Volumen VII 1940 - 1941 Número 1

# REVISTA

DE LA

# UNION MATEMATICA ARGENTINA

MIEMBROS FUNDADORES DE LA U. M. A.

José Babini (Santa Fe). — Francisco Berdiales (Fallecido). — José Barral Souto (Buenos Aires). — Clotilde A. Bula (Rosario). — Enrique Butty (Buenos Aires). — Carlos Dieulefait (Rosario). — Facultad de Química Industrial (Santa Fe). — Facultad de Ciencias Matemáticas (Rosario). — Fernando L. Gaspar (Rosario). — José Giannone (Rosario). — Alberto González Domínguez (Providence, E.E. U.U.). — José González Galé (Buenos Aires. — Manuel Guitarte (Buenos Aires). — Walter S. Hill (Montevideo). — Carlos Isella (Rosario). — Juan Olguín (Rosario). — Elba R. Raimondi (Buenos Aires). — Julio Rey Pastor (Buenos Aires). — Enrique L. Samatán (Buenos Aires). — Luis A. Santaló (Rosario). — José Sortheix (Tucumán). — Dito T. A. de Speluzzi (Buenos Aires). — Esteban Terradas (La Plata).

BUENOS AIRES
1940

# JUNTA DIRECTIVA

| | |
|---|---|
| PRESIDENTE ........................ | Prof. Ing. Manuel Guitarte |
| VICE PRESIDENTES ................ | Prof. Dr. Julio Rey Pastor |
| | Prof. Ing. José Babini |
| SECRETARIO ........................ | Prof. Dr. Fernando L. Gaspar |
| PRO SECRETARIAS ................ | Srta. Juana María Cardoso |
| | Srta. Esther Ferrari |
| TESORERA ........................ | Prof. Dra. Clotilde A. Bula |
| PRO TESORERA ................ | Sra. Janny Frankel |
| VOCALES ........................ | Prof. Ing. José Sortheix |
| | Prof. Ing. Cortés Plá |
| | Prof. Dr. Esteban Terradas |
| | Prof. Ing. Pedro Rosell Soler |
| | Dr. Alberto González Domínguez |

DIRECTOR DE PUBLICACIONES ................ Prof. Dr. Julio Rey Pastor

DIRECTOR DE LA REVISTA DE LA U. M. A. . Prof. Ing. José Babini

## DELEGADOS DE LA U. M. A.

| | |
|---|---|
| en Tucumán ........................ | Prof. Ing. José Sortheix |
| en Córdoba ........................ | Prof. Ing. Fernando Sánchez Sarmiento |
| en San Luis ........................ | Prof. Dr. Fausto Toranzos |
| en Santa Fe ........................ | Prof. Ing. José Babini |
| en Rosario ........................ | Prof. Dr. Fernando L. Gaspar |
| en Montevideo (R. O.) ......... | Prof. Ing. Walter S. Hill |

# SOBRE LA PARADOJA DE BERTRAND

por Esther Ferrari

Muy conocido es el siguiente problema de Bertrand:

«On trace au hasard une corde dans un cercle. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit?».

Teniendo en cuenta que si un triángulo equilátero está inscripto en una circunferencia de radio R, la distancia de sus lados al centro es $R/2$; el problema se puede enunciar así:

Dados dos círculos concéntricos de radios R y $R/2$, si se traza al azar una cuerda en el círculo de radio R ¿cuál es la probabilidad de que la cuerda corte también al otro círculo?

Bertrand dá tres soluciones de este problema, que conducen a tres resultados diferentes, expuestos en casi todos los tratados de probabilidades. La cuestión parecía agotada, pero no hace mucho apareció en la revista de la Academia de Ciencias de Estocolmo una memoria de prestigioso autor (1), cuyas conclusiones son muy discutibles. La crítica de este trabajo y el claro planteamiento del problema constituyen el objeto de este trabajo de seminario, realizado como alumna del Instituto Matemático de la Universidad de Buenos Aires.

Como Bertrand utiliza ciertos principios de simetría que ocultan el concepto, vamos a puntualizar la esencia de su razonamiento, poniendo de manifiesto el significado de probabilidad que es el de *medida* de un conjunto parcial de elementos, respecto de un conjunto total. La medida es, como se sabe, una función aditiva de conjunto, no siendo necesario en este problema postular la aditividad infinita. Según sea el sistema de coordenadas adoptado será distinta la expresión de la medida, la cual tiene, como se sabe (2), la forma

$$\int_A f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

donde $f(\xi, \eta)$ es una función positiva arbitraria.

---

(1) Henrik Petrini, Le paradoxe de Bertrand. Arkiv for matematik, astronómi och fysik. Band 25 A. N° 16. 1936.

(2) H. Poincaré. Calcul des probabilités, 2ª edición, pág. 120.

Refiriéndose a la indeterminación originada por esta función arbitraria dice Deltheil: «Para una clase extensa de problemas esta indeterminación desaparece imponiendo la condición siguiente: el resultado del cálculo debe ser invariante para un desplazamiento de conjunto de la figura. Este punto de vista liga las probabilidades geométricas a la *teoría de la medida* de los conjuntos.

Consideremos el círculo de radio $R = 1$ y la cuerda $AB$:

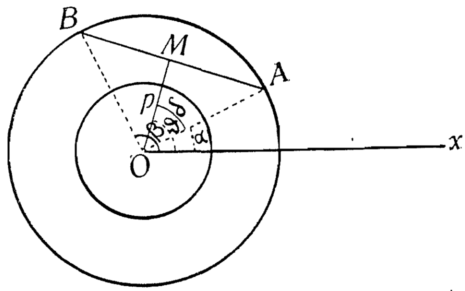



Fig. 1

1.ª Solución: Dice Bertrand (3):

''Si l'une des extrémités de la corde est connue, ce renseignement ne change pas la probabilité; la symétrie du cercle ne permet d'y attacher aucune influence, favorable ou défavorable à l'arrivée de l'événement demandée.

L'une des extremités de la corde étant connue, la direction doit être réglée par le hasard. Si l'on trace les deux côtés du triangle équilatéral ayant pour sommet le point donné, ils forment entre eux et avec la tangente trois angles de 60°.

La corde pour être plus grande que le côté du triangle équilatéral, doit se trouver dans celui des trois angles qui est compris entre les deux autres. La probabilité pour que le hasard entre trois angles égaux qui peuvent le recevoir le dirige dans celui-là semble par définition égale 1/3''.

Este razonamiento de Bertrand equivale a esto:

Como coordenadas de la cuerda se toman los ángulos polares $\alpha$ y $\beta$; y se toma como probabilidad elemental $d\alpha \, . \, d\beta$. El párrafo transcrito, traducido en el lenguaje del cálculo integral, equivale a esto: El punto A puede encontrarse en cualquier punto de la circunferencia. Luego $\alpha$ puede tomar todos los valores comprendidos entre $0$ y $2\pi$.

Fijo A, si AB es el lado del triángulo equilátero inscripto $\beta = \alpha + 120^{\circ}$.

(3) J. Bertrand. *Calcul des Probabilités.* Paris, 1889; pág. 4.

La probabilidad P de las cuerdas mayores que el lado del triángulo equilátero inscripto, es por consiguiente:

$$P = \frac{\int_0^{2\pi} d\alpha \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} d\beta}{\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{2\pi} d\beta} = \frac{1}{3}$$

2.ª Solución. — Dice Bertrand:

''Si l'on connaît la direction de la corde, ce renseignement ne change pas la probabilité; la symétrie du cercle ne permet d'y attacher aucune influence favorable ou défavorable a l'arrivée de l'événement demandé.

La direction de la corde étant donnée, elle doit, pour être plus grande que le côté du triangle équilatéral, couper l'un ou l'autre des rayons qui composent le diamètre perpendiculaire, dans la moitié la plus voisine du centre. La probabilité pour qu'il en soit ainsi semble, par définition égale à ½''.

Este breve razonamiento equivale a esto:

Como coordenadas de la cuerda tomamos las de la recta, o sea la distancia $p\ (0 \leq p \leq 1)$ y el ángulo $\Theta\ (0 \leq \Theta \leq 2\pi)$, y como probabilidad elemental se adopta $dp\, d\Theta$.

Si $\overline{OM}$ está comprendido entre 0 y 1/2, la cuerda es mayor que el lado del triángulo equilátero inscripto, luego

$$P = \frac{\int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^{1/2} dp}{\int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^{1} dp} = \frac{1}{2}$$

Hemos procurado interpretar rigurosamente los dos razonamientos de Bertrand, dando expresión analítica a la idea intuitiva encerrada en la frase repetida en ambos: «la symétrie du cercle ne permet d'y attacher aucune influence favorable ou défavorable à l'arrivée de l'événement demandé». Esta frase tiene el siguiente significado analítico: la simetría del círculo reduce el cálculo de la probabilidad de un conjunto definido por dos variables a la de un conjunto definido por una sola variable. El significado estricto de tal razonamiento para todos los casos análogos es éste: *Si al fijar una variable resulta constante la medida del conjunto simplemente infinito así definido, la probabilidad buscada es la misma de este conjunto.* En efecto, la segunda integración equivale en tal caso a multiplicar numerador y denominador por un mismo factor constante y esto no modifica el cociente. En las dos soluciones de Bertrand es aplicable este criterio, pues la primera integral resulta constante en ambos casos y la segunda integración alrededor de la circunferencia equivale, por tanto, a multiplicar numerador y denominador por el factor $2\pi$.

3.ª Solución. — El razonamiento de Bertrand es éste:

''Choisir une corde au hasard, c'est en choisir au hasard le point milieu. Pour que la corde soit plus grande que le côté du triagle équilatéral, il faut et il suffit que le point milieu soit à une distance du centre plus petite que la moitié du rayon, c'est à diré â l'intérieur d' un cercle quatre fois plus petit en surface. Le nombre des points situés dans l'intérieur d'une surface quatre fois moindre est quatre fois moindre. La probabilité pour que la corde dont le milieu est choisi au hasard soit plus grande que le côté du triangle équilatéral semble par définition égale à ¼''.

Traducido en coordenadas equivale a esto: adoptamos como coordenadas, las de su punto medio: radio p y ángulo $\Theta$. Con estas coordenadas adoptamos como medida de un conjunto de cuerdas cuyos puntos medios forman un recinto al área de éste. Por consiguiente la probabilidad elemental es el elemento de área: $p\,d\,p\,d\,\Theta$ y la probabilidad pedida es ésta:

$$P = \frac{\int_0^{1/2} p\,d\,p \int_0^{2\pi} d\,\Theta}{\int_0^{1} p\,d\,p \int_0^{2\pi} d\,\Theta} = \frac{1}{4}$$

Deltheil, en su libro sobre probabilidades geométricas, dice: «Si se pregunta cuál de las tres soluciones de Bertrand es la buena, la respuesta es que las tres son lógicas, pero que en realidad se refieren a tres problemas diferentes, o más exactamente a tres mecanismos diferentes de intervención del azar».

En el primer caso, el azar interviene en la dirección de la cuerda, en el segundo caso en la distancia de la cuerda al centro de la circunferencia y en el tercero en la posición del punto medio.

Justo es reconocer que el propio Bertrand se coloca en un punto de vista análogo cuando dice:

«Entre ces trois réponses; quelle est la véritable?

Aucune des trois n'est fausse, aucune n'est exacte, la question est mal posée».

Hemos llegado a las tres soluciones de Bertrand considerando casos particulares de las probabilidades elementales correspondientes. Ya hemos visto que en la expresión general de la probabilidad elemental aparece una función positiva arbitraria de las variables que se adoptan, la cual se determina mediante el grupo de transformaciones que se adopte como básico.

Es así que en el problema de Bertrand, el resultado $P = 1/2$ de la segunda solución se impone (como dice Deltheil) desde el punto de vista de la *medida de las rectas*, y la solución $P = 1/4$ está impuesta por el grupo de los movimientos de los puntos del plano, al sustituir cada cuerda por su punto medio.

En efecto, se ha llegado analíticamente a la 2.ª solución tomando como coordenadas de las cuerdas, las de sus rectas básicas que son invariantes respecto de los movimientos de dichas rectas (4); y a la tercera solución se ha llegado tomando las coordenadas de los puntos medios.

Ahora bien; siendo la cuerda un elemento geométrico distinto de la recta básica, se ve claramente por qué la segunda solución de Bertrand que Deltheil justifica desde el punto de vista de la recta, no debe considerarse como solución estricta del problema de Bertrand, tal como éste lo enunció. Note el lector que Bertrand habla de conjuntos de *cuerdas* y no de *rectas*. Dicha solución corresponde en realidad al siguiente problema: Dados dos círculos concéntricos de radios R y R/2, si se traza al azar una recta, entre todas las que cortan al círculo de radio R ¿cuál es la probabilidad del conjunto de rectas que también cortan al 2.º círculo?

Es muy cierto que cada cuerda está determinada por su recta base, de igual modo que está determinada por su punto medio y también puede determinarse de infinitos otros modos, pero el con-

---

(4) R. DELTHEIL. Probabilités géometriques, 1926, pág. 14.

cepto geométrico de medida, o sea de probabilidad, es independiente del concepto aritmético de correspondencia biunívoca.

En efecto, si se adopta el punto medio de cada cuerda como representante de ésta, figuras iguales consideradas como conjuntos de puntos no corresponden a conjuntos iguales de cuerdas, ni a conjuntos iguales de rectas. Así por ejemplo, los conjuntos de rectas que cortan a uno u otro de dos segmentos iguales son congruentes y por tanto tienen probabilidades iguales respecto del grupo de los movi-

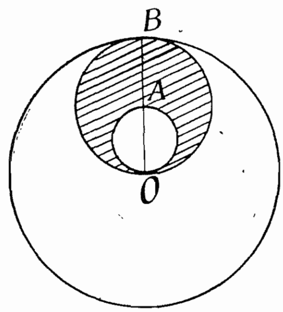



Fig. 2

mientos del plano. En cambio, los puntos medios de las cuerdas que determinan esas rectas forman conjuntos de área distinta. En la figura se han dibujado las superficies cubiertas por tales conjuntos de puntos medios de las cuerdas que cortan a los segmentos iguales OA y AB; y las áreas de esos recintos no son iguales, sino que una es triple de la otra, a pesar de que los correspondientes conjuntos de rectas son iguales.

Esto bastaría si no existiesen otras razones, para afirmar que la única solución aceptada por H. Petrini, que es la tercera de Bertrand, no es legítima.

Es preciso, pues, adoptar coordenadas especiales que no sean de punto ni de recta, sino de la cuerda. Sobre esto y el análisis de la memoria citada, versará nuestra nota próxima.

*Instituto de Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires.*

# EL PROBLEMA DE VARIOS ELECTRONES EN LA MECANICA CUANTISTA

por GUILLERMO KNIE

El problema del átomo pesado que implica la presencia de varios electrones, es demasiado complicado para ser resuelto exactamente.

Por eso, desde los principios de la mecánica cuantista, para su solución se han desarrollado métodos de aproximación. En lo que sigue examinaremos varios de estos y su fundamentación teórica, lo que servirá para aclarar las relaciones que existen entre dos de ellos. El primero y más conocido de todos es el del *self consistent field* de Hartree (1). Consiste en someter cada electrón separadamente a una ecuación ondulatoria, suponiendo que él se mueva independientemente de los otros en un campo que es el mismo para todos y para el cual, es característico la supresión del efecto que el electrón ejerce sobre sí mismo. El parámetro de energía en esta ecuación no es la energía total, sino que hay que restar de ésta, la energía debida al potencial de un electron con respecto a otro tomada para todos los pares de electrones que se pueden formar exceptuando el uno del cual se trata. El ejemplo más sencillo está representado por el átomo de helio en el estado fundamental. Según Hartree tenemos la ecuación (en unidades atómicas $e = m = h = 1$)

$$\left\{-\frac{1}{2}\triangle_1-\frac{1}{r_1}+\int\frac{|\psi(x_2)|^2\,dx_2}{r_{12}}\right\}\varphi(x_1)= \\ =\left\{E-\int\overline{\psi}(x_2)\,H_2\,\psi(x_2)\,dx_2\right\}\varphi(x_1). \tag{1}$$

Aquí $H_2$ representa el operador de energía del segundo electrón: $-\frac{1}{2}\triangle_2-\frac{1}{r_2}$. $\triangle_1$ es el operador de Laplace aplicado a las coordenadas del primer electrón, $r_1$ la distancia del primer electrón al núcleo, $\triangle_2$ y $r_2$ las mismas cantidades para el segundo electrón. Como en el estado fundamental del helio ambos electrones tienen la misma función ondulatoria, la ecuación que resulta de cambiar los índices 1 y 2 será la misma. La idea de Hartree era un acierto. Esto se ha visto más tarde cuando se trató de ponerla sobre una base teórica. Schrödinger había deducido su ecuación por medio de un

(1) HARTREE, Proc. Cambr. Phil. Soc. vol. 24, p. 111 (1927).

principio de variación. Fock demostró en el año 1930 (2) que el mismo principio de variación usado por Schrödinger dá automáticamente las ecuaciones de Hartree, si se supone que la función ondulatoria del sistema se puede escribir como un producto de funciones de las cuales cada una contiene solamente las coordenadas de un solo electrón. Con esta restricción queda comprobado, pues, que el método de Hartree representa la mejor solución que se puede encontrar bajo la condición mencionada.

Veremos ahora en el ejemplo del átomo de helio como del principio de variación resultan las ecuaciones de Hartree. Poniendo $-\frac{1}{2}\triangle_1 - \frac{1}{r_1} = H_1$ y $-\frac{1}{2}\triangle_2 - \frac{1}{r_2} = H_2$ el operador de energía de nuestro problema es $L = H_1 + H_2 + \frac{1}{r_{12}}$. Si la función ondulatoria total es $\psi$, tenemos: $\iint \delta\overline{\psi}\,(L - E)\,\psi\,dx_1\,dx_2 = 0$ (hay que variar la parte real de $\psi$ y la parte imaginaria o, lo que es lo mismo, $\overline{\psi}$ y $\psi$ independientemente). Si ponemos $\psi = \psi\,(x_1)\,\psi\,(x_2)$, obtenemos $\int dx_1\,\delta\overline{\psi}(x_1) \int \overline{\psi}(x_2)\,(H_1 + \frac{1}{r_{12}} + H_2 - E)\,\psi\,(x_1)\,\psi\,(x_2)\,dx_2 = 0$.

(Por la simetría completa del problema basta variar una de las funciones)

$$\int dx_1\,\delta\overline{\psi}(x_1)\left[H_1 + \int \frac{|\psi\,(x_2)|^2\,dx_2}{r_{12}} + \right.$$
$$\left. + \int \overline{\psi}\,(x_2)\,H_2\,\psi\,(x_2)\,dx_2 - E\right]\psi\,(x_1) = 0$$

Como esto es válido para variaciones arbitrarias de $\overline{\psi}\,(x_1)$, se obtiene

$$\left\{H_1 + \int \frac{|\psi\,(x_2)|^2\,dx_2}{r_{12}} + \int \overline{\psi}\,(x_2)\,H_2\,\psi\,(x_2)\,dx_2 - E\right\}\psi\,(x_1) = 0 \qquad (2)$$

Aquí la primera integral depende de las coordenadas del primer electrón y representa evidentemente la energía potencial mutua de los dos electrones. La segunda integral es una constante y debe entrar en el parámetro de energía. Se vé que (2) es idéntico a (1). El caso considerado es aquel en el cual el método del self consistent field da en cierto sentido su máximo de aproximación a la realidad. Esto se debe a la circunstancia de que la función ondulatoria del helio en su estado fundamental $\psi\,(x_1)\,.\,\psi\,(x_2)$ ya es simétrica en

(2) Fock, Zeitschr. für Phys. vol. 61, 126.

las coordenadas de los dos electrones. Si esto no es el caso, la verdadera función ondulatoria no puede ser un simple producto de funciones sino una suma de tales productos. En cuanto Hartree trabaja con funciones no simétricas, su método es defectuoso. El error cometido así consiste en no tomar en cuenta las fuerzas de intercambio.

Si el número de electrones es tres, se forman tres nuevos términos. A la energía potencial hay que agregar $\int \frac{|\psi(x^3)|^2 dx^3}{r_{13}}$ y al parámetro de energía $\int \overline{\psi}(x_3) H_3 \psi(x_3) dx_3$ y $\iint \frac{|\psi(x_2)|^2 |\psi(x_3)|^2 dx_2 dx_3}{r_{23}}$ y así sucesivamente. Además las funciones no pueden ser más todas iguales.

Si el número de electrones de un átomo es muy grande, el método del self consistent field resulta también pesado, entonces es más recomendable un procedimiento estadístico dado por Fermi ([1]). Consiste en una combinación de la ecuación del potencial con una relación entre la densidad de un gas de electrones y el potencial, obtenida por la aplicación del principio de Pauli a la estadística del gas de electrones. Si v es el potencial y n la densidad de los electrones, tenemos la ecuación de Poisson $\triangle v = 4\pi n e$ y

$n = \frac{2^{\frac{9}{2}} m^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2}} v^{\frac{3}{2}}}{3 h^3}$ lo cual en el caso de simetría esférica dá:

$$\frac{d^2 v}{d r^2} + \frac{2}{r} \frac{d v}{d r} = \frac{2^{\frac{13}{2}} \pi^2 m^{\frac{3}{2}} e^{\frac{5}{2}} v^{\frac{3}{2}}}{3 h^3} \qquad (3)$$

Esta ecuación junto con las condiciones en los límites determina completamente el potencial y el conocimiento del potencial como función de la distancia al núcleo es suficiente para calcular cualquier magnitud relacionada con el estado estacionario del átomo.

El método de más vasto alcance — en cuanto toma en cuenta también las fuerzas de intercambio — es el de Dirac ([2]) que se basa sobre el empleo de la matriz de densidad. Como pensamos comparar este método con el de Fermi conviene describirlo brevemente. El forma a la vez un ejemplo excelente para los cálculos semi-clásicos que deben substituir frecuentemente el procedimiento riguroso cuántico que muy a menudo no puede llevarse a cabo por

---

(1) Zeitschr. f. Phys. tomo 48 p. 73 (1928).
(2) Proc. Cambr. Phil. Soc. tomo 26, p. 376 (1930).

la gran complejidad de los cálculos. Sean $\psi_1(x_1)$, $\psi_2(x_2)\ldots$ las funciones ondulatorias del electrón 1, 2, ... Entonces $\overline{\psi}_1(x_1) \cdot \psi(x_1)$, $\overline{\psi}_2(x_2) \cdot \psi(x_2)\ldots$ son las densidades respectivas. La densidad total será: $\sum_r \overline{\psi}_r(x_r)\,\psi(x_r)$. Dirac considera esta suma como elemento diagonal de una matriz. Todos los elementos de esta matriz se obtienen sustituyendo por $\overline{\psi}_r$ y $\psi(r)$ todas las funciones de un sistema ortogonal y completo que satisface las ecuaciones del «self consistent field» del átomo de que se trata. Si designamos la densidad con la letra $\rho$, esta matriz en la manera de escribir de Dirac es $(q'/\rho/q'')$. Ahora Dirac forma $i h \frac{d}{d t}(q'/\rho/q'')$ y obtiene al efectuar esta operación una ecuación que formalmente es idéntica a la ecuación fundamental de la mecánica cuantista: $\frac{h}{i}\,\dot{\rho} = H\rho - \rho H$.

Esto le permite identificar H con el operador de la energía del sistema. En el estado estacionario $\dot{\rho} = 0$, tenemos pues: $H\rho - \rho H = 0$. El análogo clásico de esto es: $\frac{\delta H}{\delta r} \cdot \frac{\delta \rho}{\delta p} - \frac{\delta H}{\delta p} \cdot \frac{\delta \rho}{\delta r} = 0$ (1) siendo p el impulso conjugado a r y todas las cantidades conmutables. En el estado fundamental del átomo para cualquier valor de r el espacio está saturado en una región para la cual el momento p es menor que cierto valor P. En el punto $p = P$ $\rho$ salta de repente de un valor finito a 0. Resulta pues que $\frac{\delta \rho}{\delta r} = 0$ y $\frac{\delta \rho}{\delta p}$ muy grande para $p = P$. Por consiguiente debe ser $\left(\frac{\delta H}{\delta r}\right) = 0$. Esto nos da inmediatamente la relación siguiente entre P — el momento máximo electrónico — y r: $\frac{d}{d r}\left(r^2 \frac{d}{d r}\left(\frac{\mathcal{P}^2}{2 m} - \frac{2 e^2}{\pi h}\mathcal{P}\right)\right) = \frac{4 e^2}{3 \pi h^3}\, r^2 \mathcal{P}^3$ (4) (2).

Debo observar todavía que en el transcurso del cálculo Dirac ha conseguido hacer invariante la ecuación para transformaciones ortogonales de las funciones ondulatorias del sistema. Como la simetrización de la función ondulatoria es una transformación ortogonal, esto significa la introducción de las fuerzas de intercambio. Estas están representadas por el término lineal en P. Queremos demostrar ahora que si prescindimos de este término, el resultado de Dirac es equivalente al de Fermi. Se trata, pues, de demostrar la identidad de (3) con $\frac{d}{d r}\left(r^2 \frac{d \mathcal{P}^2}{d r}\right) = \frac{8 e^2 m}{3 \pi h^3}\, r^2 \mathcal{P}^3$. Por de pronto el h de Dirac es la constante de Planck dividida por $2\pi$, lo que nos dá en el

(1) Ver DIRAC: Die Prinz. der Quantenmechanik, pr. E. p. 98.

(2) En el citado trabajo de DIRAC *h* tiene por error el exponente 2.

numerador un factor $8\pi^3$, así que ahora tenemos $\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\mathcal{P}^2}{dr}) = \frac{2^{\frac{12}{2}} e^2 \pi^2 m r^2}{3h^3} \mathcal{P}^3$. Por otra parte (3) puede escribirse así: $\frac{d}{dr}(r^2\frac{dv}{dr}) = \frac{2^{\frac{13}{2}} \pi^2 m^{\frac{3}{2}} e^{\frac{5}{2}} v^{\frac{3}{2}} r^2}{3h^3}$. La identificación completa la conseguimos ahora por un teorema que se encuentra en una forma primitiva en el primer trabajo de Bohr [1]. Cuando un electrón se mueve en una órbita circular en un campo central de fuerza de atracción inversamente proporcional a $r^n$ con una velocidad pequeña en comparación con la velocidad de la luz, se tiene la relación $E_{cin} = \frac{n+1}{2} E_{pot.}$ Si la órbita no es circular, la relación es válida todavía para los valores medios $\overline{E}_{cin}$ y $\overline{E}_{pot.}$ (para la generalización de este teorema vea Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien 4. ed. p. 771). En nuestro caso el electrón con el momento máximo P se mueve todavía con una velocidad bastante inferior con respecto a la de la luz (en la primera órbita de Bohr del átomo de hidrógeno la velocidad es $3.10^7$ cm) y las condiciones para la aplicación del teorema son dadas. Tenemos pues: $\frac{\mathcal{P}^2}{2m} = -\frac{n+1}{2} ve$. Como n es siempre negativo, para $|n| > 1$ podemos escribir en lugar de éso: $\mathcal{P}^2 = |n+1| vem$ ó $\mathcal{P} = (|n+1| vem)^{\frac{1}{2}}$. Si substituimos este valor en la ecuación de Dirac, obtenemos una concordancia perfecta de las dos fórmulas si tomamos $n = -3$. El significado físico de ésto es que el resto del átomo tiene sobre el electrón de momento máximo el efecto de un dípolo la fuerza del cual como se sabe decrece con la tercera potencia de la distancia.

En cuanto a la magnitud del efecto de intercambio, se vé que la razón del coeficiente de P al coeficiente de $P^2$ es $\sim \frac{e^2 m}{h}$ lo que tiene la dimensión de un momento. Si se considera que para la primera órbita de Bohr en el átomo de hidrógeno se tiene: $pr = h$ y $\frac{e^2}{r^2} = \frac{p^2}{mr}$ resulta que $\frac{e^2 m}{h}$ representa el momento de un electrón de la primera órbita de Bohr. Como esta cantidad $\sim 3.10^{-21}$ resulta que el efecto de intercambio no es muy importante en un átomo pesado en el cual P es grande.

---

(1) Phil. Mag. vol. 26, p. 24 (1913).

# ENSAYO SOBRE UN ANALISIS ARQUIMEDIANO

por Horacio E. Calcagno

El *principio de Eudoxio* (llamado también «axioma métrico» de Arquímedes) tiene una gran importancia en la teoría de las magnitudes, porque mediante él se consigue la mensurabilidad. En el análisis clásico, la validez de este axioma se ha restringido al campo positivo, es decir, estamos frente al postulado siguiente:

(I) *El axioma métrico de Arquímedes es válido solamente en el campo de los números positivos.*

Aunque este postulado no se suele establecer de una manera explícita, ha sido sin embargo aceptado tácitamente por la mayor parte de los autores. En otras palabras, si llamamos (A) al conjunto de postulados y axiomas que están en la base del análisis clásico, podemos reconocer al postulado (I) como uno de los elementos de (A). Nuestro propósito es, por el contrario, sustituir en (A) el postulado (I) por el siguiente:

(II) *El axioma métrico de Arquímedes es válido en el campo de los números complejos de dos (o más) componentes.*

Veamos ahora las primeras consecuencias que surgen de esta sustitución. Podemos imaginar — en el campo complejo — muchas ordenaciones diferentes, tanto arquimedianas como no arquimedianas (1). Un ejemplo de ordenación *no arquimediana* es la de Thieme, expuesta por Rey Pastor (2). Esta tiene la ventaja de conservar, en el campo complejo, la validez de la ley de monotonía, pero no permite utilizar cómodamente la idea de desigualdad entre los números complejos. Además, al sacrificar la validez del axioma métrico, se pierde la mensurabilidad y con ella, la posibilidad de ampliar la idea de número sin aumentar las dimensiones.

Ahora bien, con el mismo derecho, podemos sacrificar la ley de monotonía a favor del axioma métrico, convenientemente generalizado. Entre las muchas ordenaciones posibles, nosotros proponemos la siguiente:

(III) *El número complejo* $A_\alpha$ ( $A = mod.\ A_\alpha$ ; $\alpha = arg.\ A_\alpha$ ) *es* menor ($<$) *que el número complejo* $B_\beta$ *cuando* $A < B$, $\alpha \lesseqgtr \beta$; *y si es* $A = B$, *debe cumplirse* $\alpha < \beta$.

O también

El punto $A_\alpha$ (coordenadas polares) es *anterior* al punto $B_\beta$ cuando $A < B$, $\alpha \lesseqgtr \beta$; y si es $A = B$, debe cumplirse $\alpha < \beta$.

---

(1) Las ordenaciones se clasifican en arquimedianas y no arquimedianas según que los números complejos satisfagan o no el axioma métrico.

(2) J. Rey Pastor, *Análisis algebraico*, 2ª edición, pág. 441.

De acuerdo con esta ordenación, los números complejos *crecientes* están representados geométricamente por el desplazamiento de un punto sobre una infinidad de circunferencias concéntricas de radios no decrecientes, lo que nos permite clasificar a los números complejos entre los magnitudes *arquimedianas*. En efecto, si $A_\alpha < B_\beta$, siendo A y B finitos, es siempre posible encontrar un número natural n, suficientemente grande, tal que $n A_\alpha > B_\beta$.

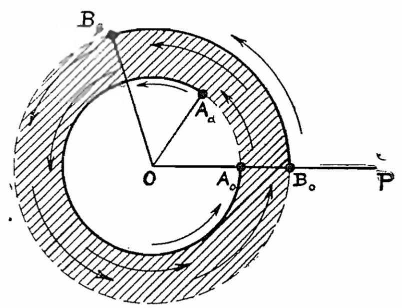
Esta ordenación — que llamamos *arquimediana circular* — nos conduce, sin salir del plano, a una ampliación de la idea de número. En efecto, supongamos $A_\alpha < B_\beta$ siendo $A_\alpha$ y $B_\beta$ números complejos usuales y donde el signo $<$ (menor) tiene el significado que hemos definido en (III). En estas condiciones, llamamos *intervalo plano* o también *intervalo complejo entre* $A_\alpha$ y $B_\beta$ al conjunto de todos los números z (reales y complejos) que satisfacen la doble desigualdad

$$(1) \qquad A_\alpha \leq z \leq B_\beta$$

Este intervalo corresponde geométricamente a un anillo o corona circular (ver la figura) que representaremos con la notación

$$\{ A_\alpha \ ; \ B_\beta \}$$

que se lee: intervalo complejo entre $A_\alpha$ y $B_\beta$.




La medida (en el sentido ordinario) de este anillo es independiente de los argumentos de los extremos del intervalo; depende únicamente del valor aritmético de los módulos A y B. En el caso particular

$$A = B, \qquad \alpha < \beta$$

el intervalo complejo entre $A_\alpha$ y $A_\beta$ corresponde geométricamente al arco de circunferencia $\beta - \alpha$.

Veamos ahora lo que entendemos por *medida en el campo complejo*.

(IV) *Dados los puntos z que satisfacen la doble desigualdad (1), la medida del intervalo complejo* $\{ A_\alpha \; ; \; B_\beta \}$ *está dada por el* número *que mide la zona del plano cubierta por los puntos z.*

Esta definición nos conduce a una nueva especie de número complejo sin entrar en la tercera dimensión, puesto que obtenemos un ente numérico definido por dos elementos diferentes que son: 1.º) una componente superficial (área) y 2.º) dos componentes lineales (longitudes de las curvas fronteras determinadas por la ordenación elegida). Aunque nosotros utilizamos en este trabajo únicamente el crecimiento arquimediano circular, es sin embargo igualmente posible imaginar otros crecimientos arquimedianos *no circulares* (por ejemplo, elípticos, etc.).

Por lo tanto, en nuestro caso, la medida del intervalo complejo $\{ A_\alpha \; ; \; B_\beta \}$ está dada por el «número complejo»

$$\pi \, (B^2 - A^2)_{2 \pi A - \alpha \, ; \, \beta}$$

donde los arcos $2 \pi A - \alpha$ y $\beta$ indican respectivamente la porción de frontera inferior y superior cubierta por el intervalo.

Inversamente, el «número complejo»

$$\pi \, (M - N)_{\sigma \, ; \, \tau}$$

es la medida del intervalo complejo

$$\{ \, |\sqrt{N}|_{2 \pi \sqrt{N} - \sigma} \; ; \; |\sqrt{M}|_\tau \, \}$$

Como vemos, el concepto de anillo circular (intervalo complejo) es la generalización natural de la idea de segmento rectilíneo (intervalo real). En efecto, en un segmento (a, b) tenemos el extremo inferior a, el extremo superior b, y la medida del segmento está dada por el número real b — a, en cuya medida intervienen *todos* los puntos del segmento que son posteriores al punto a y anteriores al punto b, incluso los extremos. Análogamente, en un anillo circular $\{ A_\alpha \; ; \; B_\beta \}$ tenemos el extremo inferior $A_\alpha$, el extremo superior $B_\beta$ y la medida del anillo está dada por el «número complejo» $\pi \, (B^2 - A^2)_{2 \pi A - \alpha \, ; \, \beta}$ en cuya medida intervienen *todos* los puntos del plano que son posteriores al punto $A_\alpha$ y anteriores al punto $B_\beta$, incluso los extremos. En el nuevo campo no tiene significado el concepto de *izquierda* y *derecha*. En general, ocupa su lugar la idea de *interior* y *exterior* a un recinto dado (por ejemplo, un círculo), excepto en el caso de anulación de área, pues entonces el intervalo complejo queda reducido a una longitud de arco.

Se modifica también la idea de continuidad, hasta el extremo que la circunferencia es la única curva continua; todas las demás son inevitablemente *discontinuas*. En efecto, si $\delta$ es positivo y arbitrariamente pequeño, el intervalo complejo

$$\{ a_{0^\circ} \; ; \; |a + \delta|_{0^\circ} \}$$

está medido por la longitud $2 \pi a$. Tenemos, pues, dos números positivos arbitrariamente próximos *entre* los cuales cabe, sin embargo, una longitud finita. Por otra parte, es evidente que esta especie de discontinuidad no afecta las propiedades ya conocidas de cada curva, por ejemplo, la existencia de la tangente, etc. Pero es más aún, si aceptamos la ordenación de Thieme-Rey Pastor, todas las curvas son discontinuas, incluso la circunferencia; verificándose la continuidad únicamente en el desplazamiento de un punto sobre una infinidad de rectas paralelas al eje de las Y.

Los intervalos complejos, tal como los hemos definido, pueden ser considerados como entes numéricos o geométricos, siendo posible establecer entre ellos las relaciones y operaciones corrientes. Nos limitamos en este trabajo a la igualdad, suma y producto.

IGUALDAD. Sean los intervalos complejos $\{A_\alpha \; ; \; B_\beta\}$ y $\{C_\gamma \; ; \; D_\delta\}$. Estos anillos están medidos respectivamente por los «números complejos»

$$\pi (B^2 - A^2)_{2 \pi A - \alpha ; \, \beta} \quad \text{y} \quad \pi (D^2 - C^2)_{2 \pi C - \gamma ; \, \delta}$$

Decimos que $\{ A_\alpha \; ; \; B_\beta \} = \{ C_\gamma \; ; \; D_\delta \}$ cuando se cumple simultáneamente

$$\pi (B^2 - A^2) = \pi (D^2 - C^2)$$

$$2 \pi A - \alpha + \beta = 2 \pi C - \gamma + \delta$$

Si $A \neq C$, esta definición de igualdad implica siempre una *dilatación* o una *contracción* y nos conduce a la ecuación

$$\{A_\alpha \; ; \; B_\beta\} = \{C_\gamma \; ; \; X_\sigma\}$$

donde $X_\sigma$ es la incógnita.

La solución es

$$X = \sqrt{B^2 + C^2 - A^2}$$

$$\delta = 2 \pi A - \alpha + \beta - (2 \pi C - \gamma)$$

en el entendido que $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ y $\delta$ son longitudes de arco.

*Ejemplo*. Resolver la ecuación

$$\{ 1_{20^\circ} \; ; \; 2_{80^\circ} \} = \{ 3_{300^\circ} \; ; \; X_\sigma \}$$

Podemos escribir

$$\left\{ \frac{1}{9}\pi \; ; \; \frac{28}{9}\pi \right\} = \left\{ 35\pi \; ; \; X\sigma \right\}$$

Finalmente

$$X = 2\sqrt{3}\,, \quad \delta = \frac{16\,\pi}{9}$$

Suma. Dados los intervalos complejos $\{ A\alpha \; ; \; B\beta \}$ y $\{ C\gamma \; ; \; D\delta \}$ vamos a ligar estos dos entes con una operación que llamamos *suma,* definida por la condición siguiente: el número que mide cada una de las componentes del *intervalo suma* debe ser igual a la suma usual de los números que miden las componentes respectivas de los sumandos.

Siendo $A < B$ y $C < D$, podemos escribir

$$\text{medida}\,\{ A\alpha \; ; \; B\beta \} = \pi\,(B^2 - A^2)_{2\,\pi\,A - \alpha;\,\beta}$$

$$\text{medida}\,\{ C\gamma \; ; \; D\delta \} = \pi\,(D^2 - C^2)_{2\,\pi\,C - \gamma;\,\delta}$$

Por definición, tenemos

$$\text{medida}\,(\{ A\alpha \; ; \; B\beta \} + \{ C\gamma \; ; \; D\delta \}) =$$
$$= \pi\,[B^2 + D^2 - (A^2 + C^2)]_{2\,\pi\,A - \alpha + 2\,\pi\,C - \gamma;\,\beta + \delta}$$

Finalmente

$$\{ A\alpha \; ; \; B\beta \} + \{ C\gamma \; ; \; D\delta \} \equiv \tag{2}$$
$$\equiv \left\{ \sqrt{A^2 + C^2}_{\,2\,\pi\sqrt{A^2 + C^2} - (2\,\pi\,A - \alpha + 2\,\pi\,C - \gamma)} \; ; \; \sqrt{B^2 + D^2}_{\,\beta + \delta} \right\}$$

que se lee: intervalo complejo entre $A\alpha$ y $B\beta$ *más* intervalo complejo entre $C\gamma$ y $D\delta$ es *idéntico* al intervalo complejo entre $\sqrt{A^2 + C^2}$, etc.

Producto simple. Sea m un número real (positivo o negativo) y $\{ A\alpha \; ; \; B\beta \}$ un intervalo complejo. Vamos a ligar estos dos entes con una operación que llamamos *producto simple* definido por la condición siguiente: el número que mide cada una de las componentes del *intervalo-producto* debe ser igual al producto de m por el número que mide las componentes respectivas de $\{ A\alpha \; ; \; B\beta \}$.

Podemos escribir

$$\text{medida}\ (m\{A_{\alpha}\ ;\ B_{\beta}\}) = m\,[n\,(B^2 - A^2)_{2\pi A - \alpha;\ \beta}\ ]$$

Por definición, el factor m afecta a todas las componentes, es decir:

$$\text{medida}\ (m\{A_{\alpha}\ ;\ B_{\beta}\}) = \pi\,(B^2 m - A^2 m)_{m\,(2\pi A - \alpha);\ m\beta}$$

Finalmente

$$(3) \qquad m\{A_{\alpha}\ ;\ B_{\beta}\} \equiv \{A\sqrt{m}_{\,2\pi A\sqrt{m} - m\,(2\pi A - \alpha)}\ ;\ B\sqrt{m}_{\,m\beta}\}$$

En el caso particular $m = -1$, obtenemos

$$-\{A_{\alpha}\ ;\ B_{\beta}\} \equiv \{A\sqrt{-1}_{\,2\pi A\sqrt{-1} + 2\pi A - \alpha}\ ;\ B\sqrt{-1}_{\,-\beta}\}$$

Esta fórmula nos indica que un intervalo complejo *negativo* puede expresarse en forma *imaginaria*, pero sin que hubiéramos podido acertar, hasta ahora, con una representación geométrica adecuada.

Montevideo, octubre 1939.

# ENIGMAS DE LA MATEMATICA

## I. - El problema de los cuatro colores

La mayoría de los problemas matemáticos que se caracterizan por el contraste entre su aparente simplicidad y la extraordinaria dificultad de su demostración, pertenecen a la teoría de los números. Pero hay uno, tal vez el más simple de ellos, que forma excepción y consiste en un problema geométrico. Es el llamado «*Problema de los cuatro colores*», de enunciado comprensible aun por quienes menos conocimientos poseen de matemáticas, y cuya demostración, sin embargo, no se ha logrado todavía. Nos proponemos dar alguna noticia sobre esta célebre cuestión.

Al parecer fué enunciada en 1850 por De Morgan, pero no fué muy conocida hasta 1878, en que Cayley la presentó a la «London Mathematical Society». Consiste en demostrar: «Cualquier mapa plano compuesto de un número finito de regiones de forma cualquiera se puede siempre colorear con sólo 4 colores distintos de tal manera que no haya dos regiones con frontera común que tengan el mismo color».

Se ha demostrado con relativa simplicidad que bastan 5 colores, pero no se ha logrado rebajar este número a 4 (Véase la bibliografía en «Ph. Franklin, *Scripta Mathematica*, Vol. VI, n°. 3-4, 1939).

Con el gran número de tentativas de demostración se han ido obteniendo varios resultados parciales. Por ejemplo:

1.° Si en cada vértice del mapa concurren un número par de regiones, el mapa se puede colorear con sólo 2 colores.

2.° Si cada región es fronteriza con un número par de las demás, bastan 3 colores para colorear todo el mapa.

3.° Un mapa que contiene a lo sumo una sola región con más de 6 lados, se puede colorear con 4 colores.

Franklin, en el trabajo citado, demuestra también que el problema se puede reducir a estudiar la posibilidad de colorear las aristas (líneas de separación de dos regiones contiguas) de manera que no concurran 2 del mismo color en un mismo vértice; vale entonces: «el problema de los 4 colores equivale al de colorear las aristas con sólo 3 colores».

En vista de la resistencia del problema a su demostración total se ha empezado el camino de demostración por aproximaciones sucesivas. Así en 1922 Franklin demostró que todo mapa con un número de regiones igual o menor que 25 se podía colorear con 4 colores. Reynolds en 1927 aumentó este número a 27 y muy recientemente, en 1940, Winn lo ha extendido a 35. Es decir, actualmente el problema de los 4 colores está demostrado para mapas que posean hasta 35 regiones. La posibilidad de dar un contraejemplo que demuestre que el problema no es cierto aparece de esta manera muy poco probable, dada la complejidad de los mapas con tal número de regiones.

También se ha extendido el problema a mapas situados sobre superficies distintas de la esfera o el plano, por ejemplo el toro o en general a la superficie formada por una esfera más $p$ asas. Es sabido que una superficie cerrada que se pueda considerar deformación continua de una esfera con $p$ asas se llama de género $p$. Si sobre ella se considera un mapa que la cubre completamente y consta de R regiones, A aristas y V vértices, vale la relación de EULER: $V - A + R = 2(1 - p)$. Por ejemplo para la esfera $(p = 0)$ se tiene el teorema de EULER de la geometría elemental. El hecho notable es que para muchas de estas superficies, para $p = 1, 2, 3, 4$, el teorema correspondiente al de los 4 colores se ha demostrado completamente. Así, llamando $C_p$ (*número cromático*) al mínimo número de colores que bastan para colorear cualquier mapa de una superficie cerrada de género $p$, se ha demostrado que es

$$C_1 = 7, \ C_2 = 8, \ C_3 = 9, \ C_4 = 10$$

Por ejemplo, para el toro $(p = 1)$ bastan 7 colores para colorear cualquier mapa y existen mapas en que este número de colores son necesarios. Queda por demostrar que el número cromático $C_0$ para las superficies de género 0 es 4.

Las superficies anteriores son «orientables» o «biláteras», es decir, superficies en las que se puede considerar un lado interno y otro externo que no pueden unirse entre sí por una curva que no atraviese a la superficie. Pero también para las superficies «no-orientables» o «uniláteras» más simples se ha resuelto el problema. Estas superficies se obtienen a partir de la «banda de MOEBIUS», que se obtiene, como es sabido, uniendo en sentido inverso dos bordes opuestos de un rectángulo. Si a una esfera se le hacen $k$ agujeros y sus bordes se unen con los de $k$ bandas de MOEBIUS, se obtiene una superficie unilátera cerrada que se dice de género $k$. Así, imaginando dos bandas de MOEBIUS unidas por sus bordes se tiene la llamada «caperuza» de KLEIN, de género 2. Para estas superficies, que naturalmente no pueden realizarse en el espacio ordinario de 3 dimensiones sin que se atraviesen a sí mismas, se han obtenido los siguientes números cromáticos:

$$C'_1 = C'_2 = 6, \ C'_3 = 7, \ C'_4 = 8, \ C'_6 = 9.$$

Es, pues, una particularidad notable del problema que nos ocupa que se haya resuelto en casos aparentemente más complicados y que sin embargo se ha resistido hasta la fecha la demostración para el caso más simple de la esfera o del plano.

L. A. S.

# PROFESOR LUIS A. SANTALO

Por la Universidad Nacional del Litoral, ha sido llamado para incorporarse al Instituto de Matemáticas, de nueva creación en la misma, el Profesor Luis A. Santaló.

Es el Profesor Santaló, uno de los mejores representantes de la nueva generación de matemáticos españoles, formada y creada bajo la benemérita influencia, que tanto se ha hecho sentir en ambos continentes, del Profesor Rey Pastor. El Profesor Santaló se doctoró en Ciencias Exactas de la Universidad de Madrid, desempeñando más tarde en ella el cargo de profesor de Análisis Infinitesimal, dictando los cursos de dicha materia.

Especializado en Geometría Diferencial, fué pensionado para ampliar dichos estudios, a la Universidad de Hamburgo, llegando a ella en los momentos en que se iniciaba bajo la dirección del Profesor Blaschke, el estudio de las nuevas teorías de la Geometría Integral; rápidamente el Profesor Santaló ocupó uno de los lugares más destacados entre los cultivadores de la nueva disciplina sobre la que publicó muchos trabajos. Entre éstos figura el teorema descubierto por el Profesor Santaló referente a la desigualdad isoperimétrica del círculo, uno de los más bellos resultados de la nueva teoría.

Del interés que presentan los descubrimientos del Profesor Santaló, puede dar idea el hecho de que en el nuevo libro del Profesor Blaschke «Vorlesungen über Integralgeometrie», se dedican varios capítulos a exponer algunas de dichas investigaciones; por otra parte, el haber sido llamado a iniciativa del Profesor Cartan, para dictar en la Universidad de París, y en el Seminario del Profesor Hadamard en el Colegio de Francia, una serie de conferencias en las que se expuso por primera vez a los matemáticos franceses las nuevas teorías de la Geometría Integral nos da también una idea del alto valor de las investigaciones realizadas por el Profesor Santaló.

Podemos esperar, por consiguiente, que la incorporación del Profesor Santaló a la Facultad de Ciencias Matemáticas en la Universidad del Litoral ha de contribuir al mayor progreso de los estudios e investigaciones matemáticas en la República, siendo su designación uno de los múltiples aciertos de las autoridades de dicha Facultad.

*Publicaciones del Profesor Santaló:*


Área engendrada por un segmento que se mueve conservándose normal a una línea y describiendo una superficie desarrollable. Revista Matemática Hispano Americana, Tomo IX, 1934.

Unos problemas de Combinatoria. Matemática Elemental, Tomo III, 1934.

Algunas propiedades de las curvas esféricas y una característica de la esfera. Revista Matemática Hispano Americana, Tomo X, 1935.

Superficies desarrollables que pasan por una línea. Las Ciencias, Tomo I, 1934.

Una fórmula integral para las figuras en el plano y en el espacio. Revista Matemática Hispano Americana, Tomo XI, 1936.

Unos problemas referentes a probabilidades geométricas. Revista Matemática Hispano Americana, Tomo XI, 1936.

Geometría Integral 4. Sobre la medida cinemática en el plano. Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität, Band XI, 1936.

Integralgeometrie 5. Uber das kinematische Mass in Raum. Paris, 1936. (Collection ''Actualités scientifiques et industrielles'').

Geometría Integral 7. Nuevas aplicaciones del concepto de medida cinemática en el plano. Revista de la Academia de Ciencias Exactas de Madrid, Tomo XXXIII, 1936.

Curvas sobre una superficie que cumplen la condición $S\int \pm (x, \tau)\, d s = o$ Revista Matemática Hispano Americana, Tomo XII, 1937.

Geometría Integral 15. Fórmula fundamental de la medida cinemática para cilindros y planos paralelos moviles. Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität, Band XII, 1937.

Geometría Integral 31. Sobre valores medios y probabilidades geométricas. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität Band XIV, 1939.


*M. B.*

# BIBLIOGRAFIA

FEDERIGO ENRIQUES, *Le matematiche nella storia e nella cultura*. Lezioni pubblicate per cura di ATTILIO FRAJESE. 340 p.; 22 ill. e 1 fig. Bologna, Nicola Zanichelli, 1938.

Este volumen representa la elaboración y fusión de diversos artículos publicados por ENRIQUES en la enciclopedia italiana y de una serie de conferencias dictadas en los últimos años en la Universidad de Roma. Comprende tres libros. El primero reseña la evolución histórica de la matemática desde la antigüedad hasta el siglo XVIII, mientras el tercero analiza, algo más detalladamente, las direcciones principales de la matemática en el siglo XIX con indicaciones bibliográficas y datos biográficos. (El libro está ilustrado con 22 retratos de matemáticos).

El segundo libro es de índole distinta, pues se refiere a la matemática y la cultura, exponiendo el lugar que ocupa la matemática en el cuadro general de la ciencia y sus relaciones con otras actividades humanas. Aparecen en él las conocidas concepciones del autor, ya expuestas en otros libros, en las que, a nuestro modo de ver, se acentúa exageradamente el aspecto histórico y psicológico de la ciencia. El último capítulo, por ejemplo, se refiere a la *Psicología de las matemáticas* y trata, claro es, de la psicología de los matemáticos.

Se nos permita un par de observaciones. Si bien desde el punto de vista histórico, todo análisis puede detenerse convencionalmente en una época cualquiera, no sucede lo mismo desde el punto de vista de las relaciones de la matemática y la cultura. Por eso, nos parece una omisión inconveniente, la de haber silenciado todo el movimiento registrado en este siglo acerca de la llamada ''crisis de los fundamentos de la matemática'', que no solo contribuye a dilucidar notablemente la difícil cuestión de la esencia de los entes matemáticos, sino también muestra un aspecto notable de la cultura contemporánea.

La segunda observación se refiere al término ''matemáticas''. ?Por qué insistir y persistir en un término ya anticuado e injustificado [1], precisamente en un libro que muestra, a través del desarrollo histórico, la unidad de la ciencia matemática, que se le niega en el nombre?

Por último una rectificación. La *Revista Matemática Hispano-Americana* ni se edita en América del Sur, ni es órgano de la escuela argentina, ni es de 1926. Esa Revista que se edita en Madrid (por lo menos hasta Junio de 1938), es órgano de la Sociedad Matemática Española y aparece desde 1919. (1ª Serie 1919 - 1925. 2ª Serie 1926 - ...).

*Santa Fe, Universidad Nacional del Litoral.*

JOSÉ BABINI

---

(1) J. BABINI, *¿Matemáticas o matemática?* (En Anales de la Sociedad Científica Argentina. Tomo 125. Pág. 112. Buenos Aires. 1937).

FEDERIGO AMODEO, *Origine e sviluppo della geometria proiettiva.* 176 p. Napoli, B. Pellerano. 1939.

La unidad de la ciencia matemática se revela una vez más en esta memoria de AMODEO (premiada por la Academia real italiana en 1938), donde el autor, al analizar el desarrollo histórico de una de sus ramas, se ve constantemente obligado a hacer incursiones a través de todo el territorio matemático, tanto en las regiones geométricas como en las analíticas. Es que la geometría proyectiva ''no sólo ha creado, por su cuenta, nuevas ramas geométricas, sino se ha infiltrado en todas las cuestiones geométricas aportando orden, sencillez y claridad'' y, ''para lograr sus fines, se vale actualmente de cualquier instrumento, sea éste algebráico, infinitesimal, topológico, vectorial, etc.''. Recuerda AMODEO, a este respecto, que cuando KLEIN, estimando exagerada la conocida frase de CAYLEY: *La Geometría Proyectiva es toda la Geometría,* trató de demostrar que podían abrirse nuevos caminos, confirmó, en cambio, que a todos los resultados geométricos podía llegarse con la teoría de las transformaciones que había nacido precisamente con la Perspectiva, madre de la Proyectiva.

La Memoria de AMODEO se dispone simétricamente en dos grandes paneles, recuadrados por una Introducción, un Intermedio y una Conclusión. En el primero reseña la génesis de la geometría proyectiva, que nace de las sencillas reglas de la perspectiva y de la descriptiva, surgidas durante los siglos XV y XVI, respectivamente, para satisfacer necesidades del dibujo y de la pintura. Pero ya en el siglo XVII la perspectiva adquiere categoría científica y, por obra de DESARGUES, CAVALIERI y PASCAL, se fundan las bases de la geometría sintética, mientras en el siglo siguiente MONGE y su escuela dan un vigoroso impulso a la descriptiva y poco a poco, a través de PONCELET, STÈINER, CHASLES, LAGUERRE, CAYLEY se constituyó una nueva ciencia: la geometría proyectiva que encuentra su organizador en v. STAUDT.

La segunda parte de la memoria de AMODEO, está consagrada a la sistematización de la geometría que se obtiene a raíz de introducirse en ella la fecunda idea de *grupo de transformaciones,* a mediados del siglo pasado y por obra principal de KLEIN y LIE. La teoría de los grupos de transformaciones no solo ofrece un criterio natural de ordenación y clasificación de las distintas geometrías, sino proporciona un método de investigación que se ha extendido a toda la matemática y a varias ramas de la física matemática. Baste recordar sus aplicaciones a la teoría de la relatividad. Esta segunda parte de la memoria está estructurada siguiendo directivas generales muy semejantes a las del conocido tratado de J. REY PASTOR: *Fundamentos de la Geometría proyectiva superior,* obra, que por otra parte, AMODEO cita frecuentemente.

Además de ser un interesante y original estudio histórico, constituye la obra de AMODEO una valiosa fuente de información, pues contiene, entre las notas y el texto, cerca de un millar de datos bibliográficos, así como la cita de varios centenares de matemáticos, con sus fechas respectivas y, en algunos casos, con ligeros rasgos biográficos.

Una traducción española de esta memoria ha aparecido en las *Publicaciones del Instituto de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Matemáticas* *de la Universidad Nacional del Litoral* (Rosario, R. Argentina), y estuvo a cargo de NICOLÁS y JOSÉ BABINI. Le precede un breve prefacio del autor.

*Santa Fe, Universidad Nacional del Litoral.*

JOSÉ BABINI

F. THUREAU-DANGIN. *Textes mathématiques babyloniens* (transcrits et traduits). xl, 244 p. Leiden. E. J. Brill. 1938.

Este libro, primer tomo de las publicaciones de la sociedad oriental Ex Oriente Lux, contiene transcritos (representando los ideogramas por su traducción fonética) y traducidos los textos de más de 600 cuestiones matemáticas pertenecientes a las edades antigua y media babilonias y a la época de los SELÈUCIDAS. En su mayor parte estos textos figuran también, traducidos y transcritos, y a veces reproducidos o copiados, en el *Mathematische Keilschrift-Texte* de NEUGEBAUER, quien, con THUREAU-DANGIN, constituye los que han aportado, en estos últimos tiempos, la mayor contribución al estudio de la matemática babilonia.

En una introducción, bastante extensa, THUREAU-DANGIN expone una serie de consideraciones sobre los sistemas de numeración y de medida que aparecen en los textos y sobre las cuestiones tratadas.

''Tout indique qu'en géométrie la science babylonienne ne s'est jamais élévée au dessus du niveau qui était celui de la pratique courante. C'est dans une autre direction que s'est exercée la spéculation mathématique babylonienne. L'incomparable instrument de calcul dont disposaient les mathématiciens babyloniens était de nature à leur aplanir singulièrement la voie qui mène à la méthode algebrique. L'expression du nombre atteint dans le système savant un degré de simplicité, d'homogénéité et d'abstraction qui n'a jamais été dépassé. Avec un système de numération d'une telle souplesse, les scribes de Sumer et d'Accad étaient remarquablement préparés à l'art de résoudre les problèmes numériques, à la ''logistique'', qui les a menés à l'algèbre.

...La mathématique babylonienne ignore l'usage des symboles... les Babyloniens n'avaient aucun moyen d'écrire ce que nous appelons une ''formule''...

Le scribe... ne motive pas les opérations qui le conduisent à la solution; il ne formule notamment pas les équations qu'il résout. Dans aucun des problèmes algébriques qui nous sont parvenus il n'est procédé autrement. Aussi a-t-on pu dire qu'on ne trouve pas d'équation dans l'algèbre babylonienne. Mais cela n'est exact que si l'on n'envisage dans un problème que la façon dont il est résolu, en faisant abstraction de l'énoncé.''.

El procedimiento (¿o método?) que se utiliza en el tratamiento de las cuestiones sólo se infiere de las operaciones numéricas que el escriba va enumerando. En los sistemas de ecuaciones de primero y segundo grado se recurre ya a la eliminación por sustitución, ya al uso de las identidades que expresan el valor de dos números conociendo su suma y su diferencia, ya a recursos, que en la técnica actual, corresponderían a la introducción de una variable auxiliar.

En los problemas que exige la resolución de ecuaciones de segundo grado es donde se pone más de relieve la maestría excepcional en los procedimientos utilizados; ellos muestran el conocimiento de las identidades que expresan el cuadrado de una suma o de una diferencia y de su uso en la resolución de la ecuación cuadrática mediante la clásica completación del cuadrado que en los problemas babilonios ofrece una ligera variante frente a los métodos usados por los hindúes y árabes.

Tanto en los sistemas como en las ecuaciones de segundo grado. THUREAU-DANGIN pone de manifiesto, en algunos casos, los puntos de contacto con los procedimientos que se encuentran en DIOFANTO.

En los problemas que exigen ecuaciones de tercer grado, en cambio, se siguen procedimientos sólo válidos para casos privilegiados. Así algunos problemas se reducen al caso de conocer la suma del cubo y del cuadrado de la incógnita y ésta se deduce, entonces, mediante el auxilio de una table especial (NEUGEBAUER), cuyos fragmentos han sido encontrados. En otros casos se recurre a ensayos sucesivos que, por la índole especial de los valores numéricos elegidos, permiten encontrar la solución.

No hay duda que el autor, con este libro, logra ampliamente la finalidad que se ha propuesto de ''mettre des documents à la disposition des historiens de la pensée mathématique... et les aider a préciser ce que la science mathématique, l'algèbre notamment, doit aux scribes de Sumer et d'Accad''.

*Santa Fe, Universidad Nacional del Litoral*

JOSÉ BABINI

## LIBROS MATEMATICOS RECIENTEMENTE PUBLICADOS

J. VILLE. *Etude critique de la notion de Colletif.* Monographies des Probabilités. Fascicule III. París, 1939 (148 págs.).

CH. JORDAN. *Calculus of Differences.* Introduction by H. C. Carver. Budapest, 1939. (656 págs.).

L. G. SIMONS. *Fabre and Mathematics and other Essays.* The Scripta Mathematica Library, Núm. 4. New York, 1939 (102 págs.).

E. BOREL. *Valeur pratique et Philosophie des Probabilités. Traité du Calcul des Probabilités.* Tome IV, Fasc. III. Paris, 1939 (184 págs.).

A. A. ALBERT. *Structure of Algebras.* American Mathematical Society, Colloquium Publications. Vol. XXIV. New York, 1939 (212 págs.).

G. SZEGÖ. *Orthogonal Polynomials.* American Mathematical Society, Colloquium Publications. Vol. XXIII. New York, 1939 (401 págs.).

L. PONTRJAGIN. *Topological Groups.* Princeton Mathematical Series. Núm. 2. Princeton, 1939 (300 págs.).

E. A. WEISS. *Punktreihengeometrie.* B. G. Teubner. Leipzig und Berlin. 1939 (232 págs.).

H. STEINHAUS. *Mathematical Snapshots.* Stecher & Co. New York 1939 (136 páginas).

G. BIRKHOFF. *Lattice Theory.* American Mathematical Society. Colloquium Publications. Vol. XXV (156 págs.).

# TEMAS PROPUESTOS

1.—Estudiar la correspondencia siguiente:

$$x = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{2^i} \qquad y = \lim_{n \to \infty} 2^{-n} \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} k_i$$

siendo $k_i$ los números 0 ó 1, es decir, las cifras del número racional $0 \leqq x \leqq 1$, expresado en el sistema de numeración de base 2.

*J. Babini*

2.—Desarrollar en serie de potencias de z la función w definida por la ecuación $w = e^{hzw}$.

*J. Babini*

3.—Calcular los coeficientes del desarrollo en serie convergente:

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} c_n \frac{x}{x^2 + n^2}$$

*J. Rey Pastor*

4.—¿Existe en cada intervalo algún conjunto de medida menor que él y tal que los conjuntos parciales contenidos en intervalos iguales tengan iguales medidas?

*R. Frucht*

5.—Dados al azar dos pares de puntos sobre el contorno de un polígono convexo, calcular la probabilidad de que el punto de intersección de las rectas que determinan, sea interior al polígono.

(Para el cuadrilátero está resuelto en la obra de *Czuber*, Geometrische Wahscheinlichkeiten und Mittelwerte (Trad. de Schuermans, 1902). Problema XIII del Cap. I).

6.—Demostrar que la probabilidad de que dos rectas que cortan a un polígono regular de 2 n lados se corten entre sí bajo un ángulo agudo igual o menor que $\frac{\pi}{2n}$, vale $\frac{1}{n}$.

*L. A. Santaló*

7.—Sean dos rectas fijas del plano. ¿Se pueden colocar en el mismo plano 6 segmentos de longitudes cualesquiera paralelos a una u otra de las dos rectas y tales que 5 a 5 de ellos tengan una secante común y sin embargo no haya una recta que corte a todos?

*L. A. Santaló*

8.—Estudiar las propiedades de la función definida por la serie

$$\frac{(x)}{1^2}+\frac{(2x)}{2^2}+\frac{(2^2x)}{2^4}+\ldots+\frac{(2^nx)}{2^{2n}}+\ldots$$

designando por (x) la mantisa mínima de x, esto es, la diferencia positiva o negativa, entre x y el entero más próximo. Compárense sus propiedades con las de su análoga menos sencilla, utilizada por Riemann, completando al mismo tiempo las propiedades de ésta, que suelen figurar en los tratados de funciones reales.

*R. P.*

9.—Formar una sucesión de funciones continuas convergentes hacia la función discontinua definida así: el valor para todo número racional es la unidad fraccionaria que tiene el mismo denominador; el valor para todo x irracional es 0.

Aplíquese el método a funciones más generales que sean continuas salvo en un conjunto numerable denso en el intervalo.

*R. P.*

10.—Estudiar el recinto definido por la condición

$$|1 - z| < k(1 - |z|)$$

que se presenta al estudiar la convergencia de las series de potencias en puntos del contorno del campo de convergencia.

*A. S.*

11.—Construir una función f (x) con un conjunto denso de discontinuidades y que sea la derivada de otra función en todo un intervalo.

*E. Samatán*

12.—Una recta móvil divide a una figura convexa plana en dos porciones de área constante. Demostrar que el lugar geométrico de los centros de gravedad de estos sectores es una línea que tiene las tangentes paralelas a las cuerdas respectivas y cuyo radio de curvatura en cada punto es igual al cubo de la cuerda respectiva dividido por 12 veces el área constante del sector. Generalización.

*L. S.*

13.—Construir la tangente en cada uno de sus puntos a la curva de contacto de una esfera con el conoide circunscripto definido por una directriz rectilínea exterior y la recta impropia del plano perpendicular a ésta. Generalización.

*P. Rosell Soler*

14.—Estudiar la función o funciones analíticas definidas por la expresión

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^3}{z^4 + (a^2 - xz)^2}\, d\, x.$$

*R. P.*

15.—Generalizar al campo complejo la función de Dirichlet, partiendo de su expresión:

$$\lim_m \; \lim_n \; (\cos\, m!\, \pi\, z)^{2n} \quad \text{para} \quad m \rightarrow \infty, \; n \rightarrow \infty.$$

*R. P.*

16.—Construir una curva de Jordan que sea cortada por toda recta en una sucesión numerable de puntos. ¿Existe una curva de Jordan que sea cortada por cada recta del plano en un conjunto que tenga la potencia del continuo?

*F. T.*

17.—Calcular la derivada según la dirección del radio en cada punto de la circunferencia, de la función armónica regular en el círculo que en la circunferencia toma los valores dados por una función continua dada.

*R. P.*

18.—Consideremos dos curvas rectificables de Jordan, una fija y otra móvil; si es l la longitud de la parte de curva móvil contenida en el interior de la primera, estudiar su dependencia respecto de los tres parámetros que determinan la posición de la curva móvil, viendo si es función continua de ellos, salvo en un conjunto de medida nula.

*M. Balanzat*

19.—Dado un conjunto plano C, si con centro en cada punto de C se traza una circunferencia y es A el conjunto de puntos de estas circunferencias, estudiar las relaciones entre ambos. Si C es medible, lineal o superficialmente ¿lo es también A? Si C tiene medida no nula ¿lo será también A?

*M. Balanzat*

20.—Es sabido que la unidad puede descomponerse de infinitos modos en suma de fracciones simples $1/n$. ¿Existe alguna descomposición cuyos denominadores sean todos impares y distintos?

*R. Frucht*

21.—Llamaremos *desviación* de un sistema de puntos de un plano respecto de una circunferencia a la suma de los cuadrados de las potencias de cada punto del sistema respecto de la circunferencia.

Se pide, dado el sistema, determinar la circunferencia cuya desviación sea mínima; analizar geométricamente la solución. Generalizar.

*A. Valeiras*

22.—Calcular para $n \to \infty$ el límite de la suma:

$$1^m n^m + 2^m (n-1)^m + \ldots + n^m 1^m$$

para los diversos valores del parámetro real m. Generalización.

*R. P.*

23.—Si una serie de potencias converge en un punto de su circunferencia de convergencia, ¿bajo qué condiciones converge en el mismo punto el desarrollo tayloriano de la función analítica definida por la serie, efectuado en un punto interior al círculo?

*R. P.*

# CUESTIONES ELEMENTALES

1. — Truncar un triángulo de base *a*, de modo que resulte un cuadrilátero de la misma base a, con los tres lados restantes iguales.
2. — Encontrar una curva tal que la tangente en cada punto sea perpendicular a una de las tangentes traz das desde el mismo a una circunferencia fija.
3. — Calcular la suma de los infinitos segmentos obtenidos al proyectar un punto de un lado de un ángulo agudo sobre el otro, la proyección obtenida se proyecta sobre el primer lado, etc.
   Generalizar el problema cuando la dirección de las proyecciones sobre cada lado no es perpendicular a él.
4. — Calcular la longitud total recorrida por cada uno de los rayos luminosos emitidos por un punto luminoso interior al diedro agudo formado por dos espejos, en cualquier dirección normal a la arista del diedro agudo, al reflejarse sucesiva o indefinidamente en ambos espejos.
5. — Construir una curva tal que para todo punto X del eje $x$ se verifique la igualdad de ángulos OXP = 2PXA, siendo P y A puntos fijos del eje $y$.
   Aplíquese a la resolución gráfica de la trisección del ángulo y generalícese para la división en $n$ partes iguales.
6. — Si ABC y A'B'C' son triángulos semejantes, demostrar que el triángulo formado por los puntos que dividen a los segmentos *AA' BB' CC'* en una misma razón, es semejante a ellos.
7. — Calcular los máximos y mínimos de la función $z = ax^m + by^m$. Discusión.
8. — Un cazador parte del punto *A* y camina 10 km. hacia el Sur; como allí no encuentra caza, camina un rato hacia el Este, mata un oso y regresa en línea recta hacia el punto *A*, caminando 10 km. ¿De qué color era el oso?

# CRONICA

## PROFESOR VITO VOLTERRA (1860 - 1940)

Ya en prensa este número anuncia el cable el fallecimiento del profesor Vito Volterra, una de las figuras más excelsas en el campo de las ciencias exactas, a las que ha impulsado considerablemente en variados rumbos con las creaciones de su genio. El prodigioso desarrollo alcanzado por el Análisis funcional, que parece llamado a ser una de las ciencias características de nuestro siglo, indica la clarividencia de quien hace más de cincuenta años trazó sus líneas generales y adivinó su inmenso porvenir.

La Revista de la Unión Matemática Argentina rendirá en uno de sus próximos números el debido homenaje a esta figura prócer de la ciencia.

## LA ORGANIZACION DE LOS ESTUDIOS MATEMATICOS EN LOS DIVERSOS PAISES

Un principio elemental de buen sentido, frecuentemente olvidado, es la imprescindible necesidad de informarse cómo procedieron nuestros antecesores en toda organización y aun en toda actividad creadora. Mucho más necesaria es tal información cuando se trata de cosas que atañen a la cultura, en que gloriosos países nos precedieron desde muchos siglos y nos llevan la incalculable ventaja de la obra acumulada por las creaciones de mentes excelsas y por la ingente labor de los millares de obreros que han construído la ciencia actual.

Quienquiera que pretenda emprender reformas en la enseñanza o aun siquiera opinar sobre ellas, debe conocer previamente la experiencia de quienes fueron, son y serán nuestros maestros. Refiriéndonos especialmente al campo de los estudios matemáticos, iniciaremos en el próximo número una sección informativa en que daremos a conocer en forma sintética, pero viva, como escrita por quienes han vivido en aquellos ambientes intelectuales, la organización de los más importantes países europeos, y también de los otros continentes posteriormente incorporados a la cultura superior. Iniciaremos la serie con la exposición del organismo académico de Francia, prosiguiendo con los de otras naciones de altísima cultura.

## SESION CIENTIFICA DE LA "UNION MATEMATICA ARGENTINA"

En el aula del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires se celebró el día 23 de Julio una sesión de carácter científico, en la cual expusieron sus autores los trabajos siguientes:

L. SANTALÓ. — Algunos elementos de las superficies convexas que no se conservan en el límite.

Y. FRENKEL. — Generalización de algunos resultados de Picard sobre las integrales de tipo Cauchy.

E. COROMINAS. — Sobre la teoría del crecimiento.

E. SAMATAN. — Sobre algunas funciones discontinuas.

M. SADOSKY. — Cálculo numérico de la integral de Poisson.

Por falta de espacio queda pendiente para otro número la exposición de los resultados expuestos. La próxima sesión científica, última de este curso, se celebrará en los primeros días de diciembre.

## CURSO DEL PROFESOR BEPPO LEVI EN BUENOS AIRES

A propuesta del Instituto matemático de la Universidad de Buenos Aires, acogida con entusiasmo por el Decano y Consejo Académico de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y naturales, ha dictado en los últimos días del mes de octubre un curso breve el eminente matemático Profesor Beppo Levi, director del Instituto homónimo de Rosario. En la conferencia inaugural desarrolló el concepto de dominio deductivo, idea original llamada a ocupar lugar definitivo en el campo de investigaciones sobre los fundamentos del Análisis; las clases de seminario fueron dedicadas a su teoría de la integral, que es conocida de los especialistas, por haber sido publicada por su autor en memorias anteriores, a la cual ha aportado recientemente progresos que la perfeccionan.

La influencia del profesor Levi en el progreso de los estudios matemáticos en el país, se hace así extensiva a todo el país y llega también a la vecina República oriental donde ha desarrollado recientemente un ciclo de conferencias que han tenido gran éxito en la Universidad de Montevideo.

# VARIA

1. — *El experimento como lecho de Procusto*

"Procusto, como ustedes recordarán, alargaba o cortaba los miembros de sus huéspedes hasta lograr que se ajustaran a un lecho especial que él había construido. Es posible, no obstante, que el final de la leyenda no sea tan conocido. A la mañana siguiente, antes de abandonar a los viajeros así torturados, Procusto medía las extremidades de los mismos y con esos datos escribía un trabajo científico, para ser presentado a la Sociedad Antropológica de Atica, titulado: Sobre la uniformidad de la talla de los viajeros.

Sir Arthur Eddington. *The philosophy of physical science.*

2. — *Se anticipó Galois a Riemann?*

En su famosa carta de despedida a Chevalier la víspera del fatal duelo que le costó la vida, habla vagamente Galois de "ambigüeté des fonctions" concepto sobre el cual anuncia tener desarrolladas algunas investigaciones.

A pesar de la parquedad de la mención, sospecha Klein si en tales trabajos, desgraciadamente perdidos para siempre, habría quizás una teoría de los órdenes de conexión y un anticipo de las superficies riemannianas.

Aunque parezca aventurada la hipótesis del ecuánime Klein, no se olvide que el imberbe genio dejó resultados positivos sobre las integrales de funciones algebraicas que hoy llamamos abelianas, los cuales merecen considerarlo como un precursor del coloso Riemann.

3. — *Verdadero alcance de la teoría de Galois*

El nimbo de misterio que la teoría de Galois sobre las ecuaciones algebraicas se ha ido formando poco a poco, como consecuencia de su enorme dificultad, ha contribuido quizás a la supervaloración de la misma, común entre el público matemático. Se cree ingenuamente que con ella se resuelven definitivamente todos los problemas de la teoría algebraica de ecuaciones y esto, naturalmente, dista de la verdad. La teoría de Galois contesta, en efecto, a importantes cuestiones de la teoría de ecuaciones del modo más general; pero no es sino la puerta de acceso a un inmenso y mucho más extenso campo, que hoy desconocemos todavía, no pudiendo vislumbrar aún su riqueza de problemas. A este campo de investigación, de acuerdo con Gordan, pudiera llamarse Hipergalois.
(Klein, 1926)

4. — *Cómo llegó Cauchy a su máximo descubrimiento*

Al estudiar el famoso teorema de Cauchy sobre la anulación de la integral de una función holomorfa no se sospechan los tanteos que necesitó el gran politécnico para llegar a tan importante conclusión. Primeramente logró en 1825 demostrarlo cuando el contorno es rectangular y los dos caminos están formados por los dos semicontornos separados por una diagonal; después sospechó su generalidad, y finalmente en 1840 logró la demostración.

Bueno es notar que ya Gauss había estudiado en 1811 la integral de $1/z$ reconociendo su valor $2\pi i$, pero no llegó a publicarlo, limitándose a comunicar sus resultados a Bessel.

5. — *Un fecundo error de Abel*

Tuvo que luchar Abel contra el prejuicio general que no podía tomar en serio las revolucionarias ideas del joven imberbe, quien para los veteranos profesores no pasaba de ser el ''studiosus Abel''. Alcanzó, sin embargo, una gloria efímera cuando en 1823 logró la resolución de la ecuación general de 5º grado mediante radicales, vano empeño en que habían fracasado los grandes algebristas franceses. Pero poco duró la fama al divulgarse la falsedad de la demostración (error que quizás sólo su mismo autor descubrió) y los viejos prudentes se afirmaron en sus reservas y hasta se permitieron algunas puyas contra el atrevido inventor que a los 21 años osaba atacar tales problemas inasequibles a los sabios encanecidos en la enseñanza. Util estímulo fué éste para el atrevido joven, quien se sintió todavía más atrevido, cambiando totalmente de ruta y logrando por fin a los pocos meses demostrar todo lo contrario de lo que sus antecesores habían creído, esto es: la imposibilidad de la resolución general mediante radicales; magno descubrimiento que imprimió a sus expensas y repartió en hojas volanderas, con grave disgusto de sus sabios maestros.

Justo es hacer constar que los más nobles reconocieron su error y le consiguieron una beca para estudiar en Alemania y Francia; pero a su regreso cargado de lauros no logró una cátedra. La oferta de la Universidad de Berlín llegó a los pocos días de su muerte, acaecida en 1830.

Para ingresar como miembro de la Unión Matemática Argentina, es necesaria la presentación del solicitante por dos socios fundadores, la admisión por la Junta, y el pago de una cuota de \$ 5.— m/n. mensuales.

La cuota a la Revista de la U. M. A., incluído el Suplemento, es de \$ 10 m/n. anuales, cuyo envío deberá efectuarse por cheque, giro u otro medio libre de gastos, a la orden de la Tesorera, Srta. Dra. Clotilde Bula, Perú 222, Buenos Aires.

Los señores suscritores, domiciliados en la Ciudad de Buenos Aires podrán, si lo prefieren, efectuar su pago en doce cuotas mensuales de \$ 1.00 m/n. cada una, que serán cobradas a domicilio.

Los trabajos originales enviados para su publicación en la Revista de la U. M. A., serán previamente analizados por un ponente, quien emitirá dictamen acerca de la novedad y corrección de sus resultados.

La impresión de las tiradas aparte, y las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

---

Abonnement annuel à l'etranger: 4.00 dollars (Etats-Unis).

Prière d'adresser toute la correspondance scientifique et administrative à l'adresse ci-dessous:


Sr. Secretario de la UNION MATEMATICA ARGENTINA

Prof. Fernando Gaspar

Perú 222, Buenos Aires (Rep. Argentina)



IMPRENTA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL — SANTA FE — R. ARGENTINA

## SUMARIO