Volumen VII 1940 - 1941 Número 2

REVISTA

DE LA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

□

MIEMBROS FUNDADORES

José Babini (Santa Fe). — Francisco Berdiales (Fallecido). — José Barral Souto (Buenos Aires). — Clotilde A. Bula (Rosario). — Enrique Butty (Buenos Aires). — Carlos Dieulefait (Rosario). — Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (Buenos Aires). — Facultad de Ciencias Matemáticas (Rosario). — Facultad de Química Industrial (Santa Fe). — Eduardo Gaspar (Rosario). — Fernando L. Gaspar (Rosario). — José Giannone (Rosario). — Alberto González Domínguez (Buenos Aires). — José González Galé (Buenos Aires). — Manuel Guitarte (Buenos Aires). — Walter S. Hill (Montevideo). — Carlos Isella (Rosario). — Juan Olguín (Rosario). — Elba R. Raimondi (Buenos Aires). — Julio Rey Pastor (Buenos Aires). — Enrique L. Samatán (Buenos Aires). — Luis A. Santaló (Rosario). — José Sortheix (Tucumán). — Dito T. A. de Speluzzi (Buenos Aires). — Esteban Terradas (La Plata).

Contribuyen especialmente al sostenimiento de las publicaciones de la UNION MATEMATICA ARGENTINA los siguientes

MIEMBROS PROTECTORES

Compañía Industrial del Norte de Santa Fe. Ingenio azucarero "Arño" (Villa Ocampo. F. C. S. F.). — Julio Rey Pastor (Buenos Aires). — T. G. Berlengieri y Cia. (Rosario). — Tricerri Hnos. (Rosario). — Manuel Guitarte (Buenos Aires). — Clotilde A. Bula (Rosario). — Elba R. Raimondi (Buenos Aires). — Fernando L. Gaspar (Rosario). — Pó M. Olcese (Rosario). — Carlos Isella (Rosario). — Pedro J. Tricerri (Rosario).

BUENOS AIRES
1941

JUNTA DIRECTIVA

Presidente ....Prof. Ing. Manuel Guitarte
Vice Presidentes ....Prof. Dr. Julio Rey Pastor
Prof. Ing. José Babini
Secretario ....Prof. Dr. Fernando L. Gaspar
Pro Secretarias ....Srta. Juana María Cardoso
Srta. Esther Ferrari
Tesorera ....Prof. Dra. Clotilde A. Bula
Pro Tesorera ....Sra. Janny Frankel
Vocales ....Prof. Ing. José Sortheix
Prof. Ing. Cortés Plá
Prof. Dr. Esteban Terradas
Prof. Ing. Pedro Rosell Soler
Dr. Alberto González Domínguez

Director de publicaciones ....Prof. Dr. Julio Rey Pastor
Director de la Revista de la U. M. A. . Prof. Ing. José Babini

DELEGADOS DE LA U. M. A.

en Tucumán ....Prof. Ing. José Sortheix
en Córdoba ....Prof. Ing. Fernando Sánchez Sarmiento
en San Luis ....Prof. Dr. Fausto Toranzos
en Santa Fe ....Prof. Ing. José Babini
en Rosario ....Prof. Dr. Fernando L. Gaspar
en Montevideo (R. O.) ....Prof. Ing. Walter S. Hill

VALOR MEDIO DEL NUMERO DE PARTES EN QUE UNA FIGURA CONVEXA ES DIVIDIDA POR n RECTAS ARBITRARIAS

por L. A. SANTALÓ

Sea una figura convexa K de área F y perímetro L. Suponiendo trazadas n rectas que cortan a K, el número de regiones en que queda dividida depende de la posición de las rectas. Por ejemplo, para $n=4$, en la fig. 1 el número N de regiones es 9 y en la fig. 2 es 7. Queremos hallar el *valor medio* del número de estas regiones para todas las posiciones posibles de las n rectas. Este número N veremos que está relacionado muy simplemente con el número N' de puntos de intersección de las rectas entre sí que son interiores a K; así en la fig. 1 es $N'=4$ y en la fig. 2 es $N'=2$. Empezaremos para hallar el valor medio de este último número N' para pasar luego al buscado.

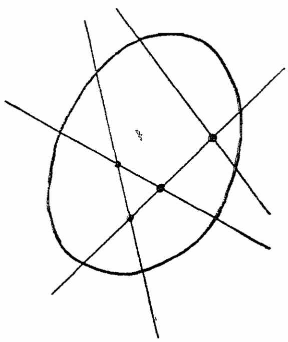

Fig. 1

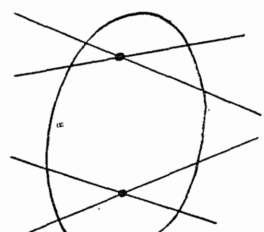

Fig. 2

1. Recordemos que como medida de un conjunto de rectas se entiende simplemente el valor de la integral doble, extendida al conjunto considerado, de la expresión $dG = dp\, d\Theta$ siendo p la distancia de la recta a un origen fijo y Θ el ángulo de la normal a la recta con una dirección también fija (fig. 3). Solamente habrá lugar, en esta nota, a considerar conjuntos de rectas para los que la integral anterior existe. Por ejemplo la medida de las rectas que cortan a un segmento de longitud l

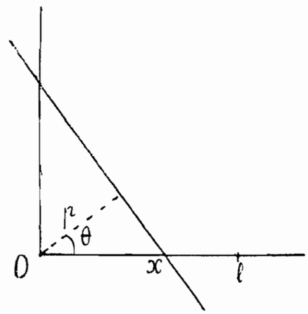

Fig. 3

se puede calcular directamente: si se supone que la posición del segmento es la O, l de la fig. 3, llamando x a la abscisa del punto de intersección será

$$\int dp\, d\Theta = \int_{0}^{l} dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\Theta\, d\Theta = 2\,l \qquad (1)$$

Se puede ver que este valor es independiente de la posición del segmento en el plano.

En general si hay m segmentos de longitudes l_i, llamando v al número de ellos que son cortados por una recta G en cada posición de la misma, sumando las integrales (1) correspondientes a cada segmento, se obtiene

$$\int v\, dG = 2 \sum_{i=1}^{m} l_i \qquad (2)$$

extendida la integración a todas las posiciones de la recta.

Para el problema que nos ocupa debemos también recordar que la medida de las rectas que cortan a una figura convexa K es igual a su longitud, o sea

$$\int_{G\,.\,K \neq 0} dG = L \qquad (3)$$

indicando por $G . K \neq O$ que la integración está extendida a todas las rectas que cortan a K o sea, cuya intersección con K es distinta de cero.

Llamando s a la longitud de la cuerda que la recta G determina en la figura convexa K también debemos recordar la fórmula casi inmediata

$$\int s \, dG = \pi F \tag{4}$$

fácil de obtener integrando primero $s\,dp$ (lo que dá el área F) y luego haciendo variar Θ de O a π.

2. Por *valor medio* del número de puntos N' de intersección de las n rectas que son interiores a K se entiende lo siguiente. El número N' es una función de las n rectas G_i, o sea de sus $2n$ coordenadas p_i, Θ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$; si se sabe calcular la integral

$$J' = \int N' \, dG_1 \, dG_2 \, dG_3 \ldots dG_n \tag{5}$$

extendida a todas las posiciones de las n rectas en las cuales cortan a K, como además la medida de todas estas posiciones posibles según (3) vale

$$\int_{G_i . K \neq o} dG_1 \, dG_2 \, dG_3 \ldots dG_n = L^n \tag{6}$$

el *valor medio* de N' será, por definición, el cociente entre (5) y (6).

3. Hay pues que calcular J'. Llamando N'_{ij} a una función de G_i y G_j (o sea de p_i, Θ_i, p_j, Θ_j) tal que valga uno si G_i y G_j se cortan dentro de K y cero si se cortan fuera (por uniformidad pondremos también $N'_{ii} = 0$). Por cada posición de las N rectas es

$$N' = \sum_{i, j} N'_{ij}$$

y el número de las N'_{ij} es igual al de combinaciones de las n rectas tomadas 2 a 2 o sea $\binom{n}{2}$.

Llamando s_i a la longitud de la cuerda que G_i determina en K, según (1) y (4) se tiene

$$\int_{G_i \cdot K \neq 0} N'_{ij}\, dG_i\, dG_j = 2 \int s_i\, dG_i = 2\pi F$$

Luego

$$J' = \int N'\, dG_1\, dG_2 \ldots dG_n = \sum_{i,j} \int N'_{ij}\, dG_1\, dG_2 \ldots dG_n =$$
$$= \binom{n}{2}\, 2\pi F L^{n-2} \qquad (7)$$

Dividiendo (7) por (6) se obtendrá por tanto, como valor medio de puntos de intersección N' que son interiores a K

$$\boxed{\overline{N'} = \binom{n}{2} \frac{2\pi F}{L^2}} \qquad (8)$$

4. Para pasar de N' al número N de regiones en que las n rectas dividen a K se observa en primer lugar que las posiciones de las rectas en las cuales pasan más de 2 por un mismo punto son posiciones especiales de medida cero, es decir, sin influencia en las integrales (5) o (6) ni por tanto en los valores medios. Para las demás posiciones vamos a demostrar que se cumple la relación

$$N = N' + n + 1 \qquad (9)$$

Por ejemplo en la figura 1 es $N' = 4$, $n = 4$, $N = 9$ y en la fig. 2 es $n = 4$, $N' = 2$, $N = 7$.

Para demostrar (9) consideremos la red formada por las n rectas y el contorno de K. El número de *vértices* es igual a N' más los $2n$ puntos que las rectas determinan en el contorno de K. El número de *regiones* es por definición N. Para el número de lados se observa que por cada uno de los N' vértices interiores pasan 4 y por cada uno de los vértices del contorno pasan 3; como cada lado pertenece a 2 vértices el número de ellos será por tanto $1/2\,(4\,N' + 6\,n) = 2\,N' + 3\,n$. Pero el teorema de EULER para superficies abiertas dice que el número de *regiones* más el de *vértices* es igual al de *lados* más uno, luego

$$N + N' + 2\,n = 2\,N' + 3\,n + 1$$

de donde resulta la igualdad (9) que queríamos demostrar.

El *valor medio* del número de regiones N, teniendo en cuenta (8) y (9) será por tanto

$$\boxed{\overline{N} = \binom{n}{2}\frac{2\,\pi\,F}{L^2} + n + 1}$$

5. El número total de lados de la red formada por el contorno de K más las cuerdas que las rectas G_i determinan en esta figura convexa hemos visto que era $2\,N' + 3\,n$. El número de lados del contorno es $2\,n$, luego el número de lados interiores será $2\,N' + n$. Llamando λ_i al número de lados de la región C_i, al sumar las λ_i para todas las regiones se observa que cada lado interior aparece contado dos veces y cada lado del contorno una sola vez, por tanto

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 2\,(2\,N' + n) + 2\,n = 4\,N' + 4\,n.$$

De aquí que el *valor medio* del número de lados de las regiones en que una figura convexa K queda dividida por *n* rectas arbitrarias que la cortan es

$$\overline{\lambda} = \frac{4\,\overline{N'} + 4\,n}{\overline{N}} = \frac{4\,\overline{N'} + 4\,n}{\overline{N'} + n + 1} < 4.$$

$\overline{N'}$ está dado por (8).

SOBRE LA PROLONGACION ANALITICA DE LAS SERIES DE DIRICHLET DE DENSIDAD MAXIMA INFINITA

por SIXTO RÍOS

En las series de Dirichlet de densidad máxima finita es posible determinar una sucesión parcial hiperconvergente en todo el semiplano de holomorfía, según un teorema fundamental de V. Bernstein (1). Este teorema no se generaliza a las series de Dirichlet de densidad máxima infinita, lo que he demostrado yo con el ejemplo de la serie (2)

$$[1] \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-s l n}$$

que tiene abscisa de convergencia cero y define una función entera; pero no posee ninguna sucesión parcial hiperconvergente más allá del semiplano de convergencia.

Sobre este ejemplo vamos a indicar una generalización del método de hiperconvergencia, que consiste en la descomposición de los términos de la serie en sumandos y reagrupación conveniente de éstos. Tal método que llamaremos de *recomposición* (3) puede dar la prolongación analítica en casos en que falla el método de hiperconvergencia (es decir agrupación directa de términos de la serie dada).

Vamos a demostrar que tal ocurre en el ejemplo de la serie [1].

---

(1) Leçons sur les progrès récents de la théorie des series de Dirichlet (París, 1933, Col. Borel), pág. 141.

(2) Los resultados se encuentran indicados en mi nota "Hiperconvergencia de las series de Dirichlet......." (Rev. de la Un. Mat. Arg. Vol. I, pág. 71) y las demostraciones en mi memoria "Sobre el problema de la hiperconvergencia de las series de Dirichlet, cuyas sucesiones de exponentes poseen densidad máxima infinita" (Rev. de la R. Ac. de Ciencias de Madrid, t. 1940).

(3) En mi nota titulada "Prolungazione analitica per riordinazione" (en curso de publicación en los Rendiconti de la Acc. de Italia) he señalado otro método de prolongación analítica de series de Dirichlet, método de *reordenación,* consistente en la alteración del orden de los términos de la serie.

El término n-ésimo de la serie [1] puede obtenerse agrupando los términos de lugares $2n-2$, $2n-1$ de la serie ([4]):

$$1 . e^{-(s+1)\, l 1} - 1 . e^{-(s+1)\, l 2} - 1 . e^{-(s+1)\, l 2} + 1 . e^{-(s+1)\, l 3}$$
$$+ 2 e^{-(s+1)\, l 3} - 2 e^{-(s+1)\, l 4} - 2 e^{-(s+1)\, l 4} + 2 e^{-(s+1)\, l 5} + \ldots$$

El campo de convergencia de esta serie es el mismo semiplano $R(s) > 0$ de la [1], puesto que el término general tiende a cero.

Ahora bien, si en esta serie agrupamos los términos de cuatro en cuatro consecutivos, obtenemos una serie de polinomios exponenciales, cuyo término general es:

$$P_n(S) = \frac{n+2}{2} \left[e^{-(s+1)\, l\,(n+1)} - e^{-(s+1)\, l\,(n+2)} \right] -$$
$$- \frac{n+2}{2} \left[e^{-(s+1)\, l\,(n+2)} - e^{-(s+1)\, l\,(n+3)} \right]$$

Serie que, según vamos a demostrar, efectúa la prolongación analítica de la dada [1] en la banda $-1 < R(s) < 0$, que no se lograba, según vimos, mediante la aplicación directa del método de hiperconvergencia.

Demostremos, en efecto, que la serie, cuyo término general es $P_n(s)$, converge uniformemente en el interior del semiplano $R(s) > -1$.

Teniendo en cuenta que el primer paréntesis recto es la diferencia de valores de la función $e^{-(s+1)\, l\, \alpha}$ en los puntos $\alpha = n + 2$, $\alpha = n + 1$, se puede aplicar el teorema del valor medio (suponiendo $s + 1$ positivo) y lo mismo al segundo paréntesis recto, con lo que resulta:

$$P_n(s) = \frac{n+2}{2} \left[(s+1)\, e^{-(s+2)\, l\,(n+1+\delta)} \right.$$
$$\left. - (s+1)\, e^{-(s+2)\, l\,(n+1+\delta')} \right]$$

donde δ y δ' son números positivos, comprendidos entre 0 y 1.

([4]) Esta es una serie de Dirichlet generalizada: los exponentes no forman una sucesión estrictamente monótona. Las propiedades de estas series están estudiadas en mi nota precitada.

Una nueva aplicación del teorema citado da la acotación:

$$|P_n(s)| < \frac{n+2}{2} |s+1| \, . \, |s+2| \, . \, e^{-(s+3)\, l\,(n+1)}$$

lo que demuestra la convergencia uniforme de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(s)$ en el interior del semiplano $R(s) > -1$, que es lo que queríamos demostrar.

Un estudio detenido de este método de prolongación analítica, indicado sobre el ejemplo precedente, será objeto de otro trabajo.

TEMAS PROPUESTOS

24. — Demostrar que la curva representada por la función real creciente definida por la serie:

$$x + \sum_{1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2^{4n} \pi x}{2^{5n}}$$

tiene en cada intervalo infinitos puntos con tangentes paralelas e infinitos puntos de inflexión.

R. P.

25. — Sumar la serie

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!\,(n+1)}$$

R. P.

26. — Dividido un segmento al azar en seis partes, calcular la probabilidad de que con estos segmentos se pueda construir un tetraedro.

Generalización al espacio de n dimensiones.

R.

SOBRE LOS DESARROLLOS FUNCIONALES DE LA FORMA

$$f(x) = \Sigma \frac{c_n x}{x^2 + n^2} \qquad (1)$$

por Cecilia Mossin Kottin

Tema 3º (T. VII, Núm. 1)

Como en todos los desarrollos en serie funcional, cabe abordar dos problemas de dificultad muy diversa: si se supone $f(x)$ expresable en serie de este tipo y se desea calcular los coeficientes c_n esto puede hacerse muy sencillamente por diversos pasos al límite; pero si se da una función analítica cualquiera $f(x)$, no es tan sencillo dar condiciones suficientes para que admita desarrollo de la forma (1) y calcular los coeficientes c_n. En el curso de seminario de la Universidad de Buenos Aires hemos resuelto este problema (que comprende al primero) mediante la transformación de Laplace, como exponemos a continuación.

Supongamos primeramente que la función $f(x)$ sea dada como función transformada de Laplace de la serie convergente $\varphi(t) = \Sigma\, a_m L_m(t)$, donde $L_m(t)$ son los polinomios de Laguerre, cuya expresión es:

$$L_m(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{m}{k} t^k$$

Es sabido que para cada polinomio $L_m(t)$, su transformada $\psi(x)$ de Laplace está dada por la expresión:

$$\psi(x) = \int_0^\infty L_m(t)\, e^{-tx}\, dt = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^m$$

Pero: ¿será legítimo considerar la función $f(x)$ como serie de las transformadas de los términos de aquella serie? Veamos si la integral

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \left[\sum_{m=0}^{\infty} a_m L_m(t) \right] dt \qquad (2)$$

será igual a la serie de integrales, o lo que es lo mismo, si será válido escribir:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^m \tag{3}$$

Para ello será suficiente que la integral del resto de la serie tienda a 0 para $m \rightarrow \infty$

Teniendo presenta la limitación de Szegö para los polinomios de Laguerre: $|L_m(t)| < e^{\frac{t}{2}}$ y verificándose la relación

$$|a_m L_m + a_{m+1} L_{m+1} + \ldots| < e^{\frac{t}{2}} [|a_m| + |a_{m+1}| + \ldots]$$

si la serie: $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$ es absolutamente convergente, se obtiene:

$$|a_m L_m + a_{m+1} L_{m+1} + \ldots| < e^{\frac{t}{2}} \varepsilon$$

desde un m en adelante ($m \geqq \mu$).

Por lo tanto, la integral del resto es menor que

$$\int_0^{\infty} e^{-tx} e^{\frac{t}{2}} \varepsilon \, dt = \varepsilon \frac{1}{x - \frac{1}{2}}$$

acotación válida para todo punto real $x > 1/2$ y en el campo complejo, para el semiplano $\mathcal{R}(x) > 1/2$.

Es decir, son equivalentes los desarrollos (2) y (3), siempre que se imponga la condición de la convergencia absoluta de la serie $\sum a_m$, que se expresa fácilmente mediante las derivadas de

$$F(x) = x f(x) = \sum a_m \left(1 - \frac{1}{x}\right)^m.$$

Dada la función analítica $f(x)$ impondremos esta condición previa; pero la transformación $u = 1/x$ convierte la serie (3) en la serie $\sum a_m (1-u)^m$, la cual, en virtud de tal hipótesis, converge en el círculo de centro 1 y radio 1; luego la serie (3) converge por lo menos en el semiplano $\mathcal{R}(x) > 1/2$.

Recíprocamente: dada una función $f(x)$ holomorfa en este semiplano, incluso el contorno con el punto ∞, su transformada en *u* admite en el punto 1 desarrollo absolutamente convergente en el punto $u = o$ y por tanto converge absolutamente la serie $\Sigma\, a_m$, quedando expresada $f(x)$ como función determinante, esto es, transformada (L) de la función

$$\varphi(t) = \sum_{o}^{\infty} a_m L_m(t) \tag{4}$$

Si desarrollamos esta función en serie de cosenos en el intervalo $(0, \pi)$

$$\varphi(t) = \sum_{o}^{\infty} c_n \,.\, \cos nt \tag{5}$$

y suponemos para mayor sencillez absolutamente convergente la serie de coeficientes, su transformada (L) será una serie (1) con estos mismos coeficientes. El primero de los problemas propuestos se reduce, pues, al cálculo de los coeficientes de Fourier:

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_{o}^{\pi} \varphi(t) \cos nt \,.\, dt$$

y teniendo en cuenta la identidad entre (4) y (5) resulta la expresión buscada:

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_{o}^{\pi} \left\{ \sum_{m=o}^{\infty} a_m \left[\sum_{k=o}^{m} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{m}{k} t^k \right] \right\} \cos nt\, dt$$

La integral de la serie es la serie de las integrales, por ser el intervalo finito y la serie uniformemente convergente, pues tiene sus términos menores que los de la serie numérica $e^{\frac{1}{2}} \Sigma\, |a_m|$, convergente. Luego

$$c_n = \frac{2}{\pi} \sum_{o}^{\infty} a_m \left[\sum_{k=o}^{m} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{m}{k} \int_{o}^{\pi} t^k \cos nt\, dt \right]$$

$$c_n = \frac{2}{\pi} \sum_{m=o}^{\infty} a_m \sum_{k=o}^{m} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{m}{k} I_n^k \qquad [6]$$

Efectuamos el cálculo de I_n considerando, por ejemplo, el caso *n* impar:

$$I_n^k = \int_0^\pi \cos nt \,.\, t^k \,.\, dt = \frac{\operatorname{sen} nt}{n} t^k \Big|_0^\pi - \frac{k}{n} \int_0^\pi \operatorname{sen} nt \,.\, t^{k-1} \,.\, dt$$

$$J_n^{k-1} = \int_0^\pi \operatorname{sen} nt \,.\, t^{k-1} \,.\, dt = -\frac{\cos nt}{n} t^{k-1} \Big|_0^\pi + \frac{k-1}{n} \int_0^\pi \cos nt \,.\, t^{k-2} \,.\, dt$$

$$I_n^k = -\frac{k}{n} J_n^{k-1} \qquad\qquad J_n^{k-1} = \frac{\pi^{k-1}}{n} + \frac{k-1}{n} I_n^{k-2}$$

La aplicación reiterada de la integración y la sustitución dá finalmente

$$I_n^k = -\frac{k}{n^2}\pi^{k-1} + \frac{k(k-1)(k-2)}{n^4}\pi^{k-3} - \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)}{n^6}\pi^{k-5} + \ldots$$

Para el cálculo de los últimos términos debemos tomar en cuenta la paridad de k. Obtenemos así finalmente para k par:

$$I_n^k = (-1)^n \frac{k!}{n^2} \left[\frac{\pi^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{\pi^{k-3}}{n^2(k-3)!} + \ldots - \frac{\pi}{n^{k-2}\, 1!} \right]$$

y para k impar:

$$I_n^k = (-1)^n \frac{k!}{n^2} \left[\frac{\pi^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{\pi^{k-3}}{n^2(k-3)!} + \ldots - \frac{\pi^2}{n^{k-3}\, 2!} \right]$$

Simbólicamente podemos dar a (6) la forma siguiente:

$$c_n = \frac{2}{\pi} \sum_0^\infty a_m L_m(I) \qquad\qquad a_m = \frac{1}{m!} D^m [x \,.\, f(x)]_{x=1}$$

entendiendo que los exponentes de I se interpretan como índices superiores.

Instituto de Matemáticas, Buenos Aires

NOTA DE RED. — Un estudio del Dr. González Domínguez sobre el primero de los problemas enunciados en la introducción, y otra nota del Prof. Frucht sobre el mismo Tema 3º aparecerán en el próximo número.

EL LUGAR GEOMETRICO Y LUGARES DE PUNTOS AREAS EN EL PLANO

Por V. y A. Fraile y C. Crespo

I. - Teoria general

1. — El concepto de lugar geométrico lleva en sí el de pluralidad.

Vamos a empezar sirviéndonos de unos ejemplos sumamente elementales que nos permitirán obtener una clasificación de los lugares y establecer algunas conclusiones.

Dados los puntos A y B, existe solamente un punto de su recta que equidista de ambos, siendo finita la distancia. Existen dos que cumplen esta condición situados en la circunferencia de diámetro A B; y existen infinitos situados en un plano que contenga a A y a B. He aquí otra forma de expresar estos tres casos: dos puntos de un espacio E_1 se reproducen aplicando un criterio y originan un nuevo punto; originan simultáneamente dos introduciendo otro espacio E'_1; crean simultáneamente una infinidad continua de puntos si se introduce un espacio E_2. En el primer caso no hay lugar geométrico, por no existir pluralidad de soluciones. En los otros dos sí hay lugar geométrico. Sin embargo, sólo cuando se trata de una infinidad continua de soluciones al problema suele aplicarse el nombre *lugar*.

Si en el primer ejemplo consideramos un haz plano de rectas de vértice A que contenga a la recta A B, y en cada una de ellas aplicamos aquel criterio de equidistancia, referido a los puntos A, fijo, y B_i de la circunferencia de centro A y radio A B, obtenemos una infinidad continua de soluciones, y, por lo tanto, un l. g.; pero esta infinidad de puntos no se produce simultáneamente, como en el ejemplo tercero, sino que se obtiene aplicando infinitas veces el criterio dado en distintos espacios E_i; es decir, por generación. Podemos generalizar diciendo que hay dos formas de enunciar lugares geométricos: establecer un criterio sobre entes fijos de un espacio E_n, de manera que haya una infinidad continua de nuevos entes que le satisfacen simultáneamente; aplicar infinito número de veces un mismo criterio sobre entes dados, parte de los cuales son fijos y variables los demás, cuando de este criterio se obtiene cada vez un nuevo ente, o un conjunto numerable de nuevos entes, con la condición al menos de ser continuos los sistemas en los que se mueven los entes dados variables. Hay, pues, lugares que podremos llamar por *síntesis* y por *generación*.

En el último de los tres ejemplos que hemos establecido se trata de un lugar por síntesis. Puede obtenerse también de esta otra manera: sean los puntos A, B y una recta r que contiene a A. Sobre r existe un sólo punto, propio o impropio, que equidista de A y B. Apliquemos ahora este criterio de equidistancia en cada una de las rectas del haz de vértice A y plano (r, B), con lo cual obtenemos la mediatriz del segmento AB, lo mismo que antes, pero esta vez por generación. En esencia, no hemos hecho sino restringir la dimensión del espacio selectivo y, por medio de éste, generar el otro.

Cuando se trata de lugares de puntos es muy fácil probar que todo lugar por síntesis lo es también por generación. En efecto: supongamos que en un espacio lineal E_n, de dimensión mínima n, obtenemos, por síntesis, un lugar de puntos de m dimensiones $(n > m)$. Un cierto hiperplano G_{n-1} de E_n corta al lugar según una o más variedades de dimensión $m-1$; otro hiperplano G_{n-2} de G_{n-1} lo corta según variedades de $m-2$ dimensiones; etc. Finalmente, un último hiperplano G_{n-m} de G_{n-m+1} corta al lugar en un punto o un conjunto numerable de puntos. Enunciemos ahora el lugar primitivo con la condición de estar las soluciones situadas en la variedad lineal G_{n-m} y hagamos lo mismo para todas las variedades de un haz $(G_{n-m})_i$ de G_{n-m+1}. Con ello habremos obtenido, por reiteración del criterio, la parte del lugar interferida en G_{n-m+1}. Así sucesivamente hasta E_n. De esta forma, por sucesivas generaciones, nos viene dado el lugar primitivo.

Por lo tanto, en adelante, nos referimos sólo a lugares de puntos por generación, y todo ello será general.

2. — Proponer un lugar geométrico es cosa, pues, bien fácil: basta plantear un problema cualquiera en un espacio E_n sobre entes dados, A, B, C, . . ., N, de modo que la solución sea un punto o un conjunto numerable de puntos. Hagamos ahora que A pertenezca a un sistema ∞^{α} de entes A; B a otro ∞^{β} de entes B; . . . ; N a un sistema ∞^{ν} de entes N. Tomemos en dichos sistemas sendos elementos, y resolvamos sobre ellos el problema dado, haciendo lo mismo para todos los grupos A, B, C, . . ., N. El conjunto de todos

los puntos obtenidos constituirá o no una o más variedades continuas de E_n, y será un lugar.

No es necesario asignar a cada ente primitivo un sistema para obtener un lugar geométrico: basta hacerlo con uno de ellos. Supongamos que son p los entes primitivos, de los cuales q tienen sistema. Puede suceder que, al resolver el problema matriz, no sea arbitraria la elección de elementos en los q sistemas, sino que, habiendo tomado arbitrariamente sendos entes en k de ellos, queden unívocamente determinados los $q-k$ elementos restantes en sus sistemas respectivos. Llamaremos *conjuntos-variables* a los sistemas en los que es arbitraria la elección de elementos.

En el tercero de los tres ejemplos puestos al principio, enunciado por generación, son entes dados constantes A y B; el haz plano de rectas de vértice A es conjunto-variable; el criterio de equidistancia referido a A y a B sobre cada recta r es el problema matriz, y E_2 el espacio lineal donde se sitúa el lugar.

Sea G el problema matriz de un l. g. en E_n y $A_1, A_2, \ldots, A_p$ los entes primitivos dados, de los cuales los q primeros pertenecen respectivamente a sistemas S_{A_1}, $S_{A_2}, \ldots, S_{A_q}$, que, para simplificar, suponemos que todos ellos son conjuntos-variables. Hemos de repetir G sobre cada grupo A_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$, tomando para esto de un modo arbitrario q elementos en los sistemas S. Si consideramos los grupos A_i de modo que no varíe sino A_1 en S_{A_1}, dejando fijos en sus sistemas respectivos a $A_2, A_3, \ldots, A_q$, el conjunto de los puntos obtenidos constituye un lugar parcial correspondiente al conjunto-variable S_{A_1}. El lugar total está formado, pues, por q sistemas incidentes de lugares parciales.

Cuando este lugar total es una variedad continua V de E_n, es claro que la dimensión de V será como máximo $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_q$, siendo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ las dimensiones de los sistemas S_{A_i}. Entonces ha de acontecer dos cosas: 1.ª G es de tal índole que no reduce el número de dimensiones de los lugares parciales, es decir, éstos son variedades continuas cuyo número de dimensiones es igual a la dimensión de sus conjuntos-variables correspondientes. 2.ª La incidencia de los q sistemas de lugares parciales es de dimensión *cero*.

Las proposiciones contrarias constituyen las dos únicas causas que reducen el número de dimensiones del lugar geométrico total. Tenemos un caso particular de la segunda cuando es $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_q > n$, o sea, cuando la dimensión del espacio E_n es insuficiente para contener la del lugar, no existiendo la causa primera.

La interpretación analítica de ambas causas que restringen la dimensión de V es también sumamente sencilla: sean $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots y_{\alpha_1}^{(1)}, y_1^{(2)}; y_2^{(2)}, \ldots, y_{\alpha_2}^{(2)}; \ldots; y_1^{(q)}, y_2^{(q)} \ldots, y_{\alpha_q}^{(q)}$ los parámetros arbitrarios esenciales que definen, respectivamente, los elementos o entes primitivos en los sistemas S_{A_1} $S_{A_2}, \ldots, S_{A_q}$. Las coordenadas (no homogéneas) de los puntos del lugar V serán funciones

$$x_\mu = \varphi_\mu \; (y_1^{(1)} \ldots, y_{\alpha_1}^{(1)}; y_1^{(2)} \ldots, y_{\alpha_2}^{(2)} \quad y_1^{(q)}; \ldots; y_{\alpha_q}^{(q)}) \qquad [1],$$

$$\mu = 1, \; 2, \ldots, \; n,$$

y constituyen las ecuaciones paramétricas de dicho lugar.

Si existe la primera de las causas enunciadas respecto de S_{A_1}, por ejemplo, es que en las funciones φ no son esenciales los parámetros $y_1^{(1)}, \ldots, y_1^{(1)}$, siendo, pues, posible sustituir todos o parte de ellos por otros parámetros en número menor.

2.ª La incidencia de los q sistemas de lugares parciales es de dimensión r, mayor que *cero*. Supongamos, para simplificar, que es r precisamente la dimensión de la incidencia de los sistemas de lugares parciales correspondientes a S_{A_1} y S_{A_2}. Entonces no cabe otra cosa que ser sustituibles los $\alpha_1 + \alpha_2$ parámetros $y^{(1)}$ e $y^{(2)}$ de [1] por $\alpha_1 + \alpha_2 - r$ nuevos parámetros, ya que el lugar parcial superior que resulta de considerar variables sólo a los entes primitivos A_1 y A_2 ha de ser una variedad de dicha dimensión $\alpha_1 + \alpha_2 - r$.

Vemos, por lo tanto, la existencia única de las causas referidas: que en las funciones φ no sean esenciales parte o todos los parámetros y de una misma serie; que no lo sean parte o todos los de series distintas, aun siéndolo los de cada serie.

En el primer caso, si llamamos $y'_1, y'_2, \ldots, y'_\beta$ $(\beta < \alpha_1)$ a los parámetros que sustituyen a los $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, y_{\alpha_1}^{(1)}$ en las φ, es, en general, posible sustituir también el sistema ∞^{α_1} S_{A_1} de entes A_1 por otro ∞^β de los mismos entes, definido con los y', de manera que junto con los q—1 sistemas restantes y los p—q elementos fijos se obtenga la misma variedad lugar. Es decir, los conjuntos-variables son reducibles a otros de dimensión menor.

Este caso encierra la posibilidad de quedar eliminados en las ecuaciones [1] algunos parámetros $y^{(J)}$.

La segunda causa de restricción del número de dimensiones del lugar V se produce cuando las posiciones relativas de los sistemas S_{A_1} en E_n no son genéricas y sí particulares. Al establecer las ecuaciones paramétricas [1] aparecen entonces, en cada una de las φ, funciones idénticas de los mismos parámetros *y* de series diferentes; y estas funciones, claro es, constituyen nuevos parámetros, en número menor.

Si se trata de la primera causa referida, por ejemplo, al conjunto-variable S_{A_1}, a todo punto de un lugar parcial respecto de S_{A_1} corresponde uno o más subsistemas de entes A_1 de dicho conjunto-variable. En cuanto a la segunda hay también correspondencias parecidas.

Si el lugar V tiene la máxima dimensión $\sum_{j=1}^{q} \alpha_j$, la correspondencia recíproca no es de puntos de V a continuos de entes primitivos.

3. — Para que un lugar de puntos sea una variedad continua de E_n, su dimensión m ha de cumplir $m \lesseqgtr n - 1$. Por otra parte, sabemos que el número de dimensiones de un lugar depende de la multiplicidad o dimensión de los sistemas de entes primitivos arbitrarios. Es posible, pues, proponer lugares de puntos que sean n-dimensionales en E_n, o sea, que constituyan recintos del espacio selectivo total.

Como vemos, el concepto de lugar geométrico es muy general, y, sin embargo, en geometría plana sólo es corriente estudiar aquellos lugares que son líneas o elementos de líneas. Es cierto que se puede proponer inmediatamente lugares de puntos que constituyen recintos del plano; pero son tan triviales que no merecen siquiera ser enunciados. A pesar de ello enunciemos dos:

1.º «L. g. de los puntos del plano cuya distancia a uno fijo es mayor que r y menor que k $(k > r)$».

2.º «L. g. de los puntos del plano homotéticos de los de un círculo dado C respecto de un punto fijo V (razón k)».

La puerilidad de estos lugares de puntos áreas en el plano consiste, para el primer ejemplo, en los conceptos *mayor* y *menor* que intervienen en el enunciado. Toda selección de puntos de un plano condicionada por varias limitaciones a un concepto simple de distancia, o a otro análogo simple, define, en efecto, un recinto, finito o infinito, de ese plano.

Este lugar lo es por síntesis. Si el campo selectivo lo restringimos a una recta del plano que pasa por el punto fijo obtenemos también otro *recinto* de ella.

En cuanto al segundo de los ejemplos, se trata, desde luego, de un lugar por generación: a cada punto del círculo dado corresponde uno homotético de razón k. Los datos para engendrar este lugar son el centro de homotecia — ente primitivo fijo — y el punto genérico del círculo — ente primitivo que pertenece a un sistema ∞^2 de ellos —. El problema matriz es el criterio de homotecia referido a cada ente de C respecto de V. Sabemos ya que el lugar ha de ser bidimensional, y, por lo tanto, un recinto del plano.

Cualquier lugar área de puntos en el plano que se genera aplicando un problema matriz sobre un grupo de p entes, de los cuales $p-1$ son fijos y el otro varía en un campo ∞^2 de ellos; es, casi siempre, trivial. Pero, en cambio, no suelen ser ya pueriles los lugares, si, en vez de hacer variar a un ente primitivo sobre un campo o sistema ∞^2 de ellos, hacemos variar a dos arbitrariamente sobre sendos sistemas ∞^1. En nuestro último ejemplo, basta que el punto móvil de C varíe sólo en una circunferencia, y que el centro de homotecia se elija también arbitrariamente en otra línea cualquiera, para que el lugar área que resulte deje de ser trivial.

Es claro que, si un problema matriz en el plano se refiere a p puntos-datos, y hacemos variar sobre sendas líneas genéricas a más de dos de ellos de un modo arbitrario, se obtiene un lugar área de puntos; pero en los sistemas de lugares parciales ha de haber forzosamente incidencia de dimensión mayor que *cero*, por ser aquí $q > 2$ ($q =$ número de líneas conjuntos-variables); esto es, el lugar parcial superior que resulta de considerar variables sólo a dos puntos datos, y otro parcial correspondiente a otra de las líneas dadas, inciden según una línea.

En definitiva: la regla que nos permite proponer lugares de puntos áreas en el plano, exentos en general de trivialidad, consistirá, pues, en elegir un problema gráfico cuya solución sea un punto o conjunto numerable de puntos, y cuyos datos sean puntos (líneas) no inferiores a dos en número. Luego, haremos variar a dos de estos datos de una manera arbitraria, sobre sendas líneas (haces), repitiendo el problema elegido en cada nuevo grupo de datos.

Sean A y B los entes primitivos que son variables sobre los conjuntos ∞^1 S_A y S_B respectivamente. Un lugar parcial L_A correspondiente a S_A se obtendrá cuando B queda fijo en S_B y sólo varía A en S_A. L_A es un lugar línea corriente, y está perfectamente definido por el valor o posición que tiene B en S_B. A cada valor de B corresponde un L_A; de modo que si hallamos ahora el lugar geométrico de L_A, cuando B varía en su sistema, obtenemos el lugar total.

(Continuará)

LA ORGANIZACION DE LOS ESTUDIOS DE MATEMATICAS EN FRANCIA

Creemos de interés informar a nuestros lectores de la organización de la enseñanza matemática en los diversos países, y en todos sus grados; comenzaremos en este número por la organización de la enseñanza en Francia.

Bachillerato:

El bachillerato en Francia tiene una duración de siete cursos, la edad común para iniciar los estudios es entre los diez y doce años, recibiéndose por tanto de bachilleres, como término medio, a los dieciocho años, o sea aproximadamente a la misma edad que los del país, no obstante tener nuestro bachillerato una duración de cinco años en lugar de los siete del francés. Las materias de estudio fundamentales son las matemáticas, el idioma nacional y las lenguas vivas o muertas.

Su estudio se divide en dos períodos de duraciones respectivas de seis años y uno; en el primer período se pueden seguir tres orientaciones distintas que se designan por A, A' y B, y que se distinguen por darse en unos más importancia al estudio de las lenguas vivas y en otros al del latín y griego, los programas y horarios de matemáticas son comunes a las tres orientaciones y su extensión es tal que le dan al alumno una serie de conocimientos matemáticos altamente satisfactoria, basta para comprobarlo examinar los programas y los textos que estudian los alumnos, entre ellos los que tenían últimamente mayor difusión eran los de los profesores ESTEVE y MITAULT.

En la segunda parte del bachillerato se pueden seguir dos orientaciones, Filosofía y Matemáticas, que se caracterizan, como su nombre lo indica, por dar mayor importancia a los programas y horarios de filosofía y matemáticas respectivamente; ambas materias se estudian en las dos orientaciones, aunque con distinta intensidad.

En este segundo período el alumno completa su formación en matemáticas elementales y se inicia en algunas ramas superiores como la geometría vectorial y el cálculo diferencial; como textos para esta parte del bachillerato se estudiaban hasta hace poco tiempo en Francia, los de: HADAMARD; *Leçons de "Géomêtrie elèmentaire"*, TANNERY; *"Leçons d'Arithmétique théorique et practique"*, BOURLET; *"Leçons d'Algèbre" y "Leçons de Trigonométrie rectiligne"*, hoy día se estudian las obras un poco más simples de ESTEVE y MITAULT para este período.

Basta ojear estas obras para darse cuenta de la solidez de la formación matemática de los bachilleres franceses, que les permite, más tarde, acortar la duración de los estudios superiores; el método de examen también contribuye a facilitar la formación de los bachilleres, los exámenes no son por materias aisladas sino que hay solamente dos exámenes, uno al final de cada período de conjunto, es decir de todas las materias y de todos los cursos. En lo que se refiere a matemáticas se da importancia fundamental para la selección de los candidatos a la resolución de problemas ya que los exámenes teóricos son en general satisfactorios pues la mayoría de los candidatos conocen la parte teórica de la materia.

Clases de ''Mathématiques spéciales'':

Los estudios que se llaman en Francia de ''maahématiques spéciales'' son intermedios entre los secundarios y los universitarios, se dan en los liceos y sus profesores son de enseñanza secundaria, los métodos de estudio, disciplina, etc., son también los que se emplean en los institutos secundarios pero para cursarlos es preciso ser bachiller y las materias de estudio son de carácter universitario, su finalidad principal es preparar a los alumnos para los exámenes de ingreso a las llamadas ''Grandes Ecoles'', esto es Politécnica, Normal Superior, Central, Minas, ''Ponts et Chaussées'', etc...

En este período los alumnos se inician en la matemática superior, estudian álgebra (separación y aproximación de raíces, determinantes y su aplicación al álgebra, eliminación etc...), cálculo diferencial, elementos de cálculo integral, geometría analítica, trigonometría esférica, nociones de geometría proyectiva, geometría descriptiva, elementos de mecánica etc..., se da importancia fundamental también a la resolución de problemas y en general a todo lo que tiende a hacer familiar al alumno el manejo de la nueva matemática que estudia. Estos estudios duran en general dos años, dirigiéndose por tanto a alumnos cuyas edades están comprendidas entre 17 y 20 años; uno de los textos más difundidos para su estudio es el de HAAG ''Cours complet de mathématiques spéciales'', en cuatro volúmenes con otros cuatro de problemas.

Escuelas Técnicas Superiores:

Los alumnos ingresan en ésta después de un examen de ingreso sobre las materias de ''mathématiques spéciales'', el concurso de entrada más difícil (después del de Normal Superior que no es una escuela técnica), es el de la escuela Politécnica, en esta escuela los alumnos estudian dos años y siguen como cursos de matemáticas los siguientes: dos de análisis matemático, dos de geometría y dos de mecánica, esta escuela no prepara técnicos en ninguna materia pero los egresados de ella ingresan con derecho preferente en el tercer curso de las demás escuelas de ingeniería tanto civiles como militares.

Los estudios efectuados en esta escuela, se caracterizan por su valor teórico, basta para comprobarlo ojear los textos que se estudian en la misma como por ejemplo: HADAMARD: ''Cours d'Analyse'', D'OCAGNE: ''Cours de Géométrie'', PAINLEVE: ''Cours de Mecanique'' etc...; el nivel de los estudios en las restantes escuelas técnicas es ligeramente inferior al de la Politécnica.

Facultades de Ciencias:

Para el ingreso en una Facultad de Ciencias no es necesario haber cursado ''mathématiques spéciales'', aunque en la práctica la mayoría de los alumnos han cursado previamente dichas materias, otros en cambio cursan en la facultad el certificado de ''mathématiques generales'', siendo aproximadamente equivalentes las extensiones de ambos.

Por tanto al iniciar el alumno los estudios propiamente universitarios posee ya una amplia base de conocimientos matemáticos. La Universidad concede dos clases de títulos fundamentales, el de licenciado y el de doctor.

Para poder optar al título de licenciado es necesario cursar y aprobar tres certificados de estudios superiores, éstos pueden ser elegidos libremente entre los de una lista de quince o veinte, que hay en todas las Facultades, pero para la llamada "licence d'enseignement", que es la que autoriza a ejercer la enseñanza secundaria, es necesario aprobar los tres siguientes: Física General, Mecánica Racional en la que se emplea generalmente como texto el de APPELL, y Cálculo Infinitesimal, en el que se estudia además del cálculo diferencial e integral los elementos de la teoría de funciones de variable compleja, de ecuaciones diferenciales, de series trigonométricas y de geometría infinitesimal, como texto el más empleado es el conocido "Cours d'Analyse" de GOURSAT, empleándose también mucho para la geometría infinitesimal el texto de JULIA.

Los exámenes a razón de uno por cada certificado, constan de pruebas teóricas y prácticas y no hay nada prescripto sobre el tiempo en que deben efectuarse ni sobre la prelación, en general los alumnos buenos hacen la licenciatura en dos años, terminándola por tanto a los 22 años de edad.

Una vez en posesión del título de licenciado el alumno prepara la llamada "agregation", que viene a ser el concurso para la enseñanza secundaria, para ello tienen que aprobar un cuarto certificado de estudios superiores, o ejecutar un trabajo monográfico (1), este cuarto certificado es de carácter más elevado que los tres anteriores, los más importantes son los siguientes: Análisis Superior (profesor DRACH), Geometría Superior (profesor CARTAN), Mecánica Analítica y Celeste (profesor JULIÁ), Teoría de Funciones (profesor MONTEL), Probabilidades y Estadística (profesor BOREL), etc.

Estos cursos se componen de una parte fija que generalmente no se explica por el profesor de la materia, debiendo el alumno estudiarla por su cuenta qué es, por ejemplo, geometría diferencial en el de Geometría Superior, teoría de conjuntos e integral de LEBESGUE en el de Teoría de Funciones, etc.... y de una parte variable que constituye el curso explicado por el profesor, estos cursos a los que asisten además de los estudiantes franceses un gran número de estudiantes extranjeros, son publicados en parte, al año siguiente, redactados generalmente por algunos alumnos aventajados y revisados por el profesor; las famosas colecciones de la casa editorial "GAUTHIER - VILLARS", "Collection de monographies sur la theorie des fonctions" y "Cahiers Scientifiques", están formados en gran parte por cursos de este tipo de la Facultad de Ciencias de París.

Es de notar por otra parte, el escaso número de horas de cátedra que dictan los profesores de la Universidad, así por ejemplo muchos de ellos como CARTAN, JULIÁ, MONTEL dictan únicamente dos horas semanales durante un cuatrimestre, lo que les permite dedicar su tiempo fundamentalmente a la investigación personal y la dirección de la de los alumnos.

Una vez terminado el cuarto certificado de estudios superiores, los alum-

---

(1) En algunas otras especialidades, como por ejemplo en la de *Letras* es necesario efectuar el trabajo monográfico en lugar del certificado.

nos pueden presentarse al concurso para ser nombrados ''agregés'', esto es: profesores de enseñanza secundaria.

Para obtener el título de Doctor es preciso únicamente, ser licenciado y hacer un trabajo de tesis doctoral, en la preparación de dicha tesis se invierte de cuatro a cinco años, pues todas las tesis han de contener trabajos de investigación *absolutamente* originales y cuyos resultados sean de relativa importancia, lo que explica la pequeña proporción de licenciados que llegan a recibirse de doctores. En muchas tésis de la Universidad de Paris, como en las de LEBESGUE, BAIRE, HADANARD, etc. y modernamente por ejemplo en la de HERBRAND, han quedado registrados importantes progresos de la ciencia matemática.

Escuela Normal Superior.

Esta escuela admite por medio de un rigurosísimo examen, 18 o 20 alumnos de matemáticas, seleccionados entre más de mil aspirantes; los alumnos una vez que han ingresado, siguen los mismos cursos que los de la Facultad de Ciencias, licenciándose al terminar el segundo año y terminan la ''agregation'' al fin del tercero y último curso de estancia en la escuela. Además de asistir a los cursos de la Facultad de Ciencias, los alumnos tienen en la escuela conferencias estrictamente reservadas para ellos, a las que no asisten el resto de los estudiantes, y estando internos en la escuela reciben el trato directo y la influencia de los profesores y auxiliares de la Universidad, siendo los normalistas los mejores alumnos de ésta, entre ellos salen casi todos los doctores y casi todos los que llegan a la enseñanza universitaria, habiéndose convertido por tanto la escuela en una verdadera ''pépinière des savants'' en lugar de ser una escuela para la formación de profesores de enseñanza secundaria que es la misión que teóricamente le está asignada.

Colegio de Francia

Esta institución fundada en el siglo XVI por el rey Francisco I, se ha convertido hoy en uno de los centros de más alta cultura de Francia, no concede ninguna clase de títulos, ni éstos son precisos para asistir a sus cursos ni siquiera, al menos teóricamente, para ser profesor del mismo, lo que no impide que se considere de mayor categoría el título de profesor del Colegio de Francia que el de profesor de la Sorbona.

En el colegio existen dos cátedras de matemáticas, encargándose además de explicar cursos, con carácter temporal, a otros profesores, en general jóvenes, tanto unos cursos como otros son de un alto valor científico, destacándose entre ellos los dictados por LEBESGUE, profesor del colegio, en la otra cátedra que desempeña HADAMARD funciona un seminario dirigido por éste y en el que se han expuesto casi todas las investigaciones, realizdas estos últimos años en Paris por matemáticos franceses y extranjeros.

Instituto del Profesorado. — San Luis.

M. BALANZAT

BIBLIOGRAFIA

CARL B. BOYER, *The concepts of the Calculus. A critical and historical discussion of the Derivative and the Integral.* 16 × 23,5; 346 p. 22 fig. New York, Morningside Heights, Columbia University Press. 1939. $ 3,75.

La reseña histórica del Cálculo infinitesimal que figura en los tratados generales de historia de la matemática, además de estar ya muy anticuada, presenta graves deficiencias por reflejarse en ella la nacionalidad de sus autores, deseosos de elevar la gloria de aquél de los dos campeones máximos que merece sus simpatías. El lamentable espectáculo de la polémica que envenenó los orígenes del Cálculo, a partir de la feliz idea que tendió un puente entre derivada e integral, se ha prolongado hasta nuestros días con la parcialidad de los comentadores y era ya necesario que algún neutral emprendiera la revisión crítica de lo mucho publicado sobre el tema..en todos los países cultos.

El libro de BOYER no es obra de investigación original que aporte sensacionales novedades; pero por la metódica organización del abundante material y el sano criterio con que lo analiza, viene a ocupar un puesto vacío existente desde hace tiempo en la literatura histórica, en la cual, aparte los capítulos consagrados al tema en los tratados generales de historia de la matemática y del conocido libro de ZEUTHEN, que por abarcar aquel interesante período puede considerarse como tratado especial, no existía ningún estudio sistemático de la evolución de la idea infinitesimal desde la antigüedad hasta nuestros días, en que encuadrasen las más recientes investigaciones, promovidas por la aparición de nuevos códices griegos y por un estudio más detenido del material bibliográfico ya conocido.

He aquí la reseña de los diversos capítulos que componen la obra:

Cap. I. — En esta breve pero sustanciosa introducción de carácter general, se expone la evolución de la matemática a través de los siglos, haciendo resaltar muy claramente la profunda diferencia de concepto existente entre el infinitésimo actual, sobre el cual pretendieron edificar el cálculo sus fundadores y la noción de infinitésimo potencial, nacida de la idea de variabilidad y de límite, que a partir del siglo XIX sustituyó definitivamente a aquella. La exposición de BOYER revela clara comprensión, no frecuente en los historiadores, de las ideas capitales de la matemática actual, en su orientación abstracta.

Cap. II. — *La Edad antigua.* La dificultad de exponer la concepción infinitesimal en la antigüedad helénica radica en la abundancia de estudios sobre ella, que dificulta la adecuada selección. La crisis de las magnitudes inconmensurables, genialmente vencida por los pitagóricos de la primera época con la creación del número irracional, quizás inspirada en fuentes hindúes; la cubicación de la pirámide cuadrangular, debida a DEMÓCRITO, como se ha sabido modernamente, así como la aplicación del principio infinitesimal que mucho más tarde había de inmortalizar a CAVALIERI; las muy conocidas paradojas de ZENON; el significado de PLATON y de ARISTÓTELES, acompañado de luminoso análisis del infinito potencial y del infinito actual; la admirable teoría de las proporciones, genial creación de EUDOXIO, como también el método de exhaución, quizás previsto ya por HIPOCRATES DE CHIOS; un breve pero atinado resumen de los *Elementos* de EUCLIDES; la valoración justa de la grandiosa obra arquimediana, precursora del cálculo diferencial y del integral; éste es el índice de los más importantes asuntos tratados en este capítulo, con crítica en general ecuánime y certera de los juicios demasiado extremados de algunos historiadores.

Permítasenos, sin embargo, disentir del autor en su crítica dirigida a HOPPE, por haber afirmado, al referirse a las cuadraturas de ARQUIMEDES, que "por primera vez puede hablarse correctamente de una integración". La integral definida — arguye BOYER — se define en matemática como límite de una sucesión y no como suma de infinitos puntos, líneas o superficies".

Observaremos, por nuestra parte, que la diferencia entre sucesión y serie es meramente de forma y no de esencia; y que el moderno desarrollo de la teoría de la integración permite incluir sin esfuerzo en ella la concepción arquimediana, que considera el segmento parabólico como una suma de infinitos triángulos. Es obvio que en una época en que se estaba a más de dos mil años de distancia del concepto general de número real (concepto de que nos sentíamos orgullosos hasta que recientemente nos hemos dado cuenta de su inseguridad) sería excesiva exigencia la de un rigor aritmético, que ni siquiera hemos logrado hoy; pero no es hiperbólico afirmar que el siracusano sobrepasó el estrecho concepto de integral del siglo XIX (CAUCHY y RIEMANN) introduciendo la noción de aditividad infinita, que preside la teoría de la integral en nuestro siglo. No echemos de menos la clara noción de límite, que sólo después de 21 siglos se había de introducir en el concepto de integral, pues no se olvide que posteriormente se propende a sustituirla por otras; y reconózcase que la intuición arquimediana de "suma de infinitos sumandos" es la misma que hoy unimos a la misma frase, la cual no exige la idea de límite, sino de extremo superior de las diversas sumas finitas parciales; y es deber de justicia proclamar que la descomposición efectuada por el máximo genio griego del segmento parabólico en suma de infinitos triángulos, no difiere en esencia de la que hoy efectuamos para evaluar el área de un recinto abierto, descomponiéndolo en suma de infinitos rectángulos que agotan los puntos del recinto, es decir, con la misma frase suya, producen la *exhaución* del recinto.

Cap. III. — La contribución medioeval. Inmensa en el tiempo, pero de pobre densidad, es la aportación de los siglos medios a ésta, como a todas las ciencias positivas; pero no puede menos de admirarse la agudeza de los escritores escolásticos que, preocupados con más hondos e inaccesibles problemas, trataban incidentalmente cuestiones de análisis infinitesimal.

El francés ORESME y el inglés SUISETH (más conocido por el *Calculator*) lograron sumar series no geométricas mediante artificios ingeniosos; y no podía faltar la cita de ALVARO THOMAS (el autor omite que era portugués, aunque profesó en París) que perfeccionó los métodos, avanzando sobre sus predecesores y deteniéndose solamente al tropezar con series de tipo logarítmico, pero saliendo habilidosamente del trance, como en otro lugar hemos expuesto [1].

(1) *Los matemáticos españoles del siglo XVI.* Madrid, 1926.

Que estos escolásticos conocían perfectamente el movimiento uniformemente acelerado, es evidente leyendo la ingente obra de ALVARO THOMAS titulada *De triplice motu*; y también es cosa probada que GALILEO se inspiró en ellos al encontrar la expresión matemática de la caída de los graves.

Cap. IV y V. — Un siglo de precursores. — Newton y Leibniz. No podemos detenernos en la exposición minuciosa de las diversas aportaciones al método infinitesimal debidas a COMMANDINO, STEVIN, VALERIO, KEPLER, GALILEO, CAVALIERI, GULDIN, TORRICELLI, ROBERVAL, FERMAT, GREGORIO DE SAN VICENTIO, TACQUET, PASCAL, WALLIS, GREGORY, HUYGENS,... Muchas de estas contribuciones, si bien interesantes en sí mismas, no significan progreso metodológico sobre la concepción arquimediana del área de un recinto como suma de las áreas de infinitas figuras elementales; el cálculo integral habría quedado estancado poco más allá de donde lo dejó ARQUIMEDES, si cada cuadratura hubiera exigido el doble proceso de sumación y de paso al límite. Que estos insignes matemáticos avanzaran un paso más, pasando de la sumación de cuadrados a la de las potencias n-simas, aun significando un resultado interesante, no representa ni siquiera un atisbo de lo que pronto había de ser el cálculo integral. La idea feliz de BARROW, que descubrió la reciprocidad entre el problema inverso de la tangente (o sea el cálculo de la función primitiva) y el problema de la cuadratura, fué la llave que abrió las puertas a la nueva disciplina, en las diestras manos de NEWTON y de LEIBNIZ. Que el método de BARROW fuera geométrico y no algorítmico, y que apenas descubierto el puente de unión entre ambos problemas, renunciara a la rica cosecha (que probablemente no presintió) para consagrarse a la teología, lejos de empequeñecer la figura del maestro de NEWTON la agiganta y bien puede considerársele en justicia como el fundador del moderno cálculo integral. Habríamos deseado que el autor expresase con el debido énfasis la trascendencia de esta idea en la cual confluyen dos grandes corrientes de pensamiento, de cuya cópula dimana la magna construcción realizada por los dos colosos del cálculo infinitesimal.

La reseña de la inmensa obra de NEWTON y de LEIBNIZ es excelente y el joven autor ha tenido el buen gusto de no entrar en las desagradables incidencias de la famosa polémica en que otros historiadores parecen complacerse. Todavía habría sido preferible omitir la cita de un intemperante párrafo de HATHAWAY, que figura en una nota. Creemos por nuestra parte que el punto fundamental discutido, o sea la paternidad de la relación entre primitiva é integral, pierde importancia en vista de que ambos contendientes conocían la obra de BARROW y les bastó sustituir su demostración geométrica por otra algorítmica, para llegar separadamente al mismo resultado.

Por otra parte, las dos obras se completan con caracteres distintos; mientras las derivadas proceden de las *fluxiones* de NEWTON, el cálculo estrictamente diferencial es el de LEIBNIZ; la integral definida es la *omnia* de éste, mientras que la integral indefinida, o mas bien la primitiva, procede de NEWTON. La exposición del genial físico es muy imperfecta metodológicamente, como obra de quien ve en ella un medio y no un fin, y su famosa *o* que en esencia es el *conato* de HOBBES, es netamente metafísica; mientras que LEIBNIZ aborda con criterio de filósofo lógico y no metafísico el encadenamiento y rigor de los conceptos. El predominio de la gloria de NEWTON en Inglaterra y Francia fué la causa de la oscuridad conceptual que ha encubierto los fundamentos del cálculo en casi todos los países, hasta muy entrado el siglo XIX, y que todavía se nota en los libros destinados a los cultivadores de las ciencias aplicadas.

Cap. VI y VII. — Períodos de indecisión y de rigor. Asi titula el autor al período que termina LACROIX y al que inicia BOLZANO. En el primero reseña las duras críticas de BERKELEY al cálculo de NEWTON y los titubeos ante la nueva doctrina, que al fin arraiga en el continente y produce la espléndida floración que culmina en la magna obra de los BERNOULLI y de EULER. La famosa frase de D'ALEMBERT ''allez en avant et la foi vous viendra'' puede tomarse como característica de este áureo período que cierra el tratado didáctico de LACROIX, en el que se han venido inspirando muchos otros, aun después de la renovación del análisis por obra de CAUCHY, ABEL y finalmente de WEIERSTRASS y DEDEKIND al lado de los cuales, y a su misma altura, es preciso colocar al genial BOLZANO, que antes que todos ellos realizó por sí solo la renovación de los fundamentos sobre rigurosa base aritmética, prescindiendo de la peligrosa e insegura intuición espacial.

La omisión del nombre de MENGOLI (también insigne figura, desconocida de los tratadistas) en la reseña del concepto de integral, es la más grave laguna que hemos encontrado en la erudita obra que comentamos.

A la teoría de conjuntos de CANTOR y a los problemas que plantea la crítica actual de los fundamentos están consagradas las últimas páginas de la obra, cuyo capítulo final efectúa una síntesis comparativa de las ideas generales que han presidido el progreso del análisis, haciendo discretas observaciones sobre el prurito de muchos historiadores, empeñados en atribuir las grandes creaciones al genio de algunas figuras solitarias, cuya indiscutible superioridad radica casi siempre en haber llegado en el momento de madurez de las fecundas ideas lanzadas por numerosos antecesores, acertando a sistematizarlas y a extraer su máxima sustancia, gracias a una larga vida de esfuerzo tenaz, acompañado, claro es, de preclara inteligencia. Hay en esta tendencia al latifundismo intelectual mucho de comodidad por parte de los expositores, que asi rotulan los diversos descubrimientos con nombres propios, casi nunca con entera justicia; hay también mucho de inercia, que explica la persistencia de denominaciones a todas luces arbitrarias; y hay finalmente falta de honradez en los tratadistas que lanzan afirmaciones, a veces propias y con más frecuencia ajenas, sin puntualizar el origen de cada una, para que el lector pueda asignar a cada una el coeficiente o peso que le corresponda. Este imperativo de honestidad histórica, que evitaría la repetición indefinida de los graves errores e injusticias que ruedan de unos a otros trabajos, está fielmente respetado en la obra de BOYER y merece alto elogio la escrupulosidad con que aduce el fundamento de cada afirmación, dando lo cierto como cierto, lo dudoso como dudoso, y acompañando a cada idea no personal la exacta cita del lugar en que ha sido emitida. Sirva tal ejemplo de modelo a los historiadores de toda especie y se simplificará la difícil tarea de quienes ansiosos de lograr una exacta filiación de las ideas o de los hechos, consagran su vida a la crítica de la historia.

Buenos Aires, Universidad.

JULIO REY PASTOR

CRONICA

Comunicaciones científicas a la Unión Matemática Argentina

(Sesión del 23 de julio de 1940)

SOBRE LAS SUPERFICIES CONVEXAS

Existen elementos de las superficies convexas cerradas, cuyo valor no puede considerarse como límite del valor de los elementos análogos en superficies poliedrales inscriptas (aún siendo convexas) que tienden a la superficie primitiva. En particular se presenta el caso siguiente:

Iluminando un cuerpo convexo por un haz de rayos paralelos, puede ocurrir que la longitud de la línea de sombra no sea igual al límite de las langitudes de la línea de sombra de poliedros convexos inscritos que tiendan al cuerpo primero.

Un ejemplo consiste en tomar dos conos de revolución iguales unidos por su base e iluminando paralelamente al eje de ambos; la línea de sombra es la circunsferencia de la base; tomando poliedros inscritos elegidos convenientemente para que su línea de sombra forme una línea poligonal alabeada en zig-zag, se puede lograr que el límite de su longitud sea cualquiera. Análogamente se pueden dar ejemplos de superficies convexas tales que la longitud de su línea de intersección con otras no sea igual al límite de la longitud de la intersección de superficies poliedrales inscritas que tiendan respectivamente a ellas.

L. A. SANTALÓ

UNA GENERALIZACION DE LAS FORMULAS DE HERMITE

Las fórmulas de Hermite dan los valores límites de la integral de Cauchy de una función holomorfa f (z) sobre un circuito cerrado C, cuando u tiende al contorno:

$$\text{Lim} \int_c \frac{f(z)\,dz}{z-u_i} - \text{Lim} \int_c \frac{f(z)\,dz}{z-u_e} = f(u)$$

$$\text{Lim} \int_c \frac{f(z)\,dz}{z-u_i} - \text{Lim} \int_c \frac{f(z)\,dz}{z-u_e} = \text{Val. prin. } \frac{1}{\pi i} \int_c \frac{f(z)\,dz}{z-u}$$

En estas fórmulas hemos indicado con u un punto del contorno y con u_i, u_e puntos interiores y exteriores respectivamente que se aproximan indefinidamente al primero.

Picard en su libro: *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles,* expone las fórmulas de Hermite generalizadas, para el caso de que la función f sea tan sólo contínua y de variable real y que la integración se haga sobre un arco abierto rectificable; pero necesita imponer a la función f la condición de Lipschitz.

En nuestro trabajo llegamos al mismo resultado con una condición menos restrictiva que la de Lipschitz y la integración se hace sobre un segmento del eje real.

La condición impuesta (condición p) es la siguiente: si u es un punto del contorno, esto es, del eje real, debe ser integrable la función.

$$\frac{f(u+t)-f(u-t)}{2t}$$

en un entorno del origen.

YANNY FRENKEL

EJEMPLO DE UNA FUNCION MONOTONA DISCONTINUA EN UN CONJUNTO DENSO

Se considera a la variable n escrita en el sistema de numeración de base 2 y se lee dicho número en el sistema de base 3, esta correspondencia define una función del tipo indicado. En todo punto de la red binaria la función es discontinua y es igual a su límite inferior; en los demás puntos la función es continua y admite derivada nula. La inversa de la función de Cantor es del mismo tipo y su definición es idéntica, sólo que hay que cambiar las cifras 1 por cifras 2 en el desarrollo de x antes de leerlo en el sistema de base 3.

E. SAMATÁN

EVALUACION NUMERICA DE LA INTEGRAL DE POISSON

1. La integral de Poisson: $u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(t-\varphi)} f(t)\,dt$ da el valor de la función armónica $u(\rho, \varphi)$ que en el contorno de un círculo de radio 1 tiene los valores $f(t)$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$. Se puede suponer $\varphi = 0$ puesto que ello equivale a computar los valores desde $t = \varphi$.

Hemos tabulado el factor $\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos t}$ para $\rho = 0.1, 0.2, 0.3, \ldots 0.9, 0{,}95$. y $t = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, \ldots 180^\circ$ y mediante la fórmula de Simpson se puede calcular aproximadamente la integral. Es particularmente indicado utilizar máquina de calcular eléctrica que permita acumular productos parciales.

2. La integral de Poisson se puede escribir $u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,d\tau$ siendo τ el arco opuesto al t respecto del punto (ρ, φ)

Como t y τ están vinculados por la relación $\operatorname{tg}\frac{t}{2} = \operatorname{tg}\frac{\tau}{2} \cdot \frac{1-\rho}{1+\rho}$ mediante la tabla que hemos preparado que da los valores de t para valorar de τ entre 0 y 180° cada 10°, el cálculo de la integral de Poisson se reduce a una suma.

MANUEL SADOSKY

NOTA DE RED. — Un extracto de la comunicación presentada en la misma sesión por el Dr. Ernesto Corominas aparecerá en otro número.

REVISTA DE REVISTAS

JUAN BLAQUIER. *Una demostración de los célebres teoremas de Picard.* Anales de la Sociedad científica argentina. T. CXXIX. Abril 1940, p. 145-152.

''La ventaja —dice el autor— de la presente demostración consiste en que, además de ser breve, no utiliza más que las nociones básicas de la teoría de funciones analíticas''.

Sin emitir opinión sobre lo que deba entenderse por nociones básicas, entre las cuales incluye el autor al teorema de Bloch, conviene observar, en lo que se refiere a la encomiada brevedad, que si en lugar de suponer conocido este teorema, se sustituye por el de Schottky, más sencillo que aquél, las ocho páginas de la memoria quedan ventajosamente sustituidas por las pocas líneas que necesita Bieberbach en su conocido tratado (t. II, pág. 225) o Dienes en el suyo (pág. 270) para demostrar el teorema general de Picard.

El autor sigue fielmente, con ligeros cambios de notación, la exposición de Montel para el primer teorema y justo es reconocer que alguna de las aclaraciones que le agrega siguiendo a Bieberbach son oportunas, pues tal como está redactado algún párrafo de pág. 116 del libro de Montel algún lector podría confundirse; pero apenas se separa de la guía del libro, para pasar al segundo teorema, comienzan los tropiezos. Mientras dedicó casi media página a desarrollar una breve frase de Montel, que dice más y mejor, y con mayor claridad, ahora salta velozmente por los puntos que exigirían alguna justificación y sale del paso con frases como ésta: ''es también regular o polo de primer orden, como no es difícil verlo, para la función $g(z)$'' o bien como esta otra: ''En virtud de la definición de ésta el punto $z = \infty$ no puede ser polo de $g(z)$''. Aunque creemos que no habría sido difícil al autor señalar los pasajes de textos corrientes de los que pueden deducirse fácilmente tales conclusiones, debe señalarse este brusco contraste entre las dos partes de la memoria; sobre todo habiendo anunciado y cumplido hasta en exceso, que su exposición tendría ''más detalles que los imprescindibles''.

Pero todo esto es materia parva si se compara con el nudo del problema abordado. Es bien sabido que la única dificultad que se presenta al aplicar el razonamiento de Bloch al teorema general de Picard estriba en que mientras el logaritmo de una función entera se puede uniformar, como hace p. ej. Montel en pág. 116, por la sencilla razón de que el campo de monogeneidad es simplemente conexo, en cambio, en el caso del 2º teorema, el entorno del punto del infinito es doblemente conexo y falla completamente aquel procedimiento.

Ahora bien, el teorema de Riemann, que se aplica después, presupone la *uniformidad* de la función y ya en los cursos elementales se dan funciones sencillísimas, no uniformes, para las cuales no se verifica la propiedad.

La conclusión a que llegamos, cualquiera que sea el contenido de las cartas de eminentes matemáticos que a falta de argumentos objetivos exhibe el autor en apoyo de su memoria, es que los dos teoremas de Picard quedan con ella sin demostrar.

C. C. DASSEN. *A propósito de una demostración del segundo teorema de Picard.* Boletín Matemático. Año XIII, págs. 256 - 259.

La memoria que acabamos de comentar fué presentada por su autor a la Academia nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, como candidato a ingreso; y el único académico que en ésta representa desde su fundación o refundición a la ciencia matemática, tuvo que expedir su informe técnico. Pero habiendo declarado en varias ocasiones con ejemplar sinceridad, digna de imitación, su desconocimiento de la teoría de funciones de variable compleja, tuvo que recurrir, como confiesa noblemente, al Dr. Carlos Biggeri ''especialista — según dice el citado académico — en Teoría de Funciones''; quien le facilitó el condenatorio informe solicitado.

El académico informante sobre la memoria objeta que ''al final, se sentaba una afirmación que, de no demostrarla, *dada la índole didáctica del trabajo* (*) resultaba insuficiente la demostración deseada''. A continuación reproduce la contestación del ''especialista en Teoría de Funciones'' quien ''no se limita a contestar escuetamente la consulta, sino que da un teorema general, del cual es un simple corolario la afirmación antedicha''.

Esta nueva aportación del Dr. Biggeri al Análisis, sugiere sin embargo, como todas las suyas, algunas observaciones.

1ª El nuevo teorema figura desde remota fecha en textos elementales. Baste citar el viejo Burkhardt, que data del siglo pasado (págs. 97 y 130) como el de Osgood, el de Hurwitz-Courant, el de Bieberbach, etc. En el primer volumen de éste, que contiene los elementos de la teoría hasta tiene el teorema un nombre que lo individualiza y encabeza todo el capítulo, § 5, (pág. 187 de la 1ª edición) que titula: ''Satz von der Gebietstreue''. En su diminuto manual de vulgarización figura ya en la 2ª página.

2ª Es muy cierto que casi todos consideran un punto z_0 en el que f(z) holomorfa y demuestran que los puntos homólogos de un entorno de z_0 llenan un entorno de w_0 mientras que el Sr. Biggeri supone que z_0 es un polo y por tanto w_0 es el punto del infinito; pero es imperdonable ignorar la equivalencia entre ambas propiedades, puesto que el exterior de un círculo se transforma en el interior de otro por la función 1/z. Lo singular del caso es que el autor realiza este cambio de variable y todavía necesita desarrollos en serie para llegar a resultado tan sabido y repetido en todo curso elemental, con la agravante de que solamente lo hace en el caso trivial de polo simple.

3ª El caso general de polo múltiple supera al parecer sus fuerzas y sale del trance con una evasiva análoga a las observadas en la memoria precedente, limitándose a decir; ''se trata análogamente haciendo las clásicas sencillas consideraciones complementarias con respecto a las funciones analíticas multiformes que se presentan''. Si el autor no hubiera olvidado al parecer que la función 1/f(z) es holomorfa donde la f(z) tiene polo, sea todo lo múltiple que quiera, le habría bastado citar la página de cualquiera de los textos donde está el teorema. Y más decoroso habría sido ahorrarse la nota íntegra, puesto que hasta ese caso de polo, el que trata y el omitido, están liquidados en el texto de Bieberbach (Vol. I, pág. 188) líneas 31 y 32, con 16 palabras justas.

(*) El subrayado es del autor; análoga observación vale para los restantes.

4ª Pero la omisión de la nota que comentamos nos habría privado de una noticia interesante: el Dr. Biggeri afirma rotundamente en pág. 258 (líneas — 7 a — 5) este nuevo resultado, que es lo sensacional de su trabajo:

''Existen dos números positivos $\rho_3 \leqq \rho_2$ y ρ_4 tales que, la función $t = t(z')$ establece entre los círculos $|z'| \leqq \rho_3$ y $|t| \leqq \rho_4$ una correspondencia biunívoca''.

Hemos buscado alguna manera de inculpar al tipógrafo, buscando una posible errata, pero indudablemente el Dr. Biggeri ha entendido así el teorema de la función inversa y es preferible no comentarlo; los alumnos medianos de Introducción a la Matemática superior (pues los peores cometen siempre el mismo error al llegar a este punto) formarán su propio juicio y de paso sacarán este sorprendente corolario: toda función analítica es lineal.

5ª El único *lapsus* que han descubierto en la memoria antes reseñada el Dr. Biggeri y el académico firmante, no existe; y huelgan por tanto las ocho páginas impresas que le dedican; en cambio no parecen haber notado la falla capital que inutiliza el trabajo y deja intacto el tema abordado.

CARLOS BIGGERI. *Sobre el segundo teorema de Picard.* — Boletín Matemático, Año XIII, Diciembre de 1940 págs. 291 - 294.

Dice el autor: ''El objeto de la presente Nota (a la cual le asignamos simplemente un interés didáctico, en cuanto ella simplifica mucho la deducción del segundo teorema de Picard, del teorema de Landau) es: demostrar el segundo teorema de Picard a partir de una mayoración de tipo algebraico-logarítmico siguiendo la idea de Bloch pero, eso sí, modificándola en parte''.

En efecto, mientras Bloch utiliza prudentemente fórmulas algebraicas racionales, para no salir del campo de las funciones uniformes y así llega en solo nueve líneas a demostrar el teorema general de Picard, con elegancia insuperable, el autor de esta nota, pretendiendo mejorar tal obra maestra, prefiere utilizar otra acotación de las que da Bloch con otro objeto; pero como en ella figuran logaritmos y raíces, tropieza en el mismo escollo que la memoria anterior (esto es, la multiformidad de la función) y pretende zafar de la varadura con una frase evasiva: ''...la posibilidad de tal uniformación... se demuestra combinando ciertas propiedades de la teoría de funciones''.

Es de suponer que si el autor hubiera logrado tal combinación la habría expuesto; sin ella el valor del trabajo es nulo; y en cuanto a la simplificación anunciada, más bien parece una frase de tono humorístico.

NOTA. Ya en prensa este número aparece una nueva memoria del Dr. Dassen en los Anales de la Sociedad científica argentina, (Enero 1941), en que transcribe otro trabajo del Dr. Biggeri relativo al mismo teorema de Picard.

El contenido real de las dos páginas que ocupa se reduce a esto: vuelve a tomar en lugar de la fórmula algebraica de Bloch otra algebraico-logarítmica y vuelve, por tanto, a encallar en el mismo punto de la uniformación, que es el arrecife del problema. Veamos cómo sale del atasco en este nuevo intento.

En pág. 13, nota 3 reconoce que ''la solución de tal problema (de la uniformización) es la *única* complicación que se presenta al demostrar el *segundo* teorema *correlativamente* a la forma en que Montel demostró el *primer* teorema, empleando el teorema de Bloch''.

Este reconocimiento significa ya un progreso. Después de mucho insistir sobre este punto capital, (hasta seis veces lo hace en el texto, con letra bastardilla para mejor destacarlo) le dedica nada menos que siete largas notas desde pág. 12 a 15; y después de las cinco primeras que son preparatorias, aborda por fin en la nota (6) la demostración de la proposición que fué admitida provisionalmente en el texto, ''*para brevedad de la demostración*''. Es la siguiente:

''h(z) se puede uniformizar en un entorno de $z_0 = \infty$ (o sea $h(\frac{1}{z})$ se
''puede uniformizar en un recinto simplemente conexo que contenga en su interior
''al origen $z = 0$).

''En efecto; si f(z) satisface a las condiciones (que se le imponen para
''demostrar por reducción al absurdo el segundo teorema): a)... b)... c)...
''entonces $h(\frac{1}{z})$ se puede uniformizar en un recinto simplemente conexo que
''contenga en su interior al origen, $z = o$ (es decir, h(z) se puede uniformizar
''en un entorno de $z_0 = \infty$).''

Hasta aquí la demostración consiste en repetir el enunciado; y esto no sería censurable si no repitiera también la singular afirmación de que el trasformado del entorno del punto $z = \infty$, que es como el autor debe saber *doblemente conexo,* resulta por arte de magia *simplemente conexo.* Si así fuera, la cuestión quedaría resuelta inmediatamente como en el primer teorema y queremos hacer al autor la concesión de que es un simple *lapsus* de expresión, pues de creer él mismo lo que afirma, es de suponer que habría sacado partido inmediato para liquidar el tema. Sea descuido o sea algo peor, lo cierto es que el autor repite después una y más veces el mismo dislate.

Prosigamos la demostración anunciada; la cual se reduce a agregar a lo antes copiado: ''lo que se demuestra combinando (laboriosamente) ciertas propiedades de la teoría de funciones; (véase nota séptima)''.

Pasamos a la nota 7ª en busca de la tantas veces prometida ''uniformización'' y allí no hay nada de ella; por el contrario se limita a señalar que en el caso de polo ''es *imposible* uniformizar la función''.

Y aquí termina la memoria, dejando todas cuatro intacto el segundo teorema de Picard a pesar de tan laborioso (y por tanto loable) esfuerzo. Esperemos el quinto intento que según anuncia publicará oportunamente, deseándole más éxito que el de los precedentes, y alguna ventaja visible sobre las sencillas y elegantes demostraciones que figuran en los tratados ya citados.

Siendo negativo el fruto de las cuatro notas examinadas, huelga analizarlas minuciosamente para cosechar errores de menor cuantía; pero hay alguno de tal dimensión que conviene señalarlo para evitar que prospere entre los lectores que no hayan llegado a los cursos elementales de Cálculo: el doctor Biggeri afirma en una y otra memoria, que es una *integral elíptica* la utilizada por Bloch y cuyo cálculo proponemos (T. VII, núm. 3) bajo el nº 10 de las *Cuestiones elementales*:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1 - x^2)^{2/3}}$$

Para ingresar como miembro de la Unión Matemática Argentina, es necesaria la presentación del solicitante por dos socios fundadores, la admisión por la Junta, y el pago de una cuota de $ 5.— m/n. mensuales.

La cuota de la suscripción a las publicaciones de la U. M. A. (revista y fascículos independientes) es de $ 10 m/n. anuales, cuyo envío deberá efectuarse por cheque, giro u otro medio libre de gastos, a la orden de la Tesorera, Srta. Dra. Clotilde A. Bula, Perú 222, Buenos Aires.

Los señores suscritores, domiciliados en la Ciudad de Buenos Aires podrán, si lo prefieren, efectuar su pago en doce cuotas mensuales de $ 1.00 m/n. cada una, que serán cobradas a domicilio.

Los trabajos originales enviados para su publicación serán previamente analizados por un ponente, quien emitirá dictamen acerca de la novedad y corrección de sus resultados.

La impresión de las tiradas *aparte*, y las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

Abonnement annuel à l'etranger: 4.00 dollars (Etats-Unis).

Prière d'adresser toute la correspondance scientifique et administrative à l'adresse ci-dessous:

SR. SECRETARIO DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA
PROF. FERNANDO L. GASPAR

PERÚ 222, BUENOS AIRES (REP. ARGENTINA)

IMPRENTA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL — SANTA FE — R. ARGENTINA

SUMARIO

Pág.

Valor medio del número de partes en que una figura convexa es dividida por n rectas arbitrarias, por Luis A. Santaló .. 33

Sobre la prolongación analítica de las series de Dirichlet de densidad máxima infinita, por Sixto Ríos 38

Sobre los desarrollos funcionales de la forma $f(x) = \sum \frac{c_n x}{x^2 + n^2}$ por Cecilia Mossin Kottin 41

El lugar geométrico y lugares de puntos áreas en el plano, por V. y A. Fraile y C. Crespo 45

La organización de los estudios de matemáticas en Francia, por M. Balanzat 51

Bibliografía. — C. B. Boyer, The concepts of the Calculus. A critical and historical discussion of the Derivative and the Integral (J. Rey Pastor) 55

Temas propuestos 24 - 26 40

Crónica. — Comunicaciones presentadas a la Unión Matemática Argentina: Sobre las superficies convexas, por L. A. Santaló. Una generalización de las fórmulas de Hermite, por Yanny Frenkel. Ejemplo de una función monótoma discontinua en un conjunto denso, por E. Samatán. Evaluación numérica de la integral de Poisson, por Manuel Sadosky 59

Revista de Revistas. — J. Blaquier. Una demostración de los célebres teoremas de Picard. C. C. Dassen, A propósito de una demostración del segundo teorema de Picard. C. Biggeri, Sobre el segundo teorema de Picard. Nota 61