo Θ ($0 \leq \Theta \leq 2\pi$), y como probabilidad elemental se adopta $dp d\Theta$.

Si OM está comprendido entre 0 y $1/2$, la cuerda es mayor que el lado del triángulo equilátero inscrito, luego

$$P = \frac{\int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^{1/2} dp}{\int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^1 dp} = \frac{1}{2}$$

Hemos procurado interpretar rigurosamente los dos razonamientos de Bertrand, dando expresión analítica a la idea intuitiva encerrada en la frase repetida en ambos: «la symétrie du cercle ne permet d'y attacher aucune influence favorable ou défavorable à l'arrivée de l'événement demandé». Esta frase tiene el siguiente significado analítico: la simetría del círculo reduce el cálculo de la probabilidad de

un conjunto definido por dos variables a la de un conjunto definido por una sola variable. El significado estricto de tal razonamiento para todos los casos análogos es éste: *Si al fijar una variable resulta constante la medida del conjunto simplemente infinito así definido, la probabilidad buscada es la misma de este conjunto.* En efecto, la segunda integración equivale en tal caso a multiplicar numerador y denominador por un mismo factor constante y esto no modifica el cociente. En las dos soluciones de Bertrand es aplicable este criterio, pues la primera integral resulta constante en ambos casos y la segunda integración alrededor de la circunferencia equivale, por tanto, a multiplicar numerador y denominador por el factor 2π .

3.^a Solución. — El razonamiento de Bertrand es éste:

“Choisir une corde au hasard, c'est en choisir au hasard le point milieu. Pour que la corde soit plus grande que le côté du triangle équilatéral, il faut et il suffit que le point milieu soit à une distance du centre plus petite que la moitié du rayon, c'est à dire à l'intérieur d'un cercle quatre fois plus petit en surface. Le nombre des points situés dans l'intérieur d'une surface quatre fois moindre est quatre fois moindre. La probabilité pour que la corde dont le milieu est choisi au hasard soit plus grande que le côté du triangle équilatéral semble par définition égale à $\frac{1}{4}$ ”.

Traducido en coordenadas equivale a esto: adoptamos como coordenadas, las de su punto medio: radio p y ángulo Θ . Con estas coordenadas adoptamos como medida de un conjunto de cuerdas cuyos puntos medios forman un recinto al área de éste. Por consiguiente la probabilidad elemental es el elemento de área: $p \, dp \, d\Theta$ y la probabilidad pedida es ésta:

$$P = \frac{\int_0^{1/2} p \, dp \int_0^{2\pi} d\Theta}{\int_0^1 p \, dp \int_0^{2\pi} d\Theta} = \frac{1}{4}$$

Deltheil, en su libro sobre probabilidades geométricas, dice: «Si se pregunta cuál de las tres soluciones de Bertrand es la buena, la respuesta es que las tres son lógicas, pero que en realidad se refieren a tres problemas diferentes, o más exactamente a tres mecanismos diferentes de intervención del azar».

En el primer caso, el azar interviene en la dirección de la cuerda, en el segundo caso en la distancia de la cuerda al centro de la circunferencia y en el tercero en la posición del punto medio.

Justo es reconocer que el propio Bertrand se coloca en un punto de vista análogo cuando dice:

«Entre ces trois réponses; quelle est la véritable?»

Aucune des trois n'est fausse, aucune n'est exacte, la question est mal posée».

Hemos llegado a las tres soluciones de Bertrand considerando casos particulares de las probabilidades elementales correspondientes. Ya hemos visto que en la expresión general de la probabilidad elemental aparece una función positiva arbitraria de las variables que se adoptan, la cual se determina mediante el grupo de transformaciones que se adopte como básico.

Es así que en el problema de Bertrand, el resultado $P = 1/2$ de la segunda solución se impone (como dice Deltheil) desde el punto de vista de la *medida de las rectas*, y la solución $P = 1/4$ está impuesta por el grupo de los movimientos de los puntos del plano, al sustituir cada cuerda por su punto medio.

En efecto, se ha llegado analíticamente a la 2.^a solución tomando como coordenadas de las cuerdas, las de sus rectas básicas que son invariantes respecto de los movimientos de dichas rectas⁽⁴⁾; y a la tercera solución se ha llegado tomando las coordenadas de los puntos medios.

Ahora bien; siendo la cuerda un elemento geométrico distinto de la recta básica, se ve claramente por qué la segunda solución de Bertrand que Deltheil justifica desde el punto de vista de la recta, no debe considerarse como solución estricta del problema de Bertrand, tal como éste lo enunció. Note el lector que Bertrand habla de conjuntos de *cuerdas* y no de *rectas*. Dicha solución corresponde en realidad al siguiente problema: Dados dos círculos concéntricos de radios R y $R/2$, si se traza al azar una recta, entre todas las que cortan al círculo de radio R ¿cuál es la probabilidad del conjunto de rectas que también cortan al 2.^o círculo?

Es muy cierto que cada cuerda está determinada por su recta base, de igual modo que está determinada por su punto medio y también puede determinarse de infinitos otros modos, pero el con-

(4) R. DELTHEIL, Probabilités géométriques, 1926, pág. 14.

cepto geométrico de medida, o sea de probabilidad, es independiente del concepto aritmético de correspondencia biunívoca.

En efecto, si se adopta el punto medio de cada cuerda como representante de ésta, figuras iguales consideradas como conjuntos de puntos no corresponden a conjuntos iguales de cuerdas, ni a conjuntos iguales de rectas. Así por ejemplo, los conjuntos de rectas que cortan a uno u otro de dos segmentos iguales son congruentes y por tanto tienen probabilidades iguales respecto del grupo de los movi-

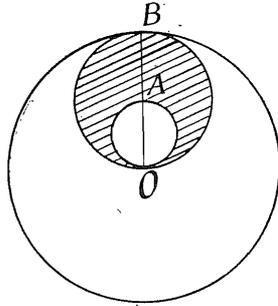


Fig. 2

mientos del plano. En cambio, los puntos medios de las cuerdas que determinan esas rectas forman conjuntos de área distinta. En la figura se han dibujado las superficies cubiertas por tales conjuntos de puntos medios de las cuerdas que cortan a los segmentos iguales OA y AB; y las áreas de esos recintos no son iguales, sino que una es triple de la otra, a pesar de que los correspondientes conjuntos de rectas son iguales.

Esto bastaría si no existiesen otras razones, para afirmar que la única solución aceptada por H. Petrini, que es la tercera de Bertrand, no es legítima.

Es preciso, pues, adoptar coordenadas especiales que no sean de punto ni de recta, sino de la cuerda. Sobre esto y el análisis de la memoria citada, versará nuestra nota próxima.

En la comunicación de H. Petrini a la Academia de Ciencias de Estocolmo, presentada el 22 de Enero de 1936 por T. Carleman y F. Carlson (*), se afirma que de las tres soluciones dadas por Bertrand la tercera (o sea el valor $\frac{1}{4}$) es la única que debe considerarse como exacta. Petrini modifica la definición clásica de probabilidad discreta para aplicarla a los problemas de probabilidad geométrica de este modo:

“*Modification.* — Dans le calcul de la probabilité géométrique on considère les points, les lignes et les surfaces comme des limites de grandeurs géométriques, qui ont une ou plusieurs dimensions de plus. Par exemple, s’il s’agit des points sur une surface, on s’imagine la surface partagée en un grand nombre fini d’éléments égaux, chacun représentant un seul point. Une direction est représentée par un petit angle. De cette manière les cas favorables seront réduits en un nombre fini, et on peut appliquer la définition donnée pour la recherche d’une probabilité approximée. La vraie probabilité est définie comme la limite de cette probabilité approximée, lorsque les éléments considérés deviennent infiniment petits. Cette méthode est le plus souvent acceptée, et nous l’emploierons dans la suite”.

Esta modificación es legítima para conjuntos de puntos situados en una superficie, la cual se divide en elementos

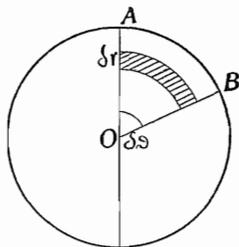


FIG. 1

iguales; pero cuando se trate de rectas, los elementos iguales ya no son trozos de superficie, sino conjuntos de rectas.

(*) Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. Band 25 A. N° 16.

La primera parte de nuestro trabajo apareció en el Núm. 1 de este mismo vol. VII de la U. M. A.

Habiendo aceptado Petrini la solución $\text{prob} = \frac{1}{4}$ trata de hallar las faltas de la primera y de la segunda solución de Bertrand y dice así: *

Première solution. — Maintenant nous chercherons la faute de la première solution. Soit le rayon OA du cercle donné partagé par portions δr , égales entre elles. Nous considérons le faisceau des cordes qui sont tirées perpendiculairement à OA, de manière qu'une corde passe par chaque élément δr . En passant à la limite $\delta r = 0$ on aura le faisceau complet qui est perpendiculaire à OA. Puis nous répéterons la même procédé pour un rayon OB, qui fait le petit angle $\delta\theta$ avec le rayon OA etc. pour tous les petits angles $\delta\theta$ et chaque fois nous trouverons la probabilité cherchée $= \frac{1}{2}$. En passant à la limite nous avons considéré toutes les directions de tous les faisceaux complets et la probabilité reste toujours $= \frac{1}{2}$. C'est le sens dans lequel on aura à comprendre les mots "pour des raisons de symétrie".

Antes de seguir copiando, observemos que el sentido dado por Petrini a la frase clásica «por razones de simetría» no es en nuestra opinión correcto. En realidad, lo que según los autores clásicos de probabilidades expresaba este término (como ya hemos visto en la nota exterior) era esto:

Si es:

$$\text{prob} = \frac{\int_c f(x,y) \cdot dx \cdot dy}{\int_c f(x,y) \cdot dx \cdot dy} = \frac{\int_0^a \int_0^a f(x,y) dy}{\int_0^a \int_0^a f(x,y) dy}$$

$\int f(x,y) dy$ para el conjunto de casos favorables es constante = A,
 » : » » » » posibles » » = B,

la probabilidad es igual a $\frac{A}{B}$, prescindiendo de la segunda integración, ya que $\frac{A \cdot a}{B \cdot a} = \frac{A}{B}$.

Prosigue así el artículo que comentamos:

“Mais où est la faute de ce raisonnement? En passant du premier faisceau, qui est perpendiculaire au rayon OA, au second faisceau nous avons omis tous les faisceaux intermédiaires, qui consistent en cordes, dont le nombre est proportionnel à l'aire du secteur AOB, d'après ce que nous venons de démontrer à propos de la troisième solution. Le nombre des cordes omises est donc infiniment plus grand que celui des cordes retenues. Sous ces circonstances il n'est pas surprenant, qu'en passant à la limite on ne trouvera pas le même résultat que si dès le début on avait considéré les cordes du secteur AOB.

Vemos aquí que cuando Petrini se propone contar las cuerdas, lo hace contando los puntos medios y no las rectas que determinan las cuerdas, como hace Bertrand en este caso. Esto no es correcto, pues ya hemos visto que figuras iguales consideradas como conjuntos de puntos no corresponden a conjuntos iguales de rectas.

Por último dice Petrini:

“La faute est précisément la même que si on avait voulu chercher le rapport des aires des deux cercles concentriques en raisonnant comme ça: “pour des raisons de symétrie il suffit de considérer les éléments de surface, qui se trouvent le long du rayon OA, donc le rapport est $= \frac{1}{2}$ ”.

Ni Bertrand, ni ningún autor clásico, hubiera aplicado tal razonamiento puesto que en este caso la integral respecto de y para cada x es función de x , no constante.

Al tratar de hallar la falta de la segunda solución sigue Petrini utilizando los mismos conceptos; pero como figuras iguales consideradas como conjuntos de puntos no corresponden a conjuntos iguales de cuerdas, según hemos visto repetidas veces, y él sustituye las cuerdas por sus puntos medios, no es extraño que también en este caso Petrini llegue a una conclusión diferente a la que llegó Bertrand. Aun a riesgo de incurrir en excesivas repeticiones, y en vista de la insistencia de Petrini en adoptar el punto medio como representante de la cuerda, como si éste fuera el único modo posible, observemos que éste es solamente uno de los infinitos modos que se pueden elegir.

En efecto, otra forma y más natural, sería determinar la cuerda por su polo. Evidentemente a conjuntos iguales de cuerdas corresponden conjuntos iguales de polos, pero no recíprocamente. Lo mismo exactamente que sucede cuando se adopta el punto medio.

Por ej. si consideramos sobre la prolongación de un radio OA los segmentos iguales AB y BC , los conjuntos de cuerdas que tienen sus polos sobre AB y BC no son congruentes, ni tampoco lo son los conjuntos de rectas correspondientes; es lógico pues que al adoptar como medida del primer conjunto la del segundo resulten probabilidades distintas.

Como el conjunto de polos correspondientes a las cuerdas menores que $\sqrt{3} R$ es la corona de radios R y $2R$ cuya área es $3\pi R^2$ y la medida del conjunto de polos correspondientes a todas las cuerdas de la circunferencia es infinita, resulta aplicando estos resultados al problema de Bertrand, que la probabilidad de los casos desfavorables es igual a cero.

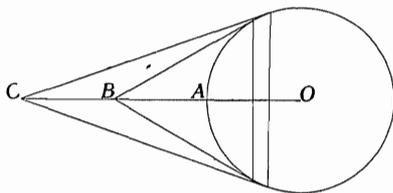


FIG. 2

Por consiguiente la solución del problema de Bertrand sería: $\text{prob} = 1$.

Pasemos ahora a dar la interpretación que creemos justa del problema de Bertrand. Puesto que el conjunto de elementos considerados está formado por cuerdas de la circunferencia y no por rectas del plano, y teniendo en cuenta las conclusiones anteriores, será preciso:

- 1.º — Adoptar coordenadas de cuerdas.
- 2.º — Determinar la densidad correspondiente a cada sistema de coordenadas por la condición de invariación respecto del grupo de movimientos que transforma una circunferencia en sí misma, es decir, del grupo de rotaciones alrededor de su centro.

Como coordenadas de las cuerdas podemos adoptar entre otras muchas, las siguientes:

- a) Los argumentos α y β de sus extremos.
- b) El argumento del origen y el arco positivo subtendido por la cuerda.
- c) El arco subtendido por la cuerda y la dirección y sentido de esta que vienen determinados por el argumento del vector de origen O perpendicular a la cuerda y dirigida hacia ella.

- d) El origen y la longitud de la cuerda.
- e) La inclinación de la cuerda.
- f) La longitud de la cuerda y su dirección (dada como en c).

Sistema de coordenadas (a). — La probabilidad elemental será del tipo $\iint f(\alpha, \beta) \cdot d\alpha \cdot d\beta$. Si se efectúa una rotación los nuevos argumentos son: $\alpha' = \alpha + h$, $\beta' = \beta + h$. Será $\iint f(\alpha, \beta) \cdot d\alpha \cdot d\beta = \iint f(\alpha', \beta') \cdot d\alpha' \cdot d\beta'$ si para todo par de valores se cumple la condición:

$$f(\alpha', \beta') = f(\alpha, \beta) \frac{\delta(\alpha, \beta)}{\delta(\alpha', \beta')}$$

Como es: $\frac{\delta(\alpha, \beta)}{\delta(\alpha', \beta')} = 1$ debe ser: $f(\alpha, \beta) = f(\alpha', \beta')$

Resulta pues que para todos los pares de valores $\alpha' = \alpha + h$, $\beta' = \beta + h$, es decir de diferencia $\beta' - \alpha' = \beta - \alpha$ toma f igual valor, luego esta sólo depende de la diferencia $\beta - \alpha$, es decir es función de $\beta - \alpha$.

$$f(\alpha, \beta) = \varphi(\beta - \alpha)$$

El caso más sencillo se tendrá cuando sea $\varphi = \text{Cte}$.

Ya se calculó ese caso y dió como resultado $\text{prob.} = \frac{1}{3}$, que es la primera solución de Bertrand.

Sistemas de coordenadas b, c, d, e, f. — Si consideramos por ej. el sistema d) resulta:

$$\iint F(\alpha, l) \cdot d\alpha \cdot dl = \iint F(\alpha, 2 \sin \frac{\beta - \alpha}{2}) \cdot d\alpha \cdot \cos \frac{\beta - \alpha}{2} \cdot d(\beta - \alpha)$$

En general, cualquiera que sea la segunda coordenada x , función del arco (casos b, c, d, e, f) la probabilidad elemental será del tipo:

$$\iint f(\alpha_1, x) \cdot d\alpha_1 \cdot dx; \quad \beta - \alpha = x$$

Si se efectúa una rotación resulta: $\alpha'_1 = \alpha_1 + h$, $x' = x$

Si para todo par de valores se cumple la condición:

$$f(\alpha_1, x) = f(\alpha', x') \frac{\delta(\alpha_1, x)}{\delta(\alpha', x')}$$

Como es: $\frac{\delta(\alpha_1, x)}{\delta(\alpha', x')} = 1$ debe ser: $f(\alpha_1, x) = f(\alpha', x')$

Luego f debe ser sólo función de x , puesto que no varía al aumentar α_1 . Por tanto: $f(\alpha_1, x) = \varphi(x)$.

Como para el conjunto de casos favorables y posibles los límites de integración son iguales, la probabilidad puede expresarse por un cociente de integrales simples, ya que fijado el origen la integración respecto de la otra coordenada es independiente de aquél, siendo por tanto aplicable el principio de simetría que hemos explicado anteriormente:

$$\text{prob.} = \frac{\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \varphi(x) \cdot dx}{\int_0^{2\pi} \varphi(x) \cdot dx}$$

y llamando: $\Phi(x) = \int \varphi(x) dx$ resulta:

$$\text{prob.} = \frac{\Phi\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \Phi(0)}{\Phi(2\pi) - \Phi(0)}$$

Siendo Φ una función arbitraria, el problema de Bertrand no tiene solución única.

Cualesquiera que sean las coordenadas adoptadas, la solución más sencilla se obtiene adoptando densidad constante, pero entonces los resultados numéricos dependerán de las coordenadas adoptadas. Así, por ej.: Si se adoptan los sistemas de coordenadas a), b), c), resulta $\text{prob} = \frac{1}{3}$; en cambio si adoptamos los sistemas d), e), f) resulta $\text{prob} = 0,134$.

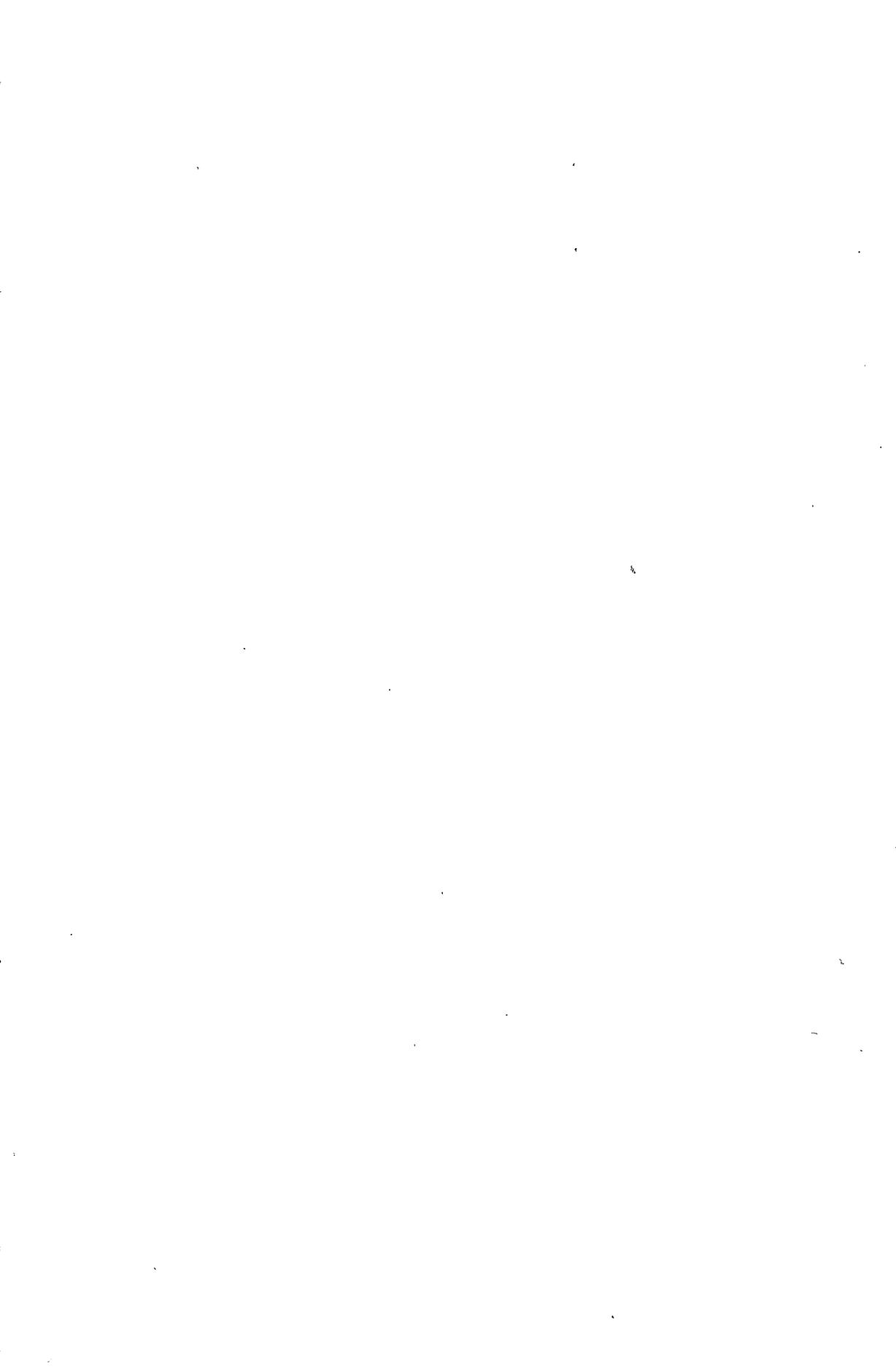
Deltheil en su libro sobre probabilidades geométricas (*) trata el problema de la determinación de la probabilidad elemental utilizando la teoría de los grupos continuos de transfor-

(*) *Loc. cit.*, pág. 16. Véase también el curso de REY PASTOR sobre *Probabilidades abstractas*.

maciones. El problema de Bertrand corresponde a la categoría de los denominados por Deltheil «cas d'insuffisance», es decir, los casos en que las dos condiciones de la medida (igualdad para conjuntos congruentes y aditividad) dejan subsistir una función arbitraria de una variable, por ser el grupo de movimientos simplemente infinito, mientras que el conjunto de entes considerados es doblemente infinito. Tal acontece como vemos en el problema de Bertrand.

Cabe aún el caso en que las dos condiciones de la medida no solamente no determinan ésta, sino que ni siquiera restringen la indeterminación, como acontece en el caso anterior. Tal sucedería si el problema de las cuerdas lo trasladamos a las cónicas, considerando las cuerdas de una cónica que son secantes de otra cónica interior. La función arbitraria tiene en este caso dos variables independientes.

Instituto de Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires



JOSÉ BABINI

Sobre algunas propiedades de las derivadas
y ciertas primitivas de los
polinomios de Legendre

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Publicación N.º 20

SANTA FE

1941



SOBRE ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS DERIVADAS Y CIERTAS PRIMITIVAS DE LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE

por JOSÉ BABINI

1. Relación de simetría. —

Si con D_n^s indicamos las derivadas de orden s de $\frac{(x^2-1)^n}{2^n n!}$ (n natural), tendremos, incrementando por Taylor y directamente:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{2n} \frac{h^s}{s!} D_n^s &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (x^2 - 1)^{n-r} h^r (2x + h)^r \\ &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{r=0}^n \sum_{m=0}^r \binom{n}{r} \binom{r}{m} (x^2 - 1)^{n-r} h^{r+m} (2x)^{r-m} \end{aligned}$$

de donde

$$s \leq n; \quad \frac{D_n^s}{s!} = \frac{1}{2^n n!} \sum_{r \geq \frac{s}{2}}^s \binom{n}{r} \binom{r}{s-r} (x^2 - 1)^{n-r} (2x)^{2r-s}$$

$$s \geq n; \quad \frac{D_n^s}{s!} = \frac{1}{2^n n!} \sum_{r \geq \frac{s}{2}}^n \binom{n}{r} \binom{r}{s-r} (x^2 - 1)^{n-r} (2x)^{2r-s}$$

Si, en esta última fórmula, se cambia s por $2n - s$ y r por $n - s + r$

$$\begin{aligned} s \leq n; \quad \frac{D_n^{2n-s}}{(2n-s)!} &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{r \geq \frac{s}{2}}^s \binom{n}{s-r} \binom{n-s+r}{n-r} (x^2 - 1)^{s-r} (2x)^{2r-s} \\ &= \frac{(x^2-1)^{s-n}}{2^n n!} \sum_{r \geq \frac{s}{2}}^s \binom{n}{r} \binom{r}{s-r} (x^2 - 1)^{n-r} (2x)^{2r-s} = (x^2 - 1)^{s-n} \frac{D_n^s}{s!} \end{aligned}$$

Si ahora recordamos que D_n^n no es más que el polinomio de Legendre P_n e indicamos con P_n^r ; ($-n \leq r \leq n$) las derivadas ($r > 0$) y ciertas primitivas ($r < 0$) de ese polinomio, llegaremos, haciendo $s = n + r$ a la siguiente *relación de simetría*

$$\frac{P_n^{-r}}{n-r} = (x^2 - 1)^r \frac{P_n^r}{n+r} \quad [I]$$

válida para $-n \leq r \leq n$.

Esta relación nos dice que las primitivas que entran en juego son los polinomios que admiten los valores -1 y 1 ; como ceros de orden r de multiplicidad (1).

2. Generalización de una expresión de Dirichlet. —

Es conocida una fórmula de Dirichlet (2) que expresa P_n en función de $u = \cos \frac{\Phi}{2}$ y $v = \sin \frac{\Phi}{2}$; siendo $x = \cos \Phi = 2u^2 - 1 = 1 - 2v^2$.

Para extenderla a P_n^r , que es un polinomio de grado $n - r$ en x escribamos

$$P_n^r = \sum_{m=0}^{n-r} \varphi(n-r, m) \cdot u^{2(n-r-m)} v^{2m}$$

donde $\varphi(n-r, m)$ es un símbolo numérico con dos índices. Diferenciando y considerando que $dx = 4u du = -4v dv$,

$$P_n^{r+1} dx = \sum_{m=0}^{n-r} \varphi(n-r, m) u^{2(n-r-m)} v^{2m} \left[\frac{n-r-m}{2u^2} - \frac{m}{2v^2} \right] dx$$

de donde

$$P_n^{r+1} = \sum_{m=0}^{n-r-1} \varphi(n-r-1, m) u^{2(n-r-1-m)} v^{2m} =$$

(1) El profesor Toscano, de Messina, ha tenido la amabilidad de comunicarme que la relación de simetría puede obtenerse también partiendo de los polinomios de GEGENBAUER.

(2) Véase, por ejemplo: W. LÁSKA, Sammlung von Formeln... Pag. 384.

$$\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-r-1} [(n-r-m) \varphi(n-r, m) - (m+1) \varphi(n-r, m+1)] u^{2(n-r-1-m)} v^{2m};$$

y, por lo tanto, el símbolo $\varphi(n-r, m)$ satisface la siguiente relación recurrente:

$$2 \varphi(n-r-1, m) = (n-r-m) \varphi(n-r, m) - (m+1) \varphi(n-r, m+1);$$

que, mediante el cambio de símbolo

$$\varphi(n-r, m) = \frac{(-1)^{n-r} \cdot 2^{n-r}}{|n-r-m| \cdot |m|} \psi(n-r, m)$$

se convierte en

$$\psi(n-r-1, m) = \psi(n-r, m+1) - \psi(n-r, m) = \Delta \psi(n-r, m); \quad \Delta m = 1;$$

y en general

$$\psi(n-r, m) = \Delta^p \psi(n-r+p, m) = \sum_{s=0}^p \binom{p}{s} (-1)^s \psi(n-r+p, m+p-s).$$

Como

$$P_{n-n} = \frac{(x^2-1)^n}{2^n n!} = \frac{2^n (-1)^n}{n!} (uv)^{2n}$$

serán

$$m = n; \quad \varphi(2n, m) = \frac{2^n (-1)^n}{n!}, \quad \psi(2n, m) = \frac{(-1)^n n!}{2^n},$$

$$m \neq n; \quad \varphi(2n, m) = \psi(2n, m) = 0$$

y por lo tanto, si en la sumatoria anterior se hace $p = r + n$ el único término no nulo será cuando $s = r + m$, de donde

$$\begin{aligned} \psi(n-r, m) &= \binom{n+r}{m+r} (-1)^{m+r} \frac{(-1)^n n!}{2^n} = \\ &= \frac{|n-r-m| m}{2^{n-r}} (-1)^{n-r} \varphi(n-r, m), \\ \varphi(n-r, m) &= \frac{|n+r}{n! 2^r} (-1)^m \binom{n}{m} \binom{n}{m+r}; \end{aligned}$$

y finalmente

$$P_n^r = \frac{|n+r}{2^r n!} \sum_{m+r=n-r} \binom{n}{m} \binom{n}{m'} (-1)^m u^{2m} v^{2m'} \quad [2]$$

que es la generalización de la fórmula de Dirichlet, a la cual se reduce para $r=0$. Separando las derivadas de las primitivas, tenemos para $r \geq 0$,

$$P_n^r = \frac{|n+r}{2^r n!} \sum_{m=0}^{n-r} \binom{n}{m} \binom{n}{m+r} (-1)^m u^{2(n-r-m)} v^{2m}$$

$$P_n^{-r} = \frac{|n-r \cdot 2^r}{n!} \sum_{m=r}^n \binom{n}{m} \binom{n}{m-r} (-1)^m u^{2(n+r-m)} v^{2m};$$

y cambiando en esta última m por $m+r$

$$\begin{aligned} \frac{P_n^{-r}}{|n-r|} &= \frac{2^r}{n!} \sum_{m=0}^{n-r} \binom{n}{m+r} \binom{n}{m} (-1)^{m+r} u^{2(n-m)} v^{2(m+r)} = \\ &= (-1)^r (2uv)^{2r} \frac{P_n^r}{|n+r|} \end{aligned}$$

y como $(-1)^r (2uv)^{2r} = (x^2 - 1)^r$ resulta nuevamente la relación de simetría.

3. Relaciones recurrentes. —

Entre las numerosas relaciones recurrentes que pueden establecerse entre las P_n^r veremos únicamente las generalizaciones de las más conocidas relaciones recurrentes entre las P_n .

De

$$\begin{aligned}
 P_n^r &= D_n^{n+r} = D_{n+r} \frac{(x^2-1)^{n-1}}{2^{n-1} |n-1|} \cdot \frac{x^2-1}{2n} = \frac{x^2-1}{2n} D_{n-1}^{n+r} + \\
 &+ \frac{x(n+r)}{n} D_{n-1}^{n+r-1} + \frac{(n+r)(n+r-1)}{2n} D_{n-1}^{n+r-2} \\
 2n P_n^r &= (x^2-1) P_{n-1}^{r+1} + 2x(n+r) P_{n-1}^r + \\
 &+ (n+r)(n+r-1) P_{n-1}^{r-1}. \quad [3]
 \end{aligned}$$

De

$$\begin{aligned}
 D_n' &= D \frac{(x^2-1)^n}{2^n n!} = x \frac{(x^2-1)^{n-1}}{2^{n-1} |n-1|} \\
 D_n^{n+r} &= D_{n+r-1} x \frac{(x^2-1)^{n-1}}{2^{n-1} |n-1|} = x D_{n-1}^{n+r-1} + (n+r-1) D_{n-1}^{n+r-2} \\
 P_n^r &= x P_{n-1}^r + (n+r-1) P_{n-1}^{r-1}. \quad [4]
 \end{aligned}$$

De

$$\begin{aligned}
 D_n^2 &= D x \frac{(x^2-1)^{n-1}}{2^{n-1} |n-1|} = D_{n-1}^0 + x^2 \frac{(x^2-1)^{n-2}}{2^{n-2} |n-1|} \\
 &= (2n-1) D_{n-1}^0 + D_{n-2}^0 \\
 D_n^{n+r} &= (2n-1) D_{n-1}^{n+r-2} + D_{n-2}^{n+r-2} \\
 P_n^r &= (2n-1) P_{n-1}^{r-1} + P_{n-2}^r \quad [5]
 \end{aligned}$$

4. Expresión de P_n^r por determinantes. —

Si eliminamos P_{n-1}^{r-1} entre [4] y [5]

$$(n+r-1) P_{n-2}^r - x(2n-1) P_{n-1}^r + (n-r) P_n^r = 0$$

que, para $r \geq 0$, haciendo $n=r+1, r+2, \dots, n$.

se obtiene

$$(-1)^{n-r-1} \underline{n-r} P_n^r = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x(2r+1) P_r^r \\ x(2r+3) & 2 & 0 & \dots & 0 & (2r+1) P_r^r \\ 2r+2 & x(2r+5) & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2r+3 & x(2r+7) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x(2n-1) & 0 \end{vmatrix}$$

y como $P_r^r = (2r-1)!!$

$$P_n^r = \frac{(2r-1)!!}{|n-r|} \begin{vmatrix} x(2r+1) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2r+1 & x(2r+3) & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x(2n-1) \end{vmatrix} ; \quad [6]$$

y utilizando la relación de simetría se puede también expresar mediante un determinante las primitivas P_n^{-r} .

5. Ecuación diferencial. —

Si eliminamos P_n^r entre [3] y [4] y cambiamos r y n por $r+1$ y $n+1$,

$$(1-x^2) P_n^{r+2} - 2x(r+1) P_n^{r+1} + (n-r)(n+r+1) P_n^r = 0.$$

lo que nos dice que la ecuación diferencial

$$(1-x^2) y'' - 2x(r+1) y' + (n-r)(n+r+1) y = 0 \quad [7]$$

tiene como integral particular P_n^r , de donde la integral general será, utilizando la relación de simetría

$$y = A P_n^r \int_B^x \frac{dt}{(1-t^2) P_n^t P_n^{-t}}$$

siendo A y B las constantes de integración.

RICARDO SAN JUAN

UN ALGORITMO DE SUMACION
DE SERIES DIVERGENTES

UNION MATEMATICA ARGENTINA
Publicación N.º 21

BUENOS AIRES
1941



UN ALGORITMO DE SUMACION DE SERIES DIVERGENTES

por RICARDO SAN JUAN

Pólya y Rey Pastor (*) han generalizado el algoritmo de Borel introduciendo un parámetro complejo como coeficiente de la variable de integración en la asociada, con el cual se hace girar el camino de integración y se amplía el campo de convergencia hasta lograr el exterior de la cápsula de los puntos singulares de $f(z) = \sum \frac{a_n}{z^n}$. Si este parámetro α se toma como exponente de dicha variable t , además real y positivo menor que 1, y luego se hace tender a 1, resulta un algoritmo definido así:

$$(B_\alpha) \sum a_n z^n = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \int_0^\infty e^{-t} \varphi(t^\alpha z) dt$$
$$\varphi(t^\alpha z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} [t^\alpha z]^n,$$

que comprende también al de Borel y efectúa la prolongación analítica de la serie $\sum a_n z^n$ en toda su estrella principal de Mittag-Leffler (**).

(*) POLYA. — “Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen”. *Mathematische Zeitschrift*. B. 29. (1929) S. 549.

REY PASTOR. — *La investigación matemática*. Bol. crít. ped. 1919. *Notas de Análisis*. Asociación Española para el Progreso de las Ciencias. Congresos de Cádiz (1927) y de Barcelona (1929). *Rend. Ist. Lombardo* (1931). Pág. 1293. Véase además la clara exposición de DOETSCH: *Sitzungsberichte Akademie München* (1931), pág. 1.

(**) Nótese la diferencia de este algoritmo con el de Mittag-Leffler (“Sur la représentation analytique etc....”, *Acta Mathematica*, B. 29, S. 101-181) en

Este algoritmo no es lineal, pero se transforma en lineal integrando término a término, y resulta el algoritmo de Le Roy de factores $\frac{(n\alpha)!}{n!}$ (*). Esta integración puede interpretarse así:

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \varphi(t^\alpha z) dt = \int_0^{\infty} e^{-t^{\frac{1}{\alpha}}} \varphi(tz) dt^{\frac{1}{\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n\alpha)!}{n!} a_n z^n$$

El algoritmo B_α se deduce del algoritmo lineal de Le Roy L_α de factores $\frac{(n\alpha)!}{n!}$ substituyendo la serie auxiliar de éste por su suma con el método de momentos $(n\alpha)!$ y generatriz $\frac{1}{\alpha} e^{t^{\frac{1}{\alpha}}} t^{\frac{1}{\alpha}-1}$ que también se debe a Le Roy (**).

Aplicando las propiedades de permanencia y prolongación analítica de estos dos algoritmos de Le Roy resulta:

El algoritmo B_α efectúa la prolongación analítica de cada serie $\sum a_n z^n$ en toda su estrella principal de Mittag-Leffler.

Para ver que este algoritmo B_α comprende también al de Borel aunque la serie tenga radio nulo, basta observar que la expresión B resulta de aplicar a la integral de Borel los factores de sumación (***) .

$$\mu(\alpha_1 t) = \frac{1}{\alpha} e^{t-t^{\frac{1}{\alpha}}} t^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

que los términos de la asociada tienen denominadores $(n\alpha)!$ y para alcanzar un punto prefijado de la estrella hay que tomar α suficientemente pequeño.

Un estudio sistemático de los algoritmos de prolongación analítica fué hecho por Buhl en su fascículo "Séries analytiques. Sommabilité". (Mémorial des Sciences Mathématiques, Fasc. VII) donde pueden verse diversos métodos que efectúan la prolongación en toda la estrella de Mittag-Leffler, pero con procesos más complicados que el B_α .

(*) LE ROY. — *Sur les séries divergents*. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse (1900).

(**) Esto puede aplicarse a cualquier algoritmo lineal sumando su serie auxiliar con un método de momentos o con otro algoritmo lineal.

(***) Pueden utilizarse factores de convergencia efectuando previamente una

que efectivamente satisfacen las condiciones de Perron:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \mu(\alpha_1 t) = 1 \quad \text{para cada } t$$

$$\int_0^{\infty} |d \mu(\alpha_1 t)| < k \quad \text{en un semientorno de } 1^-.$$

En efecto, se verifica:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left| d \frac{1}{\alpha} e^{t - \frac{t}{\alpha}} t^{\frac{1}{\alpha} - 1} \right| &= \int_0^{\alpha_1} \left| d \frac{1}{\alpha} e^{t - \frac{t}{\alpha}} t^{\frac{1}{\alpha} - 1} \right| - \int_{\alpha_1}^{\infty} \left| d \frac{1}{\alpha} e^{t - \frac{t}{\alpha}} t^{\frac{1}{\alpha} - 1} \right| = \\ &= 2 \frac{1}{\alpha} e^{\alpha_1 - \alpha_1 \frac{1}{\alpha}} \alpha_1^{\frac{1}{\alpha} - 1} \end{aligned}$$

siendo α_1 la raíz positiva de $\frac{1}{\alpha} t^{\frac{1}{\alpha}} - t - \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) = 0$, donde cambia de signo el integrando

$$e^{t - \frac{t}{\alpha}} \frac{1}{\alpha} t^{\frac{1}{\alpha} - 2} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 + t - \frac{1}{\alpha} t^{\frac{1}{\alpha}} \right),$$

la cual es $\alpha_1 < e$, puesto que

$$\frac{1}{\alpha} e^{\frac{1}{\alpha}} - e \geq e^{\frac{1}{\alpha}} - e = e^{\xi} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) > \frac{1}{\alpha} - 1 \quad \left(1 < \xi < \frac{1}{\alpha} \right)$$

y resulta:

$$2 \frac{1}{\alpha} e^{\alpha_1 - \alpha_1 \frac{1}{\alpha}} \alpha_1^{\frac{1}{\alpha} - 1} < 2 \frac{1}{\alpha} e^e e^{\frac{1}{\alpha} - 1} \rightarrow 2 e^e \quad \text{para } t \rightarrow 1^-.$$

Toda serie sumable B es sumable B_α y con igual suma.

integración por partes sobre

$$\Phi(t) = \int_0^t e^{-tz} \varphi(tz) dt.$$

Este artificio se generaliza como método para deducir las condiciones anteriores de las de permanencia para factores que conservan los límites nulos, correlativamente a la demostración del teorema de Perron que dimos en nuestra Tesis doctoral (R. S. SAN JUAN, *Sumación de series de radio nulo*, etc... Revista de la Academia de Ciencias de Madrid (1933).

Véase también *Teoría de los algoritmos lineales de convergencia y de suma-ción*, de REY PASTOR.

Esta generalización de B puede extenderse al método de Le Roy de momentos $(np)!$ siendo $p > 0$ y resulta un algoritmo:

$$(L_{p\alpha}) \sum a_n z^n = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \int_0^\infty e^{-t^{\frac{1}{p}}} \varphi_p(t^\alpha z) dt^{\frac{1}{p}} =$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \int_0^\infty e^{-t^{p\alpha}} \varphi_p(tz) dt^{\frac{1}{p\alpha}}$$

$$\varphi_p(tz) = \sum_{n=0} \frac{a_n}{(np)!} t^n z^n$$

que comprende a los dos algoritmos de Le Roy y al de Borel.

ALEJANDRO TERRACINI

SOBRE ALGUNOS LUGARES
GEOMETRICOS

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Publicación N.º 22

BUENOS AIRES

1941

ALEJANDRO TERRACINI

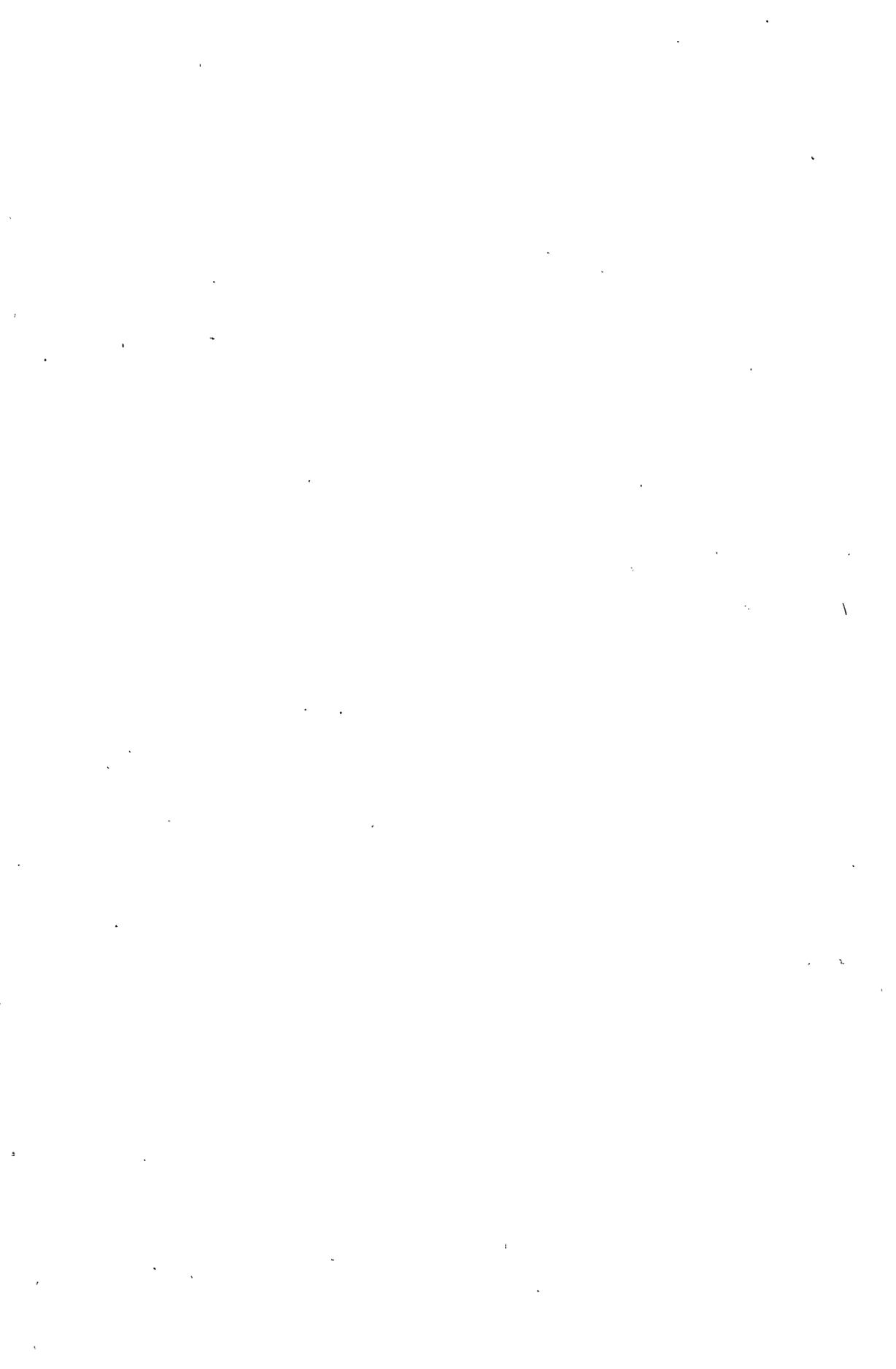
SOBRE ALGUNOS LUGARES
GEOMETRICOS

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Publicación N.º 22

BUENOS AIRES

1941



SOBRE ALGUNOS LUGARES GEOMETRICOS

POR ALEJANDRO TERRACINI

1. La lectura de una interesante Nota *El lugar geométrico y lugares de puntos áreas en el plano* por los señores V. y A. FRAILE y C. CRESPO⁽¹⁾ me ha sugerido la cuestión siguiente que, aunque muy elemental, quizás pueda tener algún interés, y que se presta a generalizaciones de varios tipos.

En el plano π en el cual (aquí y a continuación) supongo que actuamos, imagino fijado una vez por todas un triángulo muestra $A_0B_0P_0$ (cuyos vértices sean todos puntos propios). Entonces a cada par ordenado de puntos A, B podemos asociar de manera perfectamente determinada un punto P definido como vértice del triángulo ABP directamente semejante al triángulo muestra $A_0B_0P_0$. Si ahora dejamos variar los puntos A, B respectivamente sobre dos líneas a, b , «en general» el punto P viene a describir una región del plano. La cuestión es la siguiente: ¿para cuáles pares de líneas⁽²⁾ a, b , y cuáles triángulos muestras, el lugar del punto P se reduce tan sólo a una línea p ? Se trata de encontrar todas las soluciones del problema así planteado.

Supondré el plano π real, y buscaré en el mismo las soluciones reales e imaginarias. Por lo tanto también el triángulo muestra puede tener vértices reales o imaginarios. Sin embargo, para que tenga sentido hablar del triángulo ABP directamente semejante al $A_0B_0P_0$, construido a partir de dos puntos genéricos A, B del plano π , como de un triángulo perfectamente determinado, supondremos que los dos vértices A_0, B_0 del triángulo muestra no pertenezcan a una misma recta isotropa.

2. La cuestión elegida es una de las más sencillas que pueden plantearse en relación con la eventualidad de que se rebaje la dimensión de un lugar geométrico. Podrían plantearse cuestiones parecidas al suponer que, al variar los puntos A, B sobre las líneas a, b , la posición del punto P quede definida a partir de ellos de otras maneras; p. e. que en la defi-

⁽¹⁾ Esta *Revista*, vol. VII (1940-41), n.ºs 2, 3.

⁽²⁾ Aquí y a continuación, al hablar de líneas, entenderemos que se trate de líneas analíticas.

del problema planteado es la siguiente: si salimos de una línea genérica a y de una recta isótropa del segundo sistema b , el conjunto de los puntos P logrados a partir de los puntos A, B variables respectivamente sobre a y b mediante la construcción arriba indicada, resulta una línea, y más precisamente la línea p transformada de la línea a con la homología que tiene como centro el punto cíclico I , como eje la recta isótropa b (con la cual ahora coinciden las rectas isótropas del segundo sistema que pasan por los varios puntos B) e invariante absoluto h .

Para que tenga sentido lo que acabo de decir hay que suponer que, mientras el lado A_0P_0 del triángulo muestra pertenece a una recta isótropa del primer sistema, el lado B_0P_0 del mismo *no* pertenece a una recta isótropa del segundo sistema, porque de no ser así no podríamos hablar del ángulo μ como formado por las rectas B_0A_0, B_0P_0 . No sólo esto, sino que la homología considerada dejaría de existir como homología no degenerada.

Sin embargo, la tercera solución c) de la cuestión que vamos a indicar, en la cual las dos rectas A_0P_0 y B_0P_0 son ambas isótropas, puede considerarse como caso límite de la b) cuando aquella homología degenera al tender a cero su invariante absoluto.

c) Si tomo como línea a una línea genérica, como línea b una recta isótropa del segundo sistema, y como triángulo $A_0B_0P_0$ un triángulo cuyos lados A_0P_0 y B_0P_0 pertenezcan a rectas isótropas respectivamente del primero y del segundo sistema, es claro que el punto P logrado a partir de cualquier par genérico de puntos A, B pertenecientes respectivamente a las líneas a, b está siempre situado sobre la misma recta b : por lo tanto en este caso el lugar del punto P es una recta p que coincide con la recta b .

Para tener en cuenta también los posibles casos límites del problema considerado, conviene admitir la posibilidad de que el triángulo muestra $A_0B_0P_0$ «degenere» en una terna de puntos alineados distintos $A_0B_0P_0$; y entonces, de acuerdo con el punto de vista adoptado, entenderemos que la configuración ABP se mantenga semejante a $A_0B_0P_0$; esto es, a cada par de puntos AB hacemos corresponder aquel punto de la recta AB tal que la razón simple (ABP) es igual a la $(A_0B_0P_0) = k$,

siendo k una constante no nula ni infinita de acuerdo con el hecho de que A_0, B_0, P_0 se suponen distintos. En este caso existe la solución siguiente:

d) Las líneas a y b son dos rectas paralelas, el triángulo muestra está degenerado, siendo arbitrario el valor de la constante k : el lugar de P se reduce a una recta paralela a las a, b .

4. Pues bien, vamos a demostrar que *las cuatro soluciones indicadas a), b), c), d), junto con otra solución e) que se indicará más adelante (n. 5) agotan la cuestión*, es decir, *constituyen las únicas soluciones del problema considerado*.

Me refirió en primer lugar al caso en que el triángulo $A_0B_0P_0$ es degenerado; suponiendo el problema resuelto, salgo de un par de puntos A, B genéricos sobre las líneas a, b , y del correspondiente punto P , y varío el par de manera que el punto P quede fijo: claro está que así se establece una homotecia Ω que transforma a en b . Repito la misma consideración para otro par $A'B$, siendo A' un punto genérico de la línea a , y para el correspondiente punto P' , llegando a otra homotecia Ω' que lleva a a b . Entonces la homotecia producto $\Omega\Omega'^{-1}$ transforma la línea a en sí misma, y en particular el punto A en el punto A' . Se concluye así que las rectas tangentes a la línea a en sus dos puntos genéricos A, A' son paralelas entre sí, y por lo tanto a es una recta. La línea b , como correspondiente de la línea a p. e. en la homotecia Ω , es una recta paralela a la a , y concluimos que nos encontramos frente a una solución del tipo *d)*.

5. Podemos suponer desde ahora que el triángulo muestra no esté degenerado. Quitamos a la cuestión su aspecto métrico, y vamos a estudiarla en la forma siguiente, donde sustituimos a los puntos cíclicos I, J dos puntos cualesquiera distintos entre sí que seguimos indicando con estas mismas letras. Fijados dos puntos I, J , y un triángulo $A_0B_0P_0$ (ninguno de cuyos vértices pertenezca a la recta IJ , de acuerdo con la circunstancia de que al interpretar métricamente la cuestión se trata de puntos propios, y cuyo lado A_0B_0 no pase por I ni por J según lo dicho en el n. 1), vamos a construir de la manera más general dos líneas a, b de manera tal, que al tomar genéricamente A y B respectivamente sobre a, b , el punto P correspondiente a P_0 en la homografía individualizada por los dos puntos unidos I y J y por los dos pares de puntos

correspondientes A_0, A y B_0, B tenga como lugar una línea p .

Sean Q_0, R_0 las proyecciones del punto P_0 sobre la recta A_0B_0 efectuadas respectivamente desde los centros I, J , y sea T_0 el punto $IJ \cdot A_0B_0$. Pondré $(A_0B_0Q_0T_0) = q$, $(A_0B_0R_0P_0) = r$. Para construir el punto P correspondiente a dos puntos dados AB , es claro que podemos construir los puntos Q, R de la recta AB individualizados por las dobles razones

$$(1) \quad (ABQT) = q; \quad (ABRT) = r,$$

donde hemos puesto $T = IJ \cdot AB$, y luego determinar P como intersección de las rectas IQ, JP .

Supondré a continuación que los valores de q, r sean ambos finitos: en caso contrario sería suficiente intercambiar los puntos A y B , a menos que de esos dos valores, uno sea infinito y el otro nulo. Si p. e. $q = 0$, $r = \infty$, resulta $Q \equiv A$, $R \equiv B$: al variar A, B sobre las líneas a, b , si el punto P describe tan sólo una línea, necesariamente queda fija una de las dos rectas IA, JB , y por lo tanto una de las dos líneas a, b es una recta que pasa por uno de los dos puntos I, J . Logramos en este caso, si I, J son los puntos cíclicos, la solución c).

Excluyendo desde ahora la particularidad considerada, observe que, debido a que el punto P_0 no pertenece a ninguna de las rectas A_0B_0, IJ , los valores de q, r son distintos entre sí y ambos distintos de la unidad.

Introduzco coordenadas proyectivas no homogéneas x, y con respecto a un triángulo fundamental $G_1G_2G_3$, de cuyos vértices sea $G_1 \equiv J$, $G_2 \equiv I$.

Si las líneas a, b tienen respectivamente las ecuaciones ⁽⁴⁾

$$y = U(x), \quad y = V(x),$$

el punto P , que procede de los puntos A, B para los cuales

⁽⁴⁾ Escapa a este método el caso en que una por lo menos de las dos líneas a, b es una recta que pasa por el punto G_2 . El inconveniente se salva, intercambiando los puntos I, J : queda como ulteriormente excepcional el caso en que las líneas a, b son dos rectas que pasan una por I y la otra por J , el cual sin embargo no lleva a ninguna solución distinta de las indicadas, como se ve fácilmente.

respectivamente $x=u$, $x=v$, tiene coordenadas

$$(1) \quad x = \frac{u - qv}{1 - q}, \quad y = \frac{U(u) - rV(v)}{1 - r};$$

de modo que la condición para que el punto P no describa una región es

$$(2) \quad r \frac{dV}{dv} = q \frac{dU}{du}.$$

Siendo u, v variables independientes, el valor común de los dos miembros de (2) es necesariamente una constante c . Distingo ahora tres casos.

Caso I. - Las dos constantes r, q son ambas distintas de cero. Escribo c en la forma $c = m r q$, siendo m otra constante, y logro

$$U(u) = m r u + m_1, \quad V(v) = m q v + m_2,$$

siendo m_1, m_2 otras dos constantes. Por lo tanto las líneas a, b son dos rectas que, si $m \neq 0$ como por ahora suponemos, se cortan en un punto que no pertenece a la recta $G_1 G_2$ por ser $r \neq q$, de manera que podemos suponer que su punto de intersección esté en el vértice G_3 del triángulo de referencia, y que por lo tanto sea $m_1 = m_2 = 0$. En cuanto al punto P, las (1) enseñan que sus coordenadas, expresadas en función de los parámetros independientes u, v son

$$x = \frac{u - qv}{1 - q}, \quad y = m r \frac{u - qv}{1 - r}.$$

Por consiguiente

$$(3) \quad y = m r \frac{1 - q}{1 - r} x.$$

Por lo tanto el punto P tiene como lugar una tercera recta p que sale del punto $G_3 = ab$.

Es claro que, después de fijados I, J, A_0, B_0, P_0 , las rectas a, b pueden tomarse en dos rectas arbitrarias que salgan de un punto genérico O del plano, con tal que la doble razón (a, b, OJ, OI) sea igual a r/q : la recta p resulta entonces como lugar de un punto P tal que, al variar A, B respectivamente sobre a, b , el triángulo ABP corresponde a $A_0 B_0 P_0$ en una homografía que tenga I, J como puntos unidos.

También pueden prefijarse, en vez de los elementos anteriores, los puntos I, J , las rectas a, b , y la posición del punto P que corresponde a una elección genérica arbitraria de los puntos A, B de las mismas, con tal que ese punto P se proyecte desde I y J sobre la recta AB en dos puntos Q, R tales que sea

$$(1) \quad (ABRQ) = (ab OJ OI).$$

¿Cuál es el lugar γ del punto P que cumple con esta condición? Los pares de puntos Q, R de la recta AB que cumplen con (4) se corresponden en una proyectividad que tiene A, B como puntos unidos, de manera que γ es una cónica, y más precisamente la cónica γ individualizada por los cinco puntos I, J, A, B, O .

La solución así encontrada lleva precisamente a la solución $a)$ cuando se toman los puntos I, J coincidentes con los puntos cíclicos.

Quien quiera averiguar directamente por un razonamiento sintético que, procediendo de la manera que acabamos de indicar, si $A'B'$ son dos puntos ulteriores de las rectas a, b , el correspondiente P' de P en la homografía H individualizada por los cuatro pares $\begin{matrix} I & J & A & B \\ I & J & A' & B' \end{matrix}$, está sobre la recta OP , puede razonar así: Si el punto O' que corresponde a O en H es distinto de O , y la recta OO' no es unida para H , los haces de centros O, O' referidos en la proyectividad no perspectiva determinada entre ellos por H engendran una cónica irreductible C' , que pasa por los puntos O', I, J, A', B' , y que por consiguiente, considerada en el plano de A' , tiene como correspondiente en el plano de A una cónica $C \equiv \gamma$. Y como los puntos de las dos cónicas C, C' correspondientes en la homografía H resultan por construcción alineados sobre O , sigue la propiedad enunciada. En los casos excluidos, si $O \equiv O'$, se llega a la misma conclusión observando que la homografía tiene más de dos rectas unidas distintas por O , y es por lo tanto una homología de centro O . Quedaría la hipótesis que sea $O \equiv O'$ y la recta OO' unida: pero ésta no podría ser distinta de las dos rectas OI, OJ (porque si no tendríamos una homología de centro O); y si p. e. coincidiese con OI , el razonamiento del caso general llevaría a la conclusión de que los tres puntos A, B, J estarían alineados, contrariamente a nuestras hipótesis.

Caso II. - Sigo suponiendo $r \neq 0$, $q \neq 0$ pero ahora $m = 0$. Entonces $U = m_1$, $V = m_2$, y el punto P que procede de los puntos $A(u, m_1)$, $B(v, m_2)$ tiene coordenadas, de acuerdo con las (1):

$$x = \frac{u - qv}{1 - q}, \quad y = \frac{m_1 - r m_2}{1 - r}.$$

Por lo tanto las líneas a, b son rectas que pasan por J , y lo mismo ocurre de la línea p . En la homografía H considerada más arriba son ahora unidas las tres rectas a, b, p , de modo que H es una homología de centro J , cuyo eje pasa por I .

Efectivamente, si partimos de dos rectas a, b por J , y de un triángulo ABP de cuyos vértices A y B pertenecen respectivamente a las rectas a, b , y P es arbitrario, al transformarlo mediante las ∞^2 homologías de centro J cuyos ejes pasan por I , logramos ∞^2 triángulos $A'B'P'$, de cuyos vértices A' y B' son dos puntos cualesquiera de a, b , y P' viene a recorrer tan sólo una línea, y precisamente la recta $p \equiv JP$.

Es ésta la otra solución $e)$ a la cual he aludido en el enunciado al principio del n. 4.

Caso III. - Sea nula una de las constantes q, r, p . e. sea $q = 0$ (y entonces $r \neq 0$, porque en caso contrario resultaría $Q_0 \equiv R_0 \equiv A_0$, y por lo tanto — siendo $P_0 \equiv A_0$ — la recta A_0P_0 coincidiría con la IJ , lo que contradice nuestras hipótesis). Entonces el punto P pertenece constantemente a la recta AI , y la (2) deja ahora arbitraria la función $U(u)$, mientras que V resulta una constante, que, aprovechando la arbitrariedad de \tilde{G}_3 , podemos suponer nula. En el caso actual las (1) se escriben

$$x = u, \quad y = \frac{U(u)}{1 - r},$$

y por lo tanto expresan que el lugar de P es una línea homológica de la línea (arbitraria) a en una homología de centro I , cuyo eje es una recta por J que actúa como línea b .

Esta solución corresponde por consiguiente a la $b)$ de arriba.

Los resultados enunciados quedan así demostrados.



V. y A. FRAILE y C. CRESPO

EL LUGAR GEOMÉTRICO
Y LUGARES DE PUNTOS AREAS
EN EL PLANO

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Publicación N.º 23

BUENOS AIRES

1942



V. y A. FRAILE y C. CRESPO

EL LUGAR GEOMETRICO
Y LUGARES DE PUNTOS AREAS
EN EL PLANO

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Publicación N.º 23

BUENOS AIRES

1942



EL LUGAR GEOMETRICO Y LUGARES DE PUNTOS AREAS EN EL PLANO

Por V. y A. FRAILE y C. CRESPO

I. - TEORIA GENERAL

1. — El concepto de lugar geométrico lleva en sí el de pluralidad.

Vamos a empezar sirviéndonos de unos ejemplos sumamente elementales que nos permitirán obtener una clasificación de los lugares y establecer algunas conclusiones.

Dados los puntos A y B, existe solamente un punto de su recta que equidista de ambos, siendo finita la distancia. Existen dos que cumplen esta condición situados en la circunferencia de diámetro AB; y existen infinitos situados en un plano que contenga a A y a B. He aquí otra forma de expresar estos tres casos: dos puntos de un espacio E_1 se reproducen aplicando un criterio y originan un nuevo punto; originan simultáneamente dos introduciendo otro espacio E'_1 ; crean simultáneamente una infinidad continua de puntos si se introduce un espacio E_2 . En el primer caso no hay lugar geométrico, por no existir pluralidad de soluciones. En los otros dos sí hay lugar geométrico. Sin embargo, sólo cuando se trata de una infinidad continua de soluciones al problema suele aplicarse el nombre *lugar*.

Si en el primer ejemplo consideramos un haz plano de rectas de vértice A que contenga a la recta AB, y en cada una de ellas aplicamos aquel criterio de equidistancia, referido a los puntos A, fijo, y B_i de la circunferencia de centro A y radio AB, obtenemos una infinidad continua de soluciones, y, por lo tanto, un l. g.; pero esta infinidad de puntos no se produce simultáneamente, como en el ejemplo tercero, sino que se obtiene aplicando infinitas veces el criterio dado en distintos espacios E_i ; es decir, por generación. Podemos generalizar diciendo que hay dos formas de enunciar lugares geométricos: establecer un criterio sobre entes fijos de un espacio E_n , de manera que haya una infinidad continua de nuevos entes que le satisfacen simultáneamente; aplicar infinito número de veces un mismo criterio sobre entes dados, parte de los cuales son fijos y variables los demás, cuando de este criterio se obtiene cada vez un

nuevo ente, o un conjunto numerable de nuevos entes, con la condición al menos de ser continuos los sistemas en los que se mueven los entes dados variables. Hay, pues, lugares que podremos llamar por *síntesis* y por *generación*.

En el último de los tres ejemplos que hemos establecido se trata de un lugar por *síntesis*. Puede obtenerse también de esta otra manera: sean los puntos A, B y una recta r que contiene a A. Sobre r existe un sólo punto, propio o impropio, que equidista de A y B. Apliquemos ahora este criterio de equidistancia en cada una de las rectas del haz de vértice A y plano (r, B), con lo cual obtenemos la mediatriz del segmento AB, lo mismo que antes, pero esta vez por *generación*. En esencia, no hemos hecho sino restringir la dimensión del espacio selectivo y, por medio de éste, generar el otro.

Cuando se trata de lugares de puntos es muy fácil probar que todo lugar por *síntesis* lo es también por *generación*. En efecto: supongamos que en un espacio lineal E_n , de dimensión mínima n, obtenemos, por *síntesis*, un lugar de puntos de m dimensiones ($n > m$). Un cierto hiperplano G_{n-1} de E_n corta al lugar según una o más variedades de dimensión $m-1$; otro hiperplano G_{n-2} de G_{n-1} lo corta según variedades de $m-2$ dimensiones; etc. Finalmente, un último hiperplano G_{n-m} de G_{n-m+1} corta al lugar en un punto o un conjunto numerable de puntos. Enunciemos ahora el lugar primitivo con la condición de estar las soluciones situadas en la variedad lineal G_{n-m} y hagamos lo mismo para todas las variedades de un haz $(G_{n-m})_i$ de G_{n-m+1} . Con ello habremos obtenido, por reiteración del criterio, la parte del lugar interferida en G_{n-m+1} . Así sucesivamente hasta E_n . De esta forma, por sucesivas generaciones, nos viene dado el lugar primitivo.

Por lo tanto, en adelante, nos referimos sólo a lugares de puntos por *generación*, y todo ello será general.

2. — Proponer un lugar geométrico es cosa, pues, bien fácil: basta plantear un problema cualquiera en un espacio E_n sobre entes dados, A, B, C, . . . , N, de modo que la solución sea un punto o un conjunto numerable de puntos. Hagamos ahora que A pertenezca a un sistema ∞^α de entes A; B a otro ∞^β de entes B; . . . ; N a un sistema ∞^ν de entes N. Tomemos en dichos sistemas sendos elementos, y resolvamos sobre ellos el problema dado, haciendo lo mismo para todos los grupos A, B, C, . . . , N. El conjunto de todos

los puntos obtenidos constituirá o no una o más variedades continuas de E_n , y será un lugar.

No es necesario asignar a cada ente primitivo un sistema para obtener un lugar geométrico: basta hacerlo con uno de ellos. Supongamos que son p los entes primitivos, de los cuales q tienen sistema. Puede suceder que, al resolver el problema matriz, no sea arbitraria la elección de elementos en los q sistemas, sino que, habiendo tomado arbitrariamente sendos entes en k de ellos, queden unívocamente determinados los $q - k$ elementos restantes en sus sistemas respectivos. Llamaremos *conjuntos-variables* a los sistemas en los que es arbitraria la elección de elementos.

En el tercero de los tres ejemplos puestos al principio, enunciado por generación, son entes dados constantes A y B ; el haz plano de rectas de vértice A es conjunto-variable; el criterio de equidistancia referido a A y a B sobre cada recta r es el problema matriz, y E_2 el espacio lineal donde se sitúa el lugar.

Sea G el problema matriz de un l. g. en E_n y A_1, A_2, \dots, A_p los entes primitivos dados, de los cuales los q primeros pertenecen respectivamente a sistemas $S_{A_1}, S_{A_2}, \dots, S_{A_q}$, que, para simplificar, suponemos que todos ellos son conjuntos-variables. Hemos de repetir G sobre cada grupo A_i ($i = 1, 2, \dots, p$), tomando para esto de un modo arbitrario q elementos en los sistemas S . Si consideramos los grupos A_i de modo que no varíe sino A_1 en S_{A_1} , dejando fijos en sus sistemas respectivos a A_2, A_3, \dots, A_q , el conjunto de los puntos obtenidos constituye un lugar parcial correspondiente al conjunto-variable S_{A_1} . El lugar total está formado, pues, por q sistemas incidentes de lugares parciales.

Cuando este lugar total es una variedad continua V de E_n , es claro que la dimensión de V será como máximo $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_q$, siendo $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ las dimensiones de los sistemas S_{A_i} . Entonces ha de acontecer dos cosas: 1.^a G es de tal índole que no reduce el número de dimensiones de los lugares parciales, es decir, éstos son variedades continuas cuyo número de dimensiones es igual a la dimensión de sus conjuntos-variables correspondientes. 2.^a La incidencia de los q sistemas de lugares parciales es de dimensión *cero*.

Las proposiciones contrarias constituyen las dos únicas causas que reducen el número de dimensiones del lugar geométrico total. Tenemos un caso particular de la segunda cuando es $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_q > n$, o sea, cuando la dimensión del espacio E_n es insuficiente para contener la del lugar, no existiendo la causa primera.

La interpretación analítica de ambas causas que restringen la dimensión de V es también sumamente sencilla: sean $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \dots, y_{\alpha_1}^{(1)}, y_1^{(2)}, \dots, y_{\alpha_2}^{(2)}; \dots; y_1^{(q)}, y_2^{(q)}, \dots, y_{\alpha_q}^{(q)}$ los parámetros arbitrarios esenciales que definen, respectivamente, los entes o entes primitivos en los sistemas $S_{A_1}, S_{A_2}, \dots, S_{A_q}$. Las coordenadas (no homogéneas) de los puntos del lugar V serán funciones

$$x_\mu = \varphi_\mu (y_1^{(1)} \dots y_{\alpha_1}^{(1)}; y_1^{(2)} \dots y_{\alpha_2}^{(2)} \dots y_1^{(q)} \dots y_{\alpha_q}^{(q)}) \quad [I],$$

$\mu = 1, 2, \dots, n,$

y constituyen las ecuaciones paramétricas de dicho lugar.

Si existe la primera de las causas enunciadas respecto de S_{A_1} , por ejemplo, es que en las funciones φ no son esenciales los parámetros $y_1^{(1)}, \dots, y_{\alpha_1}^{(1)}$, siendo, pues, posible sustituir todos o parte de ellos por otros parámetros en número menor.

2.^a La incidencia de los q sistemas de lugares parciales es de dimensión r , mayor que *ceró*. Supongamos, para simplificar, que es r precisamente la dimensión de la incidencia de los sistemas de lugares parciales correspondientes a S_{A_1} y S_{A_2} . Entonces no cabe otra cosa que ser sustituibles los $\alpha_1 + \alpha_2$ parámetros $y^{(1)}$ e $y^{(2)}$ de $[I]$ por $\alpha_1 + \alpha_2 - r$ nuevos parámetros, ya que el lugar parcial superior que resulta de considerar variables sólo a los entes primitivos A_1 y A_2 ha de ser una variedad de dicha dimensión $\alpha_1 + \alpha_2 - r$.

Vemos, por lo tanto, la existencia única de las causas referidas: que en las funciones φ no sean esenciales parte o todos los parámetros y de una misma serie; que no lo sean parte o todos los de series distintas, aun siéndolo los de cada serie.

En el primer caso, si llamamos $y'_1, y'_2, \dots, y'_\beta$ ($\beta < \alpha_1$) a los parámetros que sustituyen a los $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \dots, y_{\alpha_1}^{(1)}$ en las φ , es, en general, posible sustituir también el sistema $\infty^{\alpha_1} S_{A_1}$ de entes A_1 por otro ∞^β de los mismos entes, definido con los y' , de manera que junto con los $q-1$ sistemas restantes y los $p-q$ elementos fijos se obtenga la misma variedad lugar. Es decir, los conjuntos-variables son reducibles a otros de dimensión menor.

Este caso encierra la posibilidad de quedar eliminados en las ecuaciones $[I]$ algunos parámetros $y^{(j)}$.

La segunda causa de restricción del número de dimensiones del lugar V se produce cuando las posiciones relativas de los sistemas S_{A_1} en E_n no son genéricas y sí particulares. Al establecer las ecuaciones paramétricas $[I]$ aparecen entonces, en cada una de las φ ,

funciones idénticas de los mismos parámetros y de series diferentes; y estas funciones, claro es, constituyen nuevos parámetros, en número menor.

Si se trata de la primera causa referida, por ejemplo, al conjunto-variable S_{A_1} , a todo punto de un lugar parcial respecto de S_{A_1} corresponde uno o más subsistemas de entes A_1 de dicho conjunto-variable. En cuanto a la segunda hay también correspondencias parecidas.

Si el lugar V tiene la máxima dimensión $\sum_{j=1}^q \alpha_j$, la correspondencia recíproca no es de puntos de V a continuos de entes primitivos.

3. — Para que un lugar de puntos sea una variedad continua de E_n , su dimensión m ha de cumplir $m \leq n - 1$. Por otra parte, sabemos que el número de dimensiones de un lugar depende de la multiplicidad o dimensión de los sistemas de entes primitivos arbitrarios. Es posible, pues, proponer lugares de puntos que sean n -dimensionales en E_n , o sea, que constituyan recintos del espacio selectivo total.

Como vemos, el concepto de lugar geométrico es muy general, y, sin embargo, en geometría plana sólo es corriente estudiar aquellos lugares que son líneas o elementos de líneas. Es cierto que se puede proponer inmediatamente lugares de puntos que constituyen recintos del plano; pero son tan triviales que no merecen siquiera ser enunciados. A pesar de ello enunciemos dos:

1.º «L. g. de los puntos del plano cuya distancia a uno fijo es mayor que r y menor que k ($k > r$)».

2.º «L. g. de los puntos del plano homotéticos de los de un círculo dado C respecto de un punto fijo V (razón k)».

La puerilidad de estos lugares de puntos áreas en el plano consiste, para el primer ejemplo, en los conceptos *mayor* y *menor* que intervienen en el enunciado. Toda selección de puntos de un plano condicionada por varias limitaciones a un concepto simple de distancia, o a otro análogo simple, define, en efecto, un recinto, finito o infinito, de ese plano.

Este lugar lo es por síntesis. Si el campo selectivo lo restringimos a una recta del plano que pasa por el punto fijo obtenemos también otro *recinto* de ella.

En cuanto al segundo de los ejemplos, se trata, desde luego, de un lugar por generación: a cada punto del círculo dado corresponde

ano homotético de razón k . Los datos para engendrar este lugar son el centro de homotecia — ente primitivo fijo — y el punto genérico del círculo — ente primitivo que pertenece a un sistema ∞^2 de ellos —. El problema matriz es el criterio de homotecia referido a cada ente de C respecto de V . Sabemos ya que el lugar ha de ser bidimensional, y, por lo tanto, un recinto del plano.

Cualquier lugar área de puntos en el plano que se genera aplicando un problema matriz sobre un grupo de p entes, de los cuales $p-1$ son fijos y el otro varía en un campo ∞^2 de ellos; es, casi siempre, trivial. Pero, en cambio, no suelen ser ya pueriles los lugares, si, en vez de hacer variar a un ente primitivo sobre un campo o sistema ∞^2 de ellos, hacemos variar a dos arbitrariamente sobre sendos sistemas ∞^1 . En nuestro último ejemplo, basta que el punto móvil de C varíe sólo en una circunferencia, y que el centro de homotecia se elija también arbitrariamente en otra línea cualquiera, para que el lugar área que resulte deje de ser trivial.

Es claro que, si un problema matriz en el plano se refiere a p puntos-datos, y hacemos variar sobre sendas líneas genéricas a más de dos de ellos de un modo arbitrario, se obtiene un lugar área de puntos; pero en los sistemas de lugares parciales ha de haber forzosamente incidencia de dimensión mayor que *cero*, por ser aquí $q > 2$ (q = número de líneas conjuntos-variables); esto es, el lugar parcial superior que resulta de considerar variables sólo a dos puntos datos, y otro parcial correspondiente a otra de las líneas dadas, inciden según una línea.

Er definitiva: la regla que nos permite proponer lugares de puntos áreas en el plano, exentos en general de trivialidad, consistirá, pues, en elegir un problema gráfico cuya solución sea un punto o conjunto numerable de puntos, y cuyos datos sean puntos (líneas) no inferiores a dos en número. Luego, haremos variar a dos de estos datos de una manera arbitraria, sobre sendas líneas (haces), repitiendo el problema elegido en cada nuevo grupo de datos.

Sean A y B los entes primitivos que son variables sobre los conjuntos $\infty^1 S_A$ y S_B respectivamente. Un lugar parcial L_A correspondiente a S_A se obtendrá cuando B queda fijo en S_B y sólo varía A en S_A . L_A es un lugar línea corriente, y está perfectamente definido por el valor o posición que tiene B en S_B . A cada valor de B corresponde un L_A ; de modo que si hallamos ahora el lugar geométrico de L_A , cuando B varía en su sistema, obtenemos el lugar total.

Resolver un lugar área de puntos en el plano equivale, pues, a resolver dos lugares sucesivamente: uno de puntos y otro de líneas, siempre que sean dos los entes primitivos que varían, y simplemente infinitos los sistemas que los contienen. En último caso, el segundo de estos lugares se reduce a determinar la envolvente de esas líneas que, en general, limita al lugar área.

Este procedimiento de resolución de los lugares áreas es, sin duda, el más natural. Sin embargo, utilizando siempre los recursos de la Geometría elemental, suele ser más simple y más elegante la solución sintética, prescindiendo de todo proceso de generación.

Por último, las coordenadas de los puntos de un lugar área son funciones

$$x = f(\lambda, \lambda') \qquad y = \varphi(\lambda, \lambda')$$

de dos parámetros, λ, λ' , independientes, no siendo posible, por lo tanto, la eliminación de ellos. Cuando el número de conjuntos-variables excede a dos, las funciones x, y y lo son de más de dos parámetros que, de hecho, están sustituidos por dichas funciones.

A continuación exponemos una serie de problemas elementales de lugares de puntos áreas en el plano, en los que hemos utilizado con preferencia la solución sintética.

II. - APLICACIONES

1. — *Superficies medias y baricéntricas de las curvas.* — Trátándose de curvas alabeadas, son ya conocidas las superficies medias: lugar de los centros de las cuerdas de una curva. Si se considera curvas planas, sus superficies medias constituyen lugares áreas de puntos en el plano.

Naturalmente, cuando una curva plana es cerrada y convexa, su superficie media es la región del plano no exterior a la curva. La de una circunferencia es su círculo.

Es sumamente sencillo hallar la superficie media de un arco de circunferencia: En la circunferencia de centro O (fig. 1) consideremos el arco $AB'B$, y tracemos los arcos AM, BM homotéticos del $AB'B$ respecto de los centros A y B respectivamente, de razón $1/2$. La superficie rayada sobre la cuerda AB es el lugar. Basta trazar un radio cualquiera ON y observar que P — punto de intersección de ON y el arco BPM — es centro de la cuerda BB' . Todo punto

de los puntos que dividen a las cuerdas de una curva en segmentos que están en una relación λ .

Si se trata de un arco de circunferencia (fig. 2) A V B el lugar es la superficie rayada sobre la cuerda A B. Está limitada por el arco dado y cuatro arcos más: dos de ellos pertenecen a las circunferencias de centros O_1, O_2 homotéticas de la dada de razón

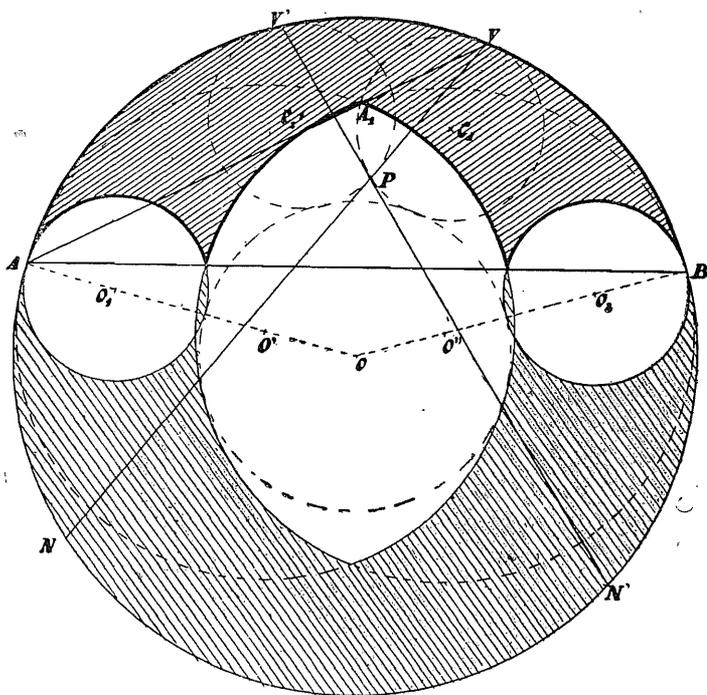


Fig. 2

λ respecto de los centros A y B; los otros dos arcos pertenecen a las circunferencias de centros O', O'' , homotéticas de la dada de razón $\frac{1}{\lambda}$ respecto de A y B como centros de homotecia.

Se desprende, desde luego, que todo punto no contenido en la corona circular limitada por la circunferencia dada y la que es tangente exterior a las O_1, O_2 no es del lugar. Ahora bien: un punto P de esta corona, pero exterior a la superficie rayada, tampoco es del lugar. Basta observar que este punto pertenece a dos circunferencias C_1, C_2 inscritas en la corona. Sea V el punto de tangencia de C_1 con el arco dado, y A_1 el de contacto con el arco de cir-

circunferencia de centro O' . La recta VA_1 ha de pasar por A y es $\frac{A_1V}{A_1A} = \lambda$. La recta VP produce una cuerda VN tal que es $\frac{PV}{PN} = \lambda$; pero que no está, pues, inscrita en el arco dado. Tampoco puede estarlo la cuerda $V'N'$ que resulta de considerar la circunferencia C_2 . Del mismo modo se comprende que los puntos comunes a las circunferencias C y a la superficie rayada pertenecen a cuerdas inscritas en el arco AVB y las dividen en segmentos cuya razón es λ .

El mismo lugar para el arco $AN'B$ lo indica el rayado inferior.

2. — Lugar de los centros de los segmentos inscritos en dos segmentos dados AB, CD . (Superficie media de dos segmentos). —

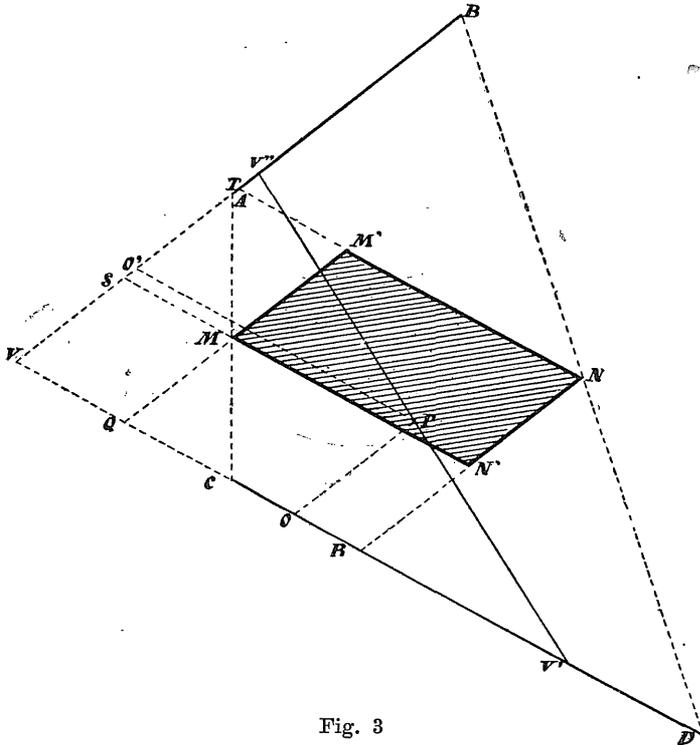


Fig. 3

Conviene antes recordar cómo se inscribe un segmento en los lados de un ángulo dado BVD de manera que su centro sea un punto P también dado (fig. 3). Sabemos que basta trazar, por ejemplo, PO , paralela al lado VB , tomar V' , simétrico de V respecto de O y unir P y V' . $V'V''$ es la solución.

e igual a su mitad. Haciendo variar ahora a P en AB, varía también EF y engendra el lugar total. EF es siempre paralelo a CD y de longitud constante $\frac{1}{2}$ CD. Se trata, pues, de una traslación, y la dirección de ella es precisamente AB, como se deduce de ser MM' lugar de los extremos E. El lugar total es el paralelogramo MM'NN'.

Si AB y CD son paralelos, dicho lugar degenera en un segmento (paralela media del trapecio ABCD). La incidencia de los sistemas de lugares parciales es de dimensión 1; las coordenadas de los puntos del lugar total son funciones de un solo parámetro que sustituye a una cierta función de los dos genéricos. Sean

$$AB \equiv \begin{cases} x = x' + a\mu \\ y = y' + b\mu \end{cases}, \quad u \leq \mu \leq v,$$

$$CD \equiv \begin{cases} x = x_1 + m\rho \\ y = y_1 + n\rho \end{cases}, \quad u' \leq \rho \leq v',$$

las ecuaciones paramétricas de los segmentos AB y CD. Las ecuaciones del lugar propuesto son

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} [(x' + x_1) + (a\mu + m\rho)] \\ y &= \frac{1}{2} [(y' + y_1) + (b\mu + n\rho)] \end{aligned} \quad [1]$$

Si AB y CD son paralelos ha de ser $\frac{b}{a} = \frac{n}{m}$. Poniendo en las [1] $m = \frac{na}{b}$, $n = \frac{mb}{a}$, se obtiene

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} (x' + x_1) + \frac{1}{2} a \left(\mu + \frac{n}{b} \rho \right) \\ y &= \frac{1}{2} (y' + y_1) + \frac{1}{2} b \left(\mu + \frac{m}{a} \rho \right), \end{aligned}$$

donde los paréntesis que multiplican respectivamente a $\frac{1}{2} a$ y $\frac{1}{2} b$ son iguales en virtud de $\frac{n}{b} = \frac{m}{a}$. Haciendo, pues, $\mu + \frac{n}{b} \rho = \lambda$, tenemos en definitiva

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} (x' + x_1) + \frac{1}{2} a \lambda \\ y &= \frac{1}{2} (y' + y_1) + \frac{1}{2} b \lambda. \end{aligned}$$

hasta H. El segmento, HG, paralelo e igual a G'H', y el EF determinan, pues, un paralelogramo inscrito en el cuadrilátero dado y, por lo tanto, un punto del lugar. De esta construcción se deduce: 1°. Un punto del lugar queda unívocamente determinado eligiendo arbitrariamente sendos puntos en dos lados adyacentes del cuadrilátero; 2°. Elegidos los puntos anteriores quedan determinados los otros dos en el otro par de lados; 3°. Pueden no existir estos últimos puntos, y, por lo tanto, la elección arbitraria de E y F está acotada.

De todo esto resulta que los entes primitivos del lugar propuesto son cuatro puntos, E, F, G, H, vértices de un paralelogramo, que producen un punto P del lugar. Cada uno de estos cuatro puntos se mueve sobre una línea; pero este movimiento sólo es arbitrario para dos de ellos. El lugar ha de ser, pues, un área, en general. Los lados AB, AD del cuadrilátero dado, o mejor, los *recintos* acotados en ellos, son conjuntos-variables.

Como vemos, no es necesario el paralelismo de BD y EF.

Todo punto del lugar ha de ser centro de dos segmentos (diagonales) inscritos uno en AB y CD (fig. 6) y otro en AD y BC, luego ha de pertenecer a los paralelogramos QMRN y SMTN,

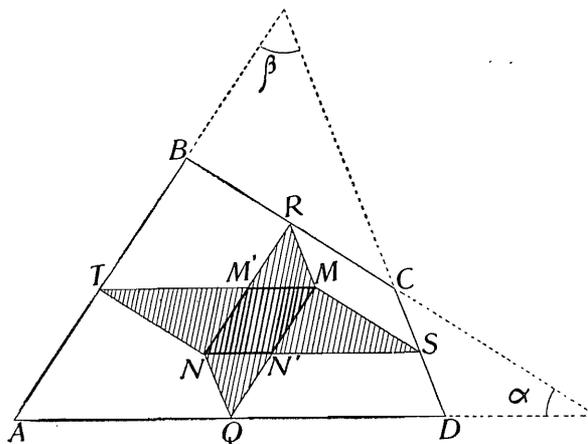


Fig. 6

superficies medias de ambos pares de lados opuestos. El lugar es, por lo tanto, la parte común a dichos paralelogramos. Es fácil ver que esta parte común es otro paralelogramo MM'NN'. N y M son centros, respectivamente, de las diagonales AC y BD del cua-

drilátero, y los lados del lugar son paralelos a los AB y AD envolventes del cuadrilátero completo.

Si el cuadrilátero dado es trapecio el lugar degenera en un segmento, y si es paralelogramo, en un punto.

4. — *Lugar de los centros de los segmentos inscritos en una circunferencia y una recta.* — Es, pues, otra superficie media.

Sea O la circunferencia y r la recta (fig. 7). Reconoceremos cuándo un punto P es del lugar trazando la recta simétrica r' de r

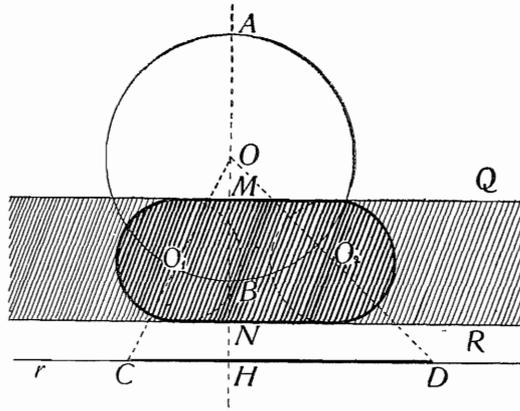


Fig. 7

respecto de P (hágase la figura). Si r' tiene con la circunferencia O puntos propios comunes, P es del lugar, y no lo es en caso contrario, puesto que si F y G son esos puntos comunes, uniéndolos con P y prolongando los segmentos hasta r , ambos segmentos cumplen las condiciones del enunciado.

Las rectas MQ y NR , paralelas a la r , donde M y N son, respectivamente, los centros de AH y BH , limitan este lugar área, que es la franja rayada: las rectas simétricas de r respecto de los puntos de dicha franja cortan o son tangentes a la circunferencia O ; y no la cortan las simétricas de r respecto de los demás puntos del plano.

r y O son conjuntos-variables. El sistema de lugares parciales correspondiente a r lo constituyen todas las rectas de esta franja paralelas a r . Y el sistema de los correspondientes a O todas las circunferencias inscritas en dicha franja.

Si en vez de considerar la recta r se trata de un segmento CD , es claro que el lugar será la parte de la franja doblemente rayada, donde las circunferencias O_1, O_2 son las posiciones límites del lugar parcial correspondiente a O .

5. — *Lugar de los centros de los segmentos inscritos en dos circunferencias.*

Sean O_1, O_2 las circunferencias dadas, de radios r_1, r_2 respectivamente. Reconoceremos si un punto P de su plano es o no del lugar trazando la circunferencia O'_1 , simétrica de la O_1 , por ejemplo, respecto de P . Si O'_1 y O_2 tienen puntos comunes reales, S, T , y son S', T' sus simétricos respecto de P , los segmentos SS', TT' están inscritos en O_1 y O_2 , y es P su centro.

Construyamos las circunferencias concéntricas de centro O (fig. 8), punto medio del segmento $O_1 O_2$, cuyos radios son, respectivamente, $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ y $\frac{1}{2}(r_1 - r_2)$. Es fácil probar que las circunferencias simétricas de una de las dadas respecto de los

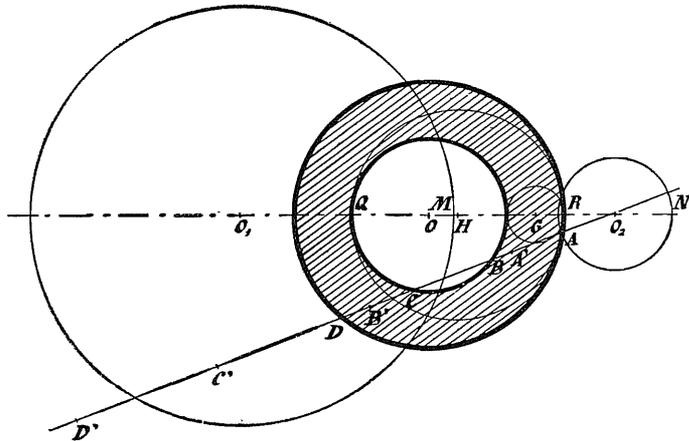


Fig. 8

puntos de la de radio $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ son tangentes exteriormente a la otra; y lo son interiormente si se toma como centros de simetría los puntos de la circunferencia de radio $\frac{1}{2}(r_1 - r_2)$. Tracemos una recta cualquiera O_2D' que corte a ambas circunferencias concéntricas. Los puntos de intersección son A, B, C, D , y A', B', C', D' los simétricos de O_2 respecto de aquéllos. En virtud de lo dicho, las circunferencias de radio r_2 y centros D' y C' son, res-

pectivamente, tangentes exterior e interiormente a la O_1 , con lo cual los puntos del segmento $D' C'$ —y, por igual razón, los de $B' A'$ —son centros de circunferencias de radio r_2 que tienen con la O_1 puntos comunes reales; y no los tienen las circunferencias de radio r_2 cuyos centros no están en los segmentos $D' C'$, $B' A'$, para la recta genérica considerada $O_2 D'$. Por lo tanto, en dicha recta, sólo son puntos del lugar los de los segmentos AB y CD . Y, en definitiva, todo punto de la corona circular rayada es, pues, del lugar, y no lo son los demás puntos del plano. El lugar propuesto es esta corona.

Considerando los segmentos inscritos de extremos M , fijo en O_1 , y X , variable en O_2 obtenemos un lugar parcial que es la circunferencia de centro G , inscrita en la corona, y que engendra el lugar total cuando M varía en O_1 . Del mismo modo, un lugar parcial correspondiente a la circunferencia O_1 respecto de un punto fijo, N , de la O_2 , es la circunferencia de centro H , tangente en Q y R a las de la corona.

6. — El l. g. de las polares de los puntos de la cuerda AB de una cónica φ (fig. 9) respecto de φ es la parte de haz rayada, donde P , vértice del haz, es polo de AB . Este haz acotado de polares es un lugar de rectas, y también lo es de puntos. Basta, para

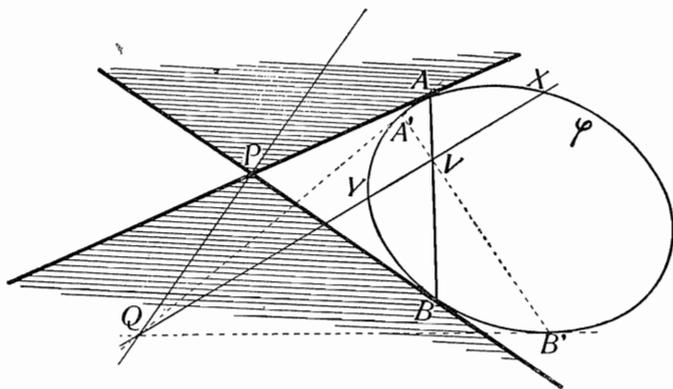


Fig. 9

verlo, enunciarlo así: «Dada una cónica φ y una cuerda AB , tómese *arbitrariamente* dos puntos, uno, X , en uno de los dos arcos en que la cuerda divide a la cónica, y otro, Y , en el otro arco. La recta XY corta en V a la cuerda AB . Lugar de los conjugados ar-

mónicos de los puntos V respecto de todos los pares (X, Y) . Todo punto, Q , del lugar ha de pertenecer a la polar de V , y, por ser V de la cuerda AB , dicha polar es del haz acotado.

También puede verse que la condición necesaria y suficiente para que un punto Q sea del lugar es que su polar $A'B'$ respecto de φ corte a la cuerda AB , condición que cumplen solamente los puntos del recinto infinito rayado.

Los puntos del lugar quedan unívocamente determinados eligiendo una terna (XVY) ; pero sólo es arbitraria la elección de X e Y ; es decir, entre las tres líneas a que pertenecen, respectivamente, los puntos de la terna, sólo son conjunto-variables los arcos AXB y AYB de la cónica dada φ .

7.— *Lugar de los centros de las circunferencias que tienen puntos comunes con dos dadas.*

Los puntos del lugar quedan unívocamente determinados eligiendo arbitrariamente tres: dos en una de las circunferencias dadas y otro en la otra. Ambas circunferencias son, pues, conjuntos-variables; pero como una de ellas contiene dos puntos arbitrarios hay, en total, tres conjuntos-variables. Las coordenadas de los puntos de este lugar son, por lo tanto, funciones de tres parámetros independientes, y ha de haber forzosamente entre los sistemas de lugares parciales incidencia de dimensión 1, siendo $3 - 1 = 2$ la dimensión del lugar total.

En la figura 10 son O_1 y O_2 los centros de las circunferencias dadas, cuyos radios van a ser, respectivamente, r_1 y r_2 . Vamos a proceder del modo siguiente: Entre todas las circunferencias que cortan o son tangentes a las dadas, O_1, O_2 , nos referiremos primero a aquellas cuyas cuerdas comunes con las O_1, O_2 concurren en un mismo punto P del eje radical PO de dichos círculos dados, y hallaremos el lugar de sus centros. Se comprende que, al considerar todos los puntos del eje radical, este lugar restringido — no *parcial* — engendra el lugar propuesto.

Supongamos trazadas desde P dos secantes a O_1, O_2 respectivamente y sean c_1, c_2 las cuerdas interceptadas. Es claro que las mediatrices de c_1 y c_2 se cortan en un punto que es del lugar. El l. g. de los centros de todas las cuerdas c_1 es el arco FO_1E que pertenece a la circunferencia de diámetro O_1P . Análogamente, el l. g. de los centros de las cuerdas c_2 es el arco HO_2J que pertenece a la circunferencia de diámetro O_2P . Las mediatrices

de todas las cuerdas c_1 se obtienen, pues, trazando las rectas que pasan por el punto O_1 y por todos y cada uno de los puntos del arco FO_1E , y están contenidas, por lo tanto, en el ángulo α . Del mismo modo, todas las mediatrices de las cuerdas c_2 forman el ángulo β . La parte de plano común a ambos ángulos, que es el cuadrilátero $VSLT$, constituye el lugar restringido.

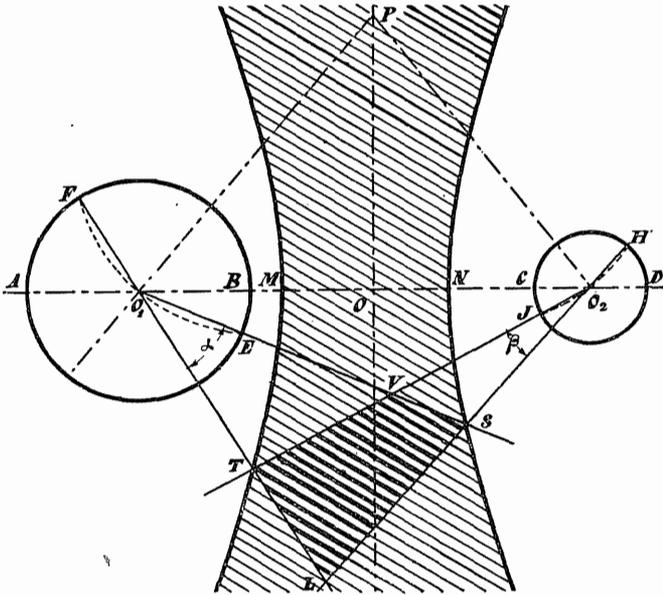


Fig. 10

Estudiemos ahora las trayectorias de los puntos S, T, V, L cuando P recorre el eje radical. Para ello hemos de advertir que, por ser $PE=PH$ y rectos los ángulos PES y PHS , es $SE=SH$. De igual manera es también $TF=TJ$. De aquí se obtiene sucesivamente:

$$SO_1 - r_1 = SO_2 + r_2 ; SO_1 - SO_2 = r_1 + r_2.$$

$$TO_1 + r_1 = TO_2 - r_2 ; TO_2 - TO_1 = r_1 + r_2.$$

Esto prueba que los puntos S y T pertenecen a sendas ramas de la misma hipérbola cuyos focos son los puntos O_1, O_2 y cuya constante es $r_1 + r_2$.

Escribiendo relaciones parecidas para L y V veremos que ambos puntos se mueven sobre sendas ramas de otra hipérbola, homofocal a la anterior, de constante $r_1 - r_2$, lo cual nos indica que dichas ramas de esta última hipérbola quedan entre las de la primera.

De todo se deduce que el lugar propuesto es la parte de plano comprendida entre las ramas sobre las cuales se encuentran S y T. El cuadrilátero VSLT se desplaza en ella variando de forma, cuando P recorre el eje radical. Si P es el punto impropio de dicho eje el cuadrilátero degenera en el segmento MN, cuyos extremos son los centros de los segmentos AC y BD respectivamente.

La hipérbola de constante $r_1 + r_2$ es lugar de los centros de las circunferencias tangentes a las dadas, quedando éstas en distinta región del plano respecto de aquéllas. La hipérbola de constante $r_1 - r_2$ es lugar de los centros de las circunferencias tangentes a las dadas, y éstas quedan en igual región del plano.

Cuando una de las circunferencias dadas es un punto, el lugar de los centros de las que pasan por dicho punto y cortan o son tangentes a la otra es también la región del plano no interior a una hipérbola cuyos focos son el punto conocido y el centro del círculo dado, y cuya constante es el radio de este círculo. En este caso particular no existe, naturalmente, la hipérbola homofocal del problema general, puesto que aquí el lugar restringido es un segmento rectilíneo y no un cuadrilátero.

Es trivial el caso de ser puntos los dos círculos dados. El lugar es, entonces, la mediatriz del segmento que determinan, y el restringido es un punto genérico de esa mediatriz.

8. — *Lugar de los centros de las circunferencias que tienen puntos comunes con otra circunferencia y una recta.*

La recta dada es la MT (fig. 11), y la circunferencia es la que tiene O como centro y a cuyo radio vamos a designar por r.

Análogamente a como hemos hecho en el ejemplo anterior consideremos primero todas las circunferencias que cortan o son tangentes al círculo y a la recta dados de modo que las cuerdas comunes con la circunferencia O concurren en un mismo punto P de la recta MT que es, en este caso, el eje radical del par dado. Hallaremos el lugar de los centros de estas circunferencias. Este lugar restringido engendra el total cuando P recorre el eje radical MT.

Sea C_j una circunferencia cuyo centro O_j pertenece al lugar restringido correspondiente a P . O_j es la intersección de las perpendiculares a la cuerda común UV en su punto medio μ — dicha perpendicular pasa por O — y a la $y-x$, también en su punto

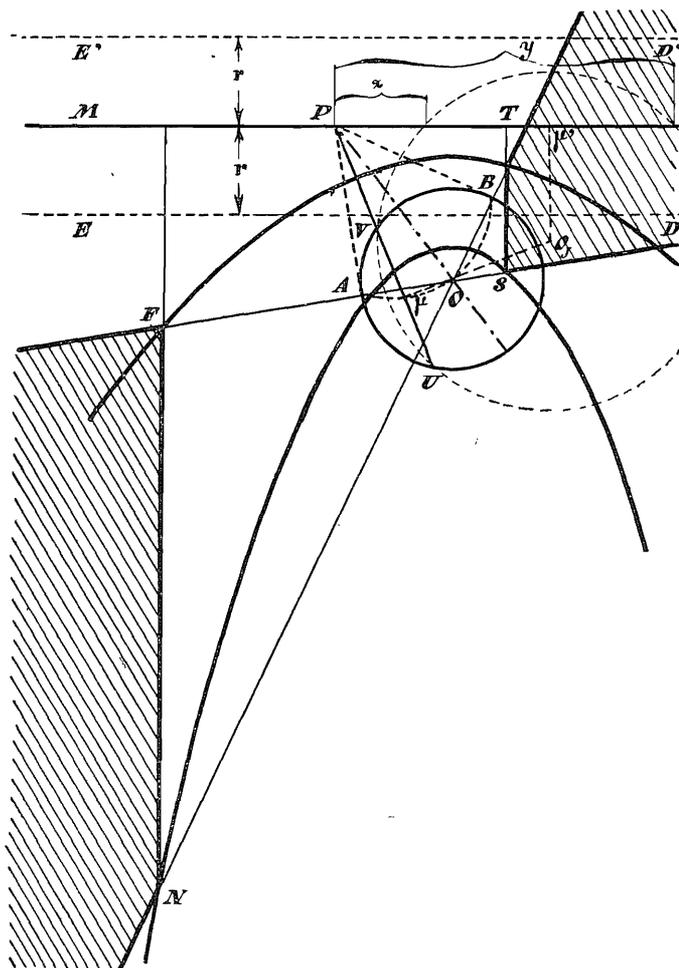


Fig. 11

medio μ' . Para todas las circunferencias C_j correspondientes a P el lugar de los puntos μ es el arco AOB de la circunferencia de diámetro OP . Veamos el lugar de los puntos μ' , situados todos ellos en la recta dada MT . Estos puntos tienen la abscisa $\pm 1/2 (x + y)$ respecto de P . Además se verifica $\overline{AP^2} = \overline{PV} \cdot \overline{PU} = xy$;

$AP = \pm \sqrt{xy}$. Y se sabe que es $r/2 (x+y) \cong \sqrt{xy}$. Lo que nos dice que si llevamos la longitud AP sobre la recta dada por encima y por debajo de P obtendremos dos puntos, M y T , que son mínimas abscisas de los μ' . El lugar geométrico de éstos está constituido, pues, por las semirrectas de extremos M y T no continentes de P .

El lugar restringido que tratamos de encontrar será, por lo tanto, el conjunto de las intersecciones de las perpendiculares a estas semirrectas en todos sus puntos y de las rectas del haz acotado $O - \tilde{a}$; es decir, las partes infinitas rayadas en la figura.

Quando P recorre el eje radical, el lugar restringido se desplaza asimismo sobre el plano y engendra el total. Hallemos las trayectorias de los vértices S y R .

Por ser rectos los ángulos PTS y PAS y ser $PA = PT$, es también $AS = ST$. O sea, $ST - SO = r$; luego S pertenece a una parábola de foco O y directriz ED . Análogamente, el punto R pertenece a otra parábola homofocal a la anterior de constante $-r$, es decir, de directriz $E'D'$. Estas parábolas pasan, respectivamente, por N y F . El lugar propuesto es, por lo tanto, la región del plano no interior a la parábola de directriz ED .

Ambas cónicas son l. g. de los centros de las circunferencias tangentes a la dada y a la recta MT .

En el caso particular de ser un punto el círculo dado, el lugar propuesto es, naturalmente, la región del plano no interior a la parábola que tiene a dicho punto como foco y a la recta dada como directriz.

9. — *Lugar de los centros de las circunferencias que tienen puntos comunes con tres dadas.*

Sean C_1, C_2, C_3 estas últimas circunferencias, cuyos centros son O_1, O_2, O_3 , y a cuyos radios designaremos por r_1, r_2, r_3 , respectivamente (fig. 12). Resolvamos el problema correspondiente al número 7 para los pares de circunferencias (C_1, C_2) , (C_1, C_3) , (C_2, C_3) , y obtendremos así tres recintos del plano no interiores, respectivamente, a las hipérbolas de constantes $r_1 + r_2, r_1 + r_3, r_2 + r_3$, cuyos focos son los pares de puntos $(O_1, O_2), (O_1, O_3), (O_2, O_3)$. La parte común M a estos tres recintos del plano es el lugar propuesto. En efecto, todo punto, P , de M ha de ser centro de tres coronas circulares $\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}$, de manera que cada corona $\alpha_{i,j}$ está formada por todas las circunferencias de centro P

que cortan y son tangentes a cada par (C_i, C_j) . Si, por ejemplo, la circunferencia C_3 no tuviese ningún punto en la corona $\alpha_{1,2}$ no podría haber tampoco ninguna circunferencia de centro P que tuviera puntos comunes reales con alguno de los pares (C_1, C_3) , (C_2, C_3) , contra la hipótesis, puesto que $\alpha_{1,2}$ está limitada por circunferencias que han de ser tangentes a alguna de las C_1, C_2 . Luego existe una corona circular de centro P que es común a las tres coronas $\alpha_{i,j}$. De igual modo, todo punto que no pertenece a M no es centro de ninguna circunferencia que corta o es tangente a la terna dada.

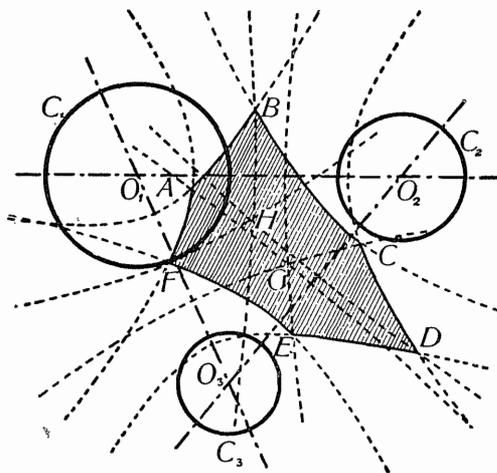


Fig. 12

Es curioso ver qué forma tiene este lugar. Si todos los puntos de intersección son propios, las hipérbolas que limitan los tres recintos mencionados producen seis vértices, A, B, C, D, E, F, y, por consiguiente, M es una parte de plano comprendida entre seis arcos de hipérbola.

En el problema del número 7 vimos cómo, además de la hipérbola de constante $r_1 + r_2$, obteníamos también otra homofocal de constante $r_1 - r_2$. Pues bien, es elemental probar que por cada vértice del exágono curvilíneo ABCDEF pasa una rama de hipérbola de constante genérica $r_i - r_j$. Para el vértice A, por ejemplo, se verifica:

$$A O_3 - A O_1 = r_3 + r_1 ; A O_2 - A O_1 = r_2 + r_1,$$

y, restando, $AO_3 - AO_2 = r_3 - r_2$. Puede verse también que en el lugar M hay dos puntos, G y H, comunes a tres ramas de estas hipérbolas homofocales a las que limitan M. Naturalmente, estos puntos y los seis vértices del exágono son las ocho soluciones del problema de Apolonio relativo a tangencia.

10. — El problema precedente puede originar nueve casos particulares, cuando una, dos o las tres circunferencias dadas degeneran en puntos y rectas. En todos ellos han de figurar las soluciones del problema de Apolonio como puntos notables de estos lugares áreas.

En la figura 13 está representado el lugar correspondiente al caso de ser dos circunferencias γ_1, γ_2 y una recta ρ la terna dada. Dicho lugar consta de dos recintos infinitos del plano: Uno

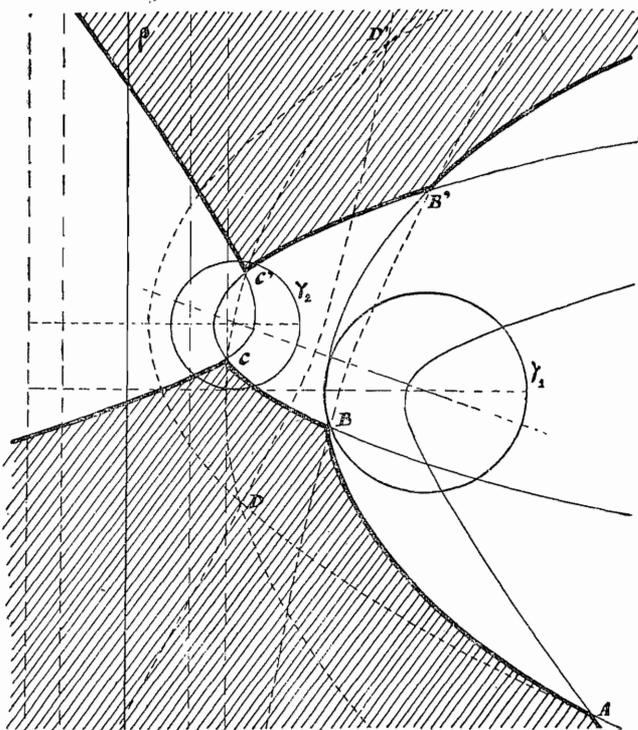


Fig. 13

de ellos tiene como vértices los puntos A, B y C, y posee un punto interior D común a tres curvas: una hipérbola y dos parábolas.

El otro recinto tiene por vértices los puntos A' , B' y C' (el A' falta en la figura), y posee también un punto interior D' , común a las mismas curvas que pasan por D .

Estos ocho puntos son las soluciones de Apolonio.

11. — *Lugar de los puntos cuya suma de distancias a dos arbitrariamente elegidos en sendas rectas es una constante k finita y no nula.*

Sean x e y las rectas dadas (fig. 14), y ρ una recta cualquiera del haz de vértice O . Sobre ρ sólo existen dos puntos P, P' , simétricos respecto de O , que cumplen la condición de ser k la suma de sus distancias respectivas a x e y . Cualquier punto de ρ exterior al segmento PP' no puede ser del lugar propuesto, por-

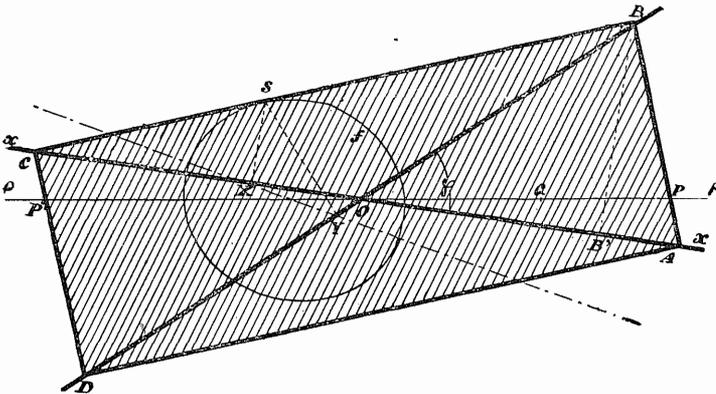


Fig. 14

que la suma de sus distancias a los puntos más próximos a él, uno de x y otro de y , es ya superior a k . En cambio, los puntos del segmento PP' son del lugar, puesto que, si es Q uno genérico, es siempre posible trazar desde Q sendas oblicuas a x e y de manera que sea k la suma de ellas. Se desprende asimismo que las coordenadas oblicuas (x, y) de P varían linealmente con ρ . Finalmente, siendo ρ una recta genérica del haz de vértice O , deducimos de todo lo expuesto: 1°. El lugar es un área finita del plano; 2°. La línea que limita esta área es poligonal, y O es su centro de simetría; 3°. Dicha línea es, a su vez, l. g. de los puntos cuya suma de distancias a las rectas dadas es la constante k propuesta.

Para acabar de determinar el lugar basta observar que las rec-

tas dadas pertenecen también al haz considerado, y que llevando sobre cada una de ellas a partir de O, a uno y otro lado, distancias iguales a $\frac{k}{\text{sen } \varphi}$, los puntos extremos A, B, C, D son límites del lugar en dichas rectas, ya que, por ejemplo, es

$$BB' = BO \text{ sen } \varphi = k,$$

y como P se mueve linealmente en el plano en cada «cuadrante» de los ejes (x, y), el lugar es, en definitiva, el rectángulo ABCD.

Una variación del ángulo φ o de la constante k acarrearía también variación de perímetro y área del rectángulo hallado; pero la propiedad que sintetiza los puntos del contorno subsistiría.

Las ecuaciones de los cuatro lados del rectángulo son

$$\pm x \pm y = \frac{k}{\text{sen } \varphi} \quad [1];$$

pero, sin embargo, no todos los puntos de estas rectas son del lugar. Es preciso acotar las variables.

Pues bien: así como los puntos del perímetro ABCD, formado por cuatro *segmentos*, tienen una propiedad que los unifica, debe existir también una sola expresión analítica que sólo quede verificada por los puntos del perímetro de referencia. Puede conseguirse esto introduciendo valores modulares de las variables. En efecto: la aparente contradicción [1] nace de no tener en cuenta que, en nuestro problema, el concepto de distancia es elemental, independiente de la orientación, o sea, es un valor absoluto, y que la palabra *suma* tiene, pues, el significado primitivo que excluye a la suma algébrica. Es fácil probar que, como consecuencia de esto, los valores absolutos de x y de y han de ser iguales o inferiores a $\frac{k}{\text{sen } \varphi}$ (fracción siempre positiva).

Por lo tanto, considerando las rectas x, y como ejes oblicuos, la suma de los módulos de las coordenadas de un punto genérico S del contorno ha de ser igual a la semidiagonal del rectángulo, es decir,

$$|x| + |y| = \frac{k}{\text{sen } \varphi},$$

ecuación que sólo satisfacen las coordenadas — positivas o negativas — de los puntos del contorno. Poniéndola en forma explícita es

$$|y| = \frac{k}{\operatorname{sen} \varphi} - |x|,$$

lo cual expresa que la diferencia del segundo miembro ha de ser siempre positiva, o lo que es lo mismo: $|x| \leq \frac{k}{\operatorname{sen} \varphi}$. Y, con el fin de no excluir las coordenadas negativas, puede ponerse

$$y = \pm \left(\frac{k}{\operatorname{sen} \varphi} - |x| \right).$$

Por lo tanto, a cada valor, positivo o negativo, de una de las variables corresponden dos opuestos de la otra.

El área del rectángulo lugar, en función de k y φ , es $\frac{2k^2}{\operatorname{sen} \varphi}$ como fácilmente se deduce.

En el caso particular de ser $\varphi = \frac{\pi}{2}$, la ecuación obtenida es $|x| + |y| = k$, y representa los cuatros lados de un cuadrado cuya semidiagonal es k . El área es $2k^2$.

El l. g. de que estamos tratando tiene doble motivo para ser un lugar área: Por una parte, existen dos rectas, x e y , que son conjuntos-variables; por otra, a cada par de puntos elegidos arbitrariamente, uno en x y otro en y , corresponden todos los puntos de una elipse cuyos focos son X e Y y k la constante. O sea, el problema matriz de este lugar, referido sólo al par (X, Y) de entes primitivos produce ya un l. g. unidimensional. Podemos sustituir este problema matriz por otro en el que figure un ente primitivo más, de manera que su solución sea uno o varios puntos, y que resolviéndolo reiteradamente genere el lugar propuesto. Basta para ello considerar como entes primitivos a los de la terna (X, Y, ρ) , y como cuestión encontrar los puntos P_i de ρ que cumplen $P_i X + P_i Y = k$. Haciendo después que estos entes pertenezcan, respectivamente, a las rectas x , y y al haz de rectas de vértice O obtendremos el rectángulo lugar. Se desprende, pues, que los sistemas de lugares parciales inciden según líneas.

Hemos dicho que a cada par de puntos X, Y tomados en x e y arbitrariamente corresponde una elipse f , cuyos puntos han de ser todos del rectángulo hallado. No siempre ocurre que f es tangente a los lados del rectángulo, como se ve, por ejemplo, tomando X e Y de manera que sea $XY = k$; pero existen elipses que tienen un punto límite S . Los focos de estas elipses tangentes al contorno se hallan tomando en éste un punto S arbitrario — que es el

de tangencia — y trazando las perpendiculares SX , SY a x e y . Los pies de ellas son dichos focos.

Si X , Y coinciden en O , la elipse degenera en la circunferencia de centro O y radio $1/2 k$, y ningún punto de ella es límite, porque O no puede ser pie de dos perpendiculares a x e y trazadas desde un mismo punto.

Finalmente, si a uno de los dos entes primitivos X , Y se le considera fijo y el otro varía en su recta obtenemos un lugar parcial que es también un área, y que vamos a resolver a continuación.

12. — *Lugar de los puntos cuya suma de distancias a uno fijo F y a otro variable sobre una recta r es una constante k finita.*

La generación de este lugar puede hacerse así: Supongamos dos puntos X y F y una recta ρ que pasa por el último. Ahora cabe el problema de hallar sobre ρ los puntos P_i tales que $P_iX + P_iF = k$. El lugar propuesto queda generado asignando a los entes primitivos X y ρ sendos conjuntos-variables: una recta r al primero y el haz de rectas de vértice F a la segunda. El otro ente primitivo F permanece fijo. Y siendo lineales ambos conjuntos-variables es claro que el lugar ha de ser una área.

Dejando fijo X y considerando todas las rectas del haz tendremos un lugar parcial correspondiente a dicho haz, que es la elipse de focos X y F y constante k . Del mismo modo, un lugar parcial correspondiente al conjunto-variable r es un segmento rectilíneo que contiene a F . La incidencia de ambos sistemas de lugares parciales es forzosamente de dimensión *cero*.

He aquí cómo puede obtenerse el lugar total: Tracemos las parábolas de foco común F (fig. 15), cuyas directrices d y d' distan k de la recta r . Se ven fácilmente dos cosas: 1ª. Estas parábolas tienen comunes dos puntos reales M, N que pertenecen también a r , y son simétricos, claro es, respecto del eje común a ambas curvas. 2ª. Los arcos MSN , MQN de estas dos parábolas tienen la propiedad de que la suma de las distancias de sus puntos a F y a r es k ; luego tales arcos son del lugar propuesto.

Todo punto P del recinto $MSNQM$ es también del lugar, y los P' , exteriores a él, no lo son. Basta, en efecto, observar que es $PX + PF < k$ y $P'X + P'F > k$. En el primer caso siempre existen dos oblicuas a r desde P cuyas longitudes respectivas sumadas a PF dan k .

pero del triángulo P_2DF se deduce:

$$(k - P_2X)^2 = b^2 + (P_2X + c)^2; P_2X = \frac{k^2 - b^2 - c^2}{2(k+c)},$$

valor que sustituido en el de OR nos da:

$$OR = \frac{k^2 + b^2 - c^2}{2b}.$$

Escribiendo relaciones análogas deducidas de la semejanza de los triángulos RXP_1 y GEF se obtiene el mismo valor último para la ordenada de la intersección de r y la tangente en P_1 al arco MSN , c.s.q.d.

Los puntos de la curva $MSNQM$ tienen una propiedad que los sintetiza, y vamos a encontrar la expresión analítica que representa esa propiedad.

La abscisa x de un punto genérico de la curva compuesta, sumada al radio vector ρ de dicho punto, ha de dar la constante prefijada k , teniendo en cuenta sólo el valor absoluto de x . Es decir, $|x| + \rho = k$. Pero $\rho = \sqrt{y^2 + (c-x)^2}$, donde y es la ordenada del punto genérico. Obsérvese que la x del radicando no está modulada. Sustituyendo y elevando al cuadrado resulta

$$y^2 = 2cx - 2k|x| + k^2 - c^2 \quad [I],$$

ecuación que nos permite hallar la ordenada (positiva o negativa) de un punto de abscisa $\pm x$.

Comprobemos algunos valores: Desde luego, la ecuación $[I]$ indica simetría de la curva respecto del eje x , como así es, en efecto. Si hacemos $x=0$, es $y = \pm \sqrt{k^2 - c^2}$, lo cual indica que el radio vector de los puntos M y N es k , de acuerdo con la figura. Haciendo $y=0$, ha de ser $2k|x| - 2cx = k^2 - c^2$. El primer término es siempre positivo, y el segundo será positivo cuando x sea negativo, y recíprocamente. Por lo tanto, $2x(k \mp c) = k^2 - c^2$;

$$x' = 1/2(k+c); x'' = -1/2(k-c),$$

valores que tienen los segmentos OS y OQ respectivamente.

Sustituyendo el valor x' en $[I]$, y se anula. Si hacemos $x > 1/2(k+c)$, como es siempre $k > c$, la diferencia $2cx - 2k|x|$ sería

entonces inferior $c^2 - k^2$, y el segundo miembro de la ecuación [1] se haría negativo. Análogamente puede decirse cuando $x < -1/2(k - c)$. Por consiguiente, la curva límite del lugar propuesto sólo está definida en el intervalo $-1/2(k - c) \leq x \leq 1/2(k + c)$.

Por último, cuando es $y > \sqrt{k^2 - c^2}$, o $y < -\sqrt{k^2 - c^2}$ resulta $2cx - 2k|x| > 0$, y no existen valores reales de x que verifican esta última desigualdad. La curva queda, pues, definida, como ya sabíamos, sólo en el intervalo $-\sqrt{k^2 - c^2} \leq y \leq \sqrt{k^2 - c^2}$.

Si en vez de ser una recta el conjunto-variable r fuese un segmento, el lugar estaría limitado por arcos de parábola y elipse.

Cuando el punto dado F pertenece a la recta r , la curva límite tiene como centro de simetría dicho punto, y MN es igual a $2k$; los puntos de ordenada nula tendrían la abscisa $\pm 1/2k$.

13. — *Lugar de los puntos cuya suma de distancias a otros dos arbitrariamente elegidos respectivamente en una circunferencia y una recta es una constante k .*

Este lugar es una generalización del correspondiente al número 11, y presenta tres casos, según sea $k \geq c + r$, donde c es la distancia entre el centro del círculo y la recta dados, y r el radio de dicho círculo.

1er. caso: $k > c + r$.

Tracemos las parábolas de foco común O (fig. 16) y directrices ρ' , ρ'' , ambas paralelas a la recta dada ρ y distantes de ella $k + r$. Se ve inmediatamente que los arcos DGF y DEF tienen comunes dos puntos reales D y F situados en ρ y simétricos respecto del eje común EG a ambas curvas. Cualquier punto P del arco DGF verifica:

$$PO + PA = k + r,$$

y otro punto N genérico del arco DEF verifica también:

$$NO + NA = k + r.$$

Por lo tanto,

$$PM + PA = k = NS + NA;$$

luego los puntos de la curva φ compuesta de ambos arcos son del lugar, y tienen la propiedad de que la suma de sus distancias a la circunferencia y a la recta dadas es k .

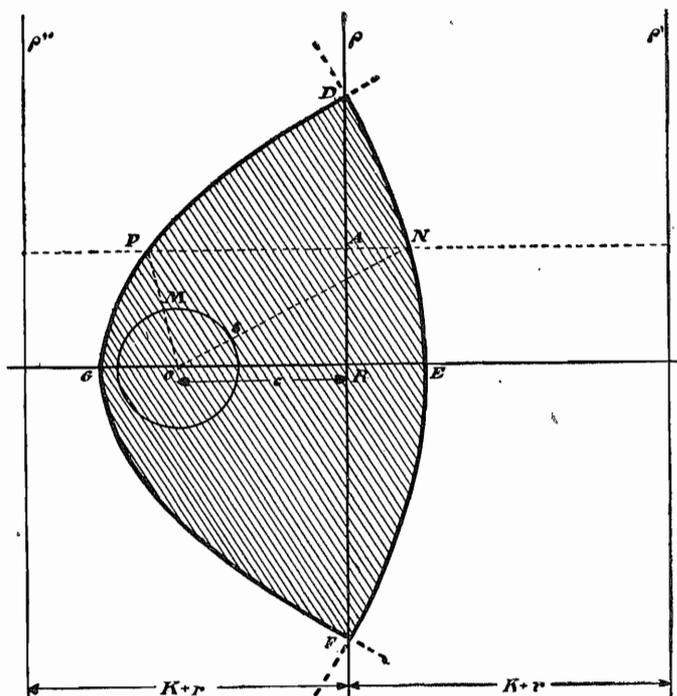


Fig. 16

Del mismo modo como se hizo en el problema anterior, puede probarse que todo punto del recinto de φ es también del lugar, y no lo son los puntos restantes del plano. El lugar es, pues, dicho recinto con la curva φ .

Como es $k > c + r$, todos los puntos de la circunferencia dada son del lugar, y ninguno de ellos pertenece a φ .

2do. caso: $k = c + r$.

Sabemos que es $GR + GO = k + r = c + 2r$; o sea, $GO = r$. En este caso la parábola de directriz ρ'' es, pues, tangente a la circunferencia, y, por consiguiente, $RE = r$.

3er. caso: $k > c - r$, y $k < c + r$.

Si hacemos la construcción como en los casos anteriores veremos (fig. 17) que el arco CVD de la parábola de foco O y di-

rectriz d' ha de cortar forzosamente (o ser tangente exterior cuando es $k=c-r$) a la circunferencia dada. Pues bien, la curva φ compuesta que limita el lugar en este caso es la misma que en los precedentes, excepto el arco EVF interceptado en la circunferencia. Basta ver que los puntos E y F distan k de ρ ; y menos de k los de los arcos EC y FD . En cambio, los puntos del arco EVF tienen abscisa superior a k , y no pueden ser ya del lugar.

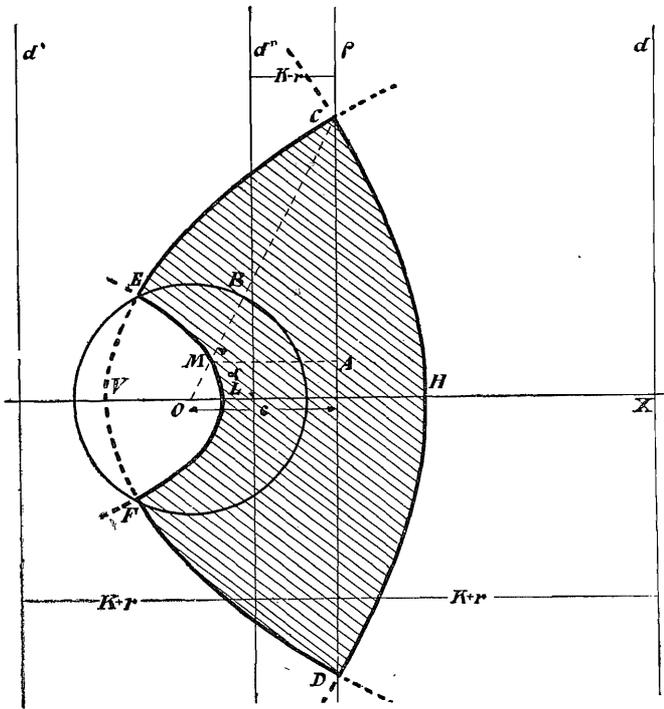


Fig. 17

Sea M un punto genérico de φ entre E y F ; trazando MA , perpendicular a ρ , y el radio OB que pasa por M , ha de ser:

$$MA + MB = k; \quad MA + r - MO = k; \quad MA - MO = k - r;$$

luego M es de la parábola de foco O y directriz d'' (paralela a ρ y distante de ella $k-r$).

La curva φ de los casos anteriores sufre ahora una *refracción* en el círculo dado.

Tratemos de hallar la ecuación polar del conjunto de arcos de φ , siendo 0 el polo, y α el ángulo formado por el eje polar OH y el radio vector genérico μ . La distancia ϑ desde un punto de φ a la circunferencia dada sumada al módulo de la abscisa de dicho punto (en el sistema de ejes OH, ρ) ha de ser k. Es decir,

$$\vartheta + |x| = k \quad [1].$$

Si el punto de φ no pertenece al círculo dado, es $\vartheta = \mu - r$, y si pertenece a este círculo, $\vartheta = r - \mu$, con lo cual es siempre $\vartheta = |\mu - r|$. El valor $|x|$ es la distancia del punto de φ a la recta dada ρ . Sea λ la proyección de μ sobre OH. Si el punto se toma en el arco CHD, es $|x| = \lambda - c$, y en caso contrario $|x| = c - \lambda$ — obsérvese que si el punto tiene una abscisa $|x| > c$, como es $\lambda = \mu \cos \alpha$ y $\frac{3\pi}{2} > \alpha > \frac{\pi}{2}$, el coseno es negativo, y $|x| = c + \lambda$ —. Para todos los puntos de φ resulta, pues $|x| = |c - \lambda| = |c - \mu \cos \alpha|$. Sustituyendo en [1] estos valores tendremos:

$$|\mu - r| + |c - \mu \cos \alpha| = k \quad [2],$$

y, sucesivamente,

$$\begin{aligned} |c - \mu \cos \alpha| &= k - |\mu - r|; \\ c^2 + \mu^2 \cos^2 \alpha - 2c\mu \cos \alpha &= (k - |\mu - r|)^2; \\ \cos \alpha &= \frac{c \pm (k - |\mu - r|)}{\mu} \end{aligned} \quad [3],$$

ecuación que permite representar gráficamente el conjunto de arcos de parábola que limita al lugar con sólo dar valores a μ ; el valor máximo de μ es $k + r$, pues si fuese $|\mu - r| > k$ tendríamos $|c - \mu \cos \alpha| < 0$, como se deduce de [2], lo cual es absurdo.

El doble signo de [3] indica que $\cos \alpha$ ha de tener dos valores diferentes para cada valor de μ , cosa que no es cierta sino cuando $1/2(c + k + r) \leq \mu < k + r$. Y, en efecto, si en [3] damos a μ valores más pequeños, uno de los dos de $\cos \alpha$ resulta mayor que 1, y debe despreciarse.

En la figura vemos que $OL = 1/2(r + c - k)$, y sustituido en [3] nos da para el coseno un valor igual a la unidad, y otro mayor, que se desprecia. Para valores $\mu < 1/2(r + c - k)$ los dos

del coseno son mayores que la unidad, con lo cual la curva φ está definida en el intervalo $1/2(c+r-k) \leq \mu \leq k+r$.

14. — Si en el problema anterior consideramos fijo un punto en la recta dada ρ y variable a otro en la circunferencia, obtenemos un lugar parcial, que es, a su vez, un área, y que vamos a determinar.

Sea r el radio de la circunferencia, O su centro y P el punto fijo (fig. 18). Puede ocurrir tres casos: $k \geq OP + r$.

1er. caso: $k > OP + r$.

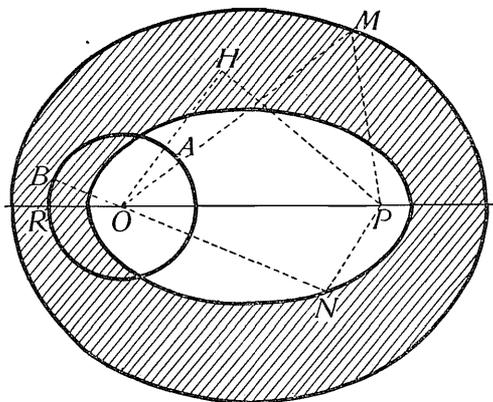


Fig. 18

Los puntos de una elipse de constante $k+r$ y focos O y P son del lugar, pues si M es uno genérico se tiene:

$$MO + MP = k + r; \quad MA + MP = k.$$

Todo punto exterior a esta elipse no es del lugar, por ser MA la menor distancia desde M a la circunferencia.

Tracemos otra elipse de constante $k-r$ homofocal a la anterior. Un punto N genérico de ella verifica:

$$NO + NP = k - r; \quad NB + NP = k;$$

luego N es también del lugar propuesto, y no lo son los puntos interiores a esta elipse, porque NB es la distancia máxima desde N a la circunferencia.

Todo punto H de la corona elíptica determinada por ambas elipses es del lugar, pues

$$k - r < HP + HO < k + r,$$

es decir, siempre existen dos vectores desde H a la circunferencia que sumados separadamente a PH dan k .

El lugar es, por lo tanto, la corona elíptica dicha.

2º. caso: $k = OP + r$.

Las elipses que limitan la corona tienen, en este caso, por constantes $k - r = OP$ y $k + r = OP + 2r$ respectivamente. El lugar es, pues, toda el área no exterior a la elipse de constante $k + r$, ya que la otra degenera en el segmento OP . La elipse límite de este lugar es tangente en R a la circunferencia dada.

3er. caso: $k < OP + r$, y $k > OP - r$.

La elipse de focos O y P y constante $k + r$ corta entonces, forzosamente, a la circunferencia, y, lo mismo que en los casos anteriores, pertenece y limita al lugar, excepto el arco MTH (fig. 19) interceptado en la circunferencia: Basta ver, en efecto, que los puntos de este arco distan de P más de k .

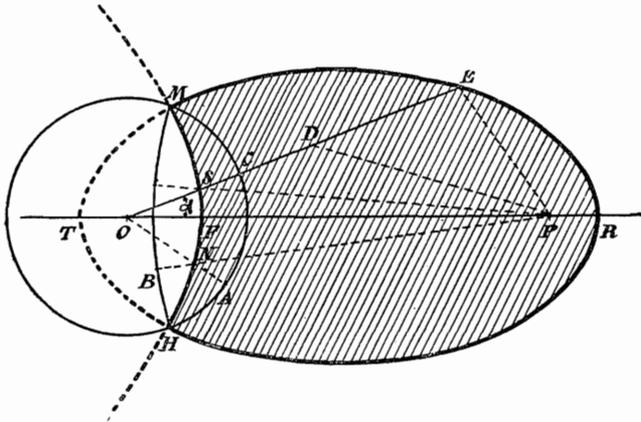


Fig. 19

Tracemos con centro en P y radio k un arco de circunferencia MBH , y sea PB un radio genérico de este arco. Sobre PB existe siempre un solo punto N tal que, trazando ON , es $NB = NA$;

y este punto N es del lugar y corresponde a la curva que lo limita, por ser NA la menor distancia desde N a la circunferencia.

Se verifica:

$$r - NO = k - NP; \quad NP - NO = k - r.$$

El lugar geométrico de los puntos N es, pues, el arco MNH de la hipérbola de focos O, P y constante $k - r$.

Todo punto D no exterior al recinto MNHRM es del lugar propuesto, por ser

$$DO + DP < k + r; \quad DC + DP < k;$$

y si unimos M y D será $DM + DP > k$, luego han de existir forzosamente en el arco MCH de la circunferencia dada dos puntos, X_1, X_2 , para los cuales sea $DX + DP = k$. El lugar es, por lo tanto, la superficie rayada en la figura.

Cuando $r = k$, el arco MNH degenera en un segmento rectilíneo, que pasa a ser eje menor de la elipse, en tal caso de constante $2k$.

Los puntos de la curva compuesta que limita al lugar están ligados por la propiedad de ser k la suma de sus distancias a la circunferencia dada y a un punto P exterior a ella. A esta propiedad que los unifica corresponde una sola expresión analítica con módulos, que podemos obtener en coordenadas polares: Hagamos $OP = c$, y sea O el polo. Desde él tracemos una secante cualquiera, que cortará a la curva límite en puntos S, E.

Sabemos que es

$$SC + SP = EC + EP = k,$$

y llamando d a cualquiera de los radios vectores correspondientes a los pares de puntos S, E, la distancia de todo punto de la curva a la circunferencia quedará expresada siempre por $|d - r|$. La distancia de un punto genérico de la curva a P viene dada por

$$EP = \sqrt{d^2 + c^2 - 2dc \cos \alpha},$$

siendo en este caso $d = OE$. Para el punto S sería $d = OS$, y la distancia, SP. La ecuación que traduce la propiedad que sintetiza a

los puntos de la curva compuesta toma, pues, la forma.

$$|d - r| + \sqrt{d^2 + c^2 - 2dc \cos \alpha} = k;$$

y, sucesivamente,

$$\begin{aligned} \sqrt{d^2 + c^2 - 2dc \cos \alpha} &= k - |d - r|, \\ \cos \alpha &= \frac{c^2 - k^2 - r^2 + 2dr + 2k |d - r|}{2dc} \end{aligned}$$

A cada valor de d corresponden dos opuestos y admisibles de α , con lo cual la curva es simétrica respecto del eje polar. En virtud del término $2k |d - r|$ existen dos valores para d , tales como los correspondientes a los puntos S y E , que verifican [1], para un mismo ángulo.

De la figura se deduce que el radio vector de R vale $\frac{1}{2}(r + c + k)$; sustituido en [1], y teniendo en cuenta que la diferencia $\frac{1}{2}(r + c + k) - r$ es positiva, obtenemos $\cos \alpha = 1$. Un valor mayor de d nos conduciría a la desigualdad $\cos \alpha > 1$, por ser $k + r > c$. El radio vector ha de cumplir de momento la limitación $d \leq \frac{1}{2}(c + r + k)$.

El d correspondiente a F vale $\frac{1}{2}(c + r - k)$, y la diferencia $\frac{1}{2}(c + r - k) - r$ es negativa; pero podemos cambiar los signos, por estar modulada en [1], y entonces dicha expresión es $\cos \alpha = 1$.

Un valor $d < \frac{1}{2}(c + r - k)$ aumentaría el módulo $|d - r|$, y, por lo tanto, $\cos \alpha$, que llegaría a valer más de la unidad. Luego debe ser

$$\frac{1}{2}(c + r - k) \leq d \leq \frac{1}{2}(c + r + k).$$

Dando a d valores que cumplen esta limitación, sustituidos en [1], encontraremos ángulos $\pm \alpha$ que permiten representar la curva límite.

15. — *Lugar de los puntos cuya suma de distancias a dos elegidos arbitrariamente en sendas circunferencias es k .*

Sean O y O' los centros de las circunferencias, y r y r' sus radios (fig. 20), suponiendo $r' > r$.

1er caso: $k > OO' - r + r'$.

Con focos O, O' tracemos dos elipses φ, φ' de constantes $k + r + r'$ y $k - r - r'$ respectivamente. Es fácil ver que los puntos P , de la primera, y M , de la segunda, son del lugar, y pertenecen también: P a la elipse de focos A, B y constante k , y M a la de focos F, H e igual constante.

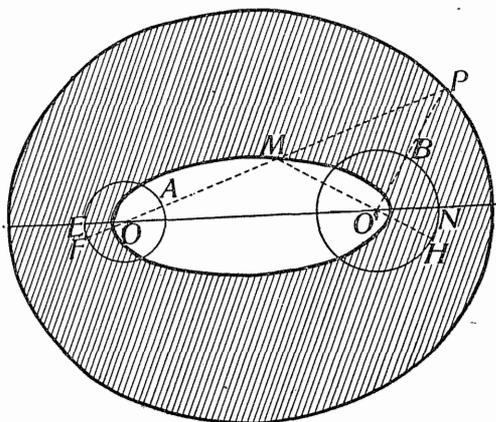


Fig. 20

Todo punto exterior a φ no es del lugar propuesto, como tampoco lo son los puntos interiores a φ' . Todo punto Q de la corona limitada por φ y φ' es del lugar, pues

$$k + r + r' > QO + QO' > k - r - r';$$

luego siempre existen dos oblicuas a las circunferencias que sumadas dan k .

El lugar es dicha corona elíptica; y los círculos dados quedan dentro de φ .

2º. caso: $k = OO' - r + r'$.

Sumando ambos radios a los miembros de esta igualdad es $k + r + r' = OO' + 2r'$. La elipse envolvente del lugar es tangente en N a la circunferencia de radio r' . Restando la suma de los radios es $k - r - r' = OO' - 2r$, o sea, que el lugar es la elipse φ y su recinto. Cuando $EN = k$, φ' degenera en un segmento rectilíneo. Si es $r = r'$ y $k = OO'$, la elipse φ (en este caso constante $k + 2r$) es tangente a ambas circunferencias en E y N .

3er. caso: $k < OO' - r + r'$ y $k > OO' - (r + r')$.

En estas condiciones, la elipse φ ha de cortar por lo menos a la circunferencia de radio r' (cuando es $OO' - r' + r < k < OO' - r + r'$), y corta a las dos circunferencias dadas si es $k < OO' - r' + r$. Supongamos que ocurre esto último. La elipse φ limita, como en los casos anteriores, al lugar propuesto, excepto los arcos DSG y BTE interceptados en los círculos conocidos, como es fácil probar (fig. 21). Se ve también fácilmente que los puntos B y E de la elipse φ los son asimismo de una rama de hipérbola

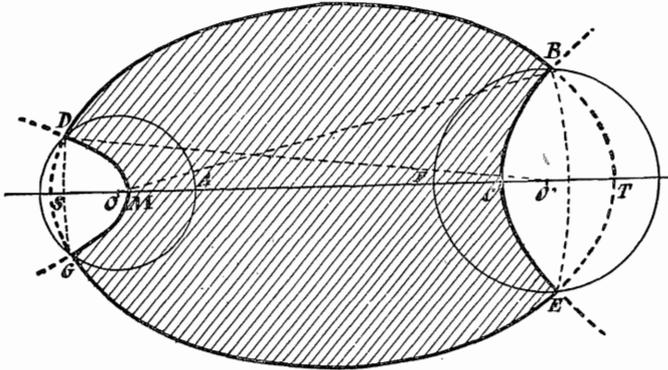


Fig. 21

homofocal a φ de constante $k + r - r'$; y que los puntos D y G pertenecen a una rama de otra hipérbola homofocal a φ , de constante $k + r' - r$. Los arcos BCE y DMG de estas hipérbolas mencionadas sustituyen, respectivamente, a los BTE y DSG de φ ; es decir, que la curva que limita al lugar es la BDMGECB. Todo punto H del recinto de esta curva es del lugar propuesto, cosa bien fácil de reconocer.

Si es $r = r'$ la figura tiene dos ejes de simetría.

16. — Tomemos un segmento rectilíneo AB de longitud k (fig. 22), y con centro en uno de sus extremos — B, por ejemplo — tracemos una circunferencia genérica C del haz de las de radio x que verifica $0 \leq x \leq k$, y centro B. Esta circunferencia corta en X al segmento AB. Hallemos el conjugado armónico Y de X respecto de AB, y desde Y tracemos todas las secantes y tangentes a C. Hallar el l. g. de los centros Z de todas las cuerdas γ intercep-

tadas por las secantes y tangentes en todas las circunferencias C del haz mencionado (*).

Para la circunferencia C considerada el lugar de los centros Z es el arco PBQ que pertenece a la circunferencia de diámetro BY . Veamos cuál es el l. g. de los puntos P y Q de tangencia en todos los círculos del haz.

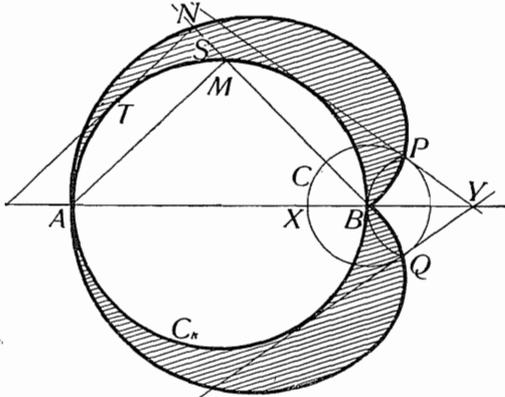


Fig. 22

Es fácil observar que las tangentes YP , YQ lo son asimismo a la circunferencia fija C_k de diámetro AB . Por lo tanto, los puntos P_i y Q_i genéricos son pies de las perpendiculares trazadas desde B a todas las tangentes a C_k . El lugar P_i y Q_i es, pues, una podaria de C_k ; y por ser B de C_k dicha podaria es cardioide de C_k .

Tenemos así una figura constituida por la circunferencia C_k y su cardioide respecto de B . Vamos a probar que el lugar propuesto es el área comprendida entre estas dos curvas. En efecto: reconoceremos que un punto S del plano es del lugar cuando unido con B , la perpendicular en S a BS no corta al segmento AB , o lo corta en A . Mas no basta esto: es preciso, además, que dicha perpendicular tenga algún punto común con la circunferencia C_k . Tracemos por B una recta arbitraria BN , y dos perpendiculares a ella: una en M (punto de intersección con C_k) y otra en N (punto de intersección con la cardioide). La primera perpendicular corta en A al segmento AB , y la otra es tangente a C_k . Luego en

(*) Propuesto por Carlos R. de las Cuevas.

la semirrecta BN sólo son puntos del lugar los del segmento MN interceptado en el área dicha.

Si, dada una circunferencia C , trazamos además la que es tangente exterior a ella de centro A , vemos que el punto Y ya aludido es centro de semejanza directa de ambas circunferencias C, C' . Podemos considerar entonces, no sólo las cuerdas γ interceptadas en C por las secantes desde Y , sino también las γ' correspondientes a C' sobre las mismas secantes, y hallar el l. g. de los pares de puntos Z, Z' , centros respectivos de esas cuerdas cuando se traza todos los pares de circunferencias tangentes C, C' . Obtendríamos el área limitada por $C\gamma$ y sus dos cardioides φ, φ' simétricas respecto de O (fig. 23).

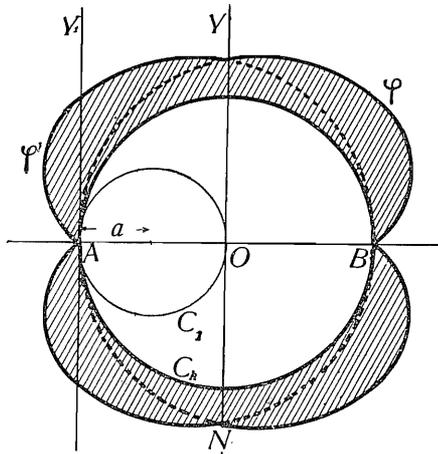


Fig. 23

Si en una función $y=f(x)$, uniforme, continua, etc., con puntos reales en el primer cuadrante, modulamos la variable x , a cada par de valores opuestos de x corresponderá uno mismo para y . Representará, pues, una línea simétrica respecto del eje OY : los valores negativos de x en la función $f(x)$ proporcionaban puntos a la izquierda de OY , que, en general, no existirán después de introducir $|x|$, a cambio de obtener otros simétricos de los situados a la derecha. Cosa análoga acontece en la función $x=\varphi(y)$. Si en la función $F(x, y)=0$ modulamos ambas variables desaparecerán todos los puntos no situados en el primer cuadrante, a cambio de los simétricos de éstos respecto de los ejes coordenados y el origen.

La ecuación de la cardioide φ' referida a los ejes (X, Y_1) es

$$(x_1^2 + y^2 - 2 a x_1)^2 = 4 a^2 (x_1^2 + y^2),$$

siendo a el radio de la circunferencia C_1 . Referida al sistema (X, Y) será $x_1 = x + 2 a$, y se transforma en

$$[(x + 2 a)^2 + y^2 - 2 a (x + 2 a)^2] = 4 a^2 [(x + 2 a)^2 + y^2],$$

$$(x^2 + y^2 + 2 a x)^2 = 4 a^2 [x^2 + y^2 + 4 a (a + x)].$$

Poniendo $-x$ en vez de x se obtiene la ecuación de la cardioide φ :

$$(x^2 + y^2 - 2 a x)^2 = 4 a^2 [x^2 + y^2 + 4 a (a - x)]$$

y modulando x , la ecuación resultante representa el conjunto de los cuatro arcos que limitan el lugar, de una parte:

$$(x^2 + y^2 - 2 a |x|)^2 = 4 a^2 [x^2 + y^2 + 4 a (a - |x|)],$$

simétrica respecto de los dos ejes.

Es claro que lo dicho de la modulación de las variables en una función plana es aplicable al espacio ordinario E_3 .

* * *

He aquí algunos enunciados de lugares de puntos áreas en el plano:

Superficies medias:

De las ramas de una hipérbola.

De una circunferencia y los lados de un cuadrado. Casos particulares.

De la lemniscata.

De la podaria de una curva. Etc., etc.

Otros lugares:

Sea V el punto base de un haz de circunferencia C_i , todas tangentes en V , cuyos diámetros $+x$ cumplen la limitación $0 \leq x \leq k$. Tracemos todas las cuerdas VX de las C_i , y a partir de los extremos X tomemos segmentos XP_i de modo que sea $VX + XP_i = k$.

Los segmentos XP_i son exteriores a sus circunferencias C_i y se construyen de forma que las tangentes en los X a las C sean bisectrices de los ángulos VXP_i . Hallar el lugar de los puntos P . Es decir, las cuerdas quedan *refractadas*.

Sean dos rectas r, r' que se cortan en O . Tomemos arbitrariamente sendos puntos X, Y en esas rectas. Hallar el lugar de los baricentros y ortocentros de los triángulos OXY .

Lugar de los puntos P tales que sea $\overline{PX}^2 + \overline{PY}^2 = k$, siendo X e Y puntos arbitrarios de sendas rectas dadas.

Lugar de los puntos P que cumplen $PX + PY = k$ (X e Y son puntos arbitrarios de sendas ramas de una hipérbola). Casos particulares.

Lugar de P cuando es $PX \cdot PY = k$. X e Y puntos de sendas rectas. Casos particulares.

ROBERTO FRUCHT

CORONA DE GRUPOS Y SUS SUBGRUPOS
CON UNA
APLICACION A LOS DETERMINANTES

UNION MATEMATICA ARGENTINA
Publicación N.º 24

BUENOS AIRES
1942

ROBERTO FRUCHT

CORONA DE GRUPOS Y SUS SUBGRUPOS
CON UNA
APLICACION A LOS DETERMINANTES

UNION MATEMATICA ARGENTINA
Publicación N.º 24

BUENOS AIRES
1942



CORONA DE GRUPOS Y SUS SUBGRUPOS, CON UNA APLICACION A LOS DETERMINANTES

por ROBERTO FRUCHT

INTRODUCCION

Varios autores (véase el breve resumen histórico en el § 1) han observado que con dos grupos de permutaciones P_r y H respectivamente en r y s variables, se puede formar un nuevo grupo de permutaciones en rs variables, la «corona» $P_r[H]$. Para la definición de este grupo véase el § 2, para ejemplos de «coronas» el § 3. Después de haber indicado, en el § 4, la fórmula general para el producto de dos permutaciones de una corona, y en el § 5 unas consecuencias de dicha fórmula, paso, en el § 6, a la consideración de ciertos subgrupos de una corona, que están en analogía con los subgrupos «meromorfos» considerados en el caso de un producto directo por R. Remak en Lit. 5) (*).

Como a estos subgrupos da origen un subgrupo invariante J del grupo H , los denoto por $P_r[H;J]$ Tomando para P_r el grupo de orden 2, para H el grupo simétrico en n cifras y para el subgrupo invariante J el grupo alternado en n cifras, obtengo (en el § 7) un grupo interesantísimo del orden $(n!)^2$, que sólo para $n \leq 3$ es isomorfo al producto de dos grupos simétricos en n cifras. En el § 8 se demuestra además que dicho grupo es isomorfo al grupo de las permutaciones de los elementos de un determinante del orden n , las que no alteran el valor del determinante.

§ 1. Breve resumen histórico.

Parece que el primero que haya considerado, en un caso particular, la ley de formación de coronas de grupos, haya sido A. Scholz en Lit. 8); él observó que con dos grupos abstractos S y T , respectivamente de los órdenes σ y τ , se puede formar un nuevo grupo abstracto del orden $\sigma\tau^\sigma$, llamado

(*) Con la palabra «Lit.» me refiero siempre a la lista de «Literatura citada» al final de este artículo.

por él $S \# T$; este grupo no es nada más que el caso particular de una corona de grupos S/T , cuando para S se toma la representación del respectivo grupo abstracto por permutaciones regulares. El ejemplo de grupos cíclicos había sido considerado por Scholz en una publicación precedente (Lit. 7), bajo el nombre «Metabelsche Dispositionsgruppe».

Otro caso particular, el de las coronas del tipo $S_n[H]$ (designando por S_n siempre el grupo simétrico en n variables, del orden $n!$), ha sido considerado, casi simultáneamente, por B. Neumann (Lit. 3) y W. Specht (Lit. 10). El primero concentra su interés en la generación de $S_n[H]$ — y en particular de $S_n[S_m]$ — por pocos elementos, estableciendo entre ellos relaciones que definan el grupo; en cambio Specht, siguiendo un consejo de I. Schur, ha estudiado el problema de la representación de $S_n[H]$ por matrices (sustituciones lineales homogéneas), y el mismo problema también para el caso de la corona más general $P_r[H]$, en una segunda publicación (Lit. 11) (**).

Más tarde, e independientemente de las publicaciones citadas, G. Pólya llegó al concepto de las coronas de grupos, en una publicación (Lit. 4) igualmente interesante para quien se ocupe de grupos, topología combinatoria, teoría de funciones complejas o química orgánica. Pólya da una definición muy intuitiva de la corona $P_r[H]$ y aplicaciones interesantísimas a la topología combinatoria, observando que el grupo de automorfismos de un «álbero» se puede obtener aplicando a cierto número de grupos simétricos $S_{m_1}, S_{m_2}, \dots, S_{m_k}$, un número finito de veces, las dos operaciones: formación del producto directo y de la corona.

Con la traducción «corona» del término alemán «Kranz», yo quisiera seguir la terminología de Pólya, que me parece ser muy feliz. Pero observo que en lo que sigue no supongo el conocimiento del artículo de Pólya ni de las otras publicaciones citadas más arriba, sino que desarrollaré completamente el concepto de la corona, en la forma más adecuada para el estudio de las cuestiones a cuya solución quisiera contribuir con la presente publicación.

(**) Cabe observar que Neumann y Specht designan la corona por $S_n(H)$ resp. $P_r(H)$. La notación $P_r[H]$ y la misma palabra «corona» (en alemán «Kranz») se encuentran por primera vez en la publicación de Pólya (Lit. 4).

§ 2. *Definición de la corona $P_r[H]$. Descomposición en componentes.*

Dados dos grupos de permutaciones P_r y H , respectivamente en r y s variables, consideramos en una sala r mesas distintas; cada una sea rodeada de s sillas distintas en cierto orden bien determinado. Distribuimos ahora rs personas, numeradas desde 1 hasta rs , sobre las sillas, de modo que cada silla sea ocupada exactamente por una persona. Sometiendo las r mesas (con sus sillas, sin alterar, por ahora, el orden relativo de estas últimas alrededor de cada mesa) a las permutaciones del grupo P_r , y sometiendo sucesivamente las sillas de cada mesa a permutaciones del grupo H , las rs personas sufrirán ciertas permutaciones cuyo conjunto forma un grupo de permutaciones en rs variables.

Esta es una explicación intuitiva del concepto de la corona $P_r[H]$. Una definición exacta sería la siguiente:

Dados, como antes, un grupo de permutaciones en r variables P_r , del orden π , y otro en s variables, H , del orden η , consideramos r «ejemplares» de H , es decir r grupos $H^{(1)}$, $H^{(2)}$, ..., $H^{(r)}$, cada uno isomorfo (*) al grupo H , y con ellos formamos el producto directo $H^{(1)} \times H^{(2)} \times \dots \times H^{(r)}$, es decir, el grupo del orden η^r en rs variables, por ejemplo en las variables

$$(I.) \left\{ \begin{array}{cccc} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_s^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_s^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(r)} & x_2^{(r)} & \dots & x_s^{(r)} \end{array} \right.$$

que resulta cuando para cada $\rho = 1, 2, \dots, r$, las variables $x_1^{(\rho)}, x_2^{(\rho)}, \dots, x_s^{(\rho)}$, son sometidas a las permutaciones del grupo $H^{(\rho)}$.

En otras palabras, si $h_1^{(1)}$ es una permutación de $H^{(1)}$ (correspondiente, en base del isomorfismo $H^{(1)} \sim H$, a la per-

(*) Empleo las palabras "isomorfo" e "isomorfismo" siempre en el sentido de una correspondencia recíprocamente unívoca entre los elementos de dos grupos G y H , la que mantiene la ley de multiplicación, y denoto este isomorfismo abreviadamente por $G \sim H$.

mutación h_1 de H), $h_2^{(2)}$ una de $H^{(2)}$ (correspondiente a la h_2 de H), etc., el elemento $h_1^{(1)} . h_2^{(2)} h_r^{(r)}$ de $H^{(1)} \times H^{(2)} \times . . . \times H^{(r)}$ es la permutación de las rs variables $x_\sigma^{(\rho)}$ que se compone de la permutación $h_1^{(1)}$ de las variables $x_\sigma^{(1)}$ que forman la primera fila del esquema (I.), de la permutación $h_2^{(2)}$ de las variables $x_\sigma^{(2)}$ de la segunda fila, etc.

Ahora bien, si el grupo P_r tiene el orden $\pi = 1$, definimos: $P_r[H] = H^{(1)} \times H^{(2)} \times . . . \times H^{(r)}$; si el orden π de P_r es mayor que 1, a cada permutación p de P_r hacemos corresponder la permutación $p^{(0)}$ de las variables $x_\sigma^{(\rho)}$ que resulta cuando las r filas horizontales del esquema (I.) son sometidas a la permutación p (sin alterar el orden de las variables en cada fila), y consideramos las permutaciones

$$p^{(0)} . h_1^{(1)} . h_2^{(2)} h_r^{(r)}$$

de las variables $x_\sigma^{(\rho)}$ del esquema (I.), es decir, aquellas, en donde primeramente las filas del esquema son sometidas a una permutación de P_r y después las variables en las filas a permutaciones que corresponden a las del grupo H . Estas πr permutaciones del tipo $p^{(0)} . h_1^{(1)} . h_2^{(2)} h_r^{(r)}$ forman la corona $P_r[H]$.

Se ve fácilmente que la corona $P_r[H]$ es realmente un grupo. Sin anticipar la fórmula para el producto de dos permutaciones de $P_r[H]$, la que será indicada en el § 4 (y que sirvió a Specht como definición de la corona), se comprende «a priori» que el resultado de dos permutaciones sucesivas del tipo descrito es también una permutación del mismo tipo (lo que es suficiente para que un conjunto de permutaciones forme un grupo).

Cabe observar que es unívoca la representación de las permutaciones de la corona $P_r[H]$ en la forma

$$u = p^{(0)} h_1^{(1)} h_2^{(2)} h_r^{(r)}$$

en donde $p^{(0)}$ es una permutación de las filas (sin alterar en ellas el orden relativo de las variables) y $h_\rho^{(\rho)}$ es una permutación de las variables de la ρ -ésima fila del esquema (I.) ($\rho = 1, 2, . . . r$). Diremos que $p^{(0)}$ es la componente de la permutación u respecto

de P_r y $h_p^{(\rho)}$ la *componente* de u respecto de $H^{(\rho)}$ ($\rho = 1, 2, \dots, r$). Está claro cómo hay que proceder para encontrar las componentes de una permutación u de las variables del esquema (I.) la que pertenece a la corona $P_r[H]$: primeramente se considera sólo la permutación p que sufren las filas horizontales del esquema (sin tomar en cuenta, por ahora, lo que pasa con las variables mismas en las filas); escribiendo dicha permutación de las filas como permutación de las variables $x_\sigma^{(\rho)}$, obtenemos la componente $p^{(0)}$ de u respecto de P_r . Las otras componentes se determinan después fácilmente como las permutaciones de las variables en cada fila que hay que agregar a $p^{(0)}$ para obtener u .

Un ejemplo de esta descomposición en componentes seguirá en el § 3.

§ 3. Ejemplos para coronas.

a) Consideremos un octaedro regular (Fig. 1) y su grupo, es decir el grupo de los movimientos (rotaciones) que lo dejan invariante. Como se sabe, este grupo es isomorfo al grupo simétrico S_4 en 4 variables, porque hay isomorfismo entre dichos movimientos y todas las permutaciones de las 4 rectas que unen los centros de gravedad de dos triángulos opuestos del octaedro.

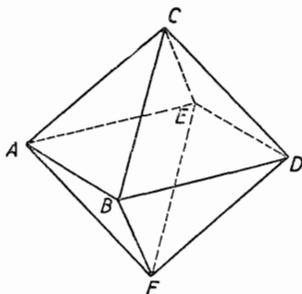


Fig. 1

Ahora pasamos a la consideración del grupo que resulta cuando a los movimientos del octaedro agregamos todavía las transformaciones compuestas de un movimiento y de la «reflexión al centro», la que reemplaza cada vértice del octaedro

por el diametralmente opuesto (por ejemplo A por D , B por E , etc.). La reflexión al centro forma, con la identidad, un grupo S_2 del orden 2, y es conmutable con cada movimiento; por consiguiente, el nuevo grupo que estamos considerando, es isomorfo al producto *directo* $S_4 \times S_2$ del orden 48.

Por otra parte, el mismo grupo se puede interpretar también como corona $S_3[S_2]$, considerando como variables de permutar los 6 vértices del octaedro; como los 6 vértices se pueden dividir en 3 pares de 2 vértices diametralmente opuestos:

$$(II.) \left\{ \begin{array}{ll} A & D \\ B & E \\ C & F \end{array} \right.$$

y como el grupo considerado comprende todas las permutaciones de las filas del esquema (II.) — grupo: S_3 — con sucesivas permutaciones, según S_2 , en las filas, resulta, por definición, la corona $S_3[S_2]$.

Así el «grupo amplificado del octaedro» enseña la existencia de un isomorfismo entre el producto directo $S_4 \times S_2$ y la corona $S_3[S_2]$ (*) y vemos en este caso que una corona, considerada como grupo abstracto, puede ser isomorfa a un producto directo.

Aprovechemos este primer ejemplo «concreto» de una corona para ilustrar, en un ejemplo, la descomposición en componentes de una permutación de la corona. Sea u una rotación del octaedro alrededor del eje «vertical» CF por el ángulo 90° , seguida por la sustitución de cada vértice por el diametralmente opuesto:

$$u = \begin{pmatrix} A B C D E F \\ E A F B D C \end{pmatrix}.$$

¿Cuáles son las componentes de u ? Como u permuta A y D , las «variables» de la primera fila, en B y E , las de la

(*) La existencia de este isomorfismo explica porqué en una publicación mía anterior (Lit. 1), el grupo considerado ahora, aparece sólo en la forma del producto directo $S_4 \times S_2$, mientras Pólya, en la pág. 214 de la publicación ya citada (Lit. 4), da la preferencia a la interpretación como corona $S_3[S_2]$.

segunda, etc., vemos que la permutación de las tres filas es la siguiente:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

y por eso:

$$p^{(0)} = \begin{pmatrix} A & D \\ B & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B & E \\ A & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C & F \\ C & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ B & A & C & E & D & F \end{pmatrix}.$$

$p^{(0)}$ no es todavía igual a u , sino que es necesario hacer seguir a $p^{(0)}$ las siguientes permutaciones *en las distintas filas* para llegar a u :

en la primera: ninguna (tenemos $B \rightarrow A$ y $E \rightarrow D$ en $p^{(0)}$ como en u)

en la segunda: permutación de B en E y viceversa

en la tercera: permutación de C en F y viceversa.

Por eso, las componentes de u respecto de $H^{(1)}$, $H^{(2)}$ y $H^{(3)}$ son, respectivamente, la identidad, $h_2^{(2)} = \begin{pmatrix} B & E \\ E & B \end{pmatrix}$ y $h_3^{(3)} = \begin{pmatrix} F & C \\ C & F \end{pmatrix}$

b) Introduciendo todavía un sistema de coordenadas cartesianas, con el centro del octaedro regular como origen O y
 $\rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow$
 con OA , OB , OC , como ejes positivos de las x_1 , x_2 , x_3 ; vemos que el grupo $S_3[S_2]$ se puede representar también como grupo de transformaciones de coordenadas del tipo:

$$x_1 = \varepsilon_1 x'_\alpha, \quad x_2 = \varepsilon_2 x'_\beta, \quad x_3 = \varepsilon_3 x'_\gamma,$$

en donde $\begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon' & \varepsilon'' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$ es una permutación cualquiera y $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = \varepsilon_3^2 = 1$.

De un modo general, todas las transformaciones en m variables:

$$x_r = \varepsilon_r x'_{\alpha_r} \quad (r = 1, 2, \dots, m),$$

siendo $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_m \end{pmatrix}$ una permutación cualquiera en m cifras y $\varepsilon_r^2 = 1$ ($r = 1, 2, \dots, m$), forman un grupo del orden $2^m \cdot m!$, el grupo «hiperoctaedral», que se puede interpretar como corona $S_m[S_2]$ (véase Specht, Lit. 10). En este caso, las $2m$ variables de permutar son los puntos del espacio de m dimensiones los que tienen todas sus coordenadas iguales a cero, con excepción

de una que es igual a 1 o a -1; las componentes de las permutaciones de dichos puntos respecto de S_m son las permutaciones de los m ejes de coordenadas sin tomar en cuenta su sentido positivo o negativo.

Las permutaciones de la corona S_m/S_2 se pueden también caracterizar como las permutaciones de las variables x_1, x_2, \dots, x_{2m} , que dejan invariante el polinomio:

$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_5 + x_6) \cdot \dots \cdot (x_{2m-1} + x_{2m})$$

o el otro («dual» al primero) (*):

$$x_1 x_2 + x_3 x_4 + x_5 x_6 + \dots + x_{2m-1} x_{2m}.$$

En el caso particular de $m=2$ obtenemos un grupo S_2/S_2 del orden 8, que es isomorfo al grupo diédrico del mismo orden (= grupo de movimientos de un cuadrado en el espacio).

c) Las coronas S_m/S_2 que acabamos de considerar representan sólo un caso particular ($n=2$) de las coronas S_m/S_n del orden $m!(n!)^m$. Evidentemente, S_m/S_n se puede obtener como grupo de las permutaciones de mn variables x_1, x_2, \dots, x_{mn} que no alteran el valor del polinomio:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)(x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{2n}) \\ (x_{2n+1} + \dots + x_{3n}) \cdot \dots \cdot (x_{(m-1)n+1} + \dots + x_{mn})$$

o del otro («dual» al primero):

$$x_1 x_2 x_3 \cdot \dots \cdot x_n + x_{n+1} x_{n+2} x_{n+3} \cdot \dots \cdot x_{2n} + \\ x_{2n+1} x_{2n+2} \cdot \dots \cdot x_{3n} + \dots + x_{(m-1)n+1} \cdot \dots \cdot x_{mn}.$$

En otras palabras, se trata de todas las permutaciones que permutan entre sí las filas horizontales del esquema:

(*) Hay aquí un principio de dualidad análogo al que rige, en la lógica formalística, para las operaciones “ $\&$ ” y “ \vee ”.

Simplificando aún por el factor común $(p-1)^m$, obtenemos así un teorema de la teoría de los números:

Para cada número entero positivo m y cada número primo p el producto

$$p^{\frac{m(m-1)}{2}} \cdot (1+p)(1+p+p^2) \dots (1+p+p^2+p^3+\dots+p^{m-1})$$

es divisible por $m!$

Cabe observar que este teorema resulta también como consecuencia inmediata de la siguiente fórmula demostrada por I. Schur (Lit. 9): Con las notaciones abreviadas

$$s_\mu = 1 + x + x^2 + \dots + x^\mu,$$

$$\left[\begin{matrix} m \\ 0 \end{matrix} \right] = 1$$

y

$$\left[\begin{matrix} m \\ \mu \end{matrix} \right] = \frac{(x^m - 1)(x^{m-1} - 1)(x^{m-2} - 1) \dots (x^{m-\mu+1} - 1)}{(x - 1)(x^2 - 1)(x^3 - 1) \dots (x^\mu - 1)}$$

para $0 < \mu \leq m$ es

$$x^{\frac{m(m-1)}{2}} \cdot s_1 s_2 s_3 \dots s_{m-1} = m! \cdot \sum_{\mu=0}^{m-1} (-1)^\mu \left[\begin{matrix} m \\ \mu \end{matrix} \right] x^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}} \binom{s_{m-\mu-1}}{m}$$

Esta fórmula enseña que para cualquier número entero, x (y no sólo un número primo p) el producto

$$x^{\frac{m(m-1)}{2}} \cdot s_1 s_2 s_3 \dots s_{m-1} = x^{\frac{m(m-1)}{2}} \cdot (1+x)(1+x+x^2) \dots (1+x+x^2+x^3+\dots+x^{m-1})$$

es divisible por $m!$

e) Un subgrupo del grupo $S_m[C_n]$ es la corona $C_m[C_n]$ del orden mn^m (siendo, por supuesto, C_m el grupo cíclico del orden m). Para $C_m[C_n]$ se puede dar la siguiente interpretación «cinemática» (variando ligeramente un ejemplo indicado por Pólya):

Cada uno de los m vértices de un polígono regular que pueda girar en su plano alrededor de su centro, sea reemplazado por una circunferencia del pequeño radio r , situada en el mismo plano y que pueda girar alrededor de su centro. Sobre cada circunferencia márquense todavía n puntos equidistantes. (Una ilustración del caso: $m=5$, $n=4$, se encuentra en la Fig. 2). Fijando cierta posición primitiva del polígono y de las «ruedas», consideramos ahora todos los movimientos planos de ellos que conduzcan a una posición que difiera de la primitiva sólo por una permutación de los mn puntos marcados sobre las n circunferencias («ruedas»). Dichas permutaciones forman un grupo isomorfo a $C_m[C_n]$, considerando como variables de permutar los mn puntos marcados; más exactamente dicho: los de una circunferencia forman siempre las variables de una fila del esquema (III.).

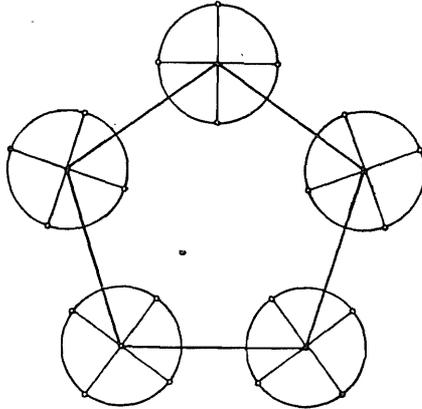


Fig. 2

En lugar de las permutaciones de las mn variables, podemos considerar también las sustituciones *monomiales* en m variables z_1, z_2, \dots, z_m que correspondan a las m ruedas, distinguiendo los n puntos de una rueda sólo por factores $1, \epsilon, \epsilon^2, \dots, \epsilon^{n-1}$, en donde ϵ es una primitiva raíz n -ésima de la unidad.

Así, el grupo $C_m[C_n]$ se podría engendrar por las dos sustituciones monomiales:

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_{m-1} & z_m \\ z_2 & z_3 & z_4 & \dots & z_m & z_1 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_{m-1} & z_m \\ \varepsilon z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_{m-1} & z_m \end{pmatrix}$$

f) De un modo más general, cada corona del tipo $P_r[C_n]$ se puede escribir como el grupo de sustituciones monomiales en r variables que se obtiene cuando a cada permutación de P_r , escrita en r variables z_1, z_2, \dots, z_r :

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_r \\ z_{\alpha_1} & z_{\alpha_2} & z_{\alpha_3} & \dots & z_{\alpha_r} \end{pmatrix}$$

hacemos corresponder las n^r sustituciones monomiales:

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_r \\ \varepsilon_1 z_{\alpha_1} & \varepsilon_2 z_{\alpha_2} & \varepsilon_3 z_{\alpha_3} & \dots & \varepsilon_r z_{\alpha_r} \end{pmatrix}$$

con $\varepsilon_\rho^n = 1$ ($\rho = 1, 2, \dots, r$).

Recíprocamente, cada grupo de sustituciones monomiales en r variables, cuyos «factores» ε_ρ son raíces n -ésimas de la unidad, es un subgrupo de la corona $S_r[C_n]$ del orden $r!n^r$ (*).

§ 4. La ley de multiplicación en $P_r[H]$.

Volvemos ahora al caso general de una corona cualquiera $P_r[H]$, formada con dos grupos de permutaciones P_r y H , respectivamente en r y s variables, y preguntamos: ¿cuál es el producto de dos permutaciones de $P_r[H]$, por ejemplo el producto

$$(p^{(0)} h_1^{(1)} h_2^{(2)} \dots h_r^{(r)}) \cdot (q^{(0)} k_1^{(1)} k_2^{(2)} \dots k_r^{(r)}),$$

siendo $h_\rho^{(\rho)}$ y $k_\rho^{(\rho)}$ dos permutaciones de $H^{(\rho)}$ (**) ($\rho = 1, 2, \dots, r$)

(*) Para los que conocen la teoría de los “graphs”, añado que la corona $S_r[H]$ se puede interpretar como el grupo de automorfismos del “graph” formado por r “ejemplares” de Γ , cuando H es el grupo de automorfismos de un “graph conexo” Γ . En una publicación anterior (Lit. 2), he demostrado que para cada grupo abstracto H existe una infinidad de estos “graphs” que tengan un grupo de automorfismos isomorfo a H .

(**) Que correspondan a las permutaciones h_ρ y k_ρ de H en virtud del isomorfismo $H^{(\rho)} \simeq H$.

y $p^{(0)}$ y $q^{(0)}$ las permutaciones de las variables $x_{\sigma}^{(\rho)}$ que resultan cuando aplicamos dos permutaciones p y q de P_r a las r filas horizontales del esquema (I.)? (En otras palabras, queremos determinar el producto de las permutaciones con las componentes $p^{(0)}$, $h_1^{(1)}$, $h_2^{(2)}$, ..., $h_r^{(r)}$ y $q^{(0)}$, $k_1^{(1)}$, $k_2^{(2)}$, ..., $k_r^{(r)}$).

Supongamos que q sea la permutación que transforma la cifra ρ en β_{ρ} ($\rho = 1, 2, \dots, r$):

$$(IV.) \quad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_r \end{pmatrix}$$

En este caso, $q^{(0)}$ será la misma permutación, pero aplicada a las r filas del esquema (I.), y por consiguiente, transformará $x_{\sigma}^{(\rho)}$ en $x_{\sigma}^{(\beta_{\rho})}$ ($\rho = 1, 2, \dots, r$; $\sigma = 1, 2, \dots, s$).

En primer lugar determinaciones la permutación $(q^{(0)})^{-1} h_1^{(1)} q^{(0)}$, es decir la transformada de la permutación $h_1^{(1)}$ por la permutación $q^{(0)}$. $h_1^{(1)}$ permuta sólo las variables $x_{\sigma}^{(1)}$ de la primera fila de (I.); pero, a raíz de la permutación precedente $(q^{(0)})^{-1}$ se encuentran allí las variables que pertenecían primitivamente a la fila β_1 ; y por la sucesiva aplicación de $q^{(0)}$, dichas variables vuelven a ocupar la fila β_1 , después de haber sufrido la permutación $h_1^{(1)}$ en la primera fila. Entonces, el efecto de la permutación $(q^{(0)})^{-1} h_1^{(1)} q^{(0)}$ será el siguiente: las variables $x_1^{(\beta_1)}$, $x_2^{(\beta_1)}$, ..., $x_s^{(\beta_1)}$ de la fila β_1 son permutadas entre sí, como si hubiéramos aplicado a ellas la permutación $h_1^{(\beta_1)}$ (es decir la permutación que corresponde a la permutación h_1 de H , en virtud del isomorfismo $H^{(\beta_1)} \sim H$); las variables de todas las otras filas no sufren ninguna permutación. Así vemos que es:

$$(q^{(0)})^{-1} h_1^{(1)} q^{(0)} = h_1^{(\beta_1)}$$

De manera análoga siguen las relaciones

$$(q^{(0)})^{-1} h_{\rho}^{(\rho)} q^{(0)} = h_{\rho}^{(\beta_{\rho})},$$

y multiplicando todas éstas, para $\rho = 1, 2, \dots, r$, obtenemos el resultado

$$(q^{(0)})^{-1} (h_1^{(1)} h_2^{(2)} \dots h_r^{(r)}) q^{(0)} = h_1^{(\beta_1)} h_2^{(\beta_2)} \dots h_r^{(\beta_r)}.$$

Introduciendo todavía la permutación q^{-1} , inversa a la (IV.):

$$(IV'.) \quad q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & r \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \dots & \gamma_r \end{pmatrix},$$

obtenemos la siguiente fórmula para la transformación de $h_1^{(1)} h_2^{(2)} \dots h_r^{(r)}$ con $q^{(0)}$:

$$(V.) \quad (q^{(0)})^{-1} (h_1^{(1)} h_2^{(2)} \dots h_r^{(r)}) \cdot q^{(0)} = h_{\gamma_1}^{(1)} h_{\gamma_2}^{(2)} \dots h_{\gamma_r}^{(r)}.$$

Esta fórmula permite ahora el cálculo del producto de dos permutaciones

$$u = p^{(0)} h_1^{(1)} h_2^{(2)} \dots h_r^{(r)}$$

y

$$v = q^{(0)} k_1^{(1)} k_2^{(2)} \dots k_r^{(r)}$$

de $P_r[H]$:

$$\begin{aligned} uv &= p^{(0)} h_1^{(1)} h_2^{(2)} \dots h_r^{(r)} q^{(0)} k_1^{(1)} k_2^{(2)} \dots k_r^{(r)} \\ &= p^{(0)} q^{(0)} \cdot (q^{(0)})^{-1} \cdot (h_1^{(1)} h_2^{(2)} \dots h_r^{(r)}) \cdot q^{(0)} \cdot k_1^{(1)} k_2^{(2)} \dots k_r^{(r)} \\ &= p^{(0)} q^{(0)} \cdot h_{\gamma_1}^{(1)} h_{\gamma_2}^{(2)} \dots h_{\gamma_r}^{(r)} \cdot k_1^{(1)} k_2^{(2)} \dots k_r^{(r)} \\ &= p^{(0)} q^{(0)} \cdot h_{\gamma_1}^{(1)} k_1^{(1)} \cdot h_{\gamma_2}^{(2)} k_2^{(2)} \dots h_{\gamma_r}^{(r)} k_r^{(r)}. \end{aligned}$$

Observando que es

$$p^{(0)} q^{(0)} = (pq)^{(0)}$$

y escribiendo más brevemente $(h_{\gamma_\rho} k_\rho)^{(\rho)}$ para la permutación $h_{\gamma_\rho}^{(\rho)} k_\rho^{(\rho)}$ de $H^{(\rho)}$ que corresponde a la $h_{\gamma_\rho} k_\rho$ de H (en virtud del isomorfismo $H^{(\rho)} \sim H$), sigue la *ley de multiplicación en $P_r[H]$* :

$$(VI.) \quad (p^{(0)} h_1^{(1)} h_2^{(2)} \dots h_r^{(r)}) (q^{(0)} k_1^{(1)} k_2^{(2)} \dots k_r^{(r)}) = (pq)^{(0)} (h_{\gamma_1} k_1)^{(1)} (h_{\gamma_2} k_2)^{(2)} \dots (h_{\gamma_r} k_r)^{(r)}.$$

Esta fórmula enseña que en la multiplicación de dos permutaciones de $P_r[H]$, las componentes respecto de P_r se mul-

tiplican, pero no las otras componentes, sino que la componente del producto respecto de $H^{(\rho)}$, es igual a $(h_{\gamma\rho} k_\rho)^{(\rho)}$, es decir a la permutación correspondiente al producto de $h_{\gamma\rho}$ (y no de h_ρ) por k_ρ , en donde γ_ρ es la cifra en que la permutación q^{-1} permuta la cifra ρ (*).

§ 5. Observaciones generales sobre coronas.

a) La fórmula (VI.) aplicada al caso

$$p = q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & r \\ 1 & 2 & 3 & \dots & r \end{pmatrix},$$

permite comprobar la exactitud de un teorema que ha sido establecido por Specht:

Las permutaciones de $P_r[H]$ cuya componente respecto de P_r es igual a la identidad (o en otras palabras, las permutaciones que permutan sólo entre sí las variables de la primera fila, las de la segunda fila, etc., sin que haya una permutación de las filas del esquema (I.) entre sí) forman un subgrupo invariante $E_r[H]$ de $P_r[H]$, del orden η^r , e isomorfo al producto directo $H^{(1)} \times H^{(2)} \times \dots \times H^{(r)}$.

Además rige el isomorfismo

$$\frac{P_r[H]}{E_r[H]} \sim P_r,$$

y por eso podemos enunciar el siguiente teorema más general:

Si P_r posee un subgrupo P'_r , del orden π' y del índice $\frac{\pi}{\pi'}$, también $P_r[H]$ posee un subgrupo $P'_r[H]$ del mismo índice $\frac{\pi}{\pi'}$ (o del orden $\pi' \cdot \eta^r$). Si P'_r es un subgrupo invariante de P_r , también la corona $P'_r[H]$ es un subgrupo invariante de la corona $P_r[H]$.

(*) Ahí está la diferencia entre la corona $P_r[H]$ y el producto directo

$$P_r \times H^{(1)} \times H^{(2)} \times \dots \times H^{(r)};$$

pues, en el caso de un producto directo, se multiplicarían no sólo las componentes respecto de P_r , sino también las otras.

Ejemplo: El grupo simétrico S_m posee en el grupo alterado A_m un subgrupo invariante del índice 2; por eso, también la corona $S_m[S_n]$ (considerada en § 3, c) posee un subgrupo invariante del índice 2 en $A_m[S_n]$. Este último grupo se puede caracterizar como el conjunto de las permutaciones de x_1, x_2, \dots, x_{mn} , que dejan invariante el polinomio

$$\begin{aligned} & (x_1 x_2 \dots x_n - x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n}) \\ & (x_1 x_2 \dots x_n - x_{2n+1} x_{2n+2} \dots x_{3n}) \dots \dots \\ & (x_{(m-2)n+1} x_{(m-2)n+2} \dots x_{(m-1)n} - x_{(m-1)n+1} x_{(m-1)n+2} \dots x_{mn}). \end{aligned}$$

b) Hasta ahora hemos considerado las coronas $P_r[H]$ como grupos de permutaciones, por ejemplo de las variables del esquema (I.); pero, ahora la fórmula (VI.) nos da también la posibilidad de comparar diferentes coronas y, eventualmente, constatar su isomorfismo como grupos abstractos.

Por ejemplo, si conocemos un grupo de permutaciones H' en s' variables que sea isomorfo al grupo de permutaciones H en s variables (pero $s' \neq s$), podemos formar, con un grupo de permutaciones P_r en r variables, las coronas $P_r[H]$ y $P_r[H']$, que serán diferentes como grupos de permutaciones (lo serán ya en virtud del distinto número de variables de permutar que es respectivamente igual a rs y rs'). Pero la fórmula (VI.), en que no entra por nada la cuestión si las componentes $h_\mu^{(r)}$ y $k_p^{(s')}$ sean permutaciones en s o s' variables, enseña que hay isomorfismo entre $P_r[H]$ y $P_r[H']$, considerando las dos coronas como grupos abstractos:

$$P_r[H] \sim P_r[H'], \text{ cuando } H \sim H'.$$

Ejemplo: Designemos por $R_6(S_3)$ la representación del grupo S_3 por permutaciones «regulares» en 6 variables (*); la corona $S_2[R_6(S_3)]$ será un grupo de permutaciones del orden 72

(*) Quiere decir que representamos dos elementos (de órdenes 2 y 3 respectivamente) que engendran el grupo abstracto S_3 , por las siguientes permutaciones en 6 cifras:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ respectivamente } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

en 12 variables, pero, como grupo abstracto, isomorfo a la corona $S_2[S_3]$, grupo de permutaciones en 6 variables.

c) En cambio, si $r \neq t$ y $\eta (= \text{orden de } H) > 1$, no hay nunca isomorfismo entre las coronas $P_r[H]$ y $Q_t[H]$, aunque P_r y Q_t sean dos grupos de permutaciones (respectivamente en r y t variables) isomorfos entre sí.

Demostración: No puede haber isomorfismo, porque el orden de $Q^t[H]$, $\pi \eta^t$, es distinto del orden de $P_r[H]$, $\pi \eta^r$ (por ser $r \neq t$ y $\eta > 1$).

Ejemplo: $R_6^{(S_3)}[S_2]$ del orden $6 \cdot 2^6 = 384$ no es isomorfo a $S_3[S_2]$, grupo del orden $6 \cdot 2^3 = 48$.

d) El teorema que acabamos de demostrar enseña que el concepto de corona no es un concepto de la teoría abstracta de grupos, como lo sería, por ejemplo, el de producto directo (siendo

$$G \times H \sim G' \times H',$$

cuando

$$G \sim G' \text{ y } H \sim H').$$

Así, con dos grupos abstractos G y H se pueden formar diferentes (y no isomorfas) coronas: $G_{r_1}[H]$, $G_{r_2}[H]$, $G_{r_3}[H]$, ..., tomando varias representaciones del mismo grupo abstracto G por permutaciones (distintas por el número de las variables de permutar) (**). Si se deseara conseguir que hubiese solamente una corona $G[H]$ para dos grupos abstractos G y H , sería menester elegir una representación de G por permutaciones, entre todas posibles; tomando, por ejemplo, la representación de G por permutaciones regulares, llegaríamos (como ya observé en el § 1), al «producto» $G \# H$ de Scholz (Lit. 8). De lo contrario, el concepto de corona es sólo un concepto «semi-abstracto», perteneciendo por la mitad al campo de los grupos de permutaciones. Según mi opinión, en eso hay que ver una ventaja; pues, dé esta manera dos repre-

(**) Naturalmente, se podrían formar también coronas del tipo $H_{s_1}[G]$, $H_{s_2}[G]$, ... Cabe observar que para coronas no vale una «ley conmutativa» (como para productos directos: $G \times H \sim H \times G$); por lo general, las dos coronas $G_r[H_s]$ y $H_s[G_r]$ serán grupos distintos (y no isomorfos).

sentaciones G_{r_1} y G_{r_2} del mismo grupo abstracto G por permutaciones conducen, por lo general, a dos coronas $G_{r_1}[H]$ y $G_{r_2}[H]$ diferentes (es decir no isomorfas entre sí).

e) Sin embargo, se obtienen casos interesantes de coronas sólo cuando estas últimas resultan ser grupos *transitivos* de permutaciones. A este respecto, se podría fácilmente demostrar el siguiente teorema:

Para que el grupo de permutaciones $P_r[H]$ sea transitivo en sus r variables es necesario y suficiente que los dos grupos de permutaciones P_r y H sean transitivos en sus r (resp. s) variables.

f) Está claro que el grupo de permutaciones $P_r[H]$ es siempre *imprimitivo*; los campos de imprimitividad son formados por las filas horizontales del esquema (I.).

§ 6. Subgrupos $P_r[H; J]$ de una corona.

Pasamos ahora a la consideración de ciertos subgrupos interesantes de una corona $P_r[H]$.

Ya en § 5 a) hemos conocido los subgrupos $P_{r'}[H]$, que corresponden unívocamente a los subgrupos $P_{r'}$ de P_r .

Otros subgrupos de $P_r[H]$ se obtienen admitiendo, para las componentes respecto de $H^{(1)}, H^{(2)}, \dots, H^{(r)}$, sólo permutaciones que (en los isomorfismos $H^{(\rho)} \sim H$) corresponden a un subgrupo H' de $H^{(*)}$.

Combinando los dos métodos indicados para la formación de subgrupos, obtendremos coronas del tipo $P_{r'}[H']$ como subgrupos de $P_r[H]$ (con $P_{r'}$ subgrupo de P_r y H' subgrupo de H).

Pero, así como en el caso de un producto directo, los subgrupos más interesantes son los que no son más productos directos (**), también las coronas poseen cierta clase más interesante de subgrupos que (por lo general) no son más coronas (y que están en cierta analogía a los «productos subdirectos» estudiados por Remak en el caso de productos directos (**).

(*) Tomando para H' el subgrupo E del orden 1, obtendremos $P_r[E]$, el subgrupo (del orden π) de las permutaciones de $P_r[H]$ cuyas componentes — con excepción de la respecto de P_r , — son todas iguales a la identidad.

(**) Véanse a este respecto las publicaciones de R. Remak sobre productos directos y sus subgrupos (Lit. 5 & 6).

Supongamos que el grupo H (del orden η) posea un subgrupo *invariante* J del orden e (y del índice $\gamma = \frac{\eta}{e}$). Dividimos los elementos de H en γ conjuntos de mód. e elementos, reuniendo en *un* conjunto los elementos que son entre sí congruentes mod. J (*). Eligiendo en cada conjunto un representante h_μ ($\mu = 1, 2, \dots, \gamma$), obtenemos la siguiente descomposición de los elementos de H en los γ conjuntos:

$$(VII.) \quad H = Jh_1 + Jh_2 + \dots + Jh_\gamma$$

En este desarrollo, siendo J un subgrupo *invariante* de H , se puede definir una multiplicación de los conjuntos mismos (**):

$$(VIII.) \quad (Jh_\alpha) \cdot (Jh_\beta) = Jh_{\rho(\alpha, \beta)}$$

porque todos los productos de un elemento cualquiera de un determinado conjunto Jh_α con un elemento cualquiera de un conjunto Jh_β pertenecen a un mismo conjunto, cuyo «número» depende sólo de los números α y β .

Ahora construiremos en $P_r[H]$ un subgrupo $P_r[H; J]$ de la siguiente manera: Si $u = q^{(0)}k_1^{(1)}k_2^{(2)} \dots k_r^{(r)}$ es una permutación de $P_r[H]$ y si a $k_1^{(1)}$ (la componente de u respecto de $H^{(1)}$) corresponde (en virtud del isomorfismo $H^{(1)} \sim H$) la permutación k_1 de H , determinamos el conjunto Jh_k en (VII.) al que pertenece dicho elemento k_1 ; u haga parte de $P_r[H; J]$ sólo si pertenecen al *mismo* conjunto Jh_k también todas las otras permutaciones k_2, k_3, \dots, k_r de H , que corresponden (en virtud de los isomorfismos $H^{(2)} \sim H, H^{(3)} \sim H, \dots, H^{(r)} \sim H$) a las permutaciones $k_2^{(2)}, k_3^{(3)}, \dots, k_r^{(r)}$ (que son las componentes de u respecto de $H^{(2)}, H^{(3)}, \dots, H^{(r)}$).

En otras palabras, $P_r[H; J]$ comprende, por definición, sólo las permutaciones de $P_r[H]$ cuyas componentes respecto de $H^{(1)}, H^{(2)}, \dots, H^{(r)}$ correspondan a elementos k_1, k_2, \dots, k_r de H que pertenezcan *todos* a un *mismo* conjunto Jh_k (o todos a Jh_1 , o todos a Jh_2 , etc.).

(*) Dos elementos h y k de H se llaman congruentes mód. J , cuando hk^{-1} (el producto de h por el inverso de k) pertenece al subgrupo invariante J .

(**) Es la misma que da origen al grupo $\frac{H}{J}$.

El número de las permutaciones del tipo considerado es igual a

$$\pi\gamma e^r = \pi\eta e^{r-1} = \pi \frac{\eta^r}{\gamma^{r-1}};$$

hay que demostrar aún que ellas forman un grupo. Para eso, escribimos la ley de multiplicación (VI.) en $P_r[H]$ en la forma

$$\begin{aligned} \text{(VI.')} \quad & (p^{(0)} k_1^{(1)} k_2^{(2)} \dots k_r^{(r)}) (q^{(0)} l_1^{(1)} l_2^{(2)} \dots l_r^{(r)}) \\ & = (pq)^{(0)} (k_{\gamma_1} l_1)^{(1)} (k_{\gamma_2} l_2)^{(2)} \dots (k_{\gamma_r} l_r)^{(r)}, \end{aligned}$$

con

$$\text{(IV.')} \quad q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & r \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \dots & \gamma_r \end{pmatrix}$$

en donde se tratará, ahora, de dos permutaciones del tipo particular que estamos considerando: para los elementos k_1, k_2, \dots, k_r de H , que corresponden a las componentes $k_1^{(1)}, k_2^{(2)}, \dots, k_r^{(r)}$, existe un conjunto Jh_α a que todos ellos pertenecen, y hay un conjunto Jh_β al que pertenecen todos los elementos l_1, l_2, \dots, l_r de H , que corresponden a las componentes $l_1^{(1)}, l_2^{(2)}, \dots, l_r^{(r)}$. La fórmula (VI.') enseña que el producto de nuestras dos permutaciones tiene, respecto de $H^{(1)}, H^{(2)}, \dots, H^{(r)}$, las componentes $(k_{\gamma_1} l_1)^{(1)}, (k_{\gamma_2} l_2)^{(2)}, \dots, (k_{\gamma_r} l_r)^{(r)}$. Los elementos correspondientes de H son los productos $k_{\gamma_1} l_1, k_{\gamma_2} l_2, \dots, k_{\gamma_r} l_r$, y como cada k_{γ_p} pertenece al conjunto Jh_α , y cada l_p al conjunto Jh_β , todos esos productos $k_{\gamma_1} l_1, k_{\gamma_2} l_2, \dots, k_{\gamma_r} l_r$ pertenecen a un mismo conjunto $Jh_{\rho(\alpha,\beta)}$, definido por (VIII.). Así hemos demostrado que el producto de dos permutaciones de $P_r[H; J]$ tiene la misma propiedad que caracteriza $P_r[H; J]$, o que $P_r[H; J]$ es un grupo:

Cada subgrupo invariante J de H, del índice $\gamma = \frac{\eta}{e}$, da origen a un subgrupo $P_r[H; J]$ de la corona $P_r[H]$, que es del orden $\pi\gamma e^r = \pi\eta e^{r-1}$ y comprende las permutaciones de $P_r[H]$ cuyas componentes respecto de $H^{(1)}, H^{(2)}, \dots, H^{(r)}$ corresponden a r elementos de H que son congruentes entre sí mód. J.

Ejemplo: Si d es un divisor de n , en la corona $C_m[C_n]$ del orden mn^m podemos formar el subgrupo $C_m[C_n; C_d]$ del orden $mind^{m-1}$. Por ejemplo, el grupo $C_5[C_4]$ del orden $5 \cdot 4^5 = 5120$

(véase Fig. 2) posee el subgrupo $C_5[C_4; C_2]$ del orden $5 \cdot 4 \cdot 2^4 = 320$, cuyos elementos son rotaciones cualesquiera del pentágono, con sucesivas rotaciones de las 5 «ruedas» con ángulos que, simultáneamente para las 5 ruedas, son o un múltiplo *par* o un múltiplo *impar* de 90° .

Si H posee varios subgrupos invariantes J, J', \dots , podemos por supuesto, formar varios subgrupos $P_r[H; J], P_r[H; J'], \dots$ de $P_r[H]$. Se demuestra fácilmente que $P_r[H; J']$ será un subgrupo de $P_r[H; J]$, si J' es un subgrupo de J .

Dos casos extremos se pueden presentar para $P_r[H; J]$: que J es igual al entero grupo H , y que $J = E$ (=subgrupo del orden 1) comprende sólo la identidad H . Evidentemente es $P_r[H; H] = P_r[H]$. Más interesante es el otro caso: $P_r[H; E]$ es del orden $\pi\eta$ y comprende, por definición, las permutaciones de $P_r[H]$ que tienen la forma $q^{(0)} k^{(1)} k^{(2)} \dots k^{(r)}$, en donde las componentes $k^{(1)}, k^{(2)}, \dots, k^{(r)}$ respecto de $H^{(1)}, H^{(2)}, \dots, H^{(r)}$ corresponden todos a un mismo elemento k de H .

Formando el producto de dos permutaciones de dicho subgrupo $P_r[H; E]$, la ley de multiplicación (VI.) enseña que en este caso particular ($k_1 = k_2 = \dots = k_r = k; l_1 = l_2 = \dots = l_r = l$), se multiplican no sólo las componentes respecto de P_r , sino también las respecto de $H^{(1)}, H^{(2)}, \dots, H^{(r)}$:

$$(p^{(0)} k^{(1)} k^{(2)} \dots k^{(r)}) \cdot (q^{(0)} l^{(1)} l^{(2)} \dots l^{(r)}) = \\ (pq)^{(0)} (kl)^{(1)} (kl)^{(2)} \dots (kl)^{(r)}.$$

Además enseña esta fórmula (o también la fórmula (V.) del § 4) que los elementos $q^{(0)}$ del subgrupo $P_r[E]$ son conmutables con los elementos del tipo $k^{(1)}k^{(2)} \dots k^{(r)}$ (los que tienen la componente respecto de P_r igual a la identidad y las otras correspondientes a un mismo elemento de H). Como estos elementos forman un subgrupo del orden η , isomorfo a H , el subgrupo $P_r[H; E]$ es isomorfo al producto *directo* de $P_r[E]$ (o P_r) y H :

$$(IX.) \quad P_r[H; E] \sim P_r \times H.$$

Ejemplo: En $S_3[S_2]$ — que es, según § 3, a), el grupo amplificado del octaedro — el subgrupo $S_3[S_2; E]$ será isomorfo al producto directo $S_3 \times S_2$. En la Fig. 1, este subgrupo es el

que deja invariante la recta que une el centro del triángulo ABC con el del triángulo DEF .

§ 7. *El grupo $S_2[S_n; A_n]$ del orden $(n!)^2$.*

Tomando $P_r = S_2$ (con $r=2$, $\pi=2$), $H = S_n$ (con $\eta = n!$) y $J = A_n$ (el grupo alternado, con $e = \frac{n!}{2}$ y $\gamma=2$), como subgrupo $P_r[H; J]$ de la corona $P_r[H]$ obtenemos el subgrupo $S_2[S_n; A_n]$ de $S_2[S_n]$, que se puede caracterizar como el conjunto de las permutaciones en $2n$ variables x_1, x_2, \dots, x_{2n} que dejan invariante el polinomio:

$$\prod_{k < \lambda} (x_k - x_\lambda) \cdot \prod_{k < \lambda} (x_{n+k} - x_{n+\lambda}). \quad (1 \leq k < \lambda \leq n)$$

Este grupo $S_2[S_n; A_n]$ ofrece un interés particular por tener el mismo orden $(n!)^2$ como un producto directo de dos grupos simétricos en n variables. Por eso se podría creer que $S_2[S_n; A_n]$ fuera isomorfo a un producto directo del tipo $T \times U$ con $T \sim U \sim S_n$. Pero, como demostraremos en este párrafo, hay isomorfismo sólo para $n=2$ y $n=3$; *ya para $n=4$, el grupo $S_2[S_n; A_n]$ no es isomorfo a $S_n \times S_n$, sino de distinta estructura.*

En el caso de $n=2$, siendo $A_2 = E$ del orden 1, se trata del grupo $S_2[S_2; E]$ que, en virtud de la fórmula (IX.) del § 6, es isomorfo al producto directo $S_2 \times S_2$.

Para demostrar también el isomorfismo:

$$(X.) \quad S_2[S_3; A_3] \sim S_3 \times S_3$$

conviene considerar los dos grupos como subgrupos de S_6 , denotando las variables de permutar brevemente por las cifras de 1 a 6; bastará indicar un automorfismo A del grupo S_6 que tenga la siguiente propiedad: A deja invariante la permutación

$$a = (1, 2)(4, 5),$$

pero transforma

$$b = (1, 5, 2, 6, 3, 4) = (1, 4)(2, 5)(3, 6) \cdot (4, 5, 6)$$

en

$$c = (2, 3)(4, 5, 6)$$

y, por consiguiente, transforma el subgrupo $S_2[S_3; A_3]$, engendrado por a y b , en el subgrupo $S_3 \times S_3$, engendrado por a y c . Como dos subgrupos que son transformables por un automorfismo, son isomorfos entre sí, con la indicación del automorfismo A habremos demostrado la fórmula (X).

Pues bien, un automorfismo A de S_6 que tiene las propiedades indicadas es el que transforma las permutaciones (*):

$$b = (1, 5, 2, 6, 3, 4)$$

y
$$d = (1, 5)$$

en

$$b' = (2, 3)(4, 5, 6) = c$$

y
$$d' = (1, 3)(2, 6)(4, 5);$$

con eso (**) queda demostrada la fórmula (X).

Pasando al próximo caso: $n = 4$, demostraremos que $S_2[S_4; A_4]$ no es isomorfo al producto directo $S_4 \times S_4$, aunque el orden de los dos grupos sea el mismo: $(4!)^2 = 576$. Denotaremos las variables de $S_2[S_4; A_4]$ por las cifras de 1 a 8; las permutaciones de $S_2[S_4; A_4]$ tendrán entonces la forma $p^{(0)} k_1^{(1)} k_2^{(2)}$, en donde $k_1^{(1)}$ y $k_2^{(2)}$ son, respectivamente, permutaciones de 1, 2, 3, 4 y 5, 6, 7, 8, *ambas pares o ambas impares*; $p^{(0)}$ es o la identidad o la permutación (1, 5)(2, 6)(3, 7)(4, 8).

¿Cuántas permutaciones de $S_2[S_4; A_4]$ tienen el orden 3? Como las componentes de las permutaciones de $S_2[S_4]$ respecto de $P_r = S_2$ se multiplican en la multiplicación — véase la fórmula (VI.) — para un elemento de $S_2[S_4; A_4]$ que tenga el orden 3, la componente respecto de $P_r = S_2$ no puede tener el orden 2 y por eso, debe ser la identidad. Así vemos que los elementos del orden 3 son:

(*) las que engendran ya todo el grupo simétrico S_6 , de modo que A es, completamente definido por la indicación de las permutaciones b' y d' que corresponden a b y d .

(**) Siendo $c = b'$ por definición, basta demostrar que A deja invariante la permutación $a = (1, 2)(4, 5)$, lo que se puede averiguar por cálculo directo del elemento $(b^{-1} d' b')^{-1} d' (b^{-1} d' b')$. $(b' d' b'^{-1})^{-1} d' (b' d' b'^{-1})$ que corresponde (en virtud del automorfismo A) a

$$a = (b^{-1} d b)^{-1} d (b^{-1} d b) : (b d b^{-1})^{-1} d (b d b^{-1}).$$

los 8 ciclos del orden 3 en las primeras 4 variables: $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 4, 2)$, $(1, 3, 4)$, $(1, 4, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(2, 4, 3)$; los en las otras 4 variables: $(5, 6, 7)$, $(5, 7, 6)$, $(5, 6, 8)$, $(5, 8, 6)$, $(5, 7, 8)$, $(5, 8, 7)$, $(6, 7, 8)$, $(6, 8, 7)$; y además, los 64 productos de uno de los primeros 8 ciclos con uno de los segundos 8 ciclos; *no hay otros elementos del orden 3 en $S_2[S_4; A_4]$.*

Todos estos son también los elementos del orden 3 en el grupo $S_4 \times S_4$, formado por los productos de permutaciones cualesquiera en las cifras 1, 2, 3, 4 con permutaciones cualesquiera de 5, 6, 7, 8.

¿Cómo se distribuyen estos 80 elementos del orden 3 en clases de elementos conjugados (*), sea en $S_2[S_4; A_4]$, sea en $S_4 \times S_4$? En $S_4 \times S_4$ tenemos 3 clases de elementos conjugados: una formada por los 8 ciclos: $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(1, 3, 4)$, etc. otra formada por los 8 ciclos: $(5, 6, 7)$, $(5, 7, 6)$, $(5, 7, 8)$, etc. y una tercera formada por los 64 productos: $(1, 2, 3)(5, 6, 7)$, $(1, 2, 3)(5, 7, 6)$, $(1, 3, 2)(5, 6, 7)$ etc.

Pero, en $S_2[S_4; A_4]$ los 16 ciclos del orden 3 forman una única clase de elementos conjugados; por ejemplo es:

$$(1, 2, 4) = [(3, 4)(5, 6)]^{-1} \cdot (1, 2, 3) \cdot [(3, 4)(5, 6)] \text{ o } (5, 6, 7) = [(1, 5)(2, 6)(3, 7)(4, 8)]^{-1} \cdot (1, 2, 3) \cdot [(1, 5)(2, 6)(3, 7)(4, 8)],$$

en donde $(3, 4)(5, 6)$ y $(1, 5)(2, 6)(3, 7)(4, 8)$ son permutaciones de $S_2[S_4; A_4]$.

Así vemos que en $S_2[S_4; A_4]$ existe una clase con 16 elementos conjugados del orden 3, hecho que no se presenta en el grupo $S_4 \times S_4$, en donde las clases formadas por elementos de orden 3, tienen o 8 o 64 elementos. Por eso, los dos grupos tienen una estructura diferente y *no puede haber isomorfismo entre ellos.*

De un modo más general, se puede demostrar que *para ningún valor de $n \geq 4$ hay isomorfismo entre $S_2[S_n; A_n]$ y $S_n \times S_n$* ; pues, en $S_2[S_n; A_n]$ todos los $4 \binom{n}{3}$ ciclos del orden 3 forman una única clase de elementos conjugados, mientras en

(*) Dos elementos u y v de un grupo se llaman conjugados, si en el mismo grupo hay un elemento z tal que $z^{-1}uz = v$.

$S_n \times S_n$ no hay, entre los elementos del orden 3, ninguna clase con $4 \binom{n}{3}$ elementos conjugados.

§ 8. *Las permutaciones que no alteran el valor de un determinante.*

Sea

$$D_n(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}) = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn} \end{vmatrix}$$

el determinante formado con n^2 variables independientes $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$. ¿A cuáles permutaciones se pueden someter las variables $a_{k\lambda}$ sin alterar el valor del polinomio $D_n(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn})$?

Para $n=2$, por ejemplo, vemos que las 4 permutaciones:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{21} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} \\ a_{22} & a_{12} & a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} \\ a_{22} & a_{21} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

no alteran el valor del determinante $D_2(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$, siendo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{vmatrix},$$

y no hay más que estas 4 permutaciones con la propiedad buscada; ellas forman un grupo abeliano, producto directo de dos grupos cíclicos del orden 2.

También para $n > 2$, las permutaciones de las n^2 variables $a_{k\lambda}$ que dejan invariante el determinante $D_n(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn})$, evidentemente forman un grupo; demostraremos que este grupo es del orden $(n!)^2$ e isomorfo al grupo $S_2[S_n; A_n]$ considerado en el § 7.

Demostración: Cuando dos variables $a_{\alpha\beta}$ y $a_{\gamma\delta}$ no pertenecen a una misma fila (siendo $\alpha \neq \gamma$) ni a una misma columna (siendo, además, $\beta \neq \delta$) del determinante, en el desarrollo

$$D_n(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}) = \sum \pm a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \dots a_{n\alpha_n}$$

del determinante en una suma (y resta) de $n!$ productos, existe por lo menos *un* producto que comprenda los dos factores $a_{\alpha\beta}$ y $a_{\gamma\delta}$; en cambio, cuando es $\alpha = \gamma$ o $\beta = \delta$, *ninguno* de dichos $n!$ productos es divisible por el producto $a_{\alpha\beta} a_{\gamma\delta}$. Una permutación p de las variables $a_{k\lambda}$ que no altera el valor de su determinante, puede permutar esos $n!$ productos sólo entre sí, y por consiguiente, la propiedad de dos variables de pertenecer a una misma línea (*) es invariante frente a la permutación p , o en otras palabras, cuando dos variables pertenecen a una misma fila o columna, también después de haber sometido a la permutación p , se encontrarán en una misma fila o columna.

Este razonamiento se puede fácilmente extender a 3, 4, ..., n variables de una línea (fila o columna), demostrando que variables de una misma línea quedan variables de una línea (de la misma u otra). En otras palabras, una permutación p de las variables $a_{k\lambda}$ que no altera su determinante $D_n(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn})$, produce una permutación de las $2n$ líneas del determinante entre sí, y más exactamente, una permutación («imprimitiva») o de las filas entre sí y de las columnas entre sí, o bien cambiándose las filas por columnas y éstas por aquéllas.

Aun más, como cada elemento de un determinante está caracterizado unívocamente por el número de su fila y el de su columna, bastará indicar la descrita permutación de las líneas (filas y columnas) producida por p , para caracterizar completamente la permutación p misma. Así vemos que el grupo de las permutaciones de las variables $a_{k\lambda}$ que deja invariante su determinante, es isomorfo a un subgrupo del grupo de todas las permutaciones de las filas entre sí y de las columnas entre sí o de los cambios de filas por columnas y recíprocamente. Este grupo es una corona $S_2[S_n']$, considerando las filas y las columnas del determinante como las $2n$ variables de permutar.

Nuestro grupo es un *subgrupo* de este grupo $S_2[S_n]$ (y no ya el grupo entero); pues, no todas las permutaciones descritas de filas y columnas dejan invariante el determinante, sino que hay unas que cambian el signo del determinante, dejando invariante sólo el cuadrado de $D_n(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn})$. Como cada permutación *impar* de las filas o columnas cambia

(*) La palabra «línea» designa indistintamente una fila o una columna.

el signo del determinante, para evitar un cambio del signo de $D_n(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn})$, o hay que limitarse a permutaciones *pares* de filas y columnas, o hay que combinar una permutación *impar* de las filas con una permutación *impar* de las columnas, y en ambos casos se puede hacer preceder un cambio de las filas por las columnas y de éstas por aquéllas (sin alterar su orden relativo). Pero, el conjunto de estas permutaciones forma justamente el subgrupo $S_2[S_n; A_n]$ de $S_2[S_n]$.

En resumen: *Las permutaciones de las n^2 variables $a_{k\lambda}$ que no alteran su determinante*

$$D_n(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

forman un grupo del orden $(n!)^2$, isomorfo a $S_2[S_n; A_n]$ (pero, para $n \geq 4$, no isomorfo a $S_n \times S_n$). Las permutaciones que dejan invariante el cuadrado $\{D_n(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn})\}^2$, forman un grupo del orden $2(n!)^2$, isomorfo a la corona $S_2[S_n]$. El isomorfismo resulta considerando las permutaciones de las filas y columnas de $D_n(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn})$.

Por fin, se puede observar que las permutaciones de las n^2 variables $a_{k\lambda}$ que dejan invariante no sólo su determinante, sino también el producto $a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}$ de los elementos de la diagonal principal, forman el subgrupo $S_2[S_n; E]$ que es (en virtud de la fórmula (IX.) del § 6) isomorfo al producto directo $S_2 \times S_n$.

LITERATURA CITADA

- 1) R. FRUCHT: *Die Gruppe des Petersenschen Graphen und der Kantensysteme der regulären Polyeder*. Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 9, fasc. 3 (1936/37).
- 2) R. FRUCHT: *Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe*. Compositio Mathematica, vol. 6, fasc. 2 (1938).
- 3) B. NEUMANN: *Die Automorphismengruppe der freien Gruppen*. Math. Annalen, Bd. 107, Heft 3 (1932).
- 4) G. PÓLYA: *Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen*. Acta mathematica, Bd. 68 (1937).
- 5) R. REMAK: *Über die Darstellung der endlichen Gruppen als Untergruppen direkter Produkte*. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 163, Heft 1 (1930).
- 6) R. REMAK: *Über die erzeugenden invarianten Untergruppen der subdirekten Darstellungen endlicher Gruppen*. Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 164, Heft 4 (1931).
- 7) A. SCHOLZ: *Über die Bildung algebraischer Zahlkörper mit auflösbarer Galoischer Gruppe*. Math. Zeitschrift, Bd. 30, Heft 3 (1929).
- 8) A. SCHOLZ: *Ein Beitrag zur Theorie der Zusammensetzung endlicher Gruppen*. Math. Zeitschrift, Bd. 32, Heft 2 (1930).
- 9) I. SCHUR: *Ein Beitrag zur elementaren Zahlentheorie*. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. Phys. - Math. Klasse. 1933. III.
- 10) W. SPECHT: *Eine Verallgemeinerung der symmetrischen Gruppe*. Schriften des mathematischen Seminars und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin. Bd. I (1932).
- 11) W. SPECHT: *Eine Verallgemeinerung der Permutationsgruppen*. Math. Zeitschrift, Bd. 37, Heft 3 (1933).

ELBA R. RAIMONDI

UN PROBLEMA DE PROBABILIDADES
GEOMETRICAS SOBRE LOS
CONJUNTOS DE TRIANGULOS

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Publicación N.º 25

BUENOS AIRES

1942



ELBA R. RAIMONDI

UN PROBLEMA DE PROBABILIDADES
GEOMETRICAS SOBRE LOS
CONJUNTOS DE TRIANGULOS

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Publicación N.º 25

BUENOS AIRES

1942

Al unir los puntos medios A' , B' , C' de los lados del triángulo ABC se obtiene el triángulo $A'B'C'$ dentro del cual debe estar I para que con los segmentos x, y, z se pueda formar un triángulo, pues solamente en ese caso se verifica que: $x < y + z$, $y < x + z$ y $z < x + y$.

El punto I representa al par de puntos interiores al segmento dado y que lo dividen arbitrariamente en tres segmentos con los cuales se puede formar siempre un triángulo.

2º. Study representa (en Abh. d. math. phys. Kl. d. Kgl. sächs. ges. d. Wissensch. Leipzig 1893) cada triángulo por el punto de E_3 cuyas coordenadas son los tres lados del mismo.

Este es el método seguido por Wolff en el «Journal für die reine und angewandte Mathematik» Band 153 s. 66.

3º. Utilizando un interesante teorema de Pompeiu⁽¹⁾ nos proponemos representar cada triángulo por un punto del plano de la manera siguiente:

Sea el triángulo ABC equilátero e I un punto cualquiera del plano (Fig. 2); si unimos I con los vértices del triángulo dado obtenemos los tres segmentos IA , IB , IC con los cuales podemos siempre formar un triángulo.

Objeto de esta nota es el estudio de estos métodos de representación y su comparación entre sí, aplicando todos ellos al problema concreto de calcular la probabilidad de que un triángulo del cual se dan arbitrariamente los tres lados, sea acutángulo u obtusángulo⁽²⁾.

2. — Problema previo es el siguiente: 1º. En cada uno de los tres métodos citados ¿aparecen todos los triángulos? 2º. ¿Aparece cada uno más de una vez?

Inmediatamente se observa que en el método usado por Poincaré solamente se obtienen los triángulos de perímetro prefijado y cada uno de ellos una sola vez si se tiene en cuenta el orden de los lados, o bien seis veces si se prescinde de él, tres si es isósceles, una si es equilátero.

Como cualquier triángulo es semejante a alguno de éstos, la familia de todos ellos queda normalizada por esta condi-

(1) "Bulletin de Mat. et de Ph. pures et appl. 1935.

(2) Este problema, para el primer método de representación, se encuentra ya resuelto por E. LEMOINE, *Quelques questions de probabilités résolues géométriquement*. Bull. Soc. Math. France t. 11.

ción de perímetro prefijado, que permite representar todos los semejantes entre sí por un mismo punto.

En el método de Study, por el contrario, triángulos semejantes están representados por puntos de una semirrecta de origen O y se logra normalización análoga considerando como en el método de Poincaré los triángulos de perímetro $a + b + c = 1$ los cuales están representados por la superficie del octaedro cuyos semiejes x, y, z , valen 1 (normalización *octaédrica*).

Otro modo de normalización sería éste: sustituir cada triángulo por otro triángulo semejante que cumple la condición $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, es decir, basta dividir los lados a, b, c , de cualquier triángulo por $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$; claramente se ve que los puntos representativos forman en este caso la superficie esférica de centro O y radio 1 (normalización *esférica*).

También con este método se obtiene cada triángulo una sola vez si se tiene en cuenta el orden de los lados o bien seis veces si se prescinde de él.

En el método que proponemos, basado en el teorema de Pompeiu, se observa desde luego que los triángulos muy pequeños no están representados; basta observar en efecto que en un triángulo equilátero el centro tiene la propiedad de hacer mínima la suma de distancias a los tres vértices. En efecto, recordemos que el punto de Fermat (o de Steiner) de cualquier triángulo, esto es, aquel cuya suma de distancias a los vértices es mínima, es el punto desde el cual se ven sus tres lados bajo ángulo de 120° y este punto coincide con el centro, si el triángulo es equilátero.

No hay, en cambio, cota superior para las dimensiones de los triángulos definidos con este método, puesto que existen puntos en el plano cuyas distancias a los tres vértices del triángulo equilátero superan a cualquier número.

También se ve inmediatamente que cada triángulo tiene en la representación que estudiamos dos semejantes; en efecto: para obtener un punto P que cumpla las condiciones $\frac{PA}{a} = \frac{PB}{b} = \frac{PC}{c}$ basta construir dos de los lugares geométricos definidos por dos de estas igualdades; considerando, por ejemplo, la primera, resulta una circunferencia cuyo diámetro está situado en la recta AB y separa armónicamente al par AB . Análoga-

mente considerando la segunda: $\frac{PB}{\beta} = \frac{PC}{\gamma}$ resulta una circunferencia cuyo diámetro está situado en BC y separa al par BC . Hay, por tanto, a lo sumo dos puntos P_1, P_2 intersecciones de ambas circunferencias, que representan dos triángulos semejantes al de lados α, β, γ ; si las circunferencias son tangentes, los puntos son coincidentes; si no se cortan, no hay solución.

Veamos en qué condiciones se verifican cada una de estas soluciones. Para ello resolvamos el siguiente problema:

Dadas tres circunferencias concéntricas de radios $\alpha < \beta < \gamma$ construir un triángulo equilátero cuyos vértices estén en ellas (Fig. 3).

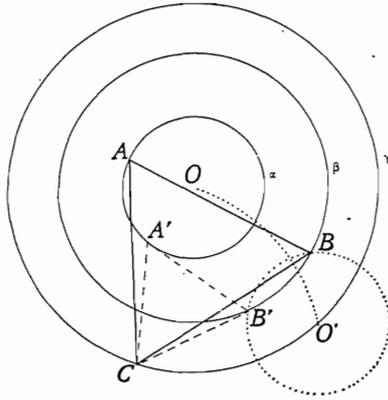


Fig. 3

Elegimos un punto cualquiera en la circunferencia de radio γ como vértice C ; con centro en dicho punto hacemos girar 60° la circunferencia de radio α la cual puede cortar a la circunferencia de radio β en dos puntos B y B' . Construyendo sobre BC (o $B'C$) un triángulo equilátero tenemos el triángulo pedido.

Según sea

$$\beta - \alpha < OO' < \beta + \alpha; OO' = \beta + \alpha; OO' > \beta + \alpha,$$

es decir,

$$\beta - \alpha < \gamma < \beta + \alpha; \gamma = \beta + \alpha; \gamma > \beta + \alpha$$

habrá respectivamente dos soluciones distintas, dos coincidentes o ninguna, por tanto siempre que sea $\beta - \alpha < \gamma \leq \beta + \alpha$ es decir,

siempre que los segmentos dados formen triángulo, habrá dos puntos distintos cuyas distancias a los vértices de un triángulo equilátero son proporcionales a α, β, γ ; cuando sea $\gamma = \alpha + \beta$ (pudiendo ser o no $\alpha = 0$) es decir, los segmentos dados forman un triángulo degenerado, habrá dos soluciones coincidentes y finalmente cuando sea $\gamma > \alpha + \beta$, o sea, cuando los segmentos no forman triángulo no habrá ninguna solución.

Hemos comprobado que hay dos puntos que representan, triángulos semejantes al de lados α, β, γ , pero, ¿cómo están situados respecto de la circunferencia circunscrita al triángulo equilátero? Consideremos uno de ellos y su inverso respecto de la circunferencia circunscrita; estos dos puntos definen triángulos semejantes, según la conocida propiedad: «Dos puntos inversos respecto de la circunferencia circunscrita al triángulo equilátero definen triángulos semejantes»⁽¹⁾, luego el segundo punto buscado debe coincidir con el inverso del primero.

Por tanto, como todos los puntos interiores a la circunferencia tienen sus inversos fuera de ella, los triángulos que definen los puntos interiores son semejantes a los que definen los exteriores.

En este método de Pompeiu cada triángulo propiamente dicho y todos sus semejantes están representados en el plano por seis puntos y sus seis inversos respecto de la circunferencia

(1) Dos puntos inversos respecto de la circunferencia circunscrita al triángulo equilátero definen triángulos semejantes (fig. 4).

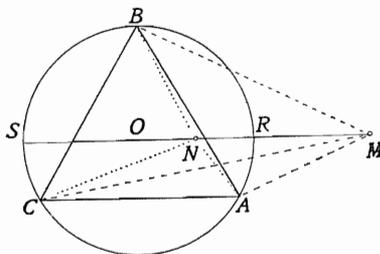


Fig. 4

Los puntos M y N por el teorema de Pompeiu definen triángulos, y también dividen armónicamente al diámetro ROS pues se tiene:

$$OM \cdot ON = OR^2$$

luego, la circunferencia de centro O es el lugar de los puntos:

$$\frac{AM}{AN} = \frac{MR}{RN} = \frac{BM}{BN} = \frac{CM}{CN} = Cte.$$

por tanto, los triángulos definidos por dos puntos inversos son semejantes.

Nota: Si el triángulo ABC no es equilátero pueden los dos inversos no determinar triángulo, pero si uno lo determina, también su inverso, y los triángulos obtenidos son semejantes.

circunscripta al triángulo, número que se reduce a tres si el triángulo dado es isósceles y a uno si es equilátero.

3. — Calculemos ahora la probabilidad de los triángulos acutángulos y obtusángulos en cada uno de los métodos citados.

1º. *Método de Poincaré.* Solamente los puntos interiores al triángulo cuyos vértices son los puntos medios del triángulo equilátero y cuya altura es el perímetro dado, determinan triángulos; los puntos de los lados de dicho triángulo determinan triángulos impropios, pues ellos tienen un lado igual a la suma de los otros dos.

Para encontrar el lugar de los puntos que determinan triángulos rectángulos, acutángulos y obtusángulos, considere-

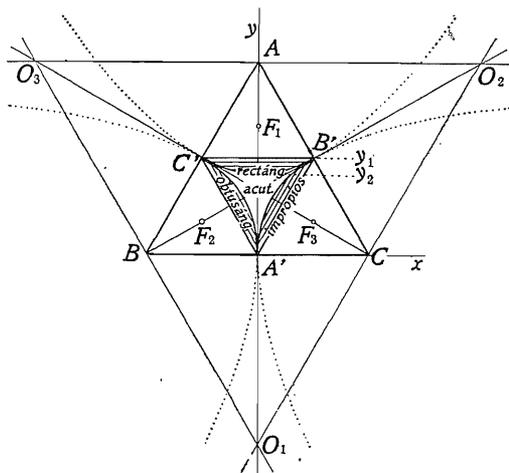


Fig. 5

mos los ejes rectángulos OA y OC y busquemos las distancias de un punto $I(xy)$ a los lados a, b, c (Fig. 5), un cálculo fácil conduce a este resultado: *Los triángulos serán acutángulos, rectángulos u obtusángulos según que se verifique:*

$$\frac{4x^2}{l^2} - \frac{4}{3l^2} y^2 - \frac{4}{l\sqrt{3}} y^2 + 1 \geq 0$$

o sea

$$\frac{4x^2}{l^2} - \left(\frac{2y}{l\sqrt{3}} + 1\right)^2 + 2 \geq 0$$

En forma análoga procedemos con los otros dos lados y encontramos que los puntos que determinan triángulos rectángulos se hallan sobre una de las ramas de cada una de las tres hipérbolas cuyos centros están en las alturas correspondientes al lado considerado como eje de las x , y que pasan por los vértices del triángulo interior al de altura prefijada; los puntos que determinan triángulos obtusángulos y acutángulos son los interiores y exteriores respectivamente a las hipérbolas anteriores.

El área del recinto cuyos puntos determinan triángulos es:

$$A = \frac{1}{4} \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4\sqrt{3}} = 0,14434$$

Para hallar el área del recinto cuyos puntos determinan triángulos obtusángulos se calcula una integral doble que se reduce a la integral simple de una expresión irracional cuadrática y resulta finalmente

$$\frac{A_{ob}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{3}{4} - \lg 2 \right) = 0,03282$$

o sea

$$A_{ob} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{9}{4} - 3 \lg 2 \right) = 0,09846$$

Finalmente, el área del recinto cuyos puntos definen triángulos acutángulos la obtenemos por diferencia entre las dos halladas y es:

$$A_{ac} = \frac{1}{\sqrt{3}} (3 \lg 2 - 2) = 0,04588$$

Luego, la probabilidad de los triángulos obtusángulos en el triángulo parcial es:

$$P_{ob} = \frac{0,09846}{0,14434} = 0,682$$

la de los acutángulos:

$$P_{ac} = \frac{0,04588}{0,14434} = 0,318$$

Si consideramos el triángulo total tenemos:

$$P_{ob} = \frac{9}{4} - \lg 2 = 0,17055$$

$$P_{ac} = 3 \lg 2 - 2 = 0,07945.$$

La probabilidad de formar triángulo con los tres segmentos obtenidos se sabe que es $1/4$, si consideramos el triángulo total, o bien 1 si consideramos el triángulo central $A'B'C'$.

2º. *Método de Study*

a) *Normalización octaédrica* (Fig. 6).

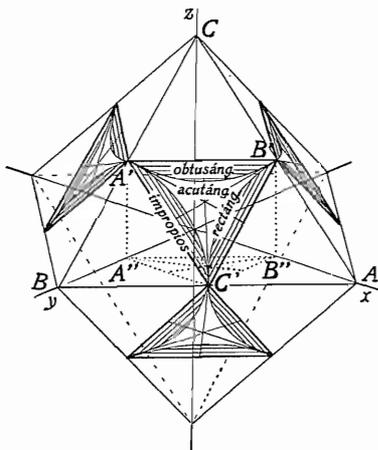


Fig. 6

Con este método, si deseamos triángulos de lados positivos, debemos considerar la cara $a + b + c = 1$ del octaedro, y en dicha cara los puntos interiores al triángulo $A'B'C'$ cuyos lados son las intersecciones del plano $a + b + c = 1$ con los $a + b - c = 0$, $a - b + c = 0$, $-a + b + c = 0$, son los únicos que determinan triángulo; los puntos situados en los lados de dicho triángulo dan triángulos impropios; los triángulos rectángulos están determinados por los puntos situados en las intersecciones del plano $a + b + c = 1$ con los conos $c^2 = a^2 + b^2$, $b^2 = a^2 + c^2$, $a^2 = b^2 + c^2$; los puntos comprendidos entre di-

por tanto, la probabilidad de obtener triángulos obtusángulos en el triángulo central es:

$$P_{ob} = \frac{0,14766}{0,21650} = 0,682,$$

y la de los acutángulos es:

$$P_{ac} = \frac{0,06884}{0,21650} = 0,318;$$

si consideramos el triángulo total resulta:

$$P_{ob} = 9/4 - 3 \lg 2 = 0,17055$$

$$P_{ac} = 3 \lg 2 - 2 = 0,07945$$

b) Normalización esférica (Fig. 8).

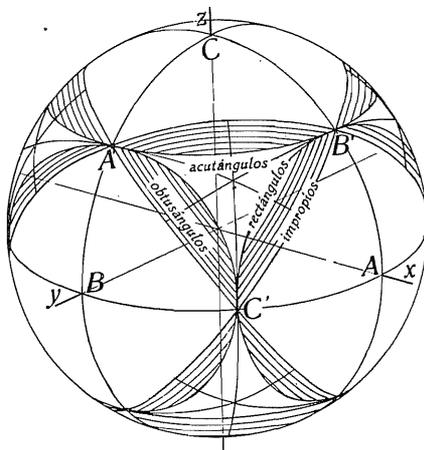


Fig. 8

Consideremos el octante de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ donde se encuentran los puntos que determinan triángulos de lados positivos; de todos los puntos del octante sólo los interiores al triángulo esférico $A'B'C'$ cuyos lados son las intersecciones de la esfera con los planos $a + b - c = 0$, $a - b + c = 0$, $-a + b + c = 0$, determinan triángulos; los situados sobre los

lados de dicho triángulo dan triángulos límites; los que determinan triángulos rectángulos están situados en las intersecciones de la esfera $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ con los conos $c^2 = a^2 + b^2$, $b^2 = a^2 + c^2$, $a^2 = b^2 + c^2$; los triángulos obtusángulos están determinados por los puntos comprendidos entre dichas intersecciones y los arcos de círculo máximo cuyos puntos dan los triángulos límites, y los restantes definen los triángulos acutángulos.

El área del octante de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ es:

$$A = \frac{\pi}{2} = 1,57079$$

Hallemos el área del triángulo esférico $A'B'C'$ cuyos puntos determinan triángulos; para ello calculemos el área de los tres triángulos esféricos restantes cuyos puntos no dan triángulos y tenemos:

$$\cos c' = \cos a/2 \cdot \cos b/2 = \cos 45^\circ \cdot \cos 45^\circ = 1/2$$

$$\cos A' = \operatorname{tg} b/2 \cdot \operatorname{cot} c' = 0,57735$$

$$A' = B' = 54^\circ 43' 56''$$

$$E = C' + A' + B' - 180^\circ = (90^\circ + 2 \cdot 54^\circ 43' 56'' - 180^\circ) = \\ = 19^\circ 27' 52'' = 70072''$$

$$S = E_r = 0,33972,$$

luego el área de los tres triángulos es 1,01916, y la de la superficie buscada es:

$$1,57079 - 1,01916 = 0,55163.$$

Por tanto la probabilidad de que exista triángulo dentro del triángulo $A'B'C'$ es 1 y si consideramos el triángulo total resulta:

$$P_t = \frac{0,55163}{1,57079} = 0,351.$$

El área de la superficie cuyos puntos determinan triángulos acutángulos la obtenemos calculando el área de los tres

cuartos de casquete de altura $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ que es $\frac{3}{4} \left[2\pi \frac{(2-\sqrt{2})}{2} \right] = \frac{3\pi}{4} (2 - \sqrt{2}) = 0,46008$ y restándola del área del octante:

$$A_{ac} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} (2 - \sqrt{2}) = \frac{\pi}{4} (2\sqrt{2} - 4) = 0,19054.$$

Si al área de los tres cuartos de casquete le restamos la de los tres triángulos cuyos puntos no dan triángulos, obtenemos el área del recinto donde se encuentran los puntos que determinan triángulos obtusángulos que es:

$$A_{ob} = 1,38025 - 1,01916 = 0,36109,$$

luego, la probabilidad de obtener triángulo acutángulo en el triángulo $A'B'C'$ es:

$$P_{ac} = \frac{0,36109}{0,55163} = 0,345$$

y la de obtener triángulo obtusángulo es:

$$P_{ob} = \frac{0,36109}{0,55163} = 0,654,$$

pero si consideramos el octante ABC resulta:

$$P_{ac} = 0,121$$

$$P_{ob} = 0,230$$

3º. *Método basado en el teorema de Pompeiu.* A cualquier punto del plano corresponde siempre un triángulo; veamos ahora qué clases de triángulos se obtienen con los distintos puntos del plano.

Los puntos de la circunferencia circunscripta dan triángulos límites, es decir, que tienen un lado igual a la suma de los otros dos como lo demuestra M. N. Obrechhoff en el «Bulletin de Mat. et de Ph. pures et appl.» Bucarest (1935-36 p. 4).

Busquemos el lugar de los puntos que determinan triángulos rectángulos, acutángulos y obtusángulos.

Si consideramos los ejes rectangulares O_1B y O_1A , las coordenadas de los vértices son: $A(l/2, 0)$, $B(0, l\sqrt{3}/2)$, $C(-l/2, 0)$.

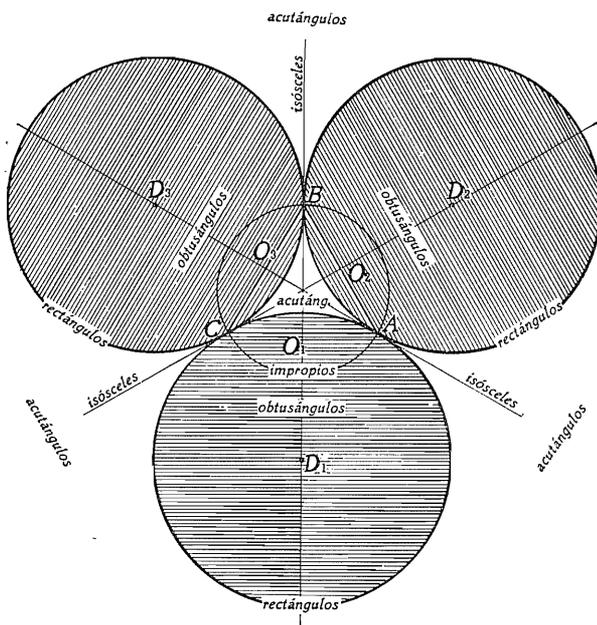


Fig. 9

Según sean los triángulos acutángulos, rectángulos u obtusángulos, debe verificarse que:

$$\overline{IA}^2 + \overline{IC}^2 \geq \overline{IB}^2$$

$$(x - l/2)^2 + y^2 + (x + l/2)^2 + y^2 \geq x^2 + \left(y - \frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$x^2 + \left(y + \frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 - l^2 \geq 0.$$

Análogamente con los otros dos lados. Encontramos así que los puntos que determinan triángulos rectángulos se hallan sobre las circunferencias de radio l con centro sobre las mediatrices de cada lado y que pasan por los vértices respectivos; los puntos que determinan triángulos obtusángulos y acután-

gulos son los interiores y exteriores respectivamente a las circunferencias anteriores.

Como con este método a cualquier punto del plano corresponde siempre un triángulo, resulta que si consideramos los puntos del círculo de área $\pi (l/3 \cdot \sqrt{3})^2 = \frac{\pi}{3} l^2 = l^2 \cdot 1,0472$, la probabilidad de obtener triángulo es: 1.

El área del recinto a cuyos puntos corresponden triángulos obtusángulos, la obtenemos calculando el área de los tres segmentos circulares de amplitud 60° y radio l , y la de los tres segmentos de amplitud 120° y radio $\frac{l}{3} \sqrt{3}$; luego, el área buscada es:

$$A_{ob} = \frac{l^2}{12} (10\pi - 12\sqrt{3}) = l^2 \cdot 0,8859.$$

La diferencia entre el área del círculo de radio $\frac{l}{3} \sqrt{3}$ y la recién calculada, nos da el área del recinto cuyos puntos representan triángulos acutángulos, y es:

$$A_{ac} = \frac{l^2 \pi}{3} - \frac{l^2}{6} (5\pi - 6\sqrt{3}) = \frac{l^2}{6} (6\sqrt{3} - 3\pi) = l^2 \cdot 0,1613$$

Por tanto, la probabilidad de los triángulos obtusángulos es:

$$P_{ob} = \frac{0,8859}{1,0472} = 0,846$$

y la de los acutángulos:

$$P_{ac} = \frac{0,1613}{1,0472} = 0,154$$

Si en vez de considerar los puntos interiores a la circunferencia circunscripta, consideramos los exteriores que determinan triángulos semejantes a los ya considerados, las probabilidades resultan:

$$P_l = 1$$

$$P_{ac} = 1$$

$$P_{ob} = 0$$

Las probabilidades obtenidas con los diversos métodos son:

1º. Poincaré

$\Delta A' B' C'$	$\Delta A B C$
$P_t = 1$	$P_t = 0,250$
$P_{ac} = 0,318$	$P_{ac} = 0,079$
$P_{ob} = 0,682$	$P_{ob} = 0,171$

2º. Study

a) Normalización octaédrica

$P_t = 1$	$P_t = 0,250$
$P_{ac} = 0,318$	$P_{ac} = 0,079$
$P_{ob} = 0,682$	$P_{ob} = 0,171$

b) Normalización esférica

$P_t = 1$	$P_t = 0,351$
$P_{ac} = 0,345$	$P_{ac} = 0,121$
$P_{ob} = 0,655$	$P_{ob} = 0,230$

3º. Pompeiu

P. int. circunf.	P. ext. circunf.
$P_t = 1$	$P_t = 1$
$P_{ac} = 0,154$	$P_{ac} = 1$
$P_{ob} = 0,846$	$P_{ob} = 0$

La coincidencia de los resultados obtenidos al calcular la probabilidad de los triángulos acutángulos y obtusángulos con el método de Poincaré y con el de Study cuando se normaliza con la condición $x + y + z = 1$, se debe a que ambos métodos son equivalentes, pues si bien en el primero se forman los triángulos con las distancias de un punto interior al triángulo equilátero a los lados del mismo, y en el segundo con las coordenadas de un punto del plano $x + y + z = 1$, dichos segmentos son respectivamente proporcionales, luego las áreas de

los triángulos obtenidos deben ser también proporcionales y por tanto las probabilidades son iguales.

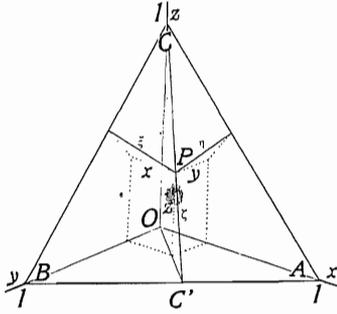


Fig. 10

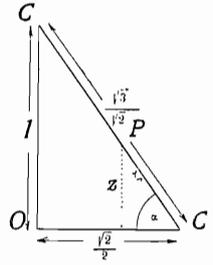


Fig. 11

En efecto, si consideramos como triángulo de Poincaré la cara $x + y + z = 1$ del octaedro y llamamos ξ, η, ζ , las distancias de P a los lados, y x, y, z , las coordenadas del mismo punto, de la semejanza de los tres triángulos rectángulos se deduce:

$$\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{z}{\zeta} = \text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

por tanto, los segmentos son respectivamente proporcionales.

