Volumen VII 1940 - 1941 Número 4

REVISTA

DE LA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

□

MIEMBROS FUNDADORES

José Babini (Santa Fe). — Francisco Berdiales (Fallecido). — José Barral Souto (Buenos Aires). — Clotilde A. Bula (Rosario). — Enrique Butty (Buenos Aires). — Carlos Dieulefait (Rosario). — Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y naturales (Buenos Aires). — Facultad de Ciencias Matemáticas (Rosario). — Facultad de Química Industrial (Santa Fe). — Eduardo Gaspar (Rosario). — Fernando L. Gaspar (Rosario). — José Giannone (Rosario). — Alberto González Domínguez (Buenos Aires). — José González Galé (Buenos Aires). — Manuel Guitarte (Buenos Aires). — Walter S. Hill (Montevideo). — Carlos Isella (Rosario). — Juan Olguín (Rosario). — Elba R. Raimondi (Buenos Aires). — Julio Rey Pastor (Buenos Aires). — Enrique L. Samatán (Buenos Aires). — Luis A. Santaló (Rosario). — José Sortheix (Tucumán). — Dito T. A. de Speluzzi (Buenos Aires). — Esteban Terradas (La Plata).

Contribuyen especialmente al sostenimiento de las publicaciones de la UNION MATEMATICA ARGENTINA los siguientes

MIEMBROS PROTECTORES

Compañía Industrial del Norte de Santa Fe. Ingenio azucarero "Arño" (Villa Ocampo. F. C. S. F.). — Julio Rey Pastor (Buenos Aires). — T. G. Berlengieri y Cia. (Rosario). — Tricerri Hnos. (Rosario). — Manuel Guitarte (Buenos Aires). — Clotilde A. Bula (Rosario). — Elba R. Raimondi (Buenos Aires). — Fernando L. Gaspar (Rosario). — Pó M. Olcese (Rosario). — Carlos Isella (Rosario). — Pedro J. Tricerri (Rosario).

BUENOS AIRES
1941

JUNTA DIRECTIVA

PRESIDENTE	Prof. Ing. Manuel Guitarte
VICE PRESIDENTES	Prof. Dr. Julio Rey Pastor
	Prof. Ing. José Babini
SECRETARIO	Prof. Dr. Fernando L. Gaspar
PRO SECRETARIAS	Srta. Juana María Cardoso
	Srta. Esther Ferrari
TESORERA	Prof. Dra. Clotilde A. Bula
PRO TESORERA	Sra. Janny Frankel
VOCALES	Prof. Ing. José Sortheix
	Prof. Ing. Cortés Plá
	Prof. Dr. Esteban Terradas
	Prof. Ing. Pedro Rosell Soler
	Dr. Alberto González Domínguez

DIRECTOR DE PUBLICACIONES	Prof. Dr. Julio Rey Pastor
DIRECTOR DE LA REVISTA DE LA U. M. A.	Prof. Ing. José Babini

DELEGADOS DE LA U. M. A.

en Tucumán	Prof. Ing. José Sortheix
en Córdoba	Prof. Ing. Fernando Sánchez Sarmiento
en San Luis	Prof. Dr. Fausto Toranzos
en Santa Fe	Prof. Ing. José Babini
en Rosario	Prof. Dr. Fernando L. Gaspar
en Montevideo (R. O.)	Prof. Ing. Walter S. Hill

SOBRE ALGUNOS LUGARES GEOMETRICOS

por ALEJANDRO TERRACINI

1. La lectura de una interesante Nota *El lugar geométrico y lugares de puntos áreas en el plano* por los señores V. y A. FRAILE y C. CRESPO (1) me ha sugerido la cuestión siguiente que, aunque muy elemental, quizás pueda tener algún interés, y que se presta a generalizaciones de varios tipos.

En el plano π en el cual (aquí y a continuación) supongo que actuamos, imagino fijado una vez por todas un *triángulo muestra* $A_0B_0P_0$ (cuyos vértices sean todos puntos propios). Entonces a cada par ordenado de puntos A, B podemos asociar de manera perfectamente determinada un punto P definido como vértice del triángulo ABP directamente semejante al triángulo muestra $A_0B_0P_0$. Si ahora dejamos variar los puntos A, B respectivamente sobre dos líneas a, b, «en general» el punto P viene a describir una región del plano. La cuestión es la siguiente: *¿para cuáles pares de líneas* (2) a, b, *y cuáles triángulos muestras, el lugar del punto* P *se reduce tan sólo a una línea* p? Se trata de encontrar *todas* las soluciones del problema así planteado.

Supondré el plano π real, y buscaré en el mismo las soluciones reales o imaginarias. Por lo tanto también el triángulo muestra puede tener vértices reales o imaginarios. Sin embargo, para que tenga sentido hablar del triángulo ABP directamente semejante al $A_0B_0P_0$, construído a partir de dos puntos genéricos A, B del plano π, como de un triángulo perfectamente determinado, supondremos que los dos vértices A_0, B_0 del triángulo muestra no pertenezcan a una misma recta isótropa.

2. La cuestión elegida es una de las más sencillas que pueden plantearse en relación con la eventualidad de que se rebaje la dimensión de un lugar geométrico. Podrían plantearse cuestiones parecidas al suponer que, al variar los puntos A, B sobre las líneas a, b, la posición del punto P quede definida a partir de ellos de otras maneras; p. e. que en la defi-

---

(1) Esta *Revista*, vol. VII (1940-41), n.os 2, 3.

(2) Aquí y a continuación, al hablar de líneas, entenderemos que se trate de líneas analíticas.

nición del punto P intervengan también otros elementos o bien que esa definición no sea invariante en el grupo de las semejanzas, sino sólo en el de las igualdades. También podría suponerse que el punto P se construya a partir de más de dos puntos variables sobre otras tantas líneas.

Hé aquí por ejemplo un problema cuyo estudio me parece interesante: imagino repartidos los triángulos de un plano π en clases de triángulos iguales, y, extrayendo un ejemplar $A_0B_0C_0$ de cada clase, supongo prefijado a priori de manera arbitraria un punto P_0 que vinculo rígidamente con el mismo triángulo. Entonces a cada terna de puntos A B C no alineados del plano podemos hacer corresponder de manera única el punto P que corresponde al punto P_0 en la igualdad (directa) entre el propio triángulo ABC y el correspondiente triángulo muestra $A_0B_0C_0$ igual a ABC. Entonces: ¿para cuáles leyes de definición del punto P_0 y cuáles líneas a, b, c ocurre que, al variar los puntos A, B, C sobre las líneas a, b, c el correspondiente punto P tenga como lugar, al máximo, una línea? Una solución particular es p. e. aquella en que a cada triángulo $A_0B_0C_0$ se vincula como punto P_0 el ortocentro del triángulo $A_0B_0C_0$, y se toman las líneas a, b, c coincidentes en una misma hipérbola equilátera, la cual por consiguiente resulta lugar del punto P: aún más trivial es el caso en que el punto P_0 se define como centro del círculo circunscripto al triángulo $A_0B_0C_0$, y se toman las líneas a, b, c coincidentes en una misma circunferencia, en cuyo caso el punto P no describe ni siquiera una línea, sino que queda fijo.

Cuestiones parecidas pueden estudiarse con respecto a grupos fundamentales distintos del de las congruencias o de las semejanzas. Además podría p. e. el punto A intervenir junto con un elemento de orden uno o mayor de la curva a. También podría plantearse problemas análogos para envolventes. Por supuesto, de cualquier manera que se plantee el problema, lo interesante consiste en encontrar *todos* los casos en los que se rebaja la dimensión de la variedad descrita por el punto, o la recta, etc. variable.

3. Volviendo a la cuestión como está planteada en el n. 1, podemos indicar a priori las soluciones siguientes.

a) Las líneas a, b son dos rectas no paralelas (cuyo punto de intersección llamaré O): el ángulo ab (como ángulo menor de dos rectos formado por dos rectas no orientadas en un plano orientado) es igual al ángulo formado por las dos rectas P_0A_0, P_0B_0. En efecto, si tomamos un triángulo ABP directamente semejante a $A_0B_0P_0$ cuyos vértices A, B estén sobre a, b, los cuatro puntos A, B, O, P resultan concíclicos, y por consiguiente el ángulo de las rectas OA, OP queda constantemente igual al de las rectas B_0A_0, B_0P_0. Por lo tanto al variar A, B sobre a, b, el lugar del punto P es la recta pasante por O determinada por la condición de formar con OA el ángulo constante mencionado.

Otras soluciones necesariamente imaginarias son las siguientes *b*) y *c*).

b) Observo previamente que, dado un ángulo μ, a cada par genérico de puntos A, B del plano podemos asociar un punto P de la manera siguiente. Llevo por A la recta isótropa de un sistema, que llamo *primer sistema*, individualizado al elegir uno determinado I de los dos puntos cíclicos I, J, y la corto en P con el segundo lado de un ángulo directamente igual al ángulo μ que tenga vértice en B y primer lado coincidente con la recta BA. Es claro que el triángulo ABP sigue manteniéndose directamente semejante a sí mismo (es suficiente pensar en una semejanza directa en el plano como en una homografía que tiene los dos puntos cíclicos como puntos unidos) y por lo tanto a un triángulo muestra $A_0B_0P_0$ que tiene ahora la particularidad de tener el lado A_0P_0 a lo largo de una recta isótropa del primer sistema.

Conviene notar que con la construcción expuesta la cuaterna de las rectas que unen el punto B a los puntos A, P, I, J se mantiene constantemente proyectiva a una cuaterna fija, y por lo tanto, al llamar B' el punto AI.PJ, la doble razón (APIB') se mantiene igual a una constante h (3), de modo que P viene a coincidir con el punto correspondiente de A en la homología que tiene centro en I, eje coincidente con la recta isótropa del segundo sistema que pasa por B, e invariante absoluto h.

Después de lo dicho es claro sin más que otra solución

(3) Aunque no es preciso aplicarla, recuerdo la fórmula de Laguerre que relaciona entre sí los valores de μ y de h:

$$h = e^{-2i\mu}$$

del problema planteado es la siguiente: si salimos de una línea genérica a y de una recta isótropa del segundo sistema b, el conjunto de los puntos P logrados a partir de los puntos A, B variables respectivamente sobre a y b mediante la construcción arriba indicada, resulta una línea, y más precisamente la línea p transformada de la línea a con la homología que tiene como centro el punto cíclico I, como eje la recta isótropa b (con la cual ahora coinciden las rectas isótropas del segundo sistema que pasan por los varios puntos B) e invariante absoluto h.

Para que tenga sentido lo que acabo de decir hay que suponer que, mientras el lado A_0P_0 del triángulo muestra pertenece a una recta isótropa del primer sistema, el lado B_0P_0 del mismo *no* pertenece a una recta isótropa del segundo sistema ,porque de no ser así no podríamos hablar del ángulo μ como formado por las rectas B_0A_0, B_0P_0. No sólo esto, sino que la homología considerada dejaría de existir como homología no degenerada.

Sin embargo, la tercera solución c) de la cuestión que vamos a indicar, en la cual las dos rectas A_0P_0 y B_0P_0 son ambas isótropas, puede considerarse como caso límite de la b) cuando aquella homología degenere al tender a cero su invariante absoluto.

c) Si tomo como línea a una línea genérica, como línea b una recta isótropa del segundo sistema, y como triángulo $A_0B_0P_0$ un triángulo cuyos lados A_0P_0 y B_0P_0 pertenezcan a rectas isótropas respectivamente del primero y del segundo sistema, es claro que el punto P logrado a partir de cualquier par genérico de puntos A, B pertenecientes respectivamente a las líneas a, b está siempre situado sobre la misma recta b: por lo tanto en este caso el lugar del punto P es una recta p que coincide con la recta b.

Para tener en cuenta también los posibles casos límites del problema considerado, conviene admitir la posibilidad de que el triángulo muestra $A_0B_0P_0$ «degenere» en una terna de puntos alineados distintos $A_0B_0P_0$; y entonces, de acuerdo con el punto de vista adoptado, entenderemos que la configuración ABP se mantenga semejante a $A_0B_0P_0$; esto es, a cada par de puntos AB hacemos corresponder aquel punto de la recta AB tal que la razón simple (ABP) es igual a la $(A_0B_0P_0) = k$, siendo k una constante no nula ni infinita de acuerdo con el hecho de que A_0, B_0, P_0 se suponen distintos. En este caso existe la solución siguiente:

d) Las líneas a y b son dos rectas paralelas, el triángulo muestra está degenerado, siendo arbitrario el valor de la constante k: el lugar de P se reduce a una recta paralela a las a, b.

4. Pues bien, vamos a demostrar que *las cuatro soluciones indicadas* a), b), c), d), *junto con otra solución* e) *que se indicará más adelante* (n. 5) *agotan la cuestión,* es decir, *constituyen las únicas soluciones del problema considerado.*

Me refiero en primer lugar al caso en que el triángulo $A_0B_0P_0$ es degenerado; suponiendo el problema resuelto, salgo de un par de puntos A, B genéricos sobre las líneas a, b, y del correspondiente punto P, y varío el par de manera que el punto P quede fijo: claro está que así se establece una homotecia Ω que transforma a en b. Repito la misma consideración para otro par A' B, siendo A' un punto genérico de la línea a, y para el correspondiente punto P', llegando a otra homotecia Ω' que lleva a a b. Entonces la homotecia producto $\Omega\Omega'^{-1}$ transforma la línea a en sí misma, y en particular el punto A en el punto A'. Se concluye así que las rectas tangentes a la línea a en sus dos puntos genéricos A, A' son paralelas entre sí, y por lo tanto a es una recta. La línea b, como correspondiente de la línea a p. e. en la homotécia Ω, es una recta paralela a la a, y concluímos que nos encontramos frente a una solución del tipo *d*).

5. Podemos suponer desde ahora que el triángulo muestra no esté degenerado. Quitamos a la cuestión su aspecto métrico, y vamos a estudiarla en la forma siguiente, donde substituimos a los puntos cíclicos I, J dos puntos cualesquiera distintos entre sí que seguimos indicando con estas mismas letras. Fijados dos puntos I, J, y un triángulo $A_0B_0P_0$ (ninguno de cuyos vértices pertenezca a la recta I J, de acuerdo con la circunstancia de que al interpretar métricamente la cuestión se trata de puntos propios, y cuyo lado A_0B_0 no pasé por I ni por J según lo dicho en el n. 1), vamos a construir de la manera más general dos líneas a, b de manera tal, que al tomar genéricamente A y B respectivamente sobre a, b, el punto P correspondiente a P_0 en la homografía individualizada por los dos puntos unidos I y J y por los dos pares de puntos

correspondientes A_0, A y B_0, B tenga como lugar una línea p.

Sean Q_0, R_0 las proyecciones del punto P_0 sobre la recta A_0B_0 efectuadas respectivamente desde los centros I, J, y sea T_0 el punto I J. A_0B_0. Pondré $(A_0B_0Q_0T_0) = q$, $(A_0B_0R_0P_0) = r$. Para construir el punto P correspondiente a dos puntos dados A B, es claro que podemos construir los puntos Q, R de la recta AB individualizados por las dobles razones

$$(1) \qquad (ABQT) = q; \ (ABRT) = r,$$

donde hemos puesto $T = IJ . AB$, y luego determinar P como intersección de las rectas IQ, JP.

Supondré a continuación que los valores de q, r sean ambos finitos: en caso contrario sería suficiente intercambiar los puntos A y B, a menos que de esos dos valores uno sea infinito y el otro nulo. Si p. e. $q = 0$, $r = \infty$, resulta $Q \equiv A$, $R \equiv B$: al variar A, B sobre las líneas a, b, si el punto P describe tan sólo una línea, necesariamente queda fija una de las dos rectas IA, JB, y por lo tanto una de las dos líneas a, b es una recta que pasa por uno de los dos puntos I, J. Logramos en este caso, si I, J son los puntos cíclicos, la solución c).

Excluyendo desde ahora la particularidad considerada, observo que, debido a que el punto P_0 no pertenece a ninguna de las rectas A_0B_0, I J, los valores de q, r son distintos entre sí y ambos distintos de la unidad.

Introduzco coordenadas proyectivas no homogéneas x, y con respecto a un triángulo fundamental $G_1G_2G_3$, de cuyos vértices sea $G_1 \equiv J$, $G_2 \equiv I$.

Si las líneas a, b tienen respectivamente las ecuaciones (¹)

$$y = U(x), \quad y = V(x),$$

el punto P, que procede de los puntos A, B para los cuales

(¹) Escapa a este método el caso en que una por lo menos de las dos líneas a, b es una recta que pasa por el punto G_2. El inconveniente se salva, intercambiando los puntos I, J: queda como ulteriormente excepcional el caso en que las líneas a, b son dos rectas que pasan una por I y la otra por J, el cual sin embargo no lleva a ninguna solución distinta de las indicadas, como se ve fácilmente.

respectivamente $x = u$, $x = v$, tiene coordenadas

$$(1) \qquad x = \frac{u - qv}{1 - q}, \quad y = \frac{U(u) - rV(v)}{1 - r};$$

de modo que la condición para que el punto P no describa una región es

$$(2) \qquad r\frac{dV}{dv} = q\frac{dU}{du}.$$

Siendo u, v variables independientes, el valor común de los dos miembros de (2) es necesariamente una constante c. Distingo ahora tres casos.

Caso I. - Las dos constantes r, q son ambas distintas de cero. Escribo c en la forma $c = mrq$, siendo m otra constante, y logro

$$U(u) = mru + m_1, \quad V(v) = mqv + m_2,$$

siendo m_1, m_2 otras dos constantes. Por lo tanto las líneas a, b son dos rectas que, si $m \neq 0$ como por ahora suponemos, se cortan en un punto que no pertenece a la recta $G_1 G_2$ por ser $r \neq q$, de manera que podemos suponer que su punto de intersección esté en el vértice G_3 del triángulo de referencia, y que por lo tanto sea $m_1 = m_2 = 0$. En cuanto al punto P, las (1) enseñan que sus coordenadas, expresadas en función de los parámetros independientes u, v son

$$x = \frac{u - qv}{1 - q}, \quad y = mr\frac{u - qv}{1 - r}.$$

Por consiguiente

$$(3) \qquad y = mr\frac{1 - q}{1 - r}x.$$

Por lo tanto el punto P tiene como lugar una tercera recta p que sale del punto $G_3 = ab$.

Es claro que, después de fijados I, J, A_0, B_0, P_0, las rectas a, b pueden tomarse en dos rectas arbitrarias que salgan de un punto genérico O del plano, con tal que la doble razón (a, b, OJ, OI) sea igual a r/q: la recta p resulta entonces como lugar de un punto P tal que, al variar A, B respectivamente sobre a, b, el triángulo ABP corresponde a $A_0B_0P_0$ en una homografía que tenga I, J como puntos unidos.

También pueden prefijarse, en vez de los elementos anteriores, los puntos I, J, las rectas a, b, y la posición del punto P que corresponde a una elección genérica arbitraria de los puntos A, B de las mismas, con tal que ese punto P se proyecte desde I y J sobre la recta A B en dos puntos Q, R tales que sea

$$(4) \qquad (\mathrm{ABRQ}) = (\mathrm{a\,b\,OJ\,OI}).$$

¿Cuál es el lugar γ del punto P que cumple con esta condición? Los pares de puntos Q, R de la recta AB que cumplen con (4) se corresponden en una proyectividad que tiene A, B como puntos unidos, de manera que γ es una cónica, y más precisamente la cónica γ individualizada por los cinco puntos I, J, A, B, O.

La solución así encontrada lleva precisamente a la solución *a*) cuando se toman los puntos I, J coincidentes con los puntos cíclicos.

Quien quiera averiguar directamente por un razonamiento sintético que, procediendo de la manera que acabamos de indicar, si A' B' son dos puntos ulteriores de las rectas a, b, el correspondiente P' de P en la homografía H individualizada por los cuatro pares $\begin{matrix} \mathrm{I} & \mathrm{J} & \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{I} & \mathrm{J} & \mathrm{A'} & \mathrm{B'} \end{matrix}$, está sobre la recta OP, puede razonar así: Si el punto O' que corresponde a O en H es distinto de O, y la recta OO' no es unida para H, los haces de centros O, O' referidos en la proyectividad no perspectiva determinada entre ellos por H engendran una cónica irreductible C', que pasa por los puntos O', I, J, A', B', y que por consiguiente, considerada en el plano de A', tiene como correspondiente en el plano de A una cónica $C \equiv \gamma$. Y como los puntos de las dos cónicas C, C' correspondientes en la homografía H resultan por construcción alineados sobre O, sigue la propiedad enunciada. En los casos excluídos, si $O \equiv O'$, se llega a la misma conclusión observando que la homografía tiene más de dos rectas unidas distintas por O, y es por lo tanto una homología de centro O. Quedaría la hipótesis que sea $O \not\equiv O'$ y la recta OO' unida: pero ésta no podría ser distinta de las dos rectas OI, OJ (porque si no tendríamos una homología de centro O); y si p. e. coincidiese con OI, el razonamiento del caso general llevaría a la conclusión de que los tres puntos A, B, J estarían alineados, contrariamente a nuestras hipótesis.

Caso II. - Sigo suponiendo $r \neq 0$, $q \neq 0$ pero ahora $m = 0$. Entonces $U = m_1$, $V = m_2$, y el punto P que procede de los puntos $A(u, m_1)$, $B(v, m_2)$ tiene coordenadas, de acuerdo con las (1):

$$x = \frac{u - qv}{1 - q}, \quad y = \frac{m_1 - r m_2}{1 - r}.$$

Por lo tanto las líneas a, b son rectas que pasan por J, y lo mismo ocurre de la línea p. En la homografía H considerada más arriba son ahora unidas las tres rectas a, b, JI, de modo que H es una homología de centro J, cuyo eje pasa por I.

Efectivamente, *si partimos de dos rectas* a, b *por* J, *y de un triángulo* ABP *de cuyos vértices* A *y* B *pertenecen respectivamente a las rectas* a, b, *y* P *es arbitrario, al transformarlo mediante las* ∞^2 *homologías de centro J cuyos ejes pasan por* I, *logramos* ∞^2 *triángulos* A'B'P', *de cuyos vértices* A' *y* B' *son dos puntos cualesquiera de* a, b, *y* P' *viene a recorrer tan sólo una línea, y precisamente la recta* $p \equiv$ JP.

Es ésta la otra solución e) a la cual he aludido en el enunciado al principio del n. 4.

Caso III. - Sea nula una de las constantes q, r, p. e. sea $q = 0$ (y entonces $r \neq 0$, porque en caso contrario resultaría $Q_0 \equiv R_0 \equiv A_0$, y por lo tanto — siendo $P_0 \not\equiv A_0$ — la recta A_0P_0 coincidiría con la IJ, lo que contradice nuestras hipótesis). Entonces el punto P pertenece constantemente a la recta AI, y la (2) deja ahora arbitraria la función $U(u)$, mientras que V resulta una constante, que, aprovechando la arbitrariedad de $\hat{G}_3$, podemos suponer nula. En el caso actual las (1) se escriben

$$x = u, \qquad y = \frac{U(u)}{1 - r},$$

y por lo tanto expresan que el lugar de P es una línea homológica de la línea (arbitraria) a en una homología de centro I, cuyo eje es una recta por J que actúa como línea b.

Esta solución corresponde por consiguiente a la b) de arriba.

Los resultados enunciados quedan así demostrados.

SOBRE UN PROBLEMA DE PROBABILIDADES GEOMETRICAS

(Tema Nº 5, pág. 26)

Dados al azar dos pares de puntos XY, ZT, sobre el contorno de un polígono convexo, calcular la probabilidad de que el punto de intersección de las rectas que determinan, sea interior al polígono.

Solución:

Supongamos el par XY fijo en los lados a_i, a_k y consideremos la medida de los casos favorables para el par ZT.

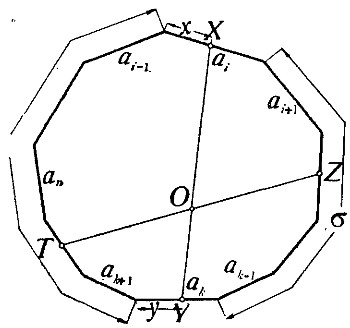
Fijado Z, ya sea en a_{i+1}, o en $a_{i+2}, \ldots$ o en a_{k-1}, la medida de los casos favorables para T es:

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{i-1} + x + y$$

siendo x e y las abscisas de X, Y sobre los lados a_i, a_k respectivamente.

Haciendo variar Z desde a_{i+1} hasta a_{k-1}, obtenemos:

$$m_1 (ZT) = (a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{i-1} + x + y)$$
$$(a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_{k-1}).$$



Fijemos ahora Z en $a_i - x$; la medida del conjunto de posiciones favorables de T es:

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{i-1} + y$$

y al variar Z en $a_i - x$ resulta:

$$m_2(ZT) = (a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{i-1} + y)(a_i - x).$$

Finalmente, si fijamos Z en $a_k - y$, obtenemos como medida de los casos favorables para T:

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{i-1} + x$$

y como Z puede variar en $a_k - y$, es:

$$m_3(ZT) = (a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{i-1} + x)(a_k - y).$$

Por tanto, la medida de todos los casos favorables para el par ZT habiendo fijado previamente el par XY, es:

$$m(ZT) = m_1(ZT) + m_2(ZT) + m_3(ZT) =$$

$$= (a_{k+1} + \ldots + a_{i-1} + x + y)(a_{i+1} + \ldots + a_{k-1}) +$$
$$+ (a_{k+1} + \ldots + a_{i-1} + y)(a_i - x) +$$
$$+ (a_{k+1} + \ldots + a_{i-1} + x)(a_k - y)$$

o bien si ponemos:

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{i-1} = s$$

$$a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_{k-1} = \sigma$$

tenemos:

$$m(ZT) = (s + x + y)\sigma + (s + y)(a_i - x) + (s + x)(a_k - y)$$

y efectuando operaciones:

$$m(ZT) = x(\sigma - s + a_k) + y(\sigma - s + a_i) - 2xy + s(\sigma + a_i + a_k).$$

Hagamos variar ahora el par XY, primero en los lados en que lo suponíamos fijo y luego en todo el perímetro:

$$m(XYZT) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \int_0^{a_i} \int_0^{a_k} [x(\sigma - s + a_k) + y(\sigma - s + a_i) -$$
$$- 2xy + s(\sigma + a_i + a_k)]\, dx\, dy =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{a^2_i\, a_k}{2} (\sigma - s) + \frac{a_i\, a^2_k}{2} (\sigma - s + a_\cdot) + \right.$$

$$\left. + s\, a_k\, a_i (\sigma + a_i + a_k) \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{\sigma + s}{2}\right) (a_i^2\, a_k + a_i\, a_k^2) + \frac{a^2_i\, a^2 k}{2} + s\, \sigma\, a_i\, a_k \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{(a_{i+1} + \ldots + a_{k-1} + a_{k+1} + \ldots + a_{i-1})}{2} (a_i^2\, a_k + \right.$$

$$+ a_i\, a_k^2) + \frac{a^2_i\, a^2 k}{2} + (a_{i+1} + \ldots + a_{k-1})\,.$$

$$\left. (a_{k+1} + \ldots + a_{i-1})\, a_i\, a_k \right]$$

pero, por ser:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(a_{i+1} + \ldots + a_{k-1} + a_{k+1} + \ldots + a_{i-1})}{2} (a_i^2\, a_k + a_i\, a_k^2) = 2\, \frac{S_{2,\,1,\,1}}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a^2_i\, a^2 k}{2} = \frac{S_{2,\,2}}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (a_{i+1} + \ldots + a_{k-1})(a_{k+1} + \ldots + a_{i-1})\, a_i\, a_k = 2\, S_{1,\,1,\,1,\,1}$$

es, por tanto:

$$m\,(XYZT) = \frac{1}{2}\, S_{2,2} + S_{2,\,1,\,1} + 2 S_{1,\,1,\,1,\,1}$$

y además, como es:

$$\frac{1}{2} [S_{1,\,1}]^2 = \frac{1}{2}\, S_{2,2} + \frac{2}{2}\, S_{2,\,1,\,1} + \frac{6}{2}\, S_{1,\,1,\,1,\,1}$$

resulta:

$$m\,(XYZT) = \frac{1}{2} [S_{1,\,1}]^2 - S_{1,\,1,\,1,\,1}$$

La medida de todos los pares es:

$$\frac{\text{per.}^2}{2} \cdot \frac{\text{per.}^2}{2} = \frac{\text{per.}^4}{4} = \frac{[S_1]^4}{4} = \frac{S_4 + 4S_{3,1} + 6S_{2,2} + 12S_{2,1,1} + 24S_{1,1,1,1}}{4}$$

puesto que cada par XY, ZT se obtiene dos veces; luego, la probabilidad buscada es:

$$p = \frac{\frac{1}{2}[S_{1,1}]^2 - S_{1,1,1,1}}{\frac{1}{4}[S_1]^4} = \frac{2[S_{1,1}]^2 - 4S_{1,1,1,1}}{[S_1]^4}$$

En particular, para el triángulo resulta:

$$p = \frac{2\,[a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3]^2}{[a_1 + a_2 + a_3]^4}$$

y para el cuadrilátero el resultado coincide con el que figura en la obra de Czuber, «Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte» (Traducción de Schuerman, 1902, pág. 32).

Elba R. Raimondi

TEMAS PROPUESTOS

31.—Se sabe que en la teoría de probabilidades geométricas la posición de una recta G del plano se determina por su distancia p a un punto fijo O y el ángulo φ que la normal a la recta desde O forma con una dirección fija. Además, para medir un conjunto de rectas se toma la integral doble de la expresión $dG = dp\, d\varphi$ que se llama la *densidad de rectas*.

Sentado esto, consideremos una figura plana convexa K. Llamemos σ a la longitud de la cuerda que la recta G determina en ella y α_1, α_2 los ángulos (menores que π) que G forma con las tangentes a K en los extremos de dicha cuerda. Suponiendo que el contorno de la figura K tiene en todo punto tangente determinada y que carece de segmentos rectilíneos, demostrar que

$$\int \frac{\sigma}{\operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2}\, dG = \frac{1}{2} L^2$$

siendo L la longitud de K y estando la integración extendida a todas las rectas G que cortan a K.

L. A. Santaló

I. SCHUR †

Con algún atraso — debido a las tristes circunstancias que atraviesa el mundo — nos ha llegado la dolorosa noticia del fallecimiento del ilustre matemático I. Schur. Estaba gravemente enfermo ya hace dos años, cuando se había retirado a Tel Aviv, y parece que ahora murió allí mismo, en el día de su 66° cumpleaños.

Schur había nacido el 10 de Enero de 1875 en Mogilev (Rusia), pero luego vino a Berlín, donde se destacó entre los alumnos de G. Frobenius y rápidamente fué su colaborador. Habiéndose recibido, con la memoria «Ueber eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen» (1901), y habiendo decidido dedicar su vida a la investigación matemática, obtuvo en 1903 su primera cátedra en la Universidad de Berlín. La dejó sólo por algún tiempo, cuando en 1913 fué llamado para ocupar una cátedra de la Universidad de Bonn, pero 3 años después volvió definitivamente a la Universidad de Berlín para dictar los cursos de álgebra y teoría de de los números (y otros más). La mejor demostración de la estima que gozaba Schur en Berlín, tanto por sus excepcionales calidades de maestro como por la nobleza de su carácter, es el hecho de que muchas veces él estaba obligado a dictar sus cursos en el «Auditorium Maximum» de la Universidad, por ser tan numerosos sus oyentes que no cabían en las otras salas de clase que de costumbre servían para los cursos de Matemáticas.

Es una lástima que Schur, en su modestia, nunca quería publicar, en forma de libro, los cursos que dictaba; sólo una vez hizo una excepción, con la publicación de un curso sobre una materia que siempre le había interesado mayormente: la representación de grupos por matrices («Die algebraischen Grundlagen der Darstellungstheorie der Gruppen», Zurich, 1936).

En cambio, en revistas matemáticas Schur ha publicado más de 70 artículos, la mayoría en «Journal für die reine und angewandte Mathematik», «Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften» y «Mathematische Zeitschrift»; de esta última revista Schur era uno de los fundadores y editores. En el espacio limitado de esta necrología es casi imposible dar una idea concreta de esa vasta e incomparable obra científica de Schur que abarca igualmente álgebra, teoría de los números, teoría de las funciones complejas, teoría de los grupos y de un modo especial, la representación de grupos por matrices. Ni siquiera es posible aquí mencionar todos los trabajos del ilustre matemático y tenemos que limitarnos a hablar sucintamente sólo de algunos de ellos.

Sin duda alguna, uno de los mayores triunfos científicos de Schur ha sido su teoría de la representación de grupos (de orden finito) por substituciones lineales fraccionarias (o sea, en lenguaje geométrico, por transformaciones proyectivas). Es sabido que Frobenius — e independientemente de él, Burnside — habían tratado antes la representación de grupos por matrices (o sea por substituciones lineales enteras). Schur no sólo logró simplificar notablemente la teoría de Frobenius (con su publicación «Neue Begruendung der Theorie der Gruppencharaktere» en «Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften», Berlín, 1905); en dos publicaciones muy importantes (en «Journal für die reine und angewandte Mathematik», vol. 127 y vol. 132). Schur resolvió de un modo muy interesante también el problema análogo (y no menos difícil) de encontrar las representaciones de un grupo finito por substituciones lineales *fraccionarias*, demostrando que para cada grupo finito se puede determinar otro grupo (llamado «Darstellungsgruppe») de modo que el problema de la representación del grupo dado, por substituciones lineales fraccionarias, es equivalente al problema (resuelto, como dijimos, por Frobenius, Burnside y Schur mismo) de la representación por substituciones lineales *enteras* de ese «Darstellungsgruppe». Sumamente interesante es también la aplicación que ha hecho Schur de su teoría al caso de los grupos simétrico y alternado (en vol. 139 del mismo «Journal...»).

Sin poder hablar sobre los trabajos no menos interesantes que Schur ha publicado sobre las representaciones del grupo lineal general (en «Sitzungsberichte...», 1927 y 1928), pasamos a citar unas pocas de las publicaciones de Schur sobre problemas de álgebra. En «Gleichungen ohne Affekt» («Sitzungsberichte...», 1930), Schur logró determinar el grupo (de Galois) de la ecuación:

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = 0;$$

resulta que ese grupo es el simétrico de *n* variables, salvo el caso de *n* divisible por 4; en este último caso Schur demuestra que es el grupo alternado en *n* variables, dando así por primera vez un ejemplo concreto de ecuaciones cuyo grupo de Galois es un grupo alternado. En la misma memoria Schur demuestra que el grupo simétrico de n variables es también grupo (de Galois) de la ecuación algebraica que resulta poniendo igual a cero el polinomio de Laguerre:

$$\frac{e^x}{n!} \cdot \frac{d^n (x^n e^{-x})}{d x^n} = 1 - \binom{n}{1}\frac{x}{1!} + \binom{n}{2}\frac{x^2}{2!} - + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

Resultados parecidos que se refieren a la ecuación:

$$1 - \binom{n}{1}\frac{x}{2!} + \binom{n}{2}\frac{x^2}{3!} - + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)!} = 0$$

y a los polinomios de Hermite, los publicó Schur un año después bajo el título «Affektlose Gleichungen in der Theorie der Laguerreschen und Hermiteschen Polynome» («Journal...», vol. 165).

Otra publicación algebraica de Schur («Ueber die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten», en «Math. Zeitschrift», vol. 1, nº. 4), aunque escrita todavía en 1918, merece aun hoy día el mayor interés. Basándose en unos teoremas de Stieltjes sobre los discriminantes de algunos polinomios clásicos (p. e. los de Hermite), y en otros teoremas parecidos, indicados por primera vez por Schur mismo, éste obtiene una serie de muy interesantes y sorprendentes teoremas sobre ecuaciones algebraicas:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

con coeficientes *enteros* $a_0, a_1, \ldots a_n$. Por ejemplo demuestra Schur que tales ecuaciones que tengan sólo raíces reales y todas distintas entre sí, las que cumplan además con la condición

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} \leqq \gamma,$$

hay sólo en número finito, para cada valor de a_0, si $\gamma < \sqrt{e} = 1{,}6487\ldots$; en cambio, hay infinitas ecuaciones de esa misma clase si $\gamma \geqq 2$.

Por fin sea citado por lo menos el título de una importantísima publicación de Schur sobre ciertas funciones complejas: «Ueber Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschraenkt sind» (en «Journal... », vol. 147 y 148); pues, el espacio limitado no nos permite entrar mayormente en detalles.

Tampoco es posible citar los numerosos trabajos que debemos a Schur sobre los más variados problemas de la teoría de los números; sin embargo esperamos haber dado una idea de la vastedad de la obra científica de Schur y de la consiguiente pérdida que su muerte significa para la ciencia.

Roberto Frucht

CUESTIONES ELEMENTALES

13. — Es bien conocido el problema llamado de los tres pueblos y las tres fuentes: Dados tres puntos A, B, C y otros tres A', B', C', del mismo plano, es imposible trazar desde cada uno de los primeros a cada uno de los segundos un arco tal que los nueve arcos no se corten en ningún punto distinto de los seis dados.

Se propone demostrar que en la superficie tórica y también en el plano proyectivo y en el anillo de Moebius, el problema tiene siempre solución. ¿Qué sucede si en vez de la segunda terna se da una cuaterna A' B' C' D'?

14. — El famoso geometra Moebius se complacía en proponer a sus discípulos este problema:

Un príncipe oriental repartió su reino entre sus cinco hijos de modo tal que cada dos porciones tenían frontera común. ¿Es posible?

EL LUGAR GEOMETRICO Y LUGARES DE PUNTOS AREAS EN EL PLANO

Por V. y A. Fraile y C. Crespo

(Continuación)

3. — *Lugar de los centros de los paralelogramos inscritos en un cuadrilátero dado* (M. A. Longchamps). — Al resolver este problema se ha considerado siempre los paralelogramos de lados paralelos a las diagonales del cuadrilátero. De este modo la solución es el segmento cuyos extremos son los centros de dichas diagonales; pero se comprende que el lugar es más general prescindiendo de tal restricción impuesta por el paralelismo. Entonces se trata de un lugar área.

Sea ABCD el cuadrilátero dado (fig. 4). Tomamos arbitrariamente en los lados AB, AD sendos puntos E, F. A partir

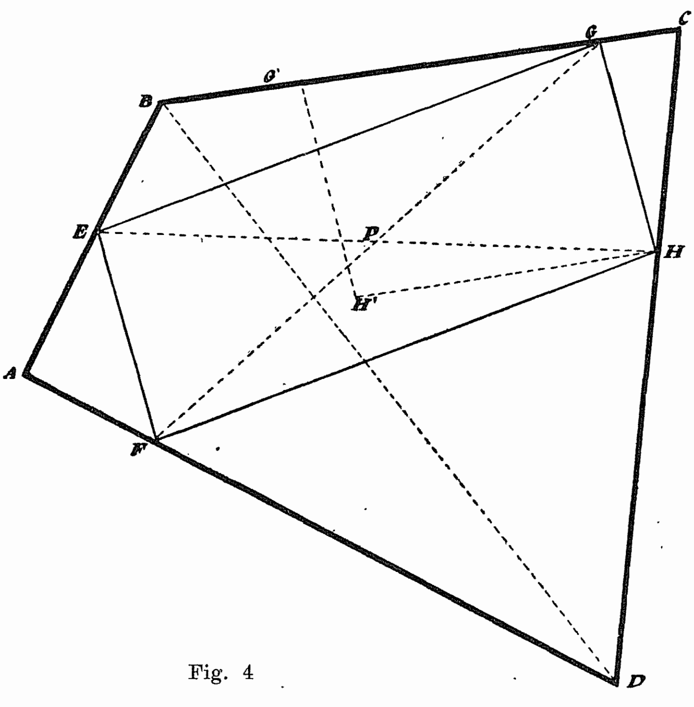


Fig. 4

de un punto cualquiera G' de BC, por ejemplo, tracemos un segmento G'H' igual y paralelo al EF, y por H' la paralela a BC hasta H. El segmento, H G, paralelo e igual a G' H', y el E F determinan, pues, un paralelogramo inscrito en el cuadrilátero dado y, por lo tanto, un punto del lugar. De esta construcción se deduce: 1º. Un punto del lugar queda unívocamente determinado eligiendo arbitrariamente sendos puntos en dos lados adyacentes del cuadrilátero; 2º. Elegidos los puntos anteriores quedan determinados los otros dos en el otro par de lados; 3º. Pueden no existir estos últimos puntos, y, por lo tanto, la elección arbitraria de E y F está acotada.

De todo esto resulta que los entes primitivos del lugar propuesto son cuatro puntos, E, F, G, H, vértices de un paralelogramo, que producen un punto P del lugar. Cada uno de estos cuatro puntos se mueve sobre una línea; pero este movimiento sólo es arbitrario para dos de ellos. El lugar ha de ser, pues, un área, en general. Los lados A B, A D del cuadrilátero dado, o mejor, los *recintos* acotados en ellos, son conjuntos-variables.

Como vemos, no es necesario el paralelismo de B D y E F.

Todo punto del lugar ha de ser centro de dos segmentos (diagonales) inscritos uno en A B y C D (fig. 5) y otro en A D y B C, luego ha de pertenecer a los paralelogramos Q M R N y S M T N,

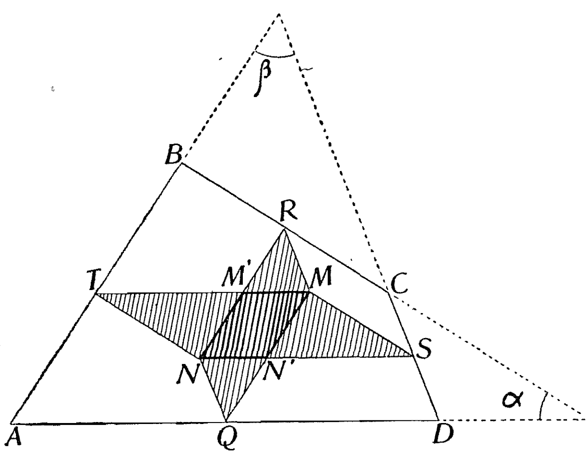


Fig. 5

superficies medias de ambos pares de lados opuestos. El lugar es, por lo tanto, la parte común a dichos paralelogramos. Es fácil ver que esta parte común es otro paralelogramo M M' N N'. N y M son centros, respectivamente, de las diagonales A C y B D del cuadrilátero, y los lados del lugar son paralelos a los A B y A D envolventes del cuadrilátero completo.

Si el cuadrilátero dado es trapecio el lugar degenera en un segmento, y si es paralelogramo, en un punto.

4. — *Lugar de los centros de los segmentos inscritos en una circunferencia y una recta.* — Es, pues, otra superficie media.

Sea O la circunferencia y r la recta (fig. 6). Reconoceremos cuándo un punto P es del lugar trazando la recta simétrica r' de r

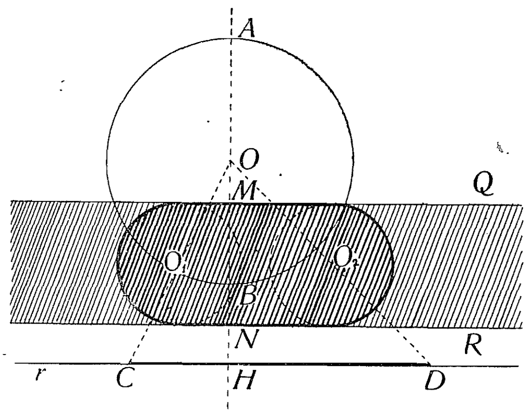


Fig. 6

respecto de P (hágase la figura). Si r' tiene con la circunferencia O puntos propios comunes, P es del lugar, y no lo es en caso contrario, puesto que si F y G son esos puntos comunes, uniéndolos con P y prolongando los segmentos hasta r, ambos segmentos cumplen las condiciones del enunciado.

Las rectas M Q y N R, paralelas a la r, donde M y N son, respectivamente, los centros de A H y B H, limitan este lugar área, que es la franja rayada: las rectas simétricas de r respecto de los puntos de dicha franja cortan o son tangentes a la circunferencia O; y no la cortan las simétricas de r respecto de los demás puntos del plano.

r y O son conjuntos-variables. El sistema de lugares parciales correspondiente a r lo constituyen todas las rectas de esta franja paralelas a r. Y el sistema de los correspondientes a O todas las circunferencias inscritas en dicha franja.

Si en vez de considerar la recta r se trata de un segmento CD, es claro que el lugar será la parte de la franja doblemente rayada, donde las circunferencias O_1, O_2 son las posiciones límites del lugar parcial correspondiente a O.

5. — *Lugar de los centros de los segmentos inscritos en dos circunferencias.*

Sean O_1, O_2 las circunferencias dadas, de radios r_1, r_2 respectivamente. Reconoceremos si un punto P de su plano es o no del lugar trazando la circunferencia O'_1, simétrica de la O_1, por ejemplo, respecto de P. Si O'_1 y O_2 tienen puntos comunes reales, S, T, y son S', T' sus simétricos respecto de P, los segmentos S S', T T' están inscritos en O_1 y O_2, y es P su centro.

Construyamos las circunferencias concéntricas de centro O (fig. 7), punto medio del segmento O_1 O_2, cuyos radios son, respectivamente, $1/2\,(r_1 + r_2)$ y $1/2\,(r_1 - r_2)$. Es fácil probar que las circunferencias simétricas de una de las dadas respecto de los

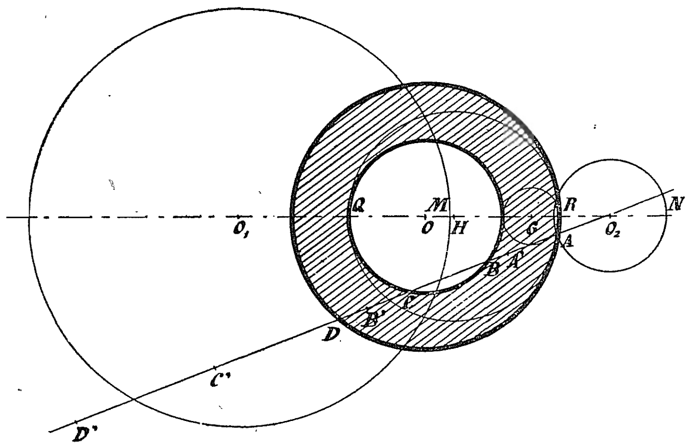


Fig. 7

puntos de la de radio $1/2\,(r_1 + r_2)$ son tangentes exteriormente a la otra; y lo son interiormente si se toma como centros de simetría los puntos de la circunferencia de radio $1/2\,(r_1 - r_2)$. Tracemos una recta cualquiera O_2D' que corte a ambas circunferencias concéntricas. Los puntos de intersección son A, B, C, D, y A', B', C', D' los simétricos de O_2 respecto de aquéllos. En virtud de lo dicho, las circunferencias de radio r_2 y centros D' y C' son, respectivamente, tangentes exterior e interiormente a la O_1, con lo cual los puntos del segmento D' C' — y, por igual razón, los de B' A' — son centros de circunferencias de radio r_2 que tienen con la O_1 puntos comunes reales; y no los tienen las circunferencias de radio r_2 cuyos centros no están en los segmentos D' C', B' A', para la recta genérica considerada O_2D'. Por lo tanto, en dicha recta, sólo son puntos del lugar los de los segmentos A B y C D. Y, en definitiva, todo punto de la corona circular rayada es, pues, del lugar, y no lo son los demás puntos del plano. El lugar propuesto es esta corona.

Considerando los segmentos inscritos de extremos M, fijo en O_1, y X, variable en O_2 obtenemos un lugar parcial que es la circunferencia de centro G, inscrita en la corona, y que engendra el lugar total cuando M varía en O_1. Del mismo modo, un lugar parcial correspondiente a la circunferencia O_1 respecto de un punto fijo, N, de la O_2, es la circunferencia de centro H, tangente en Q y R a las de la corona.

6. — El l. g. de las polares de los puntos de la cuerda A B de una cónica φ (fig. 8) respecto de φ es la parte de haz rayada, donde P, vértice del haz, es polo de A B. Este haz acotado de polares es un lugar de rectas, y también lo es de puntos. Basta, para

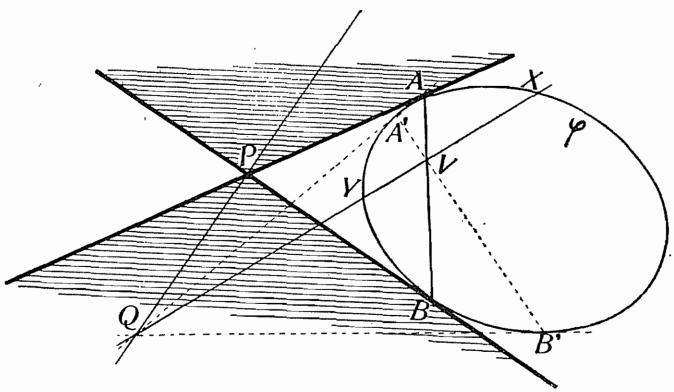


Fig. 8

verlo, enunciarlo así: «Dada una cónica φ y una cuerda A B, tómese *arbitrariamente* dos puntos, uno, X, en uno de los dos arcos en que la cuerda divide a la cónica, y otro, Y, en el otro arco. La recta X Y corta en V a la cuerda A B. Lugar de los conjugados armónicos de los puntos V respecto de todos los pares (X, Y)». Todo punto, Q, del lugar ha de pertenecer a la polar de V, y, por ser V de la cuerda AB, dicha polar es del haz acotado.

También puede verse que la condición necesaria y suficiente para que un punto Q sea del lugar es que su polar A' B' respecto de φ corte a la *cuerda* AB, condición que cumplen solamente los puntos del recinto infinito rayado.

Los puntos del lugar quedan unívocamente determinados eligiendo una terna (X V Y); pero sólo es arbitraria la elección de X e Y; es decir, entre las tres líneas a que pertenecen, respectivamente, los puntos de la terna, sólo son conjunto-variables los arcos AXB y AYB de la cónica dada φ.

(Continuará)

---

y

CUESTIONES DIDACTICAS Y METODOLOGICAS.

Nº 3. — El teorema fundamental de la semejanza de triángulos se demuestra ordinariamente como caso particular del teorema de las transversales (impropiamente llamado teorema de THALES). EUCLIDES, en cambio, (libro VI. Prop. 2) lo demuestra mediante la equivalencia de triángulos.

Analizar y comparar, desde el punto de vista didáctico, los dos caminos para llegar a la demostración de ese mismo teorema.

J. B.

Nº 4. La notación de los múltiplos de un número natural mediante el punto colocado encima de éste a su izquierda, desorienta a los alumnos y los conduce a resultados falsos que son disculpables puesto que este signo funcional, análogo a otros, es único, mientras que para cada función distinta se usan características diferentes. Cuando el alumno escribe p. e.

$$\dot{2} - \dot{2} = 0 \text{ en vez de escribir } \dot{2} - \dot{2} = \dot{2}$$

no comete error más grave del que haría el mismo profesor a quien se preguntase cuánto vale la diferencia f (x) — f (x) si el proponente entendiese por tal la diferencia entre dos funciones cualesquiera representadas genéricamente por la misma letra f. Sometemos la cuestión a la opinión de los profesores que hayan tropezado con táles inconvenientes, para que propongan la solución más adecuada.

M. V.

ENSAYO DE DIVISIBILIDAD BASADO EN LA TEORIA DE LAS CONGRUENCIAS

1. — *Coeficientes de divisibilidad.* Se entiende por coeficiente centenar de un número, el resto logrado al dividir a 100 por dicho número. Este coeficiente puede ser aditivo o sustractivo, según que el cociente sea por defecto o exceso.

$100 = m\,7 + 2$ $\qquad\qquad$ $100 = m\,17 - 2$

Por tener aplicaciones en la divisibilidad y en las mismas por multiplicar a los guarismos que expresan centenas (en los casos fundamentales), es que se le ha denominado coeficiente centenar (C. c.). En forma semejante, se puede obtener un coeficiente decenario (C. d.), millar (C. m.), o diezmillar (C. X. m.).

2. — *1er. Caso.* Cualquier múltiplo de 100 es divisible por un número, si el C. c. de dicho número, multiplicado por el guarismo que expresa las centenas, es un múltiplo del divisor dado.

$C.\,c.\,7 = 2, \quad 700 = m\,7 + C.\,c.\,7 \times 7 = m\,7 + 2 \times 7 = m\,7.$

3. — *2o. Caso.* Cualquier número compuesto de tres guarismos es divisible por un número, si el C. c. de dicho número multiplicado por el guarismo que expresa las centenas más el bidígito que completa el número propuesto, es un múltiplo del divisor dado.

$\text{Número} = N_3 \times 100 + N_2 \times 10 + N_1$ sea del divisor dado.

$\text{Número} = md + N_3 \times C.\,c.\,d. + N_2 \times 10 + N_1.$

4. — *3er. Caso.* Cualquier número polidígito es divisible por un divisor dado, si el producto formado por el C. c. de dicho divisor con el primer guarismo del polidígito (contando de izquierda a derecha) más los dos guarismos que le siguen y continuando estas operaciones en igual forma con el resultado de la suma obtenida y los guarismos restantes del polidígito, se logra un último bidígito igual a O ó múltiplo del divisor dado.

5. — Ejemplos: C. c. 7 = C. c. 14 C. c. = C. c. 49 = C. c. 92 = 2

$$\begin{array}{r} N^o\ P^o = \dot{3}183 \\ 6 \\ \hline \dot{2}43 \\ 4 \\ \hline 47 \end{array} \qquad \begin{array}{r} N^o\ P^o = \dot{9}932 \\ 18 \\ \hline \dot{1}11 \\ 2 \\ \hline 132 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \dot{1}32 \\ 2 \\ \hline 34 \end{array}$$

$3183 = m\,98 + 47 = m\,49 + 47 = m/4 + 5 = m\,7 + 5$

$9932 = m\,98 + 34 = m\,49 + 47 = m/4 + 6 = m\,7 + 6$

6. — Coeficientes millares y diezmillares. En este caso, el razonamiento es idéntico al que se hace en los coeficientes centenares y lo mismo el mecanismo; indudablemente que se considera el millar o los diezmillares en vez de la centena, y en lugar de tres se separan cuatro o cinco guarismos. El coeficiente millar o diezmillar no da un resultado completo, pues se tiene quue dividir el resto que es mayor de tres guarismos por el divisor dado; en dicho caso se utiliza el C. c.

7. — Coeficientes comunes a varios números primos. Si los coeficientes de divisibilidad resultan comunes a varios números primos, se logra gran utilidad cuando se investiga si un número es primo o compuesto.

El C. c. (11,9 y 3) = 1; C. m. (23 y 41) = 11

C. m. (29 y 31) = 101.

Véase que, en esta forma, los coeficientes comunes compensan el tener que utilizar dos coeficientes (C. m. y C. c.) para la completa divisibilidad de un número respecto a dos divisores dados.

8. — Ejemplo: Nº Pº = 4672

$$\text{C. m.} \left\{ \begin{matrix} 23 \\ 43 \end{matrix} \right\} = 11 \qquad \begin{array}{r} 4672 \\ \underline{44} \\ 716 \\ 8/\ \ \underline{56} \\ 72 \\ 3 = R_{23} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 716 \\ 14/\ \ \underline{98} \\ 114 \\ \underline{14\ 28 = R_{43}} \end{array}$$

C. c. 23 = 8

C. c. 43 = 14

9. — *Coeficientes sustractivos.* Por su propia naturaleza se aplican restando, como los aditivos se aplican sumando.

10. — *Observación.* Cuando el coeficiente centenar es negativo y el producto de dicho coeficiente por las centenas consideradas, es mayor que los dos guarismos que a dichas centenas le siguen, a las mismas, mentalmente, se le quita uno en su valor absoluto y se toma como sustraendo el producto formado por el número de las centenas menos uno y el coeficiente centenar; y como minuendo a un grupo de tres guarismos, formado por la centena quitada y los antedichos guarismos que siguen a las centenas.

11. — *Ejemplos:*

$D^{sor}\,D^{o} = 13$

$C.\,c.\,13 = -4$

$$N^{o}\,P^{o} = \overset{1}{7}\dot{2}7$$
$$\begin{array}{r} 727 \\ -24 \\ \hline 103 \\ -4 \\ \hline \end{array}$$
$R_{13} = -1 = 12$

$$N^{o}\,P^{o} = \overset{1}{8}\dot{3}9$$

$D^{sor}\,D^{o} = 37$

$C.\,c.\,37 = -11$

$$\begin{array}{r} 839 \\ -77 \\ \hline 62 \end{array}$$
$R_{37} = 25$

12. — También se pueden hacer combinaciones de coeficientes millares y diezmillares sustractivos con centenares aditivos o sustractivos.

Ejemplo: $N^{o}\,P^{o} = 6527$

$D^{sor}\,D^{o} = 19$

$C.\,m.\,(19 \text{ y } 53) = -7$

$C.\,c.\,19 = +5$

$$\begin{array}{r} 6527 \\ -42 \\ \hline 485 \\ 20 \\ \hline 105 \\ 5 \\ \hline \end{array}$$
$R_{19} = \underline{10}$

$D^{sor}\,D^{o} = 53$

$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 485$

$C.\,c.\,53 = -6$

$$\begin{array}{r} 485 \\ -24 \\ \hline 61 \end{array}$$
$R_{53} = 8$

Tabla de los números primos menores de 100 y sus correspondientes coeficientes de divisibilidad.

N. P.	C. m.	C. c.	C. d.	N. P.	C. m.	C. c.	N. P.	C.X.m.	C. m.	C. c.
2/5			0	29	101	+ 13	61	—	—	—
3		+ 1		31	101	+ 7	67		— 5	1/2
7	— 1	+ 9		37		— 11	71	—	—	—
11		+ 1		41	—	—	73		— 22	+ 27
13	— 1	+ 9		43	+ 11	+ 14	79	—	—	—
17	— 3	+ 2		47		+ 6	83		+ 4	+ 17
19	— 7	+ 5		53		— 6	89			+ 11
23	+ 11	+ 8		59		— 18	97			+ 3

Lógico es reconocer que sin un aprendizaje previo, la utilización de estos coeficientes no resulta práctica, aunque se opere directamente y con mayor rapidez que en la división; pero de los mismos surgen algunas reglas que se ponen a la consideración del lector.

REGLAS DE DIVISIBILIDAD

Divisibilidad por 7 y 13. Todo número es divisible por 7 y 13, si agrupados sus guarismos de tres en tres, de derecha a izquierda y tomados alternativamente a sumar y restar, resulta un tridígito al que aplicándole C. c. = 9, da un bidígito igual a 0 ó múltiplo de 7 y 13.

Divisibilidad por 17, 19 y 23. Todo número es divisible por 17, 19 y 23, si aplicando respectivamente C. c. 17 = — 2, C. c. 19 = = 5 y C. c. 23 = 8, se logra un resto bidígito igual a 0 ó múltiplo del divisor considerado.

La anterior regla se hace extensiva con C. c. = — 2 para 34, 51 y 102; con C. c. = 5 para 95; con C. c. = 8 para 46 y 92.

Divisibilidad por 29 y 31. Todo número es divisible por 29 y 31, si aplicando C. m. = 101 da un tridígito, el que, a su vez, al aplicarle C. c. = (13, 7), dan respectivamente bidígitos iguales a 0 ó múltiplos de 2 31.

Aplicando la clásica regla de divisibilidad por 2, 5 y las aquí expuestas a excepción de la primera, se puede investigar si un número menor que 1000 es primo o compuesto.

Divisibilidad por 37. Todo número es divisible por 37, si agrupados sus guarismos de tres en tres de derecha a izquierda y sumados sucesivamente hasta obtener un tridígito, el que, a su vez, al aplicarle C. c. 37 = — 11, da un bidígito igual a 0 ó un múltiplo de 37.

Esta regla se hace extensiva para 111.

Divisibilidad por 53 y 47. Todo número es divisible por 53 y 47 si aplicando respectivamente C. c. 53 = — 6 y C. c. 47 = + 6 resultan bidígitos iguales a 0, 53 y múltiplos de 47.

Esta regla se hace extensiva en sus respectivos coeficientes para 106 y 94.

Divisibilidad por 89 y 97. Todo número es divisible por 89 y 97, si aplicando respectivamente C. c. 89 = = 11 y C. c. 97 + + 3, dan bidígitos iguales a 0, 89 y 97.

En todos estos casos los restos obtenidos cuando el número no es múltiplo del divisor, son los mismos que se logran al dividir el número propuesto por el divisor considerado.

Juan José Rebella

CUESTIONES ELEMENTALES RESUELTAS

No. 8. Un cazador parte del punto A y camina 10 km. hacia el Sur; como allí no encuentra caza, camina un rato hacia el Este, mata un oso y regresa en línea recta hacia el punto A, caminando 10 km. ¿De qué color era el oso?

1a. *Solución.* Al caminar hacia el Sur, el cazador se mueve sobre un meridiano y al ir hacia el Este describirá un camino perpendicular al mismo, o sea un paralelo. Si el cazador describe todo el paralelo, suponiendo la longitud del mismo de más o menos 10 km., se trataría del paralelo de latitud Sur 89° 59' 16"; el cazador se encontraría, al partir, a 10 km. al Norte de este paralelo, o sea en la región polar austral donde hay solamente osos blancos.

Si el cazador no describe todo un paralelo se tiene que el punto B donde mata al oso, y también el C por distar 10 km. de A están sobre el círculo menor de centro A y radio 10 km. Además, en el punto B, dicho círculo menor y el paralelo determinado por B y C que describe el cazador, son tangentes; luego el círculo menor y el paralelo deben coincidir y A es por tanto uno de los polos. Como se habla de ir hacia el S., este polo debe ser el Norte y como en él sólo hay osos blancos, éste será también en este caso el color del oso cazado.

María M. Silva
(2° año del Inst. N. del Profesorado, Bs. Aires)

2a. *Solución.* El cazador sale de A. Camina 10 km. hacia el Sur (es decir, por un meridiano) hasta B, luego recorre cierto trecho hacia el Este, hasta el punto C desde donde vuelve al punto de partida, caminando 10 km.

1°. Si $B = C$ (el cazador recorre todo el paralelo) es fácil saber el color del oso averiguando la latitud del lugar mediante la fórmula conocida $\varphi = \arccos \frac{l}{2 \pi R}$, siendo l la longitud del paralelo o camino recorrido hacia el Este y R el radio terrestre. Si, por ejemplo, es $l = 20$ km., que es ya una longitud considerable para recorrerla en «un rato» como dice el problema, resulta $\varphi = 89° 58' 10''$. El cazador está por tanto muy cerca de alguno de los polos, y el oso debe ser blanco.

2°. Si $B \neq C$, debemos encontrar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de esos dos. Tal lugar es el plano mediatriz del segmento BC (que debe pasar por el centro de la Tierra y por A, ya que estos puntos cumplen la condición) y cuya traza en la Tierra es un meridiano. En la intersección de este meridiano con el que pasaba por B encontraremos el punto A que nos dirá el color del oso. Como los únicos puntos comunes a los meridianos son los polos, el punto de partida A debe ser uno de éstos; pero por las condiciones del enunciado debe ser el polo Norte. De aquí resulta que el oso tenía el pelaje blanco.

P. Sofía Nogués Acuña
(2º año de la Fac. de C. Exactas de B. Aires)

Otra elegante solución ha sido enviada por el Sr. Alfredo Calderón, alumno de la Fac. de Ingeniería de Buenos Aires.

Nº. 3. Calcular la suma de los infinitos segmentos obtenidos al proyectar un punto de un lado de un ángulo agudo sobre el otro, la proyección obtenida se proyecta sobre el primer lado, etc...

Generalizar el problema cuando la dirección de las proyecciones sobre cada lado no es perpendicular a él.

Solución. Para el primer caso, fig. 1, se observa que los triángulos sucesivos ABC, BCD, CDE, ... son semejantes por ser rectángulos y tener un ángulo agudo igual. Por consiguiente

$$\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{CD}=\frac{CD}{DE}=\frac{DE}{EF}=\ldots$$

que demuestra que las longitudes de AB, BC, CD, DE, ... forman una progresión geométrica de razón $\frac{BC}{AB} < 1$. La suma es por tanto

$$S=\frac{AB}{1-\frac{BC}{AB}}=\frac{AB^2}{AB-BC}$$

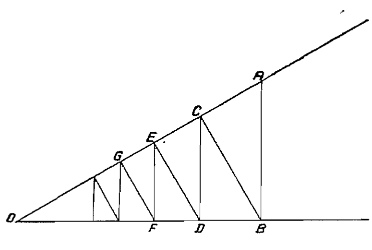


Fig. 1

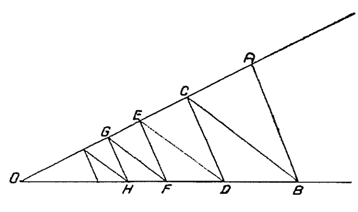


Fig. 2

Para la generalización, fig. 2, observemos que los triángulos ABC, CDE, EFG, ... son semejantes por tener los lados paralelos y por consiguiente

$$\frac{AB}{BC}=\frac{CD}{DE}=\frac{EF}{FG}=\ldots \qquad (1)$$

y análogamente, por ser también semejantes los triángulos BCD, DEF, FGH, ... se tiene:

$$\frac{BC}{CD}=\frac{DE}{EF}=\frac{FG}{GH}=\dots \qquad (2).$$

Multiplicando (1) y (2) ordenadamente resulta

$$\frac{AB}{CD}=\frac{CD}{EF}=\frac{EF}{GH}=\dots$$

que nos dice que AB, CD, EF, ... forman una progresión geométrica de razón $\frac{CD}{AB}<1$. Por tanto

$$S_1=AB+CD+EF+\dots=\frac{AB}{1-\frac{CD}{AB}}=\frac{AB^2}{AB-CD}$$

Si en (1) se prescinde del primer término $\frac{AB}{BC}$ y las demás igualdades se multiplican ordenadamente por (2) resulta

$$\frac{BC}{DE}=\frac{DE}{FG}=\dots$$

lo cual prueba que BC, DE, FG, ... forman otra progresión geométrica de razón $\frac{DE}{BC}<1$; su suma valdrá pues

$$S_2=BC+DE+FG+\dots=\frac{BC}{1-\frac{DE}{BC}}=\frac{BC^2}{BC-DE}$$

La suma total vale por tanto

$$S=S_1+S_2=\frac{AB^2}{AB-CD}+\frac{BC^2}{BC-DE}$$

Arminda Domenech
(2º año del Inst. N. del Profesorado, Bs. Aires)

CRONICA

SESION CIENTIFICA DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA CELEBRADA EL DIA 7 DE OCTUBRE DE 1941 EN LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

La Universidad de Buenos Aires estuvo representada por el director del Instituto de Matemáticas de la misma, doctor Julio Rey Pastor; el doctor Fernando L. Gaspar trajo la representación de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad del Litoral, de la cual es profesor y consejero titular, junto con el doctor Luis A. Santaló, del Instituto de Matemáticas. Por la Universidad de Cuyo tomaron parte en la reunión el doctor Fausto Toranzos, director del Instituto del Profesorado de San Luis y los profesores doctores Manuel Balanzat y Ernesto Corominas.

Abrió el acto el doctor Gaspar, quien se hizo eco de la consideración y respeto a que se ha hecho acreedora la Universidad Nacional de Cuyo en los demás centros universitarios del país.

Expresó el doctor Gaspar que la feliz circunstancia de encontrarse en ésta el profesor Julio Rey Pastor, su querido maestro y amigo, había motivado la realización en nuestra Universidad de una de las periódicas sesiones científicas de la U. M. A., de la que el doctor Rey Pastor es fundador y actual vicepresidente. Agregó el doctor Gaspar que esta oportunidad le brindaba el honor de exponer en nuestra Universidad el resultado de algunas de sus investigaciones en el campo científico pero que, en realidad, el principal objeto de la reunión en ésta había sido el traer personalmente, a la Universidad de Cuyo, la expresión de la solidaridad en que, en las presentes circunstancias, universitarios del litoral estrechan filas a su lado. A continuación expuso la teoría de la ortogonalidad en varias variables, en el campo de la estadística matemática, tal como él la ha desarrollado formulando al final algunos problemas aún no resueltos.

Acto seguido el doctor Toranzos concretó y resumió los resultados hasta ahora conocidos sobre la Geometría proyectiva de los espacios de Hilbert, y prosiguió después con la exposición de sus investigaciones sobre la homología.

Siguió en el uso de la palabra el doctor Santaló, el cual recordó el problema de corte de mármoles, que la solución clásica dada por Malfatti no resuelve. Dió ejemplos confirmando esta aserción y describió finalmente un programa general de ataque para reducir esta dificultad.

El doctor Manuel Balanzat expuso conceptos generales de la teoría de espacios abstractos para aplicarlos a los espacios Do y desarrolló ampliamente los conceptos de núcleo y separabilidad aplicados a estos espacios, aclarando así una cuestión que no estaba resuelta.

El doctor Corominas habló de la generalización de las derivadas en el cálculo infinitesimal, recorriendo la etapa final en el estudio de las propiedades esenciales de estas derivadas en la nueva teoría.

Cerró el acto el doctor Julio Rey Pastor, trazando brevemente las líneas generales de sus investigaciones recientes tendientes a llenar la laguna que todavía existe entre la Topología y la Geometría Diferencial. Terminó señalando a los joventes oyentes el hecho auspicioso del ingreso de la Argentina en la comunión de los países creadores de ciencia y expresando su optimismo por el porvenir de la investigación matemática, después de haber visto el entusiasmo con que trabajan profesores y alumnos en la joven universidad cuyana.

E. C.

VARIA

7. *Precocidad de Gauss*

Bien conocidos son los ejemplos de Pascal que reconstruyó muchos teoremas de Euclides a los 10 años de edad; de Abel que hizo sus geniales creaciones matemáticas entre los 21 y los 27 años, temprana edad en que le sorprendió la muerte; y el caso único de Galois, cuya obra inmortal, germen de la moderna Algebra, está contenida en la carta dirigida a su amigo Chevalier la víspera de su desafío que le costó la vida a los 21 años de edad; interesante y menos conocido es también el caso de Gauss.

No se sabe si por vocación propia, o sugestión de su protector el Duque Fernando de Braunschweig, pensaba Gauss dedicarse a la Filologia; pero una fuerza interior irresistible le obligaba a realizar largos cálculos numéricos con fabuloso número de cifras decimales; y esta manía de su mocedad había de reportarle incalculables ventajas en su futura actividad creadora. Porque muchos de sus descubrimientos los hizo empíricamente. Su famoso *teorema áureo,* o sea la ley de reciprocidad de los restos cuadráticos, lo descubrió desarrollando enormes divisiones para encontrar los períodos, que a veces tenían varios centenares de cifras, y así pudo descubrir empíricamente antes de los 18 años de edad la ley general que pronto había de inmortalizarle cuando en 1801, a los 24 años, publicó su primera obra extensa: las *Disquisiciones aritméticas,* en que organiza la moderna teoría de números. Poco después de este hallazgo de la ley de reciprocidad terminó de descubrir su propia personalidad, logrando resolver el viejo problema de la construcción del polígono regular de 17 lados con regla y compás. Tenía entonces 19 años no cumplidos y muy pronto llegó a la solución general de la ecuación ciclotómica, es decir, dió el criterio para saber qué polígonos regulares se pueden construir con regla y compás, cerrando así un ciclo de la ciencia griega y abriendo uno nuevo para el Algebra. Encontrando al fin su camino de Damasco, abandona los estudios filológicos, e inicia su famoso Diario, en que va anotando todos los pormenores de su gigantesca creación matemática.

Para ingresar como miembro de la Unión Matemática Argentina, es necesaria la presentación del solicitante por dos socios fundadores, la admisión por la Junta, y el pago de una cuota de \$ 5.— m/n. mensuales.

La cuota de la suscripción a las publicaciones de la U. M. A. (revista y fascículos independientes) es de \$ 10 m/n. anuales, cuyo envío deberá efectuarse por cheque, giro u otro medio libre de gastos, a la orden de la Tesorera, Srta. Dra. Clotilde A. Bula, Perú 222, Buenos Aires.

Los señores suscritores, domiciliados en la Ciudad de Buenos Aires podrán, si lo prefieren, efectuar su pago en doce cuotas mensuales de \$ 1.00 m/n. cada una, que serán cobradas a domicilio.

Los trabajos originales enviados para su publicación serán previamente analizados por un ponente, quien emitirá dictamen acerca de la novedad y corrección *de sus resultados.*

La impresión de las tiradas aparte, y las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

Abonnement annuel à l'etranger: 4.00 dollars (Etats-Unis).

Prière d'adresser toute la correspondance scientifique et administrative à l'adresse ci-dessous:

SR. SECRETARIO DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA
PROF. FERNANDO L. GASPAR

PERÚ 222, BUENOS AIRES (REP. ARGENTINA)

IMPRENTA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL — SANTA FE — R. ARGENTINA

S U M A R I O