Volumen VII 1940 - 1941 Número 3

REVISTA

DE LA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

BUENOS AIRES
1941

SOBRE ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS DERIVADAS Y CIERTAS PRIMITIVAS DE LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE

por José Babini

---

1. *Relación de simetría.* —

Si con D^s_n indicamos las derivadas de orden s de $\frac{(x^2-1)^n}{2^n n!}$ (n natural), tendremos, incrementando por Taylor y directamente:

$$\sum_{s=0}^{2n} \frac{h^s}{s!} D^s_n = \frac{1}{2^n n!} \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (x^2-1)^{n-r} h^r (2x+h)^r$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \sum_{r=0}^{n} \sum_{m=0}^{r} \binom{n}{r} \binom{r}{m} (x^2-1)^{n-r} h^{r+m} (2x)^{r-m}$$

de donde

$$s \leqq n; \quad \frac{D^s_n}{s!} = \frac{1}{2^n n!} \sum_{r \geqq \frac{s}{2}}^{s} \binom{n}{r} \binom{r}{s-r} (x^2-1)^{n-r} (2x)^{2r-s}$$

$$s \geqq n; \quad \frac{D^s_n}{s!} = \frac{1}{2^n n!} \sum_{r \geqq \frac{s}{2}}^{n} \binom{n}{r} \binom{r}{s-r} (x^2-1)^{n-r} (2x)^{2r-s}$$

Si, en esta última fórmula, se cambia s por $2n-s$ y r por $n-s+r$

$$s \leqq n; \quad \frac{D^{2n-s}_n}{(2n-s)!} = \frac{1}{2^n n!} \sum_{r \geqq \frac{s}{2}}^{s} \binom{n}{s-r} \binom{n-s+r}{n-r} (x^2-1)^{s-r} (2x)^{2r-s}$$

$$= \frac{(x^2-1)^{s-n}}{2^n n!} \sum_{r \geqq \frac{s}{2}}^{s} \binom{n}{r} \binom{r}{s-r} (x^2-1)^{n-r} (2x)^{2r-s} = (x^2-1)^{s-n} \frac{D^s_n}{s!}$$

Si ahora recordamos que D^n_n no es más que el polinomio de Legendre P_n e indicamos con P_n^r; $(-n \leqq r \leqq n)$ las derivadas $(r > o)$ y ciertas primitivas $(r < o)$ de ese polinomio, llegaremos, haciendo $s = n + r$ a la siguiente *relación de simetría*

$$\frac{P_n^{-r}}{|n-r} = (x^2 - 1)^r \frac{P_n^r}{|n+r} \qquad [1]$$

válida para $-n \leqq r \leqq n$.

Esta relación nos dice que las primitivas que entran en juego son los polinomios que admiten los valores -1 y 1; como ceros de orden r de multiplicidad (1).

2. *Generalización de una expresión de Dirichlet.* —

Es conocida una fórmula de Dirichlet (2) que expresa P_n en función de $u = \cos \frac{\Phi}{2}$ y $v = \operatorname{sen} \frac{\Phi}{2}$; siendo $x = \cos \Phi = 2u^2 - 1 = 1 - 2v^2$.

Para extenderla a P^r_n, que es un polinomio de grado $n - r$ en x escribamos

$$P^r_n = \sum_{m=o}^{n-r} \varphi(n-r, m) \, . \, u^{2(n-r-m)} \, v^{2m}$$

donde $\varphi(n-r, m)$ es un símbolo numérico con dos índices. Diferenciando y considerando que $dx = 4u\,du = -4v\,dv$,

$$P_n^{r+1} dx = \sum_{m=o}^{n-r} \varphi(n-r, m) \, u^{2(n-r-m)} \, v^{2m} \left[\frac{n-r-m}{2u^2} - \frac{m}{2v^2}\right] dx$$

de donde

$$P_n^{r+1} = \sum_{m=o}^{n-r-1} \varphi(n-r-1, m) \, u^{2(n-r-1-m)} \, v^{2m} =$$

(1) El profesor Toscano, de Messina, ha tenido la amabilidad de comunicarme que la relación de simetría puede obtenerse también partiendo de los polinomios de GEGENBAUER.

(2) Véase, por ejemplo: W. LÁSKA, Sammlung von Formeln... Pag. 384.

$$\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n-r-1}\left[(n-r-m)\,\varphi(n-r,m)-\right.$$

$$\left.-(m+1)\,\varphi(n-r,m+1)\right]u^{2(n-r-1-m)}\,v^{2m}\;;$$

y, por lo tanto, el símbolo $\varphi(n-r,m)$ satisface la siguiente relación recurrente:

$$2\,\varphi(n-r-1,m)=(n-r-m)\,\varphi(n-r,m)-$$
$$-(m+1)\,\varphi(n-r,m+1)\;;$$

que, mediante el cambio de símbolo

$$\varphi(n-r,m)=\frac{(-1)^{n-r}\cdot 2^{n-r}}{\underline{|n-r-m}\,.\,\underline{|m}}\;\psi(n-r,m)$$

se convierte en

$$\psi(n-r-1,m)=\psi(n-r,m+1)-\psi(n-r,m)=$$
$$=\Delta\psi(n-r,m)\;;\qquad \Delta m=1\;;$$

y en general

$$\psi(n-r,m)=\Delta^{p}\;\psi(n-r+p,m)=$$
$$\sum_{s=0}^{p}\binom{p}{s}(-1)^{s}\,\psi(n-r+p,m+p-s).$$

Como

$$P_{n}{}^{-n}=\frac{(x^{2}-1)^{n}}{2^{n}\,n!}=\frac{2^{n}\,(-1)^{n}}{n!}\,(u\,v)^{2n}$$

serán

$$m=n;\quad \varphi(2n,m)=\frac{2^{n}\,(-1)^{n}}{n!},\qquad\qquad \psi(2n,m)=\frac{(-1)^{n}\,n!}{2^{n}},$$

$$m\neq n;\quad \varphi(2n,m)=\psi(2n,m)=0$$

y por lo tanto, si en la sumatoria anterior se hace $p = r + n$ el único término no nulo será cuando $s = r + m$, de donde

$$\psi(n - r, m) = \binom{n+r}{m+r} (-1)^{m+r} \frac{(-1)^n n!}{2^n} =$$

$$= \frac{|\underline{n-r-m}\,|\underline{m}}{2^{n-r}} (-1)^{n-r} \varphi(n - r, m),$$

$$\varphi(n - r, m) = \frac{|\underline{n+r}}{n!\, 2^r} (-1)^m \binom{n}{m} \binom{n}{m+r};$$

y finalmente

$$P_n^r = \frac{|\underline{n+r}}{2^r\, n!} \sum_{m+m'=n-r} \binom{n}{m} \binom{n}{m'} (-1)^m u^{2m} v^{2m'} \qquad [2]$$

que es la generalización de la fórmula de Dirichlet, a la cual se reduce para $r = 0$. Separando las derivadas de las primitivas, tenemos para $r \geqq 0$,

$$P_n^r = \frac{|\underline{n+r}}{2^r \,.\, n!} \sum_{m=0}^{n-r} \binom{n}{m} \binom{n}{m+r} (-1)^m u^{2(n-r-m)} v^{2m}$$

$$P_n^{-r} = \frac{|\underline{n-r} \,.\, 2^r}{n!} \sum_{m=r}^{n} \binom{n}{m} \binom{n}{m-r} (-1)^m u^{2(n+r-m)} v^{2m};$$

y cambiando en esta última m por $m + r$

$$\frac{P_n^{-r}}{|\underline{n-r}} = \frac{2^r}{n!} \sum_{m=0}^{n-r} \binom{n}{m+r} \binom{n}{m} (-1)^{m+r} u^{2(n-m)} v^{2(m+r)} =$$

$$= (-1)^r (2uv)^{2r} \frac{P_n^r}{|\underline{n+r}}$$

y como $(-1)^r (2uv)^{2r} = (x^2 - 1)^r$ resulta nuevamente la relación de simetría.

3. *Relaciones recurrentes.* —

Entre las numerosas relaciones recurrentes que pueden establecerse entre las P_n^r veremos únicamente las generalizaciones de las más conocidas relaciones recurrentes entre las P_n.

De

$$P_n^r = D_n^{n+r} = D^{n+r}\,\frac{(x^2-1)^{n-1}}{2^{n-1}\,\underline{|n-1}}\cdot\frac{x^2-1}{2n} = \frac{x^2-1}{2n}\,D_{n-1}^{n+r} +$$

$$+\frac{x\,(n+r)}{n}\,D_{n-1}^{n+r-1} + \frac{(n+r)\,(n+r-1)}{2n}\,D_{n-1}^{n+r-2}$$

$$2n\,P_n^r = (x^2-1)\,P_{n-1}^{r+1} + 2x\,(n+r)\,P_{n-1}^r +$$

$$+ (n+r)\,(n+r-1)\,P_{n-1}^{r-1}\,. \qquad [3]$$

De

$$D'_n = D\,\frac{(x^2-1)^n}{2^n\,n!} = x\,\frac{(x^2-1)^{n-1}}{2^{n-1}\,\underline{|n-1}}$$

$$D_n^{n+r} = D^{n+r-1}\,x\,\frac{(x^2-1)^{n-1}}{2^{n-1}\,\underline{|n-1}} = x\,D_{n-1}^{n+r-1} + (n+r-1)\,D_{n-1}^{n+r-2}$$

$$P_n^r = x\,P_{n-1}^r + (n+r-1)\,P_{n-1}^{r-1}. \qquad [4]$$

De

$$D^2{}_n = D\,x\,\frac{(x^2-1)^{n-1}}{2^{n-1}\,\underline{|n-1}} = D^0{}_{n-1} + x^2\,\frac{(x^2-1)^{n-2}}{2^{n-2}\,\underline{|n-1}}$$

$$= (2n-1)\,D^0{}_{n-1} + D^0{}_{n-2}$$

$$D_n^{n+r} = (2n-1)\,D_{n-1}^{n+r-2} + D_{n-2}^{n+r-2}$$

$$P^r{}_n = (2n-1)\,P_{n-1}^{r-1} + P^r{}_{n-2} \qquad [5]$$

4. *Expresión de* P_n^r *por determinantes.* —

Si eliminamos P_{n-1}^{r-1} entre [4] y [5]

$$(n+r-1)\,P^r{}_{n-2} - x\,(2n-1)\,P^r{}_{n-1} + (n-r)\,P^r{}_n = 0$$

que, para $r \geqq 0$, haciendo $n = r+1,\ r+2,\ \ldots n.$

se obtiene

$$(-1)^{n-r-1}\,\underline{|n-r}\,P_n^r = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 & x\,(2r+1)\,P_r^r \\ x\,(2r+3) & 2 & 0 \ldots 0 & (2r+1)\,P_r^r \\ 2r+2 & x\,(2r+5) & 3 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 2r+3 & x\,(2r+7) \ldots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots x\,(2n-1) & 0 \end{vmatrix}$$

y como $P_r^r = (2r-1)!!$

$$P_n^r = \frac{(2r-1)!!}{\underline{|n-r}} \begin{vmatrix} x\,(2r+1) & 1 & 0 \ldots 0 \\ 2r+1 & x\,(2r+3) & 2 \ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots x\,(2n-1) \end{vmatrix} \quad ; \qquad [6]$$

y utilizando la relación de simetría se puede también expresar mediante un determinante las primitivas P_n^{-r}.

5. *Ecuación diferencial.* —

Si eliminamos P_n^r entre [3] y [4] y cambiamos r y n por $r+1$ y $n+1$,

$$(1-x^2)\,P_n^{r+2} - 2x\,(r+1)\,P_n^{r+1} + (n-r)(n+r+1)\,P_n^r = 0.$$

lo que nos dice que la ecuación diferencial

$$(1-x^2)\,y'' - 2x\,(r+1)\,y' + (n-r)\,(n+r+1)\,y = 0 \qquad [7]$$

tiene como integral particular P_n^r, de donde la integral general será, utilizando la relación de simetría

$$y = A\,P_n^r \int_B^x \frac{dt}{(1-t^2)\,P_n^r\,P_n^{-r}}$$

siendo *A* y *B* las constantes de integración.

(Original recibido en 1937)

UN ALGORITMO DE SUMACION DE SERIES DIVERGENTES

por RICARDO SAN JUAN

Pólya y Rey Pastor (*) han generalizado el algoritmo de Borel introduciendo un parámetro complejo como coeficiente de la variable de integración en la asociada, con el cual se hace girar el camino de integración y se amplía el campo de convergencia hasta lograr el exterior de la cápsula de los puntos singulares de $f(z) = \Sigma \frac{a_n}{z^n}$. Si este parámetro α se toma como exponente de dicha variable t, además real y positivo menor que 1, y luego se hace tender a 1, resulta un algoritmo definido así:

$$(B_\alpha)\ \Sigma\, a_n z^n = \lim_{\alpha \to 1^-} \int_0^\infty e^{-t}\, \varphi(t^\alpha z)\, dt$$

$$\varphi(t^\alpha z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} [t^\alpha z]^n,$$

que comprende también al de Borel y efectúa la prolongación analítica de la serie $\Sigma\, a_n z^n$ en toda su estrella principal de Mittag-Leffler (**).

(*) POLYA. — "Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen". Mathematische Zeitschrift. B. 29. (1929) S. 549.

REY PASTOR. — *La investigación matemática.* Bol. crít. ped. 1919. *Notas de Análisis.* Asociación Española para el Progreso de las Ciencias. Congresos de Cádiz (1927) y de Barcelona (1929). Rend. Ist. Lombardo (1931). Pág. 1293. Véase además la clara exposición de DOETSCH: Sitzungsberichte Akademie München (1931), pág. 1.

(**) Nótese la diferencia de este algoritmo con el de Mittag-Leffler ("Sur la représentation analytique etc...., "Acta Mathematica, B. 29, S. 101-181) en que los términos de la asociada tienen denominadores $(n\alpha)!$ y para alcanzar un punto prefijado de la estrella hay que tomar α suficientemente pequeño.

Un estudio sistemático de los algoritmos de prolongación analítica fué hecho por Buhl en su fascículo "Séries analytiques. Sommabilité". (Mémorial des Sciences Mathématiques, Fasc. VII) donde pueden verse diversos métodos que efectúan la prolongación en toda la estrella de Mittag-Leffler, pero con procesos más complicados que el B_α.

Este algoritmo no es lineal, pero se transforma en lineal integrando término a término, y resulta el algoritmo de Le Roy de factores $\frac{(n\alpha)!}{n!}$ (*). Esta integración puede interpretarse así:

$$\int_0^\infty e^{-t}\,\varphi\,(t^\alpha z)\,dt = \int_0^\infty e^{-t^{\frac{1}{\alpha}}}\,\varphi\,(tz)\,dt^{\frac{1}{\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n\alpha)!}{n!}\,a_n z^n$$

El algoritmo B_α *se deduce del algoritmo lineal de Le Roy* L_α *de factores* $\frac{(n\alpha)!}{n!}$ *sustituyendo la serie auxiliar de éste por su suma con el método de momentos* $(n\,\alpha)!$ *y generatriz* $\frac{1}{\alpha}\,e^{t^{\frac{1}{\alpha}}}\,t^{\frac{1}{\alpha}-1}$ *que también se debe a Le Roy* (**).

Aplicando las propiedades de permanencia y prolongación analítica de estos dos algoritmos de Le Roy resulta:

El algoritmo B_α *efectúa la prolongación analítica de cada serie* $\sum a_n z^n$ *en toda su estrella principal de Mittag-Leffler.*

Para ver que este algoritmo B_α comprende también al de Borel aunque la serie tenga radio nulo, basta observar que la expresión B resulta de aplicar a la integral de Borel los factores de sumación (***).

$$\mu\,(\alpha_1\,t) = \frac{1}{\alpha}\,e^{t - t^{\frac{1}{\alpha}}}\,t^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

(*) LE ROY. — *Sur les séries divergents.* Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse (1900).

(**) Esto puede aplicarse a cualquier algoritmo lineal sumando su serie auxiliar con un método de momentos o con otro algoritmo lineal.

(***) Pueden utilizarse factores de convergencia efectuando previamente una integración por partes sobre

$$\Phi(t) = \int_0^t e^{-t}\,\varphi\,(t\,z)\,dt.$$

Este artificio se generaliza como método para deducir las condiciones anteriores de las de permanencia para factores que conservan los límites nulos, correlativamente a la demostración del teorema de Perron que dimos en nuestra Tésis doctoral (R. S. SAN JUAN, *Sumación de series de radio nulo*, etc... Revista de la Academia de Ciencias de Madrid (1933).

Véase también *Teoría de los algoritmos lineales de convergencia y de sumación*, de REY PASTOR.

que efectivamente satisfacen las condiciones de Perron:

$$\lim_{\alpha \to 1} \mu(\alpha_1 t) = 1 \qquad \text{para cada } t$$

$$\int_0^\infty |d\,\mu(\alpha_1 t)| < k \qquad \text{en un semientorno de } 1^-.$$

En efecto, se verifica:

$$\int_0^\infty \left| d\,\frac{1}{\alpha}\, e^{t - t^{\frac{1}{\alpha}}}\, t^{\frac{1}{\alpha}-1} \right| = \int_0^{\alpha_1} \left| d\,\frac{1}{\alpha}\, e^{t - t^{\frac{1}{\alpha}}}\, t^{\frac{1}{\alpha}-1} \right| - \int_{\alpha_1}^{\infty} \left| d\,\frac{1}{\alpha}\, e^{t - t^{\frac{1}{\alpha}}}\, t^{\frac{1}{\alpha}-1} \right| =$$

$$= 2\,\frac{1}{\alpha}\, e^{\alpha_1 - \alpha_1^{\frac{1}{\alpha}}}\, \alpha_1^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

siendo α_1 la raíz positiva de $\frac{1}{\alpha}\, t^{\frac{1}{\alpha}} - t - \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) = 0$, donde cambia de signo el integrando

$$e^{t - t^{\frac{1}{\alpha}}}\, \frac{1}{\alpha}\, t^{\frac{1}{\alpha}-2} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 + t - \frac{1}{\alpha}\, t^{\frac{1}{\alpha}}\right),$$

la cual es $\alpha_1 < e$, puesto que

$$\frac{1}{\alpha}\, e^{\frac{1}{\alpha}} - e \geqq e^{\frac{1}{\alpha}} - e = e^{\xi}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) > \frac{1}{\alpha} - 1 \qquad \left(1 < \xi < \frac{1}{\alpha}\right).$$

y resulta:

$$2\,\frac{1}{\alpha}\, e^{\alpha_1 - \alpha_1^{\frac{1}{\alpha}}}\, \alpha_1^{\frac{1}{\alpha}-1} < 2\,\frac{1}{\alpha}\, e^{e}\, e^{\frac{1}{\alpha}-1} \to 2\, e^{e} \qquad \text{para} \quad t \to 1^-.$$

Toda serie sumable B *es sumable* B_α *y con igual suma.*

Esta generalización de B puede extenderse al método de Le Roy de momentos $(np)!$ siendo $p > 0$ y resulta un algoritmo:

$$(L_{p_\alpha}) \sum a_n z^n = \lim_{\alpha \to 1^-} \int_0^\infty e^{-t^{\frac{1}{p}}}\, \varphi_p(t^\alpha z)\, dt^{\frac{1}{p}} =$$

$$\lim_{\alpha \to 1^-} \int_0^\infty e^{-t^{\frac{1}{p\alpha}}}\, \varphi_p(tz)\, dt^{\frac{1}{p\alpha}}$$

$$\varphi_p(tz) = \sum_{n=0} \frac{a_n}{(np)!}\, t^n z^n$$

que comprende a los dos algoritmos de Le Roy y al de Borel.

SOBRE LA PARADOJA DE BERTRAND

Nota II de ESTHER FERRARI

En la comunicación de H. Petrini a la Academia de Ciencias de Estocolmo, presentada el 22 de Enero de 1936 por T. Carleman y F. Carlson (*), se afirma que de las tres soluciones dadas por Bertrand la tercera (o sea el valor $\frac{1}{4}$) es la única que debe considerarse como exacta. Petrini modifica la definición clásica de probabilidad discreta para aplicarla a los problemas de probabilidad geométrica de este modo:

"*Modification.* — Dans le calcul de la probabilité géométrique on considère les points, les lignes et les surfaces comme des limites de grandeurs géométriques, qui ont une ou plusieurs dimensions de plus. Par exemple, s'il s'agit des points sur une surface, on s'imagine la surface partagée en un grand nombre fini d'éléments égals, chacun représentant un seul point. Une direction est représentée par un petit angle. De cette manière les cas favorables seront réduits en un nombre fini, et on peut appliquer la définition donnée pour la recherche d'une probabilité approximée. La vraie probabilité est définie comme la limite de cette probabilité approximée, lorsque les éléments considérés deviennent infinement petits. Cette méthode est le plus souvent acceptée, et nous l'emploierons dans la suite".

Esta modificación es legítima para conjuntos de puntos situados en una superficie, la cual se divide en elementos

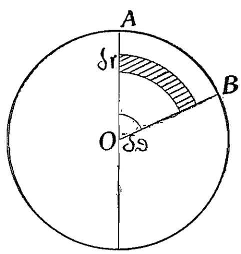

FIG. 1

iguales; pero cuando se trate de rectas, los elementos iguales ya no son trozos de superficie, sino conjuntos de rectas.

(*) Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. Band 25 A. Nº 16.

La primera parte de nuestro trabajo apareció en el Núm. 1 de este mismo vol. VII de la U. M. A.

Habiendo aceptado Petrini la solución prob $= \frac{1}{4}$ trata de hallar las faltas de la primera y de la segunda solución de Bertrand y dice así:

Première solution. — Maintenant nous chercherons la faute de la première solution. Soit le rayon OA du cercle donné partagé par portions δr, égales entre elles. Nous considérons le faisceau des cordes qui sont tirées perpendiculairement à OA, de manière qu'une corde passe par chaque élément δr. En passant à la limite $\delta r = O$ on aura le faisceau complet qui est perpendiculaire à OA. Puis nous répéterons la même procédé pour un rayon OB, qui fait le petit angle $\delta\vartheta$ avec le rayon OA etc. pour tous les petits angles $\delta\vartheta$ et chaque fois nous trouverons la probabilité cherchée $= \frac{1}{2}$. En passant à la limite nous avons consideré toutes les directions de tous les faisceaux complets et la probabilité reste toujours $= \frac{1}{2}$. C'est le sens dans lequel on aura à comprendre les mots ''pour des raisons de symétrie''.

Antes de seguir copiando, observemos que el sentido dado por Petrini a la frase clásica «por razones de simetría» no es en nuestra opinión correcto. En realidad, lo que según los autores clásicos de probabilidades expresaba este término (como ya hemos visto en la nota enterior) era esto:

Si es:

$$\text{prob} = \frac{\int_{c'} f(x,y)\,.\,dx\,.\,dy}{\int_{c} f(x,y)\,.\,dx\,.\,dy} = \frac{\int_{o}^{a} dx \int f\ (x,y)\,dy}{\int_{o}^{a} dx \int f\ (x,y)\,dy}$$

$\int f(x,y)\,dy$ para el conjunto de casos favorables es constante $= A$,
» » » » » posibles » » $= B$,

la probabilidad es igual a $\frac{A}{B}$, prescindiendo de la segunda integración, ya que $\frac{A\,.\,a}{B\,.\,a} = \frac{A}{B}$.

Prosigue así el artículo que comentamos:

''Mais où est la faute de ce raisonnement? En passant du premier faisceau, qui est perpendiculaire au rayon OA, au second faisceau nous avons omis tous les faisceaux intermédiaires, qui consistent en cordes, dont le nombre est proportionnel à l'aire du secteur AOB, d'après ce que nous venons de démontrer à propos de la troisième solution. Le nombre des cordes omises est donc infiniment plus grand que celui des cordes retenues. Sous cettes circonstances il n'est pas surprenant, qu'en passant à la limite on ne trouvera pas le même résultat que si dès le début on avait considéré les cordes du secteur AOB.

Vemos aquí que cuando Petrini se propone contar las cuerdas, lo hace contando los puntos medios y no las rectas que determinan las cuerdas, como hace Bertrand en este caso. Esto no es correcto, pues ya hemos visto que figuras iguales consideradas como conjuntos de puntos no corresponden a conjuntos iguales de rectas.

Por último dice Petrini:

"La faute est précisément la même que si on avait voulu chercher le rapport des aires des deux cercles concentriques en raisonnant comme ça: "pour des raisons de symétrie il suffit de considérer les éléments de surface, qui se trouvent le long du rayon OA, donc le rapport est $=\frac{1}{2}$".

Ni Bertrand, ni ningún autor clásico, hubiera aplicado tal razonamiento puesto que en este caso la integral respecto de y para cada x es función de x, no constante.

Al tratar de hallar la falta de la segunda solución sigue Petrini utilizando los mismos conceptos; pero como figuras iguales consideradas como conjuntos de puntos no corresponden a conjuntos iguales de cuerdas, según hemos visto repetidas veces, y él sustituye las cuerdas por sus puntos medios, no es extraño que también en este caso Petrini llegue a una conclusión diferente a la que llegó Bertrand. Aun a riesgo de incurrir en excesivas repeticiones, y en vista de la insistencia de Petrini en adoptar el punto medio como representante de la cuerda, como si éste fuera el único modo posible, observemos que éste es solamente uno de los infinitos modos que se pueden elegir.

En efecto, otra forma y más natural, sería determinar la cuerda por su polo. Evidentemente a conjuntos iguales de cuerdas corresponden conjuntos iguales de polos, pero no recíprocamente. Lo mismo exactamente que sucede cuando se adopta el punto medio.

Por ej. si consideramos sobre la prolongación de un radio OA los segmentos iguales AB y BC, los conjuntos de cuerdas que tienen sus polos sobre AB y BC no son congruentes, ni tampoco lo son los conjuntos de rectas correspondientes; es lógico pues que al adoptar como medida del primer conjunto la del segundo resulten probabilidades distintas.

Como el conjunto de polos correspondientes a las cuerdas menores que $\sqrt{3}$ R es la corona de radios R y 2R cuya área es $3\pi R^2$ y la medida del conjunto de polos correspondientes a todas las cuerdas de la circunferencia es infinita, resulta aplicando estos resultados al problema de Bertrand, que la probabilidad de los casos desfavorables es igual a cero.

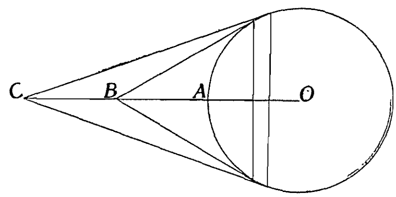

FIG. 2

Por consiguiente la solución del problema de Bertrand sería: prob = 1.

Pasemos ahora a dar la interpretación que creemos justa del problema de Bertrand. Puesto que el conjunto de elementos considerados está formado por cuerdas de la circunferencia y no por rectas del plano, y teniendo en cuenta las conclusiones anteriores, será preciso:

1.º — Adoptar coordenadas de cuerdas.

2.º — Determinar la densidad correspondiente a cada sistema de coordenadas por la condición de invariación respecto del grupo de movimientos que transforma una circunferencia en sí misma, es decir, del grupo de rotaciones alrededor de su centro.

Como coordenadas de las cuerdas podemos adoptar entre otras muchas, las siguientes:

a) Los argumentos α y β de sus extremos.

b) El argumento del origen y el arco positivo subtendido por la cuerda.

c) El arco subtendido por la cuerda y la dirección y sentido de esta que vienen determinados por el argumento del vector de origen 0 perpendicular a la cuerda y dirigida hacia ella.

d) El origen y la longitud de la cuerda.

e) La inclinación de la cuerda.

f) La longitud de la cuerda y su dirección (dada como en c).

Sistema de coordenadas (*a*). — La probabilidad elemental será del tipo $\iint f(\alpha, \beta) \,.\, d\alpha \,.\, d\beta$. Si se efectúa una rotación los nuevos argumentos son: $\alpha' = \alpha + h$, $\beta' = \beta + h$. Será $\iint f(\alpha, \beta) \,.\, d\alpha \,.\, d\beta = \iint f(\alpha', \beta') \,.\, d\alpha' \,.\, d\beta'$ si para todo par de valores se cumple la condición:

$$f(\alpha', \beta') = f(\alpha, \beta) \frac{\delta(\alpha, \beta)}{\delta(\alpha', \beta')}$$

Como es: $\dfrac{\delta(\alpha, \beta)}{\delta(\alpha', \beta')} = 1$ debe ser: $f(\alpha, \beta) = f(\alpha', \beta')$

Resulta pues que para todos los pares de valores $\alpha' = \alpha + h$, $\beta' = \beta + h$, es decir de diferencia $\beta' - \alpha' = \beta - \alpha$ toma f igual valor, luego esta sólo depende de la diferencia $\beta - \alpha$, es decir es función de $\beta - \alpha$.

$$f(\alpha, \beta) = \varphi(\beta - \alpha)$$

El caso más sencillo se tendrá cuando sea $\varphi = \text{Cte}$.

Ya se calculó ese caso y dió como resultado prob. $= \frac{1}{3}$, que es la primera solución de Bertrand.

Sistemas de coordenadas b, c, d, e, f. — Si consideramos por ej. el sistema d) resulta:

$$\iint F(\alpha, l) \,.\, d\alpha \,.\, dl = \iint F\left(\alpha, 2 \operatorname{sen} \frac{\beta-\alpha}{2}\right) .\, d\alpha \,.\, \cos \frac{\beta-\alpha}{2} \,.\, d(\beta - \alpha)$$

En general, cualquiera que sea la segunda coordenada x, función del arco (casos b, c, d, e, f) la probabilidad elemental será del tipo:

$$\iint f(\alpha_1, x) \,.\, d\alpha_1 \,.\, dx \quad ; \qquad \beta - \alpha = x$$

Si se efectúa una rotación resulta: $\alpha'_1 = \alpha_1 + h$, $\quad x' = x$

Si para todo par de valores se cumple la condición:

$$f(\alpha_1, x) = f(\alpha' x') \frac{\delta(\alpha_1, x)}{\delta(\alpha'_1, x')}$$

Como es: $\frac{\delta(\alpha_1, x)}{\delta(\alpha'_1, x')} = 1$ debe ser: $f(\alpha_1, x) = f(\alpha'_1, x')$

Luego f debe ser sólo función de x, puesto que no varía al aumentar a_1. Por tanto: $f(\alpha_1, x) = \varphi(x)$.

Como para el conjunto de casos favorables y posibles los límites de integración son iguales, la probabilidad puede expresarse por un cociente de integrales simples, ya que fijado el origen la integración respecto de la otra coordenada es independiente de aquél, siendo por tanto aplicable el principio de simetría que hemos explicado anteriormente:

$$\text{prob.} = \frac{\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \varphi(x) \,.\, dx}{\int_0^{2\pi} \varphi(x) \,.\, dx}$$

y llamando: $\phi(x) = \int \varphi(x)\, dx$ resulta:

$$\text{prob.} = \frac{\phi\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \phi(0)}{\phi(2\pi) - \phi(0)}$$

Siendo ϕ una función arbitraria, el problema de Bertrand no tiene solución única.

Cualesquiera que sean las coordenadas adoptadas, la solución más sencilla se obtiene adoptando densidad constante, pero entonces los resultados numéricos dependerán de las coordenadas adoptadas. Así, por ej.: Si se adoptan los sistemas de coordenadas a), b), c), resulta prob $= \frac{1}{3}$; en cambio si adoptamos los sistemas d), e), f) resulta prob $= 0{,}134$.

Deltheil en su libro sobre probabilidades geométricas (*) trata el problema de la determinación de la probabilidad elemental utilizando la teoría de los grupos continuos de transfor-

(*) *Loc. cit.*, pág. 16. Véase también el curso de Rey Pastor sobre *Probabilidades abstractas*.

maciones. El problema de Bertrand corresponde a la categoría de los denominados por Deltheil «cas d'insuffisance», es decir, los casos en que las dos condiciones de la medida (igualdad para conjuntos congruentes y aditividad) dejan subsistir una función arbitraria de una variable, por ser el grupo de movimientos simplemente infinito, mientras que el conjunto de entes considerados es doblemente infinito. Tal acontece como vemos en el problema de Bertrand.

Cabe aún el caso en que las dos condiciones de la medida no solamente no determinan ésta, sino que ni siquiera restringen la indeterminación, como acontece en el caso anterior. Tal sucedería si el problema de las cuerdas lo trasladamos a las cónicas, considerando las cuerdas de una cónica que son secantes de otra cónica interior. La función arbitraria tiene en este caso dos variables independientes.

Instituto de Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

TEMAS PROPUESTOS

27. — Transformar en integrales elípticas del tipo de Legendre las propuestas en *Cuestión elemental* N°. 10. Generalización.

R. P.

28. — Expresar la derivada n-sima de la función compuesta $u^p\, v^q\, f(u,v)$ siendo p, q números reales y $u, v,$ funciones de x indefinidamente derivables, mediante las derivadas de $f(u,v)$.

J. Babini.

29. — Determinar el parámetro y la excentricidad de la cónica osculatriz en un punto ordinario de una curva plana.

J. B.

30. — Es sabido que la permutación cíclica (123) se puede descomponer de estos tres modos en producto de dos trasposiciones:

(12) (13), (23) (12) y (13) (23). Obtener la fórmula general del número de descomposiciones de la permutación cíclica $(123\ldots n)$ en producto de $n-1$ trasposiciones.

R. Frucht.

DESARROLLO EN SERIE DE LA FUNCION w (z) DEFINIDA POR LA ECUACION

$$w = e^{h\,z\,w}$$

(Tema Nº 2. Rev. U. M. A. VII, pág. 26)

El desarrollo pedido es el siguiente:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} h^n z^n = 1 + hz + \frac{3}{2!} h^2 z^2 +$$

$$\frac{4^2}{3!} h^3 z^3 + \frac{5^3}{4!} h^4 z^4 + \ldots$$

1ª. demostración. Introduciendo la notación abreviada hz=x tenemos que es

$$w = e^{xw}$$

o sea

$$x = \frac{\log.\,w}{w}$$

Para desarrollar *w* en serie de potencias de *x,* nos servimos de la conocida fórmula para la *n*-sima derivada de una función analítica en el origen

$$\frac{w^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{w\ (x)}{x^{n+1}}\,dx$$

en donde como camino de integración se puede tomar, por ejemplo, una circunferencia $|x| = \varepsilon$ con un radio suficientemente pequeño ε.

En nuestro caso conviene introducir como nueva variable de integración

$$y = \log.\,w = x\,w$$

obteniendo de esta manera

$$\frac{w^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{e^{(n+1)\,y}\,.\,(1-y)}{y^{n+1}}\,dy$$

en donde es fácil reconocer que la nueva integral se puede extender a lo largo de la circunferencia $|y| = \varepsilon$ (por ser $y = 0$

y $w = 1$ para $x = 0$). Escribiendo dicha integral como diferencia de dos integrales

$$\frac{w^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{e^{(n+1)y}}{y^{n+1}}\, dy - \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{e^{(n+1)y}}{y^n}\, dy$$

cada una de estas últimas se puede calcular como una derivada de la función $e^{(n+1)y}$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{e^{(n+1)y}}{y^n+1}\, dy = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^{(n)}\; e^{(n+1)y}}{dy^n}\right]_{y=0} = \frac{1}{n!}\,(n+1)^n$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{e^{(n+1)y}}{y^n}\, dy = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^{(n-1)}\; e^{(n+1)y}}{dy^{n-1}}\right]_{y=0} = \frac{1}{(n-1)!}(n+1)^{n-1}$$

Por consiguiente

$$\frac{w^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}(n+1)^n - \frac{1}{(n-1)!}(n+1)^{n-1} =$$

$$\frac{(n+1)^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{n+1}{n} - 1\right) = \frac{(n+1)^{n-1}}{n!}$$

y según el teorema de Taylor:

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{(n)}(0)}{n!}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n!}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n!}\, h^n z^n$$

NOTA. — Encontré esta demostración hace varios años, como estudiante de matemáticas, y después descubrí que más o menos la misma se encuentra ya en un artículo publicado por Dziobek en el año 1917 ("Eine Formel des Substitutionstheorie" en "Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft". Vol. 16, pág. 64 y sig.).

2ª. *demostración.* Sustituyendo $hz = x$ y $hzw = f(x)$ la ecuación dada se transforma en la siguiente:

$$f(x) = x\, e^{f(x)}$$

satisfecha por el desarrollo

$$f(x) = \frac{x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!\,2} + \frac{(3x)^3}{3!\,3} + \ldots = x + \frac{x^2}{1!} + \frac{3^1 x^3}{2!} + \frac{4^2 x^4}{3!} + \ldots$$

lo que conduce inmediatamente al desarrollo de la función

$$w = 1 + \frac{1}{1!} h z + \frac{3^1}{2!} h^2 z^2 + \frac{4^2}{3!} h^3 z^3 + \frac{5^3}{4!} h^4 z^4 +$$

La demostración del desarrollo indicado para la función f (x) se encuentra en el libro ''G. Polya und G. Szegö: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis (Berlin, 1 - 25), Band I, Aufgabe III 209, Seite 125 & 301''.

Roberto Frucht

3ª. solución. La serie pedida es

$$w = \sum_{n=0} \frac{[h z (n+1)]^n}{(n+1)!} \text{ convergente para } |z| < \frac{1}{|h| e}$$

pues el criterio del cociente da el límite $|h z| e$.

Para probarlo se hace $z = u e^{-hu}$ y, en un cierto entorno de $u = 0$ será absolutamente convergente la serie

$$w = \sum_{n=0} \frac{[hue^{-hu}(n+1)]^n}{(n+1)!} = \sum_{n=0} \frac{[hu(n+1)]^n}{(n+1)!} \sum_{m=0} \frac{[hu(n+1)]^m}{m!} (-1)^m e^{hu},$$

y también será absolutamente convergente la serie doble

$$e^{hu} \sum_{m=0} \sum_{n=0} \binom{m+n}{n} \frac{hu^{m+n}}{(m+n)!} (-1)^m (n+1)^{m+n-1}$$

siendo por tanto legítima la permutación de las sumatorias, es decir

$$w = e^{hu} \sum_{p=0} \frac{(hu)^p}{p!} \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} (-1)^{p-n} (n+1)^{p-1} =$$

$$e^{hu} \sum_{p=0} \frac{(hu)^p}{p!} \Delta^p\, 1^{p-1} = e^{hu}$$

pues $\Delta^p\, 1^{p-1} = 1$ para $p = 0$ y $\Delta^p\, 1^{p-1} = 0$ para $p > 0$.

Eliminando u entre $z = ue^{-hu}$; $w = e^{hu}$ se obtiene la ecuación propuesta. La serie arriba dada es única por el teorema de las funciones analíticas implícitas.

J. B.

SOBRE UNA CUESTION DE LA MEDIDA DE CONJUNTOS

(Tema Nº 4. Rev. U. M. A. VII, pág. 26)

¿Existe en cada intervalo algún conjunto parcial de medida menor que él y tal que los conjuntos parciales contenidos en intervalos iguales tengan iguales medidas?

He aquí la respuesta: cualquier conjunto de medida nula es evidentemente una solución del problema.

Si al conjunto se le impone la condición, tácitamente supuesta, de ser de medida no nula, el problema no tiene solución; esto puede deducirse como una consecuencia del teorema de Lebesgue, que dice que en casi todos los puntos de un conjunto medible la densidad es igual a uno. Nosotros vamos a demostrarlo utilizando solamente la definición de la medida de conjuntos.

En efecto, consideremos, para fijar las ideas, el intervalo $(0, 1)$ y supongamos que en él exista un conjunto E que cumpla las dos condiciones siguientes:

a) $0 < m(E) < 1$

b) Si I_1 e I_2 son dos intervalos iguales se verifica que $m(E \times I_1) = m(E \times I_2)$.

Es evidente que también se verifica la condición:

c) Si I_1 e I_2 son intervalos sin punto común y es $I = I_1 + I_2$, se verifica que $m(E \,.\, I) = m(E \,.\, I_1) + m(E \,.\, I_2)$.

Luego también se verifica la condición:

d) Cualquiera que sea el intervalo I se verifica:

$\frac{m(E \,.\, I)}{m(I)} = k$, siendo k una constante tal que $0 < k \leqq 1$.

Por ser E medible existe un conjunto abierto O que contiene á E y tal que

$[1]\; m(O) < m(E) + \varepsilon$ (ε arbitrariamente pequeño)

Por ser O un conjunto abierto se verifica que $O = \Sigma I_n$, donde los I_n son intervalos no rampantes.

Se verifica teniendo en cuenta d) que

$$\frac{m(E \cdot I_n)}{m(I_n)} = k \text{ y por tanto } \frac{\Sigma\, m(E \cdot I_n)}{\Sigma\, m(I_n)} = k$$

Pero por estar E contenido en $\Sigma (E \cdot I_n) = (E)$ y como $\Sigma\, m(I_n) = m(O)$ se verifica que

$$[2] \quad \frac{m(E)}{m(O)} = k \qquad (0 < k < 1)$$

Las condiciones [1] y [2] son incompatibles, luego está demostrada la cuestión.

Manuel Balanzat

NOTA: Otra solución esencialmente equivalente ha sido presentada por Yanny Frenkel, en conexión con problemas mucho más generales. El trabajo se publicará en otro número.

SOBRE LA INVERSION DE LA SERIE

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x}{x^2+n^2}$$

(Tema Nº 3. Rev. U. M. A. VII, pág. 26)

Para que el desarrollo de f (x) en serie de tal tipo sea posible, hay que suponer que la función real f (x) admita una «prolongación analítica» en el campo complejo, y que no posea otras singularidades que, eventualmente, polos de primer orden en los puntos ri $(r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

El desarrollo:

$$f(x) = \frac{c_0}{x} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c_n}{x+ni} + \frac{c_n}{x-ni} \right)$$

enseña que será:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} f(z)\,dz$$

$$c_n = \frac{1}{\pi i}\int_{C_n} f(z)\,dz \qquad (\text{para } n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(Como camino de integración se pueden tomar circunferencias con un radio $\varepsilon < \frac{1}{2}$ y con los centros, respectivamente, en los puntos 0 y ni).

Roberto Frucht

NOTA DE LA DIREECCIÓN — Un estudio extenso de los desarrollos de este tipo ha sido hecho por el Dr. González Domínguez y será publicado más adelante.

CUESTIONES ELEMENTALES

9. — Demostrar que, si $C_{n,r}$ es la suma de los productos de r en r de n términos de una progresión armónica de primer término α, y razón de sus recíprocos d, entonces

$$n\,\alpha_1 = \sum_{r=1}^{n} d^{\,n-1}\, C_{n,\,r},$$

10. — Calcular las integrales

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^{2/3}} \quad ; \quad \int_1^\infty \frac{dx}{(1-x^2)^{2/3}}$$

11. — Dividido en *n* partes iguales cada uno de los ángulos de un cuadrilátero, estudiar la naturaleza de los cuadriláteros que forman las rectas de división, tomada una por cada vértice. Casos particulares.

12. — Determinar las trayectorias ortogonales de un haz de elipses homotéticas respecto de su centro común.

EL LUGAR GEOMETRICO Y LUGARES DE PUNTOS AREAS EN EL PLANO

Por V. y A. FRAILE y C. CRESPO

(Continuación)

Resolver un lugar área de puntos en el plano equivale, pues, a resolver dos lugares sucesivamente: uno de puntos y otro de líneas, siempre que sean dos los entes primitivos que varían, y simplemente infinitos los sistemas que los contienen. En último caso, el segundo de estos lugares se reduce a determinar la envolvente de esas líneas que, en general, limita al lugar área.

Este procedimiento de resolución de los lugares áreas es, sin duda, el más natural. Sin embargo, utilizando siempre los recursos de la Geometría elemental, suele ser más simple y más elegante la solución sintética, prescindiendo de todo proceso de generación.

Poi último, las coordenadas de los puntos de un lugar área son funciones

$$x = f(\lambda, \lambda') \qquad y = \varphi(\lambda, \lambda')$$

de dos parámetros, λ, λ', independientes, no siendo posible, por lo tanto, la eliminación de ellos. Cuando el número de conjuntos-variables excede a dos, las funciones x, y lo son de más de dos parámetros que, de hecho, están sustituídos por dichas funciones.

A continuación exponemos una serie de problemas elementales de lugares de puntos áreas en el plano, en los que hemos utilizado con preferencia la solución sintética.

II. - APLICACIONES

1. — *Superficies medias y baricéntricas de las curvas.* — Tratándose de curvas alabeadas, son ya conocidas las superficies medias: lugar de los centros de las cuerdas de una curva. Si se considera curvas planas, sus superficies medias constituyen lugares áreas de puntos en el plano.

Naturalmente, cuando una curva plana es cerrada y convexa, su superficie media es la región del plano no exterior a la curva. La de una circunferencia es su círculo.

Es sumamente sencillo hallar la superficie media de un arco de circunferencia: En la circunferencia de centro O (fig. 1) consideremos el arco A B' B, y tracemos los arcos A M, B M homotéticos del A B' B respecto de los centros A y B respectivamente, de razón 1/2. La superficie rayada sobre la cuerda A B es el lugar. Basta trazar un radio cualquiera O N y observar que P — punto de intersección de O N y el arco B P M — es centro de la cuerda B B'. Todo punto P' de O N exterior al trozo rayado no es del lugar, por ser centro de una cuerda paralela a la B B' que no puede ya estar inscrita en el arco A B' B. Sí lo están, en cambio, las cuerdas cuyos centros son los puntos del segmento P N.

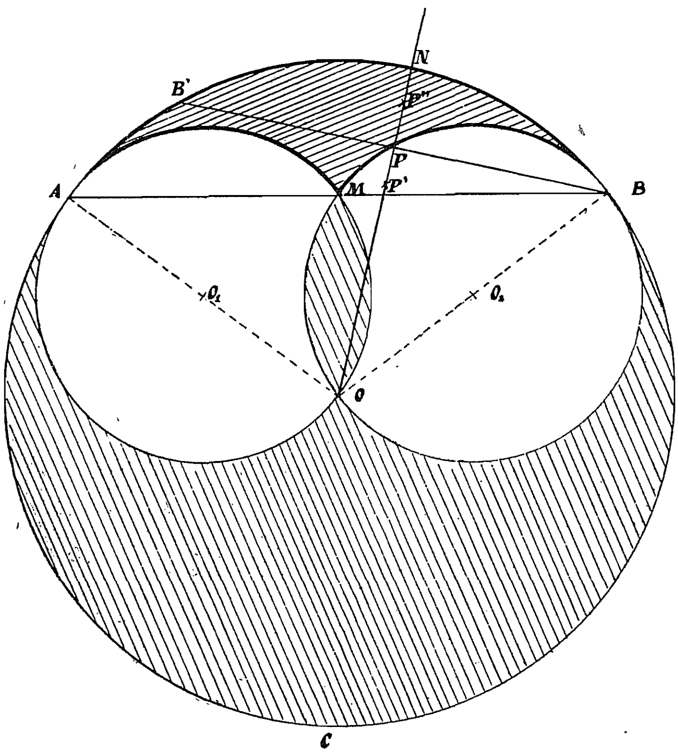

Fig. 1

El recinto rayado debajo de la cuerda A B es la superficie media del arco A C B.

Superficie baricéntrica es el lugar de los centros de gravedad de los arcos de una curva alabeada. Si la curva fuese plana, dicha superficie baricéntrica constituiría un lugar área de puntos en el plano.

Ambas clases de superficies son lugares por generación, cuyos puntos quedan unívocamente determinados eligiendo arbitrariamente dos en la curva. Esta es, pues, conjunto-variable común a los dos entes primitivos.

Puede generalizarse la superficie media estableciendo el lugar de los puntos que dividen a las cuerdas de una curva en segmentos que están en una relación λ.

Si se trata de un arco de circunferencia (fig. 2) A V' B el lugar es la superficie rayada sobre la cuerda A B. Está limitada por el arco dado y cuatro arcos más: dos de ellos pertenecen a las circunferencias de centros O_1, O_2 homotéticas de la dada de razón

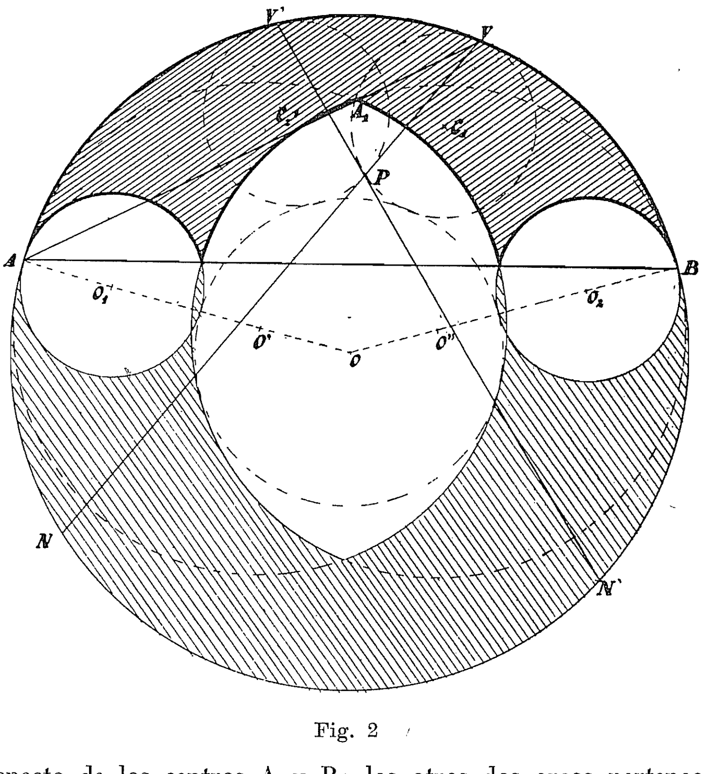

Fig. 2

λ respecto de los centros A y B; los otros dos arcos pertenecen a las circunferencias de centros O', O'', homotéticas de la dada de razón $\frac{1}{\lambda}$ respecto de A y B como centros de homotecia.

Se desprende, desde luego, que todo punto no contenido en la corona circular limitada por la circunferencia dada y la que es tangente exterior a las O_1, O_2 no es del lugar. Ahora bien: un punto P de esta corona, pero exterior a la superficie rayada, tampoco es del lugar. Basta observar que este punto pertenece a dos circunferencias C_1, C_2 inscritas en la corona. Sea V el punto de tangencia de C_1 con el arco dado, y A_1 el de contacto con el arco de circunferencia de centro O'. La recta $V A_1$ ha de pasar por A y es $\frac{A_1 V}{A_1 A} = \lambda$. La recta V P produce una cuerda V N tal que es $\frac{PV}{PN} = \lambda$; pero que no está, pues, inscrita en el arco dado. Tampoco puede estarlo la cuerda V' N' que resulta de considerar la circunferencia C_2. Del mismo modo se comprende que los puntos comunes a las circunferencias C y a la superficie rayada pertenecen a cuerdas inscritas en el arco A V B y las dividen en segmentos cuya razón es λ.

El mismo lugar para el arco A N' B lo indica el rayado inferior.

2. — *Lugar de los centros de los segmentos inscritos en dos segmentos dados* A B, C D. (*Superficie media de dos segmentos*). —

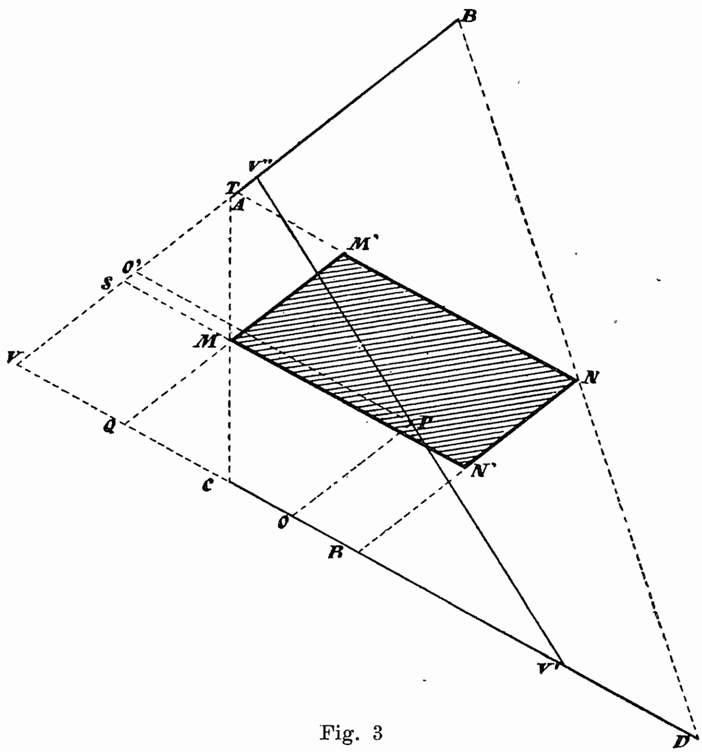

Fig. 3

Conviene antes recordar cómo se inscribe un segmento en los lados de un ángulo dado B V D de manera que su centro sea un punto P también dado (fig. 3). Sabemos que basta trazar, por ejemplo, P O, paralela al lado V B, tomar V', simétrico de V respecto de O y unir P y V'. V' V'' es la solución.

En la misma figura, A B y C D son los segmentos dados. Construyamos el paralelogramo M M' N N' cuyos lados son paralelos a dichos segmentos y donde M y N son centros, respectivamente, de A C y E D. Este paralelogramo es el lugar: Todo punto P de él es centro de un segmento inscrito en A B y C D, y no lo es cualquier punto que no pertenece al paralelogramo. Para probarlo prolongaremos los lados M' M hasta Q. N N' hasta R y tracemos P O paralela a ellos. C es simétrico de V respecto de Q, y D lo es también respecto de R. El punto simétrico de V respecto de O está, pues, en C D. De igual modo, si trazamos P O', paralela a V D, el simétrico de V respecto de O' está en A B.

Si se trata de un punto que no pertenece al paralelogramo, alguno de los centros de simetría O, O', o ambos, no están respectivamente en Q R y S T, y dicho punto no es, por lo tanto, del lugar.

(Continuará).

V A R I A

6. *Definición matemática de Emile Borel*

"Si me fuera necesario resumir en una fórmula la impresión que conservo de vos estaría en situación muy embarazosa. Los elementos que caracterizan vuestra personalidad son tan numerosos que sería necesario otro Borel para resumirlos con exactitud y precisión.

Veo sin embargo en vuestra vida caracteres que le confieren una notable unidad. Estos caracteres son lo suficientemente numerosos, persistentes y precisos para que ella aparezca no como una función analítica, condicionada y determinada a través de un dominio de existencia muy simple por el comportamiento tenido en una parte infinitesimal de ese dominio; no como una función de variable real totalmente desarticulada, y cuyos valores en partes distintas del dominio de existencia no tienen relación alguna los unos con los otros; sino más bien como una función cuasianalítica, cuyo comportamiento global, claro está, está determinado por lo que es en una parte infinitesimal del dominio de existencia, pero que por otra parte es tan complicada en su trayectoria y en su recinto que sería necesaria otra función de la misma clase para seguirla en todos sus meandros."

(Del discurso pronunciado por Gastón Julia en el jubileo de Emil Borel en enero de 1940.)

CRONICA

Sesión científica de la Unión Matemática Argentina celebrada el día 4 de Agosto.

Abierta la sesión por el Dr. Rey Pastor, saludó a los delegados de la Universidad de Cuyo, Profesores Toranzos, Balanzat y Corominas, exponiendo a continuación sus autores los trabajos siguientes:

I. J. Rey Pastor, *Poliedros topológicos regulares.*

Expone un breve resumen de esta teoría que inició hace varios años comunicándola al prof. F. Levi de Leipzig y que ahora ha logrado completar llegando a formar el cuadro de los poliedros posibles de género topológico positivo y llegando a construirlos efectivamente, salvo algunas excepciones que ofrecen especial dificultad entre los de género mayor que 1.

II. Fausto I. Toranzos, *Sobre las homologías y las hipercuádricas de rotación del espacio de Hilbert.*

Demuestra que las homologías del espacio hilbertiano proyectivo (espacio H'), es decir, las proyectividades que dejan invariante un punto y un hiperplano son, a menos de una traslación, las proyectividades de tercera especie de Vitali.

Estudia luego las proyectividades involutorias, probando que ellas son homologías armónicas y establece sus propiedades, que resultan análogas a las del espacio proyectivo ordinario.

En la segunda parte se estudian las hipersuperficies transformadas de una hiperesfera mediante una homología, resultando ser hipercuádricas de revolución, y determina su eje de rotación.

Clasifica estas hipercuádricas en tres clases:

1º Si $b > h$, es un *hiper-elipsoide,* es decir una hipercuádrica sin puntos comunes en el hiperplano del infinito.

2º Si $b = h$, es un *hiperparaboloide,* es decir, una hipercuádrica con un solo punto común en el hiperplano del infinito.

3º Si $b < h$, es un *hiper-hiperboloide,* es decir, una hipercuádrica que tiene infinitos puntos comunes con el hiperplano del infinito.

Establece a continuación que estas hipercuádricas pueden definirse como lugar geométrico de los puntos del espacio H' cuyas distancias a un punto fijo (foco) son iguales a sus distancias a un hiperplano fijo (directriz), multiplicadas por una constante y determina luego la existencia de un centro de simetría de los hiperelipsoides e hiperhiperboloides (centro de la hipercuádricas) dando la ecuación polar central de estas hipercuádricas.

III. Yanny Frenkel, *Nueva demostración de un teorema de Lebesgue.*

Demuestra el teorema siguiente de Lebesgue: *Casi todos los puntos de un conjunto medible de medida psoitiva son puntos de densidad del mismo.*

Para ello se apoya en el teorema del mismo autor: *Una función absolutamente contínua es derivable en casi todos los puntos;* pero sin utilizar el teorema de Fubini - Lebesgue sobre derivación de sucesiones monótonas como suele hacerse en la demostración clásica.

Utiliza para su demostración el siguiente razonamiento:

No existe un conjunto medible de medida positiva definido en un intervalo I, tal que su intersección con todo conjunto parcial tenga por medida la *n* sima parte de la medida de dicho intervalo parcial.

IV. Ernesto Corominas, *Algunas generalizaciones de las derivadas sucesivas.*

Recuerda la conocida definición de Schwarziana y demuestra, que generaliza a la derivada simétrica de la derivada ordinaria. A continuación hace notar que la regla de l'Hôspital permite demostrar que el término complementario de Lagrange es de la forma o (h^n) sin necesidad de admitir que exista la derivada $(n+1)$ - sima o bien la continuidad de la derivada de orden *n*. Aprovechando esta particularidad habló de los *coeficientes diferenciales* definidos como coeficientes del desarrollo que tiene como término complementario a o (h^n). Tales derivadas generalizadas, que han sido estudiadas por Denjoy, son menos generales que las del tipo de Schwarz. También dió un cuadro de funciones elementales que siempre tienen derivada de Schwarz y sin embargo poseen derivadas ordinarias. Demostró finalmente el teorema de Landau para la Schwarziana y para los números de Schwarz.

V. Manuel Balanzat, *Sobre los espacios D_0*

Expone algunas nuevas propiedades de los espacios llamados D_0 por Rey Pastor (Revista de Matemáticas y Física Teórica de Tucumán). Son éstos los espacios en que existe una distancia que no cumple la condición simétrica ni tampoco la de no anulación para elementos distintos.

Demuestra algunas propiedades de la acumulación y de los puntos límites de sucesiones; estudia los axiomas que verifican dichos espacios que son los tres de vecindad y el primero de numerabilidad de Hausdorff. No verifican en cambio ninguno de los de separación. Estudia finalmente el problema inverso del anterior.

VI. Enrique Samatán. Da la expresión efectiva de la integral de una función monótona discontínua, resultando así una función monótona con un conjunto denso de puntos angulosos.

VII. A. González Domínguez explica la íntima conexión existente entre ciertas fórmulas de diversas teorías del Análisis y los teoremos clásicos del Cálculo de Probabilidades.

REVISTA DE REVISTAS

GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ, ALBERTO. *The Representation of functions by Fourier Integrals.* — Duke Mathematical journal, 6, pp. 246 - 255 (1940).

El autor obtiene condiciones necesarias y suficientes para la representabilidad de una función compleja f (t), acotada en $(-\infty, \infty)$, en las formas

$$g)\quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\, g(x)\, dx,$$

$$G)\quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\, d\, G(x),$$

donde *g (x)* y *G (x)* pertenecen a varias clases de funciones. Estas condiciones son de la misma especie que las obtenidas por Cramér [Trans. Amer. Math. Soc. 46, 191 - 201, (193) : ver Math. Rev. 1, 13, (1940)] para $g(x) \varepsilon L$ $(-\infty, \infty)$, y para G (x) de variación acotada en $(-\infty, \infty)$. En ellas interviene una función auxiliar $S(t) \varepsilon L(-\infty, \infty)$, tal que $S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\, K(x)\, dx$, donde K (x) es real, no negativa, y $0\,[|x|^{-1-\alpha}]$ para $|x| \longrightarrow \infty$ $(\alpha > 0)$ y $S(0) = 1$.

Esta K (x) es algo menos general que la correspondiente función usada por Cramér, pero se adapta mejor al método usado por el autor.

Las condiciones, lo mismo que las de Cramér, vienen expresadas en términos de la función

$$g(n, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\, s(t|n)\, f(t)\, dt.$$

Condiciones necesarias y suficientes para que f (t) admita la representación (g), con $g(x) \varepsilon L(-\infty, \infty)$, son

$$(*)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} |g(n, x)|\, dx < M \qquad n = 1, 2, \ldots$$

conjuntamente con la condición de que

$$\int_{S} |g(n, x)|\, dx < \varepsilon \qquad n = 1, 2, \ldots$$

cuando la medida del conjunto S es menor que $\delta(\varepsilon)$. Las condiciones de Cramér eran (*), conjuntamente con la convergencia en promedio de orden 1, en el intervalo $(-\infty, \infty)$, de la sucesión $\{ g(n, x) \}$; el autor da una demostración simple de la necesidad de esta última condición. Condiciones necesarias y suficientes para la representación (g) con $g(x) \varepsilon L^{p}(-\infty, \infty)$, $1 < p \leqq \infty$ son la condición (*) conjuntamente con

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |g(n,x)|^{p} dx \right\}^{1/p} < M, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Para el tipo (G) el autor establece las interesantes fórmulas de inversión

$$\lim_{n \to \infty} \int_{0}^{x} g(n,x)\, dx = \frac{G(x+) + G(x-)}{2} - \frac{G(o+) - G(o-)}{2},$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{g(n,x)}{n} = K(0)\, [G(x+) - G(x-)],$$

y obtiene en consecuencia condiciones necesarias y suficientes para la representación (G) con G (x) continua y de variación acotada. También es estudiada la representación (g) con $g(x) \varepsilon L$ y de variación acotada. El autor indica cómo sus métodos generalizan teoremas de Offord y Verblunsky sobre representación de funciones f (x) en la forma (g), siendo la integral sumable (C, 1).

R. P. Boas Jr. (Durham, N. C.)
Trad. de Mathematical Reviews

Sagastume Berra, Alberto E. *Paramorfismos de un grupo*. Univ. Nac. La Plata. Publ. Fac. A. Físcomat. Revista (2) 2, n. 127 pp. 170 - 184 (1940).

El autor considera un conjunto de elementos que forman un grupo G con respecto a una multiplicación " . ", y un grupo $\overline{G}$ con respecto a otra multiplicación "X", y forma la función $P(U, V) = (U \cdot V)^{-1} (U \times V)$ (donde A^{-1} es el inverso de A en G), de modo que $U \times V = U . V . P(U, V)$. La ley asociativa y la existencia del inverso y la identidad en $\overline{G}$ implican ciertas relaciones en que interviene la función P (U, V); y, recíprocamente, toda función P (U, V) de pares de elementos de G que satisfaga a estas relaciones determina una multiplicación "X", con respecto a la cual los elementos de G forman un grupo $\overline{G}$, llamado pseudomórfico con G.

Un paramorfismo es un pseudomorfismo especial obtenido de la siguiente manera: sea π una transformación biunívoca de G en sí mismo, tal que

$$X \to U = X . X^{\pi}, \text{ y definamos}$$
$$P(U, V) = P(X . X^{\pi}, Y . Y^{\pi}) =$$
$$= (X . X^{\pi} . Y . Y^{\pi})^{-1} . X . Y . (X . Y)^{\pi}$$

Los paramorfismos de G son los únicos pseudomorfismos que son automorfismos de G. El autor examina el grupo de estos paramorfismos (que es isomorfo con el grupo de permutaciones de los elementos de G), y da una serie de relaciones entre algunos de sus subgrupos.

H. S. Wall (Evanston, Ill.).
Trad. de Mathematical Reviews.

A PROPOSITO DE UNA CRITICA

En el número de los ANALES DE LA SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA correspondiente al mes de julio último, ha publicado el Dr. C. C. Dassen un artículo en el que objeta las conclusiones de una noticia nuestra sobre el informe que, en su carácter de miembro de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, etc. produjo sobre un trabajo presentado ante ese Cuerpo por Don Juan Blaquier en apoyo de su candidatura para miembro titular del mismo. Creemos que, en esta cuestión, se han producido algunos mal entendidos y como todos estamos de acuerdo en que el referido trabajo del Sr. Blaquier no prueba lo que se proponía, consideramos que no vale la pena insistir sobre ese particular. No podemos, en cambio, aceptar los cargos de otra índole que hace a la UMA; y mantenemos las objeciones que hemos hecho al otro articulista.

Teníamos en preparación una nueva publicación sobre el particular; pero, habiéndonos llegado una invitación del Dr. Dassen en la que, invocando su carácter de decano de los doctores en matemáticas del país, nos hace un llamado general a la concordia, hemos resuelto, en homenaje a él, dar por terminada la cuestión.

F. L. GASPAR
Secretario

TRABAJOS PENDIENTES DE PUBLICACION

El exceso de originales y la inclusión de los análisis de las memorias de González Domínguez y Sagastume, que por falta de espacio hubo que retirar del número anterior, nos impide incluir en éste algunas notas relativas a diversos temas propuestos, debidas a la Dra. Elba Raimondi, Lic. Yanny Frenkel y a los Sres. Santaló, Balazant, Guarnieri,...

También se han recibido diversas soluciones a las cuestiones propuestas, de las Srtas. María M. Silva, Arminda Domenech, Sofía Nogués Acuña y de los Sres. Rolando Weidenbach, Alfredo Calderón y otros alumnos.

NOTA

En la Revista de Ingeniería de Montevideo, con pretexto de la traducción de una vieja conferencia del profesor rumano Sergescu, el traductor, persona que carece de estudios superiores, pretende criticar una publicación didáctica sobre teoría de funciones, efectuada en nuestro país el año 1917, denunciando en ella un ''grave error'' y procurando, a la vez, molestar a otros meritorios matemáticos argentinos.

Sobre la evidente intención a cuyo servicio se han puesto sus páginas, nos parece un deber llamar la atención de la acreditada revista uruguaya.

El propio respeto nos veda descender al plano en que la presunta crítica se realiza, que ni molesta ni merece dedicarle mayor atención, por más que el autor se haya preocupado de repartirla profusamente.

El ''grave error'' consiste en afirmar la equivalencia de los conceptos de *función monogénea* y *función analítica* sobre un recinto; ahora bien, esta equivalencia constituye un teorema archiconocido que figura en todos los textos clásicos como, por ejemplo, en Goursat.

Es bien sabido, por otra parte, que en ciertas generalizaciones se usan las mismas palabras con significado distinto.

Para ingresar como miembro de la Unión Matemática Argentina, es necesaria la presentación del solicitante por dos socios fundadores, la admisión por la Junta, y el pago de una cuota de $ 5.— m/n. mensuales.

La cuota de la suscripción a las publicaciones de la U. M. A. (revista y fascículos independientes) es de $ 10 m/n. anuales, cuyo envío deberá efectuarse por cheque, giro u otro medio libre de gastos, a la orden de la Tesorera, Srta. Dra. Clotilde A. Bula, Perú 222, Buenos Aires.

Los señores suscritores, domiciliados en la Ciudad de Buenos Aires podrán, si lo prefieren, efectuar su pago en doce cuotas mensuales de $ 1.00 m/n. cada una, que serán cobradas a domicilio.

Los trabajos originales enviados para su publicación serán previamente analizados por un ponente, quien emitirá dictamen acerca de la novedad y corrección de sus resultados.

La impresión de las tiradas aparte, y las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

Abonnement annuel à l'etranger: 4.00 dollars (Etats-Unis).

Prière d'adresser toute la correspondance scientifique et administrative à l'adresse ci-dessous:

SR. SECRETARIO DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA
PROF. FERNANDO L. GASPAR

PERÚ 222, BUENOS AIRES (REP. ARGENTINA)

IMPRENTA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL — SANTA FE — R. ARGENTINA

SUMARIO