Volumen VIII Número 2

REVISTA

DE LA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

(MIEMBRO DEL PATRONATO DE LA MATHEMATICAL REVIEWS)

BUENOS AIRES

1942

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Para ingresar como miembro titular de la Unión Matemática Argentina, es necesaria la presentación del solicitante por dos socios fundadores, la admisión por la Junta, y el pago de una cuota de \$ 5. — m/n. mensuales o de \$ 50.— anuales.

Para ingresar como miembro adherente (con derecho a la Revista y a las Memorias en fascículos separados) es necesario el pago de una cuota de \$ 10.— anuales. Los pagos deberán efectuarse por cheque, giro u otro medio libre de gastos, a la orden de la Tesorera, Prof. Clotilde A. Bula, Moreno 364, Rosario.

Los señores miembros adherentes domiciliados en la Ciudad de Buenos Aires podrán, si lo prefieren, efectuar su pago en doce cuotas mensuales de \$ 1.00 m/n. cada una, que serán cobradas a domicilio.

Por ser la U. M. A. miembro del patronato de la Mathematical Reviews (sponsoring member), los socios de la U. M. A. tienen derecho a suscribirse a esa importante revista de bibliografía y crítica, con 50 % de rebaja sobre el precio de suscripción que es de 13 dólares por año. Los socios de la U. M. A. pagarán por tanto sólo 6.50 dólares por año.

Los trabajos originales enviados para su publicación serán previamente analizados por un ponente, quien emitirá dictamen acerca de la novedad y corrección de sus resultados.

La impresión de las tiradas aparte, y las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

Abonnement annuel à l'etranger: 4.00 dollars (Etats-Unis).

Prière d'adresser toute la correspondance scientifique et administrative à l'adresse ci-dessous:

SR. SECRETARIO DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

PROF. FERNANDO L. GASPAR

PERÚ 222, Buenos Aires (REP. ARGENTINA)

PUBLICACIONES DE LA U. M. A.

VOLUMEN I (1936 - 1937)

Notas y memorias de C. BIGGERI, J. FAYET, J. BABINI, F. CERNUSCHI, A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ, J. REY PASTOR, SIXTO RIOS.
Bibliografía. Extractos.

VOLUMEN II (1938 - 1939)

Notas y memorias de CLOTILDE A. BULA, T. LEVI-CIVITA, A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ, M. PETROVICH, C. BIGGERI, S. RIOS, F. L. GASPAR, J. REY PASTOR, YANNY FRENKEL, J. A. DEL PERAL, F. TORANZOS.
Bibliografía. Crónica. Revista de revistas, etc.

(Sigue en la contratapa)

JULIO REY PASTOR

EN EL 25° ANIVERSARIO DE SU LLEGADA A LA ARGENTINA

Hace veinticinco años, en estos meses, llegaba a nuestro país Julio Rey Pastor, invitado para dictar, desde la cátedra de cultura hispánica de la *Institución cultural española,* dos ciclos de conferencias sobre matemática moderna. A esas primeras conferencias, verdaderas clases magistrales que versaron sobre *Sistematización de la geometría* y *Los fundamentos de la matemática actual,* siguieron otros cursos y conferencias, dictados en diversos centros científicos de la Argentina y del Uruguay, regresando luego Rey Pastor a su patria, de donde, después de breve estada, volvió a la Argentina, esta vez para radicarse definitivamente, con el objeto de organizar y dirigir los estudios matemáticos en la Universidad Nacional de Buenos Aires.

Los que seguimos de cerca la labor que desarrolló Rey Pastor en estos veinticinco años entre nosotros y nos aproximamos a él desde su llegada, primero como estudiantes algo temerosos ante el sabio profesor, luego como discípulos, tranquilos y confiados bajo el seguro apoyo del maestro y más tarde, como amigos, vinculados a él con sólidos lazos de afecto cordial; sabemos que la acción y labor científicas desplegadas por Rey Pastor han sido tan valiosas, extraordinarias y beneficiosas, que podemos considerar que su arribo a la Argentina señala un momento importante en el desarrollo de los estudios matemáticos en los países del Plata y marca el principio de una nueva etapa de los mismos.

La Unión Matemática Argentina y esta Revista, frutos ambos, como tantos otros, de esa fecunda acción y de esa inteligente labor, han contado a Rey Pastor entre sus fundadores, organizadores y directores y para ellas él ha sido y es, en todo momento, el alma y el guía; por eso, al recordar este aniversario, deseamos al querido maestro los mejores augurios para el porvenir y lamentando que haya declinado irrevocablemente el homenaje iniciado por un numeroso grupo de profesores, directores de institutos y rectores universitarios, al cual nos habríamos asociado con entusiasmo, le expresamos el profundo reconocimiento por su obra a favor de la ciencia y de la patria.

José Babini

CORONAS DE GRUPOS Y SUS SUBGRUPOS, CON UNA APLICACION A LOS DETERMINANTES

por Roberto Frucht

INTRODUCCION

Varios autores (véase el breve resumen histórico en el § 1) han observado que con dos grupos de permutaciones P_r y H respectivamente en r y s variables, se puede formar un nuevo grupo de permutaciones en rs variables, la «corona» $P_r[H]$. Para la definición de este grupo véase el § 2, para ejemplos de «coronas» el § 3. Después de haber indicado, en el § 4, la fórmula general para el producto de dos permutaciones de una corona, y en el § 5 unas consecuencias de dicha fórmula, paso, en el § 6, a la consideración de ciertos subgrupos de una corona, que están en analogía con los subgrupos «meromorfos» considerados en el caso de un producto directo por R. Remak en Lit. 5) (*).

Como a estos subgrupos da origen un subgrupo invariante J del grupo H, los denoto por $P_r[H;J]$. Tomando para P_r el grupo de orden 2, para H el grupo simétrico en n cifras y para el subgrupo invariante J el grupo alternado en n cifras, obtengo (en el § 7) un grupo interesantísimo del orden $(n!)^2$, que sólo para $n \leq 3$ es isomorfo al producto de dos grupos simétricos en n cifras. En el § 8 se demuestra además que dicho grupo es isomorfo al grupo de las permutaciones de los elementos de un determinante del orden n, las que no alteran el valor del determinante.

§ 1. *Breve resumen histórico.*

Parece que el primero que haya considerado, en un caso particular, la ley de formación de coronas de grupos, haya sido A. Scholz en Lit. 8); él observó que con dos grupos abstractos S y T, respectivamente de los órdenes σ y τ, se puede formar un nuevo grupo abstracto del orden $\sigma\tau^\sigma$, llamado

(*) Con la palabra "Lit." me refiero siempre a la lista de "Literatura citada" al final de este artículo.

por él $S \# T$; este grupo no es nada más que el caso particular de una corona de grupos $S[T]$, cuando para S se toma la representación del respectivo grupo abstracto por permutaciones regulares. El ejemplo de grupos cíclicos había sido considerado por Scholz en una publicación precedente (Lit. 7), bajo el nombre «Metabelsche Dispositionsgruppe».

Otro caso particular, el de las coronas del tipo $S_n[H]$ (designando por S_n siempre el grupo simétrico en n variables, del orden $n!$), ha sido considerado, casi simultáneamente, por B. Neumann (Lit. 3) y W. Specht (Lit. 10). El primero concentra su interés en la generación de $S_n[H]$ — y en particular de $S_n[S_m]$ — por pocos elementos, estableciendo entre ellos relaciones que definan el grupo; en cambio Specht, siguiendo un consejo de I. Schur, ha estudiado el problema de la representación de $S_n[H]$ por matrices (sustituciones lineales homogéneas), y el mismo problema también para el caso de la corona más general $P_r[H]$, en una segunda publicación (Lit. 11) (**).

Más tarde, e independientemente de las publicaciones citadas, G. Pólya llegó al concepto de las coronas de grupos, en una publicación (Lit. 4) igualmente interesante para quien se ocupe de grupos, topología combinatoria, teoría de funciones complejas o química orgánica. Pólya da una definición muy intuitiva de la corona $P_r[H]$ y aplicaciones interesantísimas a la topología combinatoria, observando que el grupo de automorfismos de un «álbero» se puede obtener aplicando a cierto número de grupos simétricos S_{m_1}, S_{m_2}, ... S_{m_k}, un número finito de veces, las dos operaciones: formación del producto directo y de la corona.

Con la traducción «corona» del término alemán «Kranz», yo quisiera seguir la terminología de Pólya, que me parece ser muy feliz. Pero observo que en lo que sigue no supongo el conocimiento del artículo de Pólya ni de las otras publicaciones citadas más arriba, sino que desarrollaré completamente el concepto de la corona, en la forma más adecuada para el estudio de las cuestiones a cuya solución quisiera contribuir con la presente publicación.

(**) Cabe observar que Neumann y Specht designan la corona por $S_n(H)$ resp. $P_r(H)$. La notación $P_r[H]$ y la misma palabra "corona" (en alemán "Kranz") se encuentran por primera vez en la publicación de Pólya (Lit. 4).

§ 2. *Definición de la corona* $P_r[H]$. *Descomposición en componentes.*

Dados dos grupos de permutaciones P_r y H, respectivamente en r y s variables, consideramos en una sala r mesas distintas; cada una sea rodeada de s sillas distintas en cierto orden bien determinado. Distribuimos ahora rs personas, numeradas desde *1* hasta rs, sobre las sillas, de modo que *cada* silla sea ocupada exactamente por *una* persona. Sometiendo las r mesas (con sus sillas, sin alterar, por ahora, el orden relativo de estas últimas alrededor de cada mesa) a las permutaciones del grupo P_r, y sometiendo sucesivamente las sillas de cada mesa a permutaciones del grupo H, las rs personas sufrirán ciertas permutaciones cuyo conjunto *forma un grupo* de permutaciones en rs variables.

Esta es una explicación intuitiva del concepto de la corona $P_r[H]$. Una definición exacta sería la siguiente:

Dados, como antes, un grupo de permutaciones en r variables P_r, del orden π, y otro en s variables, H, del orden η. consideramos r «ejemplares» de H, es decir r grupos $H^{(1)}$, $H^{(2)}$, ..., $H^{(r)}$, cada uno isomorfo (*) al grupo H, y con ellos formamos el producto directo $H^{(1)} \times H^{(2)} \times \ldots \times H^{(r)}$, es decir, el grupo del orden η^r en rs variables, por ejemplo en las variables

$$\text{(I.)} \quad \begin{cases} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \ldots & x_s^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \ldots & x_s^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(r)} & x_2^{(r)} & \ldots & x_s^{(r)} \end{cases}$$

que resulta cuando para cada $\rho = 1, 2, \ldots, r$, las variables $x_1^{(\rho)}, x_2^{(\rho)}, \ldots, x_s^{(\rho)}$ son sometidas a las permutaciones del grupo $H^{(\rho)}$.

En otras palabras, si $h_1^{(1)}$ es una permutación de $H^{(1)}$ (correspondiente, en base del isomorfismo $H^{(1)} \sim H$, a la per-

(*) Empleo las palabras "isomorfo" e "isomorfismo" siempre en el sentido de una correspondencia recíprocamente unívoca entre los elementos de dos grupos G y H, la que mantiene la ley de multiplicación, y denoto este isomorfismo abreviadamente por $G \sim H$.

mutación h_1 de H), $h_2^{(2)}$ una de $H^{(2)}$ (correspondiente a la h_2 de H), etc., el elemento $h_1^{(1)}.h_2^{(2)}\ldots h_r^{(r)}$ de $H^{(1)}\times H^{(2)}\times\ldots\times H^{(r)}$ es la permutación de las rs variables $x_\sigma^{(\rho)}$ que se compone de la permutación $h_1^{(1)}$ de las variables $x_\sigma^{(1)}$ que forman la primera fila del esquema (I.), de la permutación $h_2^{(2)}$ de las variables $x_\sigma^{(2)}$ de la segunda fila, etc.

Ahora bien, si el grupo P_r tiene el orden $\pi = 1$, definimos: $P_r[H] = H^{(1)}\times H^{(2)}\times\ldots\times H^{(r)}$; si el orden π de P_r es mayor que *1*, a cada permutación p de P_r hacemos corresponder la permutación $p^{(o)}$ de las variables $x_\sigma^{(\rho)}$ que resulta cuando las r *filas* horizontales del esquema (I.) son sometidas a la permutación p (sin alterar el orden de las variables en cada fila), y consideramos las permutaciones

$$p^{(o)}\,.\,h_1^{(1)}\,.\,h_2^{(2)}\,.\;\ldots\;.\,h_r^{(r)}$$

de las variables $x_\sigma^{(\rho)}$ del esquema (I.), es decir, aquellas, en donde primeramente las filas del esquema son sometidas a una permutación de P_r y después las variables en las filas a permutaciones que corresponden a las del grupo H. Estas $\pi\eta^r$ permutaciones del tipo $p^{(o)}.h_1^{(1)}.h_2^{(2)}.\;\ldots\;.h_r^{(r)}$ forman la *corona* $P_r[H]$.

Se ve fácilmente que la corona $P_r[H]$ es realmente un *grupo*. Sin anticipar la fórmula para el producto de dos permutaciones de $P_r[H]$, la que será indicada en el § 4 (y que sirvió a Specht como definición de la corona), se comprende «a priori» que el resultado de dos permutaciones sucesivas del tipo descrito es también una permutación del mismo tipo (lo que es suficiente para que un conjunto de permutaciones forme un grupo).

Cabe observar que es *unívoca* la representación de las permutaciones de la corona $P_r[H]$ en la forma

$$u = p^{(o)}\,h_1^{(1)}\,h_2^{(2)}\;\ldots\;.\,h_r^{(r)}$$

en donde $p^{(0)}$ es una permutación de las filas (sin alterar en ellas el orden relativo de las variables) y $h_\rho^{(\rho)}$ es una permutación de las variables de la ρ-ésima fila del esquema (I.) ($\rho = 1, 2, \ldots r$). Diremos que $p^{(0)}$ es la *componente* de la permutación u respecto de P_r y $h_\rho^{(\rho)}$ la *componente* de u respecto de $H^{(\rho)}$ ($\rho = 1, 2, \ldots r$). Está claro cómo hay que proceder para encontrar las componentes de una permutación u de las variables del esquema (I.) la que pertenece a la corona $P_r[H]$: primeramente se considera sólo la permutación p que sufren las filas horizontales del esquema (sin tomar en cuenta, por ahora, lo que pasa con las variables mismas en las filas); escribiendo dicha permutación de las filas como permutación de las variables $x_\sigma^{(\rho)}$, obtenemos la componente $p^{(0)}$ de u respecto de P_r. Las otras componentes se determinan después fácilmente como las permutaciones de las variables en cada fila que hay que agregar a $p^{(0)}$ para obtener u.

Un ejemplo de esta descomposición en componentes seguirá en el § 3.

§ 3. *Ejemplos para coronas.*

a) Consideremos un octaedro regular (Fig. 1) y su grupo, es decir el grupo de los movimientos (rotaciones) que lo dejan invariante. Como se sabe, este grupo es isomorfo al grupo simétrico S_4 en 4 variables, porque hay isomorfirmo entre dichos movimientos y todas las permutaciones de las 4 rectas que unen los centros de gravedad de dos triángulos opuestos del octaedro.

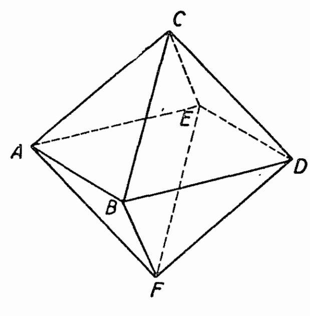

Fig. 1.

Ahora pasamos a la consideración del grupo que resulta cuando a los movimientos del octaedro agregamos todavía las transformaciones compuestas de un movimiento y de la «reflexión al centro», la que reemplaza cada vértice del octaedro por el diametralmente opuesto (por ejemplo A por D, B por E, etc.). La reflexión al centro forma, con la identidad, un grupo S_2 del orden 2, y es conmutable con cada movimiento; por consiguiente, el nuevo grupo que estamos considerando, es isomorfo al producto *directo* $S_4 \times S_2$ del orden 48.

Por otra parte, el mismo grupo se puede interpretar también como corona $S_3[S_2]$, considerando como variables de permutar los 6 vértices del octaedro; como los 6 vértices se pueden dividir en 3 pares de 2 vértices diametralmente opuestos:

$$\text{(II.)} \left\{ \begin{array}{cc} A & D \\ B & E \\ C & F \end{array} \right.$$

y como el grupo considerado comprende todas las permutaciones de las filas del esquema (II.) — grupo: S_3 — con sucesivas permutaciones, según S_2, en las filas, resulta, por definición, la corona $S_3[S_2]$.

Así el «grupo amplificado del octaedro» enseña la existencia de un isomorfismo entre el producto directo $S_4 \times S_2$ y la corona $S_3[S_2]$ (*) y vemos en este caso que una corona, considerada como grupo abstracto, puede ser isomorfa a un producto directo.

Aprovechemos este primer ejemplo «concreto» de una corona para ilustrar, en un ejemplo, la descomposición en componentes de una permutación de la corona. Sea u una rotación del octaedro alrededor del eje «vertical» CF por el ángulo 90°, seguida por la sustitución de cada vértice por el diametralmente opuesto:

$$u = \begin{pmatrix} A\,B\,C\,D\,E\,F \\ E\,A\,F\,B\,D\,C \end{pmatrix}.$$

¿Cuáles son las componentes de u? Como u permuta A y D, las «variables» de la primera fila, en B y E, las de la

(*) La existencia de este isomorfismo explica porqué en una publicación mía anterior (Lit. 1), el grupo considerado ahora, aparece sólo en la forma del producto directo $S_4 \times S_2$, mientras Pólya, en la pág. 214 de la publicación ya citada (Lit. 4), da la preferencia a la interpretación como corona $S_3[S_2]$.

segunda, etc., vemos que la permutación de las tres filas es la siguiente:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

y por eso:

$$p^{(0)} = \begin{pmatrix} A & D \\ B & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B & E \\ A & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C & F \\ C & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ B & A & C & E & D & F \end{pmatrix}.$$

$p^{(0)}$ no es todavía igual a u, sino que es necesario hacer seguir a $p^{(0)}$ las siguientes permutaciones *en las distintas filas* para llegar a u:

en la primera: ninguna (tenemos $B \rightarrow A$ y $E \rightarrow D$ en $p^{(0)}$ como en u)

en la segunda: permutación de B en E y viceversa

en la tercera: permutación de C en F y viceversa.

Por eso, las componentes de u respecto de $H^{(1)}$, $H^{(2)}$ y $H^{(3)}$ son, respectivamente, la identidad, $h_2^{(2)} = \begin{pmatrix} B & E \\ E & B \end{pmatrix}$ y $h_3^{(3)} = \begin{pmatrix} F & C \\ C & F \end{pmatrix}$

b) Introduciendo todavía un sistema de coordenadas cartesianas, con el centro del octaedro regular como origen O y con $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, como ejes positivos de las x_1, x_2, x_3; vemos que el grupo $S_3[S_2]$ se puede representar también como grupo de transformaciones de coordenadas del tipo:

$$x_1 = \varepsilon_1 x'_\alpha \ , \quad x_2 = \varepsilon_2 x'_\beta \ , \quad x_3 = \varepsilon_3 x'_\gamma \ ,$$

en donde $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$ es una permutación cualquiera y $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = = \varepsilon_3^2 = 1$.

De un modo general, todas las transformaciones en m variables:

$$x_r = \varepsilon_r x'_{\alpha_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, m),$$

siendo $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_m \end{pmatrix}$ una permutación cualquiera en m cifras y $\varepsilon_r^2 = 1$ $(r = 1, 2, \ldots, m)$, forman un grupo del orden $2^m . m!$, el grupo «hiperoctaedral», que se puede interpretar como corona $S_m[S_2]$ (véase Specht, Lit. 10). En este caso, las $2m$ variables de permutar son los puntos del espacio de m dimensiones los que tienen todas sus coordenadas iguales a cero, con excepción de una que es igual a *1* o a -1; las componentes de las permutaciones de dichos puntos respecto de S_m son las permutaciones de los m ejes de coordenadas sin tomar en cuenta su sentido positivo o negativo.

Las permutaciones de la corona $S_m[S_2]$ se pueden también caracterizar como las permutaciones de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_{2m}$, que dejan invariante el polinomio:

$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_5 + x_6) \cdot \ldots \cdot (x_{2m-1} + x_{2m})$$

o el otro («dual» al primero) (*):

$$x_1 x_2 + x_3 x_4 + x_5 x_6 + \ldots + x_{2m-1} x_{2m}.$$

En el caso particular de $m = 2$ obtenemos un grupo $S_2[S_2]$ del orden 8, que es isomorfo al grupo diédrico del mismo orden (= grupo de movimientos de un cuadrado en el espacio).

c) Las coronas $S_m[S_2]$ que acabamos de considerar representan sólo un caso particular ($n = 2$) de las coronas $S_m[S_n]$ del orden $m!(n!)^m$. Evidentemente, $S_m[S_n]$ se puede obtener como grupo de las permutaciones de mn variables $x_1, x_2, \ldots x_{mn}$ que no alteran el valor del polinomio:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)(x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{2n})$$
$$(x_{2n+1} + \ldots + x_{3n}) \cdot \ldots \cdot (x_{(m-1)n+1} + \ldots + x_{mn})$$

o del otro («dual» al primero):

$$x_1 x_2 x_3 \cdot \ldots \cdot x_n + x_{n+1} x_{n+2} x_{n+3} \cdot \ldots \cdot x_{2n} +$$
$$x_{2n+1} x_{2n+2} \cdot \ldots \cdot x_{3n} + \ldots + x_{(m-1)n+1} \cdot \ldots \cdot x_{mn}.$$

En otras palabras, se trata de todas las permutaciones que permutan entre sí las filas horizontales del esquema:

(*) Hay aquí un principio de dualidad análogo al que rige, en la lógica formalística, para las operaciones "&" y "v".

$$
\text{(III.)} \begin{cases} x_1, & x_2, & \ldots x_n \\ x_{n+1}, & x_{n+2}, & \ldots x_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ x_{(m-1)n+1}, & x_{(m-1)n+2}, & \ldots x_{mn} \end{cases}
$$

de cualquier manera, permutando, además, las variables de cada fila de todos los modos posibles. Por eso, Specht llama $S_m[S_n]$ el grupo imprimitivo completo del tipo (m, n).

d) El grupo «hiperoctaedral» $S_m[S_2]$ se puede considerar también como caso particular de la corona $S_m[C_n]$ del orden $m!\,n^m$, designando por C_n el grupo cíclico del orden n. $S_m[C_n]$ se puede caracterizar, en el grupo simétrico S_{mn} (que comprende todas las permutaciones de las cifras $1, 2, 3, \ldots mn-1, mn$), como el subgrupo de las permutaciones conmutables con un producto de m ciclos de a n cifras, por ejemplo con:

$$
(1, 2, 3, \ldots n)\ (n+1, n+2, n+3, \ldots, 2n)
$$
$$
(2n+1, 2n+2, \ldots, 3n) \ldots\ldots ((m-1)n+1, \ldots, mn).
$$

Consideremos todavía el caso particular de que $n+1=p$ sea un número primo. En este caso, $S_m[C_n]=S_m[C_{p-1}]$ se puede interpretar también como el grupo de ciertos automorfismos de un grupo abeliano del orden p^m que es el producto directo de m grupos cíclicos del orden p. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_m$ m elementos del orden p que engendran dicho grupo abeliano (o, en otras palabras, que forman una base del grupo abeliano). Entre todos los automorfismos del grupo abeliano, habrá ciertos que permutan cada elemento a_μ $(\mu=1, 2, \ldots, m)$ en un elemento a_r o en una potencia $a_r{}^\rho$ de un elemento a_r $(r \neq \mu$ o $r=\mu)$. Evidentemente, estos automorfismos forman una corona $S_m[C_{p-1}]$, del orden $m!(p-1)^m$, y tratándose de un subgrupo del grupo de *todos* los automorfismos del grupo abeliano considerado, resulta que $m!(p-1)^m$ debe ser un divisor del orden de este último grupo, es decir de

$$
(p^m-1)(p^m-p)(p^m-p^2)\ldots\ldots(p^m-p^{m-1})
$$
$$
=p^{1+2+3\ldots+m-1}.(p-1)(p^2-1)(p^3-1)\ldots\ldots(p^{m-1}-1)(p^m-1)
$$
$$
=p^{\frac{m(m-1)}{2}}.(p-1)^m.(1+p)(1+p+p^2)
$$
$$
(1+p+p^2+p^3)\ldots\ldots(1+p+p^2+\ldots+p^{m-1})
$$

Simplificando aún por el factor común $(p-1)^m$, obtenemos así un teorema de la teoría de los números:

Para cada número entero positivo m *y cada número primo* p *el producto*

$$p^{\frac{m(m-1)}{2}}.(1+p)(1+p+p^2)$$
$$(1+p+p^2+p^3).\ \dots\ .(1+p+p^2+p^3+\dots+p^{m-1})$$

es divisible por m!

Cabe observar que este teorema resulta también como consecuencia inmediata de la siguiente fórmula demostrada por I. Schur (Lit. 9): Con las notaciones abreviadas

$$s_\mu = 1+x+x^2+\dots+x^\mu\ ,$$

$$\begin{bmatrix} m \\ o \end{bmatrix} = 1$$

y

$$\begin{bmatrix} m \\ \mu \end{bmatrix} = \frac{(x^m-1)(x^{m-1}-1)(x^{m-2}-1).\ \dots\ .(x^{m-\mu+1}-1)}{(x-1)(x^2-1)(x^3-1).\ \dots\ .(x^\mu-1)}$$

para $0 < \mu \leqq m$ es

$$x^{\frac{m(m-1)}{2}}.s_1 s_2 s_3.\ \dots\ .s_{m-1} = m!\ .\sum_{\mu=o}^{m-1} (-1)^\mu \begin{bmatrix} m \\ \mu \end{bmatrix} x^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}} \binom{s_{m-\mu-1}}{m}$$

Esta fórmula enseña que para cualquier número entero x (y no sólo un número primo p) el producto

$$x^{\frac{m(m-1)}{2}}.s_1 s_2 s_3.\ \dots\ .s_{m-1} = x^{\frac{m(m-1)}{2}}.(1+x)(1+x+x^2)$$
$$(1+x+x^2+x^3).\ \dots\ .(1+x+x^2+\dots+x^{m-1})$$

es divisible por $m!$

e) Un subgrupo del grupo $S_m[C_n]$ es la corona $C_m[C_n]$ del orden $m\,n^m$ (siendo, por supuesto, C_m el grupo cíclico del orden m). Para $C_m[C_n]$ se puede dar la siguiente interpretación «cinemática» (variando ligeramente un ejemplo indicado por Pólya):

Cada uno de los m vértices de un polígono regular que pueda girar en su plano alrededor de su centro, sea reemplazado por una circunferencia del pequeño radio r, situada en el mismo plano y que pueda girar alrededor de su centro. Sobre cada circunferencia márquense todavía n puntos equidistantes. (Una ilustración del caso: $m = 5$, $n = 4$, se encuentra en la Fig. 2). Fijando cierta posición primitiva del polígono y de las «ruedas», consideramos ahora todos los movimientos planos de ellos que conduzcan a una posición que difiera de la primitiva sólo por una permutación de los mn puntos marcados sobre las n circunferencias («ruedas»). Dichas permutaciones forman un grupo isomorfo a $C_m[C_n]$, considerando como variables de permutar los mn puntos marcados; más exactamente dicho: los de *una* circunferencia forman siempre las variables de una fila del esquema (III.).

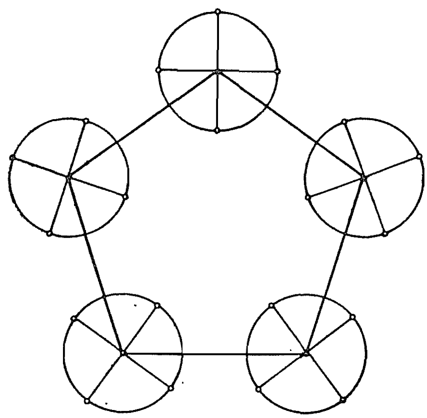

Fig. 2

En lugar de las permutaciones de las mn variables, podemos considerar también las sustituciones *monomiales* en m variables $z_1, z_2, \ldots, z_m$ que correspondan a las m ruedas, distinguiendo los n puntos de *una* rueda sólo por factores 1, ε, $\varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}$, en donde ε es una primitiva raíz n-ésima de la unidad.

Así, el grupo $C_m[C_n]$ se podría engendrar por las dos sustituciones monomiales:

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \ldots & z_{m-1} & z_m \\ z_2 & z_3 & z_4 & \ldots & z_m & z_1 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} z_1 \; z_2 \; z_3 \; \ldots \; z_{m-1} \; z_m \\ \varepsilon z_1 \; z_2 \; z_3 \; \ldots \; z_{m-1} \; z_m \end{pmatrix}$$

f) De un modo más general, cada corona del tipo $P_r[C_n]$ se puede escribir como el grupo de sustituciones monomiales en r variables que se obtiene cuando a cada permutación de P_r, escrita en r variables $z_1, z_2, \ldots, z_r$:

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \ldots & z_r \\ z_{\alpha_1} & z_{\alpha_2} & z_{\alpha_3} & \ldots & z_{\alpha r} \end{pmatrix}$$

hacemos corresponder las n^r sustituciones monomiales:

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \ldots & z_r \\ \varepsilon_1 z_{\alpha_1} & \varepsilon_2 z_{\alpha_2} & \varepsilon_3 z_{\alpha_3} & \ldots & \varepsilon_r z_{\alpha r} \end{pmatrix}$$

con $\varepsilon_\rho{}^n = 1$ $(\rho = 1, 2, \ldots r)$.

Recíprocamente, cada grupo de sustituciones monomiales en r variables, cuyos «factores» ε_ρ son raíces n-ésimas de la unidad, es un subgrupo de la corona $S_r[C_n]$ del orden $r!n^r$ (*).

§ 4. *La ley de multiplicación en* P$_r$[H].

Volvemos ahora al caso general de una corona cualquiera $P_r[H]$, formada con dos grupos de permutaciones P_r y H, respectivamente en r y s variables, y preguntamos: ¿cuál es el producto de dos permutaciones de $P_r[H]$, por ejemplo el producto

$$(p^{(0)} h_1{}^{(1)} h_2{}^{(2)} \ldots . \, h_r{}^{(r)}) \, . \, (q^{(0)} k_1{}^{(1)} k_2{}^{(2)} \ldots . \, k_r{}^{(r)}),$$

siendo $h_\rho^{(\rho)}$ y $k_\rho^{(\rho)}$ dos permutaciones de $H^{(\rho)}$ (**) $(\rho = 1, 2, \ldots, r)$

(*) Para los que conocen la teoría de los ''graphs'', añado que la corona $S_r[H]$ se puede interpretar como el grupo de automorfismos del ''graph'' formado por r ''ejemplares'' de Γ, cuando H es el grupo de automorfismos de un ''graph conexo'' Γ. En una publicación anterior (Lit. 2), he demostrado que para cada grupo abstracto H existe una infinidad de estos ''graphs'' que tengan un grupo de automorfismos isomorfo a H.

(**) Que correspondan a las permutaciones h_ρ y k_ρ de H en virtud del isomorfismo $H(\rho) \backsim H$.

y $p^{(o)}$ y $q^{(o)}$ las permutaciones de las variables $x_\sigma^{(\rho)}$ que resultan cuando aplicamos dos permutaciones p y q de P_r a las r filas horizontales del esquema (I.)? (En otras palabras, queremos determinar el producto de las permutaciones con las componentes $p^{(o)}$, $h_1^{(1)}$, $h_2^{(2)}$, ..., $h_r^{(r)}$ y $q^{(o)}$, $k_1^{(1)}, k_2^{(2)}$, ..., $k_r^{(r)}$).

Supongamos que q sea la permutación que transforma la cifra ρ en β_ρ $(\rho = 1, 2, \ldots, r)$:

$$\text{(IV.)} \qquad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & r \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_r \end{pmatrix}$$

En este caso, $q^{(0)}$ será la misma permutación, pero aplicada a las r *filas* del esquema (I.), y por consiguiente, transformará $x_\sigma^{(\rho)}$ en $x_\sigma^{(\beta\rho)}$ $(\rho = 1, 2, \ldots, r;\ \sigma = 1, 2, \ldots, s)$.

En primer lugar determinaremos la permutación $(q^{(0)})^{-1}$ $h_1^{(1)}$ $q^{(0)}$, es decir la transformada de la permutación $h_1^{(1)}$ por la permutación $q^{(0)}$. $h_1^{(1)}$ permuta sólo las variables $x_\sigma^{(1)}$ de la primera fila de (I.); pero, a raíz de la permutación precedente $(q^{(0)})^{-1}$ se encuentran allí las variables que pertenecían primitivamente a la fila β_1; y por la sucesiva aplicación de $q^{(0)}$, dichas variables vuelven a ocupar la fila β_1, después de haber sufrido la permutación $h_1^{(1)}$ en la primera fila. Entonces, el efecto de la permutación $(q^{(0)})^{-1}$ $h_1^{(1)}$ $q^{(0)}$ será el siguiente: las variables $x_1^{(\beta_1)}$, $x_2^{(\beta_1)}$, ..., $x_s^{(\beta_1)}$ de la fila β_1 son permutadas entre sí, como si hubiéramos aplicado a ellas la permutación $h_1^{(\beta_1)}$ (es decir la permutación que corresponde a la permutación h_1 de H, en virtud del isomorfismo $H^{(\beta_1)} \backsim H$); las variables de todas las otras filas no sufren ninguna permutación. Así vemos que es:

$$(q^{(0)})^{-1}\, h_1^{(1)}\, q^{(0)} = h_1^{(\beta_1)}.$$

De manera análoga siguen las relaciones

$$(q^{(0)})^{-1}\, h_\rho^{(\rho)}\, q^{(0)} = h_\rho^{(\beta\rho)},$$

y multiplicando todas éstas, para $\rho = 1, 2, \ldots, r$, obtenemos el resultado

$$(q^{(0)})^{-1}\, (h_1^{(1)} h_2^{(2)} \cdot \ldots \cdot h_r^{(r)}) \cdot q^{(0)} = h_1^{(\beta_1)}\, h_2^{(\beta_2)} \cdot \ldots \cdot h_r^{(\beta_r)}.$$

Introduciendo todavía la permutación q^{-1}, inversa a la (IV.):

$$\text{(IV'.)} \qquad q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & r \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \dots & \gamma_r \end{pmatrix},$$

obtenemos la siguiente fórmula para la transformación de $h_1{}^{(1)} h_2{}^{(2)} \dots\dots h_r{}^{(r)}$ con $q^{(0)}$:

$$\text{(V.)} \quad (q^{(0)})^{-1} (h_1{}^{(1)} h_2{}^{(2)} \dots\dots h_r{}^{(r)}) \,.\, q^{(0)} = h_{\gamma_1}{}^{(1)} h_{\gamma_2}{}^{(2)} \dots\dots h_{\gamma_r}{}^{(r)}.$$

Esta fórmula permite ahora el cálculo del producto de dos permutaciones

$$u = p^{(0)} h_1{}^{(1)} h_2{}^{(2)} \dots\dots h_r{}^{(r)}$$

y

$$v = q^{(0)} k_1{}^{(1)} k_2{}^{(2)} \dots\dots k_r{}^{(r)}$$

de $P_r[H]$:

$$\begin{aligned} u\,v &= p^{(0)} h_1{}^{(1)} h_2{}^{(2)} \dots\dots h_r{}^{(r)} q^{(0)} k_1{}^{(1)} k_2{}^{(2)} \dots\dots k_r{}^{(r)} \\ &= p^{(0)} q^{(0)} \,.\, (q^{(0)})^{-1} \,.\, (h_1{}^{(1)} h_2{}^{(2)} \dots\dots h_r{}^{(r)}) \,.\, q^{(0)} \,.\, k_1{}^{(1)} k_2{}^{(2)} \dots\dots k_r{}^{(r)} \\ &= p^{(0)} q^{(0)} \,.\, h_{\gamma_1}{}^{(1)} h_{\gamma_2}{}^{(2)} \dots\dots h_{\gamma_r}{}^{(r)} \,.\, k_1{}^{(1)} k_2{}^{(2)} \dots\dots k_r{}^{(r)} \\ &= p^{(0)} q^{(0)} \,.\, h_{\gamma_1}{}^{(1)} k_1{}^{(1)} \,.\, h_{\gamma_2}{}^{(2)} k_2{}^{(2)} \dots\dots h_{\gamma_r}{}^{(r)} k_r{}^{(r)}. \end{aligned}$$

Observando que es

$$p^{(0)} q^{(0)} = (pq)^{(0)}$$

y escribiendo más brevemente $(h_{\gamma\rho}\, k_\rho\,)^{(\rho)}$ para la permutación $h_{\gamma\rho}^{(\rho)}\; k_\rho^{(\rho)}$ de $H^{(\rho)}$ que corresponde a la $h_{\gamma\rho}\; k_\rho$ de H (en virtud del isomorfismo $H^{(\rho)} \sim H$), sigue la *ley de multiplicación en* $P_r[H]$:

$$\text{(VI.)} \quad \begin{aligned} &(p^{(0)} h_1{}^{(1)} h_2{}^{(2)} \dots\dots h_r{}^{(r)})(q^{(0)} k_1{}^{(1)} k_2{}^{(2)} \dots\dots k_r{}^{(r)}) = \\ &(p\,q)^{(0)} (h_{\gamma_1} k_1)^{(1)} (h_{\gamma_2} k_2)^{(2)} \dots\dots (h_{\gamma_r} k_r)^{(r)}. \end{aligned}$$

Esta fórmula enseña que en la multiplicación de dos permutaciones de $P_r[H]$, *las componentes respecto de* P_r *se mul-*

tiplican, pero no las otras componentes, sino que la componente del producto respecto de $H^{(\rho)}$, es igual a $(h_{\gamma\rho}\ k_{\rho})^{(\rho)}$, es decir a la permutación correspondiente al producto de $h_{\gamma\rho}$ (y no de h_{ρ}) por k_{ρ}, en donde γ_{ρ} es la cifra en que la permutación q^{-1} permuta la cifra ρ (*).

§ 5. *Observaciones generales sobre coronas.*

a) La fórmula (VI.) aplicada al caso

$$p=q=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \dots r \\ 1 & 2 & 3 \dots r \end{pmatrix},$$

permite comprobar la exactitud de un teorema que ha sido establecido por Specht:

Las permutaciones de $P_r[H]$ *cuya componente respecto de* P_r *es igual a la identidad (o en otras palabras, las permutaciones que permutan sólo entre sí las variables de la primera fila, las de la segunda fila, etc., sin que haya una permutación de las filas del esquema (I.) entre sí) forman un subgrupo invariante* $E_r[H]$ *de* $P_r[H]$, *del orden* η^r, *e isomorfo al producto directo* $H^{(1)} \times H^{(2)} \times \dots \times H^{(r)}$.

Además rige el isomorfismo

$$\frac{P_r[H]}{E_r[H]} \sim P_r,$$

y por eso podemos enunciar el siguiente teorema más general:

Si P_r *posee un subgrupo* P'_r, *del orden* π' *y del índice* $\frac{\pi}{\pi'}$, *también* $P_r[H]$ *posee un subgrupo* $P'_r[H]$ *del mismo índice* $\frac{\pi}{\pi'}$ *(o del orden* $\pi' . \eta^r$*). Si* P'_r *es un subgrupo invariante de* P_r, *también la corona* $P'_r[H]$ *es un subgrupo invariante de la corona* $P_r[H]$.

(*) Ahí está la diferencia entre la corona $P_r[H]$ y el producto directo

$$P_r \times H^{(1)} \times H^{(2)} \times \dots \times H^{(r)};$$

pues. en el caso de un producto directo, se multiplicarían no sólo las componentes respecto de P_r, sino también las otras.

Ejemplo: El grupo simétrico S_m posee en el grupo alternado A_m un subgrupo invariante del índice 2; por eso, también la corona $S_m[S_n]$ (considerada en § 3, c) posee un subgrupo invariante del índice 2 en $A_m[S_n]$. Este último grupo se puede caracterizar como el conjunto de las permutaciones de x_1, x_2, ..., x_{mn}, que dejan invariante el polinomio

$$(x_1 x_2 \ldots x_n - x_{n+1} x_{n+2} \ldots\ldots x_{2n})$$

$$(x_1 x_2 \ldots\ldots x_n - x_{2n+1} x_{2n+2} \ldots\ldots x_{3n}) \ldots\ldots$$

$$(x_{(m-2)n+1} x_{(m-2)n+2} \ldots\ldots x_{(m-1)n} - x_{(m-1)n+1} x_{(m-1)n+2} \ldots\ldots x_{mn}).$$

b) Hasta ahora hemos considerado las coronas $P_r[H]$ como grupos de permutaciones, por ejemplo de las variables del esquema (I.); pero, ahora la fórmula (VI.) nos da también la posibilidad de comparar diferentes coronas y, eventualmente, constatar su isomorfismo como grupos *abstractos*.

Por ejemplo, si conocemos un grupo de permutaciones H' en s' variables que sea isomorfo al grupo de permutaciones H en s variables (pero $s' \neq s$), podemos formar, con un grupo de permutaciones P_r en r variables, las coronas $P_r[H]$ y $P_r[H']$, que serán diferentes como grupos de permutaciones (lo serán ya en virtud del distinto número de variables de permutar que es respectivamente igual a rs y rs'). Pero la fórmula (VI.), en que no entra por nada la cuestión si las componentes $h_\mu^{(\rho)}$ y $k_\rho^{(\rho)}$ sean permutaciones en s o s' variables, enseña que hay isomorfismo entre $P_r[H]$ y $P_r[H']$, considerando las dos coronas como grupos abstractos:

$$P_r[H] \sim P_r[H'], \text{ cuando } H \sim H'.$$

Ejemplo: Designemos por $R_6^{(S_3)}$ la representación del grupo S_3 por permutaciones «regulares» en 6 variables (*); la corona $S_2[R_6^{(S_3)}]$ será un grupo de permutaciones del orden 72

(*) Quiere decir que representamos dos elementos (de órdenes 2 y 3 respectivamente) que engendran el grupo abstracto S_3, por las siguientes permutaciones en 6 cifras:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ respectivamente } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

en 12 variables, pero, como grupo abstracto, isomorfo a la corona $S_2[S_3]$, grupo de permutaciones en 6 variables.

c) En cambio, *si* $r \neq t$ *y* η (*= orden de* H) > 1, *no hay nunca isomorfismo entre las coronas* $P_r[H]$ *y* $Q_t[H]$, *aunque* P_r *y* Q_t *sean dos grupos de permutaciones (respectivamente en* r *y t variables) isomorfos entre sí.*

Demostración: No puede haber isomorfismo, porque el orden de $Q^t[H]$, $\pi\eta^t$, es distinto del orden de $P_r[H]$, $\pi\eta^r$ (por ser $r \neq t$ y $\eta > 1$).

Ejemplo: $R_6^{(S_3)}[S_2]$ del orden $6 \cdot 2^6 = 384$ no es isomorfo a $S_3[S_2]$, grupo del orden $6 \cdot 2^3 = 48$.

d) El teorema que acabamos de demostrar enseña que el concepto de corona *no* es un concepto de la teoría *abstracta* de grupos, como lo sería, por ejemplo, el de producto directo (siendo

$$G \times H \sim G' \times H',$$

cuando

$$G \sim G' \text{ y } H \sim H').$$

Así, con dos grupos abstractos G y H se pueden formar diferentes (y no isomorfas) coronas: $G_{r_1}[H]$, $G_{r_2}[H]$, $G_{r_3}[H]$, . . ., tomando varias representaciones del mismo grupo abstracto G por permutaciones (distintas por el número de las variables de permutar) (**). Si se deseara conseguir que hubiese solamente *una* corona $G[H]$ para dos grupos *abstractos* G y H, sería menester elegir una representación de G por permutaciones, entre todas posibles; tomando, por ejemplo, la representación de G por permutaciones regulares, llegaríamos (como ya observé en el § 1), al «producto» $G \# H$ de Scholz (Lit. 8). De lo contrario, el concepto de corona es sólo un concepto «semi-abstracto», perteneciendo por la mitad al campo de los grupos de permutaciones. Según mi opinión, en eso hay que ver una ventaja; pues, de esta manera dos repre-

(**) Naturalmente, se podrían formar también coronas del tipo $H_{s_1}[G]$, $H_{s_2}[G]$,... Cabe observar que para coronas no vale una "ley conmutativa" (como para productos directos: $G \times H \sim H \times G$); por lo general, las dos coronas $G_r[H_s]$ y $H_s[G_r]$ serán grupos distintos (y no isomorfos).

sentaciones G_{r_1} y G_{r_2} del mismo grupo abstracto G por permutaciones conducen, por lo general, a dos coronas G_{r_1} $[H]$ y G_{r_2} $[H]$ diferentes (es decir no isomorfas entre sí).

e) Sin embargo, se obtienen casos interesantes de coronas sólo cuando estas últimas resultan ser grupos *transitivos* de permutaciones. A este respecto, se podría fácilmente demostrar el siguiente teorema:

Para que el grupo de permutaciones $\mathrm{P_r[H]}$ *sea transitivo en sus* rs *variables es necesario y suficiente que los dos grupos de permutaciones* $\mathrm{P_r}$ *y* H *sean transitivos en sus* r *(resp.* s*) variables.*

f) Está claro que el grupo de permutaciones $P_r[H]$ es siempre *imprimitivo*; los campos de imprimitividad son formados por las filas horizontales del esquema (I.).

§ 6. Subgrupos $\mathrm{P_r[H; J]}$ *de una corona.*

Pasamos ahora a la consideración de ciertos subgrupos interesantes de una corona $P_r[H]$.

Ya en § 5 a) hemos conocido los subgrupos $P_r'[H]$, que corresponden unívocamente a los subgrupos P_r' de P_r.

Otros subgrupos de $P_r[H]$ se obtienen admitiendo, para las componentes respecto de $H^{(1)}, H^{(2)}, \ldots, H^{(r)}$, sólo permutaciones que (en los isomorfismos $H^{(\rho)} \sim H$) corresponden a un subgrupo H' de H (*).

Combinando los dos métodos indicados para la formación de subgrupos, obtendremos coronas del tipo $P'_r[H']$ como subgrupos de $P_r[H]$ (con P_r' subgrupo de P_r y H' subgrupo de H).

Pero, así como en el caso de un producto directo, los subgrupos más interesantes son los que no son más productos directos (**), también *las coronas poseen cierta clase más interesante de subgrupos* que (por lo general) no son más coronas (y que están en cierta analogía a los «productos subdirectos» estudiados por Remak en el caso de productos directos (**).

(*) Tomando para H' el subgrupo E del orden 1, obtendremos P_r $[E]$, el subgrupo (del orden π) de las permutaciones de P_r $[H]$ cuyas componentes — con excepción de la respecto de P_r , son todas iguales a la identidad.

(**) Véanse a este respecto las publicaciones de R. Remak sobre productos directos y sus subgrupos (Lit. 5 & 6).

Supongamos que el grupo H (del orden η) posea un subgrupo *invariante* J del orden e (y del índice $\gamma = \frac{\eta}{e}$). Dividimos los elementos de H en γ conjuntos de a e elementos, reuniendo en *un* conjunto los elementos que son entre sí congruentes mód. J (*). Eligiendo en cada conjunto un representante h_μ ($\mu = 1, 2, \ldots, \gamma$), obtenemos la siguiente descomposición de los elementos de H en los γ conjuntos:

(VII.) $$H = Jh_1 + Jh_2 + \ldots + Jh_\gamma$$

En este desarrollo, siendo J un subgrupo *invariante* de H, se puede definir una multiplicación de los conjuntos mismos (**):

(VIII.) $$(Jh_\alpha).(Jh_\beta) = Jh_{\rho(\alpha,\beta)}$$

porque todos los productos de un elemento cualquiera de un determinado conjunto Jh_α con un elemento cualquiera de un conjunto Jh_β pertenecen a un mismo conjunto, cuyo «número» depende sólo de los números α y β.

Ahora construiremos en $P_r[H]$ un subgrupo $P_r[H; J]$ de la siguiente manera: Si $u = q^{(0)} k_1^{(1)} k_2^{(2)} \ldots k_r^{(r)}$ es una permutación de $P_r[H]$ y si a $k_1^{(1)}$ (la componente de u respecto de $H^{(1)}$) corresponde (en virtud del isomorfismo $H^{(1)} \sim H$) la permutación k_1 de H, determinamos el conjunto Jh_k en (VII.) al que pertenece dicho elemento k_1; u haga parte de $P_r[H; J]$ sólo si pertenecen al *mismo* conjunto Jh_k también todas las otras permutaciones $k_2, k_3, \ldots, k_r$ de H, que corresponden (en virtud de los isomorfismos $H^{(2)} \sim H$, $H^{(3)} \sim H$, $\ldots$, $H^{(r)} \sim H$) a las permutaciones $k_2^{(2)}$, $k_3^{(3)}$, $\ldots$, $k_r^{(r)}$ (que son las componentes de u respecto de $H^{(2)}, H^{(3)}, \ldots, H^{(r)}$).

En otras palabras, $P_r[H; J]$ comprende, por definición, sólo las permutaciones de $P_r[H]$ cuyas componentes respecto de $H^{(1)}, H^{(2)}, \ldots, H^{(r)}$ correspondan a elementos $k_1, k_2, \ldots, k_r$ de H que pertenezcan *todos* a un *mismo* conjunto Jh_k (o todos a Jh_1, o todos a Jh_2, etc.).

(*) Dos elementos h y k de H se llaman congruentes mód. J, cuando $h\,k^{-1}$ (el producto de h por el inverso de k) pertenece al subgrupo invariante J.

(**) Es la misma que da origen al grupo $\frac{H}{J}$.

El número de las permutaciones del tipo considerado es igual a

$$\pi\gamma e^r = \pi\eta\, e^{r-1} = \pi\frac{\eta^r}{\gamma^{r-1}};$$

hay que demostrar aún que ellas forman un grupo. Para eso, escribimos la ley de multiplicación (VI.) en $P_r[H]$ en la forma

$$\text{(VI.')}\quad (p^{(0)} k_1^{(1)} k_2^{(2)} \ldots\ldots k_r^{(r)})(q^{(0)} l_1^{(1)} l_2^{(2)} \ldots\ldots l_r^{(r)})$$
$$= (pq)^{(0)} (k_{\gamma_1} l_1)^{(1)} (k_{\gamma_2} l_2)^{(2)} \ldots\ldots (k_{\gamma_r} l_r)^{(r)},$$

con

$$\text{(IV.')}\qquad q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & r \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \ldots & \gamma_r \end{pmatrix}$$

en donde se tratará, ahora, de dos permutaciones del tipo particular que estamos considerando: para los elementos k_1, k_2, ..., k_r de H, que corresponden a las componentes $k_1^{(1)}$, $k_2^{(2)}$, ..., $k_r^{(r)}$, existe un conjunto Jh_α a que todos ellos pertenecen, y hay *un* conjunto Jh_β al que pertenecen todos los elementos l_1, l_2, ..., l_r de H, que corresponden a las componentes $l_1^{(1)}$, $l_2^{(2)}$, ..., $l_r^{(r)}$. La fórmula (VI.') enseña que el producto de nuestras dos permutaciones tiene, respecto de $H^{(1)}$, $H^{(2)}, \ldots, H^{(r)}$, las componentes $(k_{\gamma_1} l_1)^{(1)}, (k_{\gamma_2} l_2)^{(2)}, \ldots, (k_{\gamma_r} l_r)^{(r)}$. Los elementos correspondientes de H son los productos $k_{\gamma_1} l_1$, $k_{\gamma_2} l_2$, ..., $k_{\gamma_r} l_r$, y como cada k_{γ_ρ} pertenece al conjunto Jh_α, y cada l_ρ al conjunto Jh_β, todos esos productos $k_{\gamma_1} l_1$, $k_{\gamma_2} l_2$, ..., $k_{\gamma_r} l_r$ pertenecen a un *mismo* conjunto $Jh_{\rho(\alpha,\beta)}$, definido por (VIII.). Así hemos demostrado que el producto de dos permutaciones de $P_r[H;J]$ tiene la misma propiedad que caracteriza $P_r[H;J]$, o que $P_r[H;J]$ es un grupo:

Cada subgrupo invariante J *de* H, *del índice* $\gamma = \frac{\eta}{e}$, *da origen a un subgrupo* $P_r[H; J]$ *de la corona* $P_r[H]$, *que es del orden* $\pi\gamma e^r = \pi\eta e^{r-1}$ *y comprende las permutaciones de* $P_r[H]$ *cuyas componentes respecto de* $H^{(1)}, H^{(2)}, \ldots, H^{(r)}$ *corresponden a* r *elementos de* H *que son congruentes entre sí mód.* J.

Ejemplo: Si d es un divisor de n, en la corona $C_m[C_n]$ del orden mn^m podemos formar el subgrupo $C_m[C_n; C_d]$ del orden mnd^{m-1}. Por ejemplo, el grupo $C_5[C_4]$ del orden $5 . 4^5 = 5120$

(véase Fig. 2) posee el subgrupo $C_5[C_4; C_2]$ del orden $5 \cdot 4 \cdot 2^4 = 320$, cuyos elementos son rotaciones cualesquiera del pentágono, con sucesivas rotaciones de las 5 «ruedas» con ángulos que, simultáneamente para las 5 ruedas, son o un múltiplo *par* o un múltiplo *impar* de 90°.

Si H posee varios subgrupos invariantes $J, J', \ldots$, podemos por supuesto, formar varios subgrupos $P_r[H; J]$, $P_r[H; J']$, etc. de $P_r[H]$. Se demuestra fácilmente que $P_r[H; J']$ será un subgrupo de $P_r[H; J]$, si J' es un subgrupo de J.

Dos casos extremos se pueden presentar para $P_r[H; J]$: que J es igual al entero grupo H, y que $J = E$ (= subgrupo del orden *1*) comprende sólo la identidad de H. Evidentemente es $P_r[H; H] = P_r[H]$. Más interesante es el otro caso: $\mathrm{P_r[H; E]}$ *es del orden* $\pi\eta$ *y comprende, por definición, las permutaciones de* $\mathrm{P_r[H]}$ *que tienen la forma* $\mathrm{q^{(0)}\, k^{(1)}\, k^{(2)} \ldots k^{(r)}}$, *en donde las componentes* $\mathrm{k^{(1)}, k^{(2)}, \ldots, k^{(r)}}$ *respecto de* $\mathrm{H^{(1)}, H^{(2)}, \ldots, H^{(r)}}$ *corresponden todos a un mismo elemento* k *de* H.

Formando el producto de dos permutaciones de dicho subgrupo $P_r[H; E]$, la ley de multiplicación (VI.') enseña que en este caso particular $(k_1 = k_2 = \ldots = k_r = k;\ l_1 = l_2 = \ldots = l_r = l)$, se multiplican no sólo las componentes respecto de P_r, sino también las respecto de $H^{(1)}, H^{(2)}, \ldots, H^{(r)}$:

$$(p^{(0)}\, k^{(1)}\, k^{(2)} \ldots\ldots k^{(r)}) \cdot (q^{(0)}\, l^{(1)}\, l^{(2)} \ldots\ldots l^{(r)}) = (pq)^{(0)}\, (kl)^{(1)}\, (kl)^{(2)} \ldots\ldots (kl)^{(r)}.$$

Además enseña esta fórmula (o también la fórmula (V.) del § 4) que los elementos $q^{(0)}$ del subgrupo $P_r[E]$ son conmutables con los elementos del tipo $k^{(1)}k^{(2)} \ldots\ldots k^{(r)}$ (los que tienen la componente respecto de P_r igual a la identidad y las otras correspondientes a un mismo elemento de H). Como estos elementos forman un subgrupo del orden η, isomorfo a H, el subgrupo $P_r[H; E]$ es isomorfo al producto *directo* de $P_r[E]$ (o P_r) y H:

$$\text{(IX.)} \qquad P_r[H; E] \sim P_r \times H.$$

Ejemplo: En $S_3[S_2]$ — que es, según § 3, a), el grupo amplificado del octaedro — el subgrupo $S_3[S_2; E]$ será isomorfo al producto directo $S_3 \times S_2$. En la Fig. 1, este subgrupo es el que deja invariante la recta que une el centro del triángulo ABC con el del triángulo DEF.

§ 7. El grupo $S_2[S_n;A_n]$ *del orden* $(n!)^2$.

Tomando $P_r = S_2$ (con $r=2$, $\pi=2$), $H=S_n$ (con $\eta=n!$) y $J=A_n$ (el grupo alternado, con $e=\frac{n!}{2}$ y $\gamma=2$), como subgrupo $P_r[H;J]$ de la corona $P_r[H]$ obtenemos el subgrupo $S_2[S_n;A_n]$ de $S_2[S_n]$, que se puede caracterizar como el conjunto de las permutaciones en $2n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ que dejan invariante el polinomio:

$$\prod_{k<\lambda}(x_k - x_\lambda)\cdot\prod_{k<\lambda}(x_{n+k} - x_{n+\lambda})\,. \qquad (1 \leqq k < \lambda \leqq n)$$

Este grupo $S_2[S_n;A_n]$ ofrece un interés particular por tener el mismo orden $(n!)^2$ como un producto directo de dos grupos simétricos en n variables. Por eso se podría creer que $S_2[S_n;A_n]$ fuera isomorfo a un producto directo del tipo $T\times U$ con $T\sim U\sim S_n$. Pero, como demostraremos en este párrafo, hay isomorfismo sólo para $n=2$ y $n=3$; *ya para* $n=4$, *el grupo* $S_2[S_n;A_n]$ *no es isomorfo a* $S_n\times S_n$, sino de distinta estructura.

En el caso de $n=2$, siendo $A_2=E$ del orden 1, se trata del grupo $S_2[S_2;E]$ que, en virtud de la fórmula (IX.) del § 6, es isomorfo al producto directo $S_2\times S_2$.

Para demostrar también el isomorfismo:

$$\text{(X.)} \qquad S_2[S_3;A_3]\sim S_3\times S_3$$

conviene considerar los dos grupos como subgrupos de S_6, denotando las variables de permutar brevemente por las cifras de 1 a 6; bastará indicar un automorfismo A del grupo S_6 que tenga la siguiente propiedad: A deja invariante la permutación

$$a=(1,\,2)\,(4,\,5),$$

pero transforma

$$b=(1,\,5,\,2,\,6,\,3,\,4)=(1,4)(2,5)(3,6)\,.\,(4,5,6)$$

en

$$c=(2,3)(4,5,6)$$

y, por consiguiente, transforma el subgrupo $S_2[S_3; A_3]$, engendrado por a y b, en el subgrupo $S_3 \times S_3$, engendrado por a y c. Como dos subgrupos que son transformables por un automorfismo, son isomorfos entre sí, con la indicación del automorfismo A habremos demostrado la fórmula (X.).

Pues bien, un automorfismo A de S_6 que tiene las propiedades indicadas es el que transforma las permutaciones (*):

$$b = (1,\ 5,\ 2,\ 6,\ 3,\ 4)$$

y $$d = (1,\ 5)$$

en

$$b' = (2, 3)(4, 5, 6) = c$$

y $$d' = (1, 3)(2, 6)(4, 5);$$

con eso (**) queda demostrada la fórmula (X.).

Pasando al próximo caso: $n = 4$, demostraremos que $S_2[S_4; A_4]$ no es isomorfo al producto directo $S_4 \times S_4$, aunque el orden de los dos grupos sea el mismo: $(4!)^2 = 576$. Denotaremos las variables de $S_2[S_4; A_4]$ por las cifras de 1 a 8; las permutaciones de $S_2[S_4; A_4]$ tendrán entonces la forma $p^{(0)}\, k_1^{(1)}\, k_2^{(2)}$, en donde $k_1^{(1)}$ y $k_2^{(2)}$ son, respectivamente, permutaciones de $1, 2, 3, 4$ y $5, 6, 7, 8$, *ambas pares o ambas impares*; $p^{(0)}$ es o la identidad o la permutación $(1, 5)(2, 6)(3, 7)(4, 8)$.

¿Cuántas permutaciones de $S_2[S_4; A_4]$ tienen el orden 3? Como las componentes de las permutaciones de $S_2[S_4]$ respecto de $P_r = S_2$ se multiplican en la multiplicación — véase la fórmula (VI.) — para un elemento de $S_2[S_4; A_4]$ que tenga el orden 3, la componente respecto de $P_r = S_2$ no puede tener el orden 2 y por eso, debe ser la identidad. Así vemos que los elementos del orden 3 son:

(*) las que engendran ya todo el grupo simétrico S_6, de modo que A es, completamente definido por la indicación de las permutaciones b' y d' que corresponden a b y d.

(**) Siendo $c = b'$ por definición, basta demostrar que A deja invariante la permutación $a = (1, 2)\ (4, 5)$, lo que se puede averiguar por cálculo directo del elemento $(b'^{-1}\, d'\, b')^{-1}\, d'\, (b'^{-1}\, d'\, b') \,.\, (b'\, d'\, b'^{-1})^{-1}\, d'\, (b'\, d'\, b'^{-1})$ que corresponde (en virtud del automorfismo A) a

$$a = (b^{-1}\, d\, b)^{-1}\, d\, (b^{-1}\, d\, b) \,.\, (b\, d\, b^{-1})^{-1}\, d\, (b\, d\, b^{-1})\,.$$

los *8* ciclos del orden *3* en las primeras *4* variables: *(1, 2, 3)*, *(1,3,2)*, *(1,2,4)*, *(1,4,2)*, *(1,3,4)*, *(1,4,3)*, *(2,3,4)*, *(2,4,3)*; los en las otras *4* variables: *(5,6,7)*, *(5,7,6)*, *(5,6,8)*, *(5,8,6)*, *(5,7,8)*, *(5,8,7)*, *(6,7,8)*, *(6,8,7)*;
y además, los *64* productos de uno de los primeros *8* ciclos con uno de los segundos *8* ciclos; *no hay otros elementos del orden 3 en* $S_2[S_4; A_4]$.

Todos estos son también los elementos del orden *3* en el grupo $S_4 \times S_4$, formado por los productos de permutaciones cualesquiera en las cifras *1, 2, 3, 4* con permutaciones cualesquiera de *5, 6, 7, 8.*

¿Cómo se distribuyen estos *80* elementos del orden *3* en clases de elementos conjugados (*), sea en $S_2[S_4; A_4]$, sea en $S_4 \times S_4$? En $S_4 \times S_4$ tenemos **3** clases de elementos conjugados: una formada por los *8* ciclos: *(1,2,3)*, *(1,3,2)*, *(1,3,4)*, etc. otra formada por los *8* ciclos: *(5,6,7)*, *(5,7,6)*, *(5,7,8)*, etc. y una tercera formada por los *64* productos: *(1,2,3) (5,6,7)*, *(1,2,3)(5,7,6)*, *(1,3,2)(5,6,7)* etc.

Pero, *en* $S_2[S_4; A_4]$ *los* 16 *ciclos del orden* 3 *forman una única clase* de elementos conjugados; por ejemplo es:

$(1,2,4)=[(3,4)(5,6)]^{-1}.(1,2,3).[(3,4)(5,6)]$ o $(5,6,7)= [(1,5)(2,6)(3,7)(4,8)]^{-1}.(1,2,3).[(1,5)(2,6)(3,7)(4,8)]$, en donde $(3,4)(5,6)$ y $(1,5)(2,6)(3,7)(4,8)$ son permutaciones de $S_2[S_4; A_4]$.

Así vemos que en $S_2[S_4; A_4]$ existe una clase con *16* elementos conjugados del orden *3*, hecho que no se presenta en el grupo $S_4 \times S_4$, en donde las clases formadas por elementos de orden *3*, tienen o *8* o *64* elementos. Por eso, los dos grupos tienen una estructura diferente y *no puede haber isomorfismo entre ellos.*

De un modo más general, se puede demostrar que *para ningún valor de* $n \geqq 4$ *hay isomorfismo entre* $S_2[S_n; A_n]$ *y* $S_n \times S_n$; pues, en $S_2[S_n; A_n]$ todos los $4\binom{n}{3}$ ciclos del orden *3* forman una única clase de elementos conjugados, mientras en

(*) Dos elementos u y v de un grupo se llaman conjugados, si en el mismo grupo hay un elemento z tal que $z^{-1}uz = v$.

$S_n \times S_n$ no hay, entre los elementos del orden 3, ninguna clase con $4\binom{n}{3}$ elementos conjugados.

§ 8. *Las permutaciones que no alteran el valor de un determinante.*

Sea

$$D_n(a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{nn}) = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn} \end{vmatrix}$$

el determinante formado con n^2 *variables independientes* a_{11}, a_{12}, ..., a_{nn}. ¿A cuáles permutaciones se pueden someter las variables $a_{k\lambda}$ sin alterar el valor del polinomio $D_n(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn})$?

Para $n=2$, por ejemplo, vemos que las 4 permutaciones:

$$\begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{21}\, a_{22} \\ a_{11}\, a_{12}\, a_{21}\, a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{21}\, a_{22} \\ a_{11}\, a_{21}\, a_{12}\, a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{21}\, a_{22} \\ a_{22}\, a_{12}\, a_{21}\, a_{11} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{21}\, a_{22} \\ a_{22}\, a_{21}\, a_{12}\, a_{11} \end{pmatrix}$$

no alteran el valor del determinante $D_2(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$, siendo

$$\begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \\ a_{21}\, a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{21} \\ a_{12}\, a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22}\, a_{12} \\ a_{21}\, a_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22}\, a_{21} \\ a_{12}\, a_{11} \end{vmatrix},$$

y no hay más que estas 4 permutaciones con la propiedad buscada; ellas forman un grupo abeliano, producto directo de dos grupos cíclicos del orden 2.

También para $n > 2$, las permutaciones de las n^2 variables $a_{k\lambda}$ que dejan invariante el determinante $D_n(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn})$, evidentemente forman un grupo; demostraremos que este grupo es del orden $(n!)^2$ e isomorfo al grupo $S_2[S_n; A_n]$ considerado en el § 7.

Demostración: Cuando dos variables $a_{\alpha\beta}$ y $a_{\gamma\delta}$ no pertenecen a una misma fila (siendo $\alpha \neq \gamma$) ni a una misma columna (siendo, además, $\beta \neq \delta$) del determinante, en el desarrollo

$$D_n(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}) = \Sigma \pm a_{1\alpha_1}\, a_{2\alpha_2}\, a_{3\alpha_3}, \ldots . a_{n\alpha_n}$$

del determinante en una suma (y resta) de $n!$ productos, existe por lo menos *un* producto que comprenda los dos factores $a_{\alpha\beta}$ y $a_{\gamma\delta}$; en cambio, cuando es $\alpha=\gamma$ o $\beta=\delta$, *ninguno* de dichos $n!$ productos es divisible por el producto $a_{\alpha\beta}\ a_{\gamma\delta}$. Una permutación p de las variables $a_{k\lambda}$ que no altera el valor de su determinante, puede permutar esos $n!$ productos sólo entre sí, y por consiguiente, la propiedad de dos variables de pertenecer a una misma línea (*) es invariante frente a la permutación p, o en otras palabras, cuando dos variables pertenecen a una misma fila o columna, también después de haberlas sometido a la permutación p, se encontrarán en una misma fila o columna.

Este razonamiento se puede fácilmente extender a 3, 4, ..., n variables de una línea (fila o columna), demostrando que variables de una misma línea quedan variables de una línea (de la misma u otra). En otras palabras, una permutación p de las variables $a_{k\lambda}$ que no altera su determinante $D_n(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn})$, *produce una permutación de las* 2n *líneas del determinante entre sí, y más exactamente, una permutación («imprimitiva») o de las filas entre sí y de las columnas entre sí, o bien cambiándose las filas por columnas y éstas por aquéllas.*

Aun más, como cada elemento de un determinante está caracterizado unívocamente por el número de su fila y el de su columna, bastará indicar la descrita permutación de las líneas (filas y columnas) producida por p, para caracterizar completamente la permutación p misma. Así vemos que el grupo de las permutaciones de las variables $a_{k\lambda}$ que deja invariante su determinante, es isomorfo a un subgrupo del grupo de todas las permutaciones de las filas entre sí y de las columnas entre sí o de los cambios de filas por columnas y recíprocamente. Este grupo es una corona $S_2[S_n]$, considerando las filas y las columnas del determinante como las $2n$ variables de permutar.

Nuestro grupo es un *subgrupo* de este grupo $S_2[S_n]$ (y no ya el grupo entero); pues, no todas las permutaciones descritas de filas y columnas dejan invariante el determinante, sino que hay unas que cambian el signo del determinante, dejando invariante sólo el cuadrado de $D_n(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn})$. Como cada permutación *impar* de las filas o columnas cambia

(*) La palabra ''línea'' designa indistintamente una fila o una columna.

el signo del determinante, para evitar un cambio del signo de $D_n'(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn})$, o hay que limitarse a permutaciones *pares* de filas y columnas, o hay que combinar una permutación *impar* de las filas con una permutación *impar* de las columnas, y en ambos casos se puede hacer preceder un cambio de las filas por las columnas y de éstas por aquéllas (sin alterar su orden relativo). Pero, el conjunto de estas permutaciones forma justamente el subgrupo $S_2[S_n; A_n]$ de $S_2[S_n]$.

En resumen: *Las permutaciones de las* n^2 *variables* $a_{k\lambda}$ *que no alteran su determinante*

$$D_n(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}) = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

forman un grupo del orden $(n!)^2$, *isomorfo a* $S_2[S_n; A_n]$ *(pero, para* $n \geqq 4$, *no isomorfo a* $S_n \times S_n$*). Las permutaciones que dejan invariante el cuadrado* $\{D_n(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn})\}^2$, *forman un grupo del orden* $2(n!)^2$, *isomorfo a la corona* $S_2[S_n]$. *El isomorfismo resulta considerando las permutaciones de las filas y columnas de* $D_n(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn})$.

Por fin, se puede observar que las permutaciones de las n^2 variables $a_{k\lambda}$ que dejan invariante no sólo su determinante, sino también el producto $a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$ de los elementos de la diagonal principal, forman el subgrupo $S_2[S_n; E]$ que es (en virtud de la fórmula (IX.) del § 6) isomorfo al producto directo $S_2 \times S_n$ (*).

(*) Después de la corrección de las segundas pruebas de la presente publicación, apareció en *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 51, Nº 1 (enero de 1942) un interesantísimo artículo de Oystein Ore: *Theory of monomial groups*, que tiene ciertos puntos de contacto con la presente nota; pues lo que Ore estudia bajo el nombre de *complete monomial group of degree m*, o *symmetry* Σ_m (H) *of degree m of H*, no es nada más que la corona S [H] en nuestra terminología.

LITERATURA CITADA

1) R. FRUCHT: *Die Gruppe des Petersenschen Graphen und der Kantensysteme der regulären Polyeder.* Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 9, fasc. 3 (1936/37).

2) R. FRUCHT: *Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe.* Compositio Mathematica, vol. 6, fasc. 2 (1938).

3) B. NEUMANN: *Die Automorphismengruppe der freien Gruppen.* Math. Annalen, Bd. 107, Heft 3 (1932).

4) G. PÓLYA: *Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen.* Acta mathematica, Bd. 68 (1937).

5) R. REMAK: *Über die Darstellung der endlichen Gruppen als Untergruppen direkter Produkte.* Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 163, Heft 1 (1930).

6) R. REMAK: *Über die erzeugenden invarianten Untergruppen der subdirekten Darstellungen endlicher Gruppen.* Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 164, Heft 4 (1931).

7) A. SCHOLZ: *Über die Bildung algebraischer Zahlkörper mit auflösbarer Galoisscher Gruppe.* Math. Zeitschrift, Bd. 30, Heft 3 (1929).

8) A. SCHOLZ: *Ein Beitrag zur Theorie der Zusammensetzung endlicher Gruppen.* Math. Zeitschrift, Bd. 32, Heft 2 (1930).

9) I. SCHUR: *Ein Beitrag zur elementaren Zahlentheorie.* Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. Phys. - Math. Klasse. 1933. III.

10) W. SPECHT: *Eine Verallgemeinerung der symmetrischen Gruppe.* Schriften des mathematischen Seminars und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin. Bd. I (1932).

11) W. SPECHT: *Eine Verallgemeinerung der Permutationsgruppen.* Math. Zeitschrift, Bd. 37, Heft 3 (1933).

SOBRE EL COMPORTAMIENTO DE LA DERIVADA DE UNA FUNCION ARMONICA EN EL CONTORNO

(Tema Nº 17, Vol. VII, pág. 28)

La propiedad de las funciones armónicas $u(x, y)$ de adquirir sus valores máximo y mínimo en el contorno se conserva en las derivadas parciales respecto de x y de y de cualquier orden, puesto que estas nuevas funciones son también armónicas.

En cambio, supuesto $\left|\dfrac{du}{ds}\right| < k$ siendo s el arco del contorno y k un número positivo, no se puede decir en general que la derivada en cualquier dirección esté acotada en el interior. Lo probaremos con el siguiente ejemplo:

La función $$f(z) = \sum_1^\infty \frac{z^n}{n^2}$$

está definida en el círculo $|z| \leqq 1$ siendo además absolutamente convergente en este recinto.

Para $|z| < 1$, la función es analítica y por tanto la parte real armónica.

Esta función armónica toma en el contorno los valores

$$F(\vartheta) = \sum_1^\infty \frac{\cos n\vartheta}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi\vartheta}{2} + \frac{\vartheta^2}{4}.$$

En el contorno la función $F(\vartheta)$ es continua y acotada; y la derivada respecto de s (o de ϑ) está acotada.

Si consideramos en la superficie armónica $R[f(x)]$ la sección $x = 0$, se obtiene la curva $\sum_1^\infty \dfrac{x^n}{n^2}$ que tiene pendiente infinita para $x = 1$, puesto que su derivada según x vale $-\dfrac{1}{x}\log(1 - x)$.

Manuel Sadosky

TEMAS RESUELTOS

1. — *Estudiar la correspondencia siguiente*

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{2^i} \qquad y = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} k_i$$

siendo k_i *los números 0 y 1, es decir, las cifras del número racional* $0 \leq x \leq 1$, *expresado en el sistema de numeración de base 2.*

J. Babini

Solución: Siendo el número x racional, su desarrollo en el sistema de base 2 será periódico, es decir, será de la forma $0, A\,(k_1 k_2 k_3 \ldots k_p)$, siendo A el conjunto de cifras que forman la parte no periódica y $k_1 k_2 k_3 \ldots k_p$ el período. Sea m el número de cifras de que consta la parte no periódica A.

Demos a n un valor de la forma $n = m + \nu p + r$ (p es el número de cifras del período y r es un número entero $\leq p$). Llamando

$$Q = \frac{k_r}{2} + \frac{k_{r-1}}{2^2} + \ldots + \frac{k_1}{2^r} + \frac{k_p}{2^{r+1}} + \ldots + \frac{k_{k+1}}{2^p}$$

será

$$2^{-n} \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} k_i = Q + \frac{1}{2^p} Q + \frac{1}{2^{2p}} Q + \ldots + \frac{1}{2^{(\nu-1)p}} Q + \frac{k_r}{2^{\nu p+1}} +$$

$$+ \frac{k_{r-1}}{2^{\nu p+2}} + \ldots + \frac{k_1}{2^{\nu p+r}} + \frac{1}{2^n} A$$

y cuando $\nu \to \infty$ (y por tanto n crece también infinitamente) esta expresión tiende al número racional

$$0, (k_r k_{r-1} \ldots k_1\ k_p \ldots k_{r+1}) = Q\left(1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{2p}} + \ldots\right) = Q\,\frac{2^p}{2^p - 1}$$

cuyo desarrollo es periódico puro. Dando a r sucesivamente los valores 1, 2, 3, ..., p se obtienen por tanto p valores límites distintos (límites de oscilación), a saber

$$y_1 = 0, (k_1 k_2 k_3 \ldots k_p), \quad y_2 = 0, (k_2 k_3 k_4 \ldots k_1), \quad \ldots,$$
$$y_p = 0, (k_p k_1 k_2 \ldots k_{p-1}). \tag{1}$$

La correspondencia entre x e y es por tanto tal que a cada valor racional de x cuya expresión en el sistema de base 2 tenga un período de p cifras, corresponden p valores de y, dados por (1).

Cabe todavía considerar el caso de los números racionales que admiten dos desarrollos distintos de la forma

$$x = 0{,}A011111 \ldots = 0{,}A1000 \ldots$$

En este caso, para el primer desarrollo corresponde $y = 1$ y para el segundo $y = 0$.

L. A. Santaló

12. — *Una recta móvil divide a una figura convexa plana en dos porciones de área constante. Demostrar que el lugar geométrico de los centros de gravedad de estos sectores es una línea que tiene las tangentes paralelas a las cuerdas respectivas y cuyo radio de curvatura en cada punto es igual al cubo de la cuerda respectiva dividido por 12 veces el área constante del sector. Generalización.*

L. S.

Solución. Consideremos dos cuerdas que cumplan las condiciones del enunciado y estén definidas respectivamente por las direcciones ϑ y $\vartheta + d\vartheta$. Las dos cuerdas determinan dos sectores infinitesimales de igual área y por tanto, llamando ρ_1, ρ_2 a las dos partes en que quedan divididas por su punto de intersección, debe ser $\rho_1{}^2 d\vartheta = \rho_2{}^2 d\vartheta$ de donde $\rho_1 = \rho_2$. Es decir, las dos cuerdas se cortan en su punto medio.

Sea G_1 el centro de gravedad de la parte de la figura convexa limitada por la cuerda correspondiente a la dirección ϑ y G_2 el correspondiente a la cuerda $\vartheta + d\vartheta$. Llamemos además G al centro de gravedad de la parte de figura convexa común a las dos porciones anteriores y A y B a los centros de gravedad de los dos sectores infinitesimales determinados por las dos cuerdas. Aplicando la proposición de que el centro de gravedad de una figura suma de otras dos está sobre el segmento que une los centros de gravedad de las dos figuras y divide al mismo en dos partes inversamente proporcionales a las masas (en este caso las áreas) respectivas, será $\frac{G_1 G}{G_1 A} = \frac{G_2 G}{G_2 B}$ (puesto que los dos sectores cuyos centros de gravedad son A y B ya dijimos que tienen la misma área). De aquí se deduce que la recta $G_1 G_2$ es paralela a AB; si se supone que las dos cuerdas consideradas tienden a coincidir, en el límite, AB tiende a la cuerda y $G_1 G_2$ a la tangente a la curva, lugar de los centros de gravedad G; estas dos rectas serán, pues, paralelas, lo que demuestra la primera parte del enunciado.

Para hallar el radio de curvatura, observemos que el elemento de arco de la curva lugar de G es $ds = G_1 G_2$. Por otra parte en los triángulos semejantes $G G_1 G_2$ y $G A B$ vale

$$\frac{G_1 G}{G_1 A} = \frac{G_1 G_2}{AB - G_1 G_2} \qquad (1)$$

Además, llamando F al área constante del segmento de figura convexa cortado por la cuerda correspondiente a la dirección ϑ y $c = 2\rho$ a la longitud de esta cuerda, es

$$\frac{G_1 G}{G_1 A} = \frac{\frac{1}{2}\rho^2 d\vartheta}{F} \qquad (2)$$

Cuando las dos cuerdas de direcciones ϑ y $\vartheta + d\vartheta$ tienden a coincidir, puesto que el centro de gravedad de un triángulo está situado sobre las medianas y las divide en dos segmentos cuya razón es $\frac{1}{2}$, en el límite será $AB = \frac{2}{3}c$. Con esto y de (1) y (2) se deriva

$$\frac{\rho^2 d\vartheta}{2F} = \frac{ds}{\frac{2}{3}c - ds}.$$

De aquí ,recordando que $c = 2\rho$, el radio de curvatura R valdrá

$$R = \frac{ds}{d\vartheta} = \frac{c^3}{12\,F}$$

que demuestra el enunciado del problema.

Consecuencia. Si consideramos el caso en que el área F del segmento de área constante cortado por la cuerda variable tiende a cero, la curva lugar de los centros de gravedad G será el mismo contorno de la figura convexa dada y por tanto R su radio de curvatura. De aquí se deduce que, llamando F al área del segmento determinado por una cuerda de longitud c sobre una curva convexa, al reducirse a un punto esta cuerda c, es

$$R = \lim_{c \to 0} \frac{c^3}{12\,F}$$

siendo R el radio de curvatura de la curva en el punto límite.

L. A. Santaló

TEMAS PROPUESTOS

34. — Interpretar en el campo complejo la conocida transformación que suele hacerse de la serie logarítmica a fin de hacerla apta para el cálculo rápido de logaritmos de números grandes. Aplicación al cálculo de logaritmos de números complejos y del número π.

R.

35. — En una fila hay $2n$ asientos y se trata de reservar la mitad de ellos para n personas, de tal manera que nunca haya más de dos asientos consecutivos ocupados ni tampoco más de dos asientos consecutivos desocupados.

Determinar el número de posibilidades admisibles. Generalización.

A. Balasa

BIBLIOGRAFIA

Galois Lectures by JESSE DOUGLAS, PHILIP FRANKLIN, CASSIUS JACKSON KEYSER, LEOPOLD INFELD. 20 × 13; 124 p.; 19 fig. New York, Scripta Mathematica. 1941.

M. RICHARDSON, *Fundamentales of mathematics.* 24 × 16; xviii, 525 p.; 16 retratos, 254 fig. New York, The Macmillan Company, 1941.

Estas *Galois Lectures,* pronunciadas bajo los auspicios de The Galois Institute of Mathematics de la Long Island University de Brooklyn, N. Y., aparecen como quinta publicación de The Scripta Mathematica Library y comprenden cuatro trabajos independientes que, según la orientación de la revista editora, estudian cuestiones matemáticas, desde un punto de vista no puramente técnico, sino tambien histórico y filosófico.

J. DOUGLAS en *Survey of the theory of integration* nos ofrece la evolución del concepto de integral y de la teoría de la integración, desde las cuadraturas de ARQUÍMEDES y la noción de integral como operación inversa de la diferencial, hasta la teoría de DENJOY, pasando por las integrales de RIEMANN, de STIELTJES y de LEBESGUE.

PH. FRANKLIN, en un exhaustivo y bien documentado trabajo: *The four color problem* nos ofrece un estudio sobre este célebre problema formulado por primera vez en términos matemáticos por CAYLEY en 1878 y aún no resuelto, y que consiste en demostrar que cualquier mapa plano compuesto de un número finito de regiones de forma cualquiera se puede siempre colorear con sólo cuatro colores distintos, de tal manera que no haya dos regiones con frontera común con el mismo color.

C. J. KEYSER en *Charles Sanders Peirce as a pioneer* nos ofrece una exposición de las ideas de C. S. PEIRCE (1839-1914), en especial sobre lógica y matemática.

Por último L. INFELD en *The fourth dimension and relativity* expone brevemente, bajo la forma de un diálogo con un discípulo, el problema de la cuarta dimensión y su aplicación en la teoría de la relatividad.

En resumen, una excelente colección de lectura accesible para los no especializados.

* *
*

Del triple valor que comúnmente se asigna a la matemática: un valor científico como objeto de estudio e investigación, un valor utilitario como instrumento indispensable en numerosas y variadas aplicaciones y un valor educativo cmo integrante de la cultura individual, es, sin duda, este último el más discutido y el más difícil de realizar.

Una de estas realizaciones la constituye el libro de RICHARDSON dedicado en especial a los estudiantes de ciencias sociales, aunque, y no sin razón, ''considerations of the kind discussed here would also be beneficial for students of the sciences who are commonly and naively expected to acquire an understanding of fundamental concepts by osmosis.''

En el prefacio y en la introducción enuncia y funda el autor el objeto del libro, que es el de dar a los estudiantes una apreciación sobre el origen y desarrollo de los conceptos fundamentales de la matemática, para llegar a la comprensión del significado de esta ciencia como esfuerzo humano y a la de sus relaciones con los demás sectores del saber. Al mismo tiempo, mediante la comprensión de la naturaleza e importancia del pensamiento axiomático (''postulational thinking''), trata de inculcar a los estudiantes las normas del pensamiento riguroso: actitud crítica, definiciones precisas, respeto por los supuestos admitidos, etc.

No entramos a analizar en detalle la manera como RICHARDSON ha realizado, en su libro, estos propósitos; puesto que en materia de educación, y sobre todo de didáctica, toda solución es discutible y objeto de discrepancias. Solamente queremos observar que en el tono general de este libro se nota, a nuestro modo de ver, una sobreestimación de la matemática como conjunto de sistemas lógicos del tipo hipotético-deductivo y una subestimación del carácter algorítmico, ''técnico'' de esa ciencia.

Entendemos que así como la matemática en sus comienzos mostró preferentemente su carácter hipotético-deductivo, mientras que en la edad moderna se manifestó en ella, a veces exageradamente, su caracter algorítmico; la matemática de hoy, como una de sus características esenciales, ostenta un rigor lógico impecable sin sacrificar, empero, su riqueza algorítmica.

No se debe ver esta riqueza en meras o rutinarias manipulaciones técnicas, sino en lo específicamente matemático que encierran los símbolos y transformaciones algebraicas. Por ejemplo: el símbolo de los determinantes (que, dicho sea de paso, ni una sola vez son citados por RICHARDSON) es algo más que un recurso técnico de demostración o de discusión, él es una de las tantas manifestaciones de ese espíritu lúdico y combinatorio que constituye una de las notas esenciales de la matemática.

Es cierto que: ''With students of the arts and social sciences, time may be obtained by lightening the burden of technical achievement.'', pero tal tendencia no debe exagerarse, sobre todo cuando se pretende dar los conceptos matemáticos con fundamentos rigurosos, para lo cual los recursos técnicos resultan inevitables. Así por ejemplo, RICHARDSON introduce los logaritmos después de haber estudiado las potencias de exponente racional, lo que naturalmente le obliga, en la definición y demostraciones de las propiedades de los logaritmos, a agregar una y otra vez ''this will not be done here'', con lo que si bien se salva formalmente la demostración lógica, se resiente, en cambio, su eficacia didáctica.

En otros detalles se manifiesta en el libro de RICHARDSON, esta subestimación de los recursos técnicos. Así, él mantiene para las funciones circulares, el nombre anticuado e inadecuado de ''funciones trigonométricas''. no advirtiendo que la trigonometría constituye meramente una aplicación, y no de las más importantes, de esas funciones, cuyo valor esencial reside en sus propiedades funcionales y en el hecho de constituir otro exponente del espíritu algorítmico de la matemática.

Pero en verdad estos detalles y discrepancias, inevitables, como dijimos, en libros de esta naturaleza, en nada desmerecen su valor y el mérito de ser un esfuerzo extraordinario y bien realizado a favor del valor educativo de la matemática.

De acuerdo a esta finalidad y a los propósitos perseguidos, el libro contiene numerosas referencias históricas y datos biográficos completados con 16 retratos de matemáticos célebres.

Santa Fe, Universidad Nacional del Litoral.

José Babini

VARIA

10. *Sistema de numeración de base 24.*

En el Congreso realizado por la "Association Française pour l'avancement des sciences", en 1901, uno de los profesores presentes propuso la adopción de un sistema de numeración de base 24; naturalmente con 24 símbolos. para los cuales proponía las letras del alfabeto, menos la *w* y la *y*.

Para mostrar la utilidad del nuevo sistema su autor adujo que el número 3.797.516.706,10, tiene en él la siguiente sencilla representación: *tuxonzd, b p*

Después de cuidadosa consideración, la propuesta fué rechazada.

11. *Un pensamiento de* Vito Volterra

"I professori, nel pieno vigore della loro produzione intelettuale e del loro entusiasmo per la ricerca scientifica, erano chiamati ad insegnare ciò che essi medesimi giorno per giorno studiavano e scoprivano; gli allievi dovevano assistere alla creazione della scienza con tutte le sue lotte, le doverano essi stessi, alla loro volta, lavorare accanto ed insieme agli uomini di genio che li avevano iniziati.

Le scuole che in tal modo si formarono e che valsero, per la connessione degli sforzi e per la continuità degli intenti. non solo a far risplandere gli ingegni meglio dotati, ma anche a rendere proficua l'opera di menti meno elevate, possono facilmenti riconoscersi; é poi agevole in esse scoprire e seguire l'origine e la filiazione dei vari e più importanti pensieri".

(*Saggi Scientifici*, pag. 3)

CRONICA

Dr. ERNESTO NATALE †

El día 25 de abril último, ha fallecido en Rosario, prematuramente y en forme inesperada, a la edad de 47 años, nuestro consocio el Dr. Ernesto Natale.

El extinto nació en Rosario, el 14 de diciembre de 1894; cursó sus estudios secundarios en la Escuela Superior Nacional de Comercio de su ciudad natal y los universitarios en la Facultad de Ciencias Económicas, Comerciales y Políticas de la Universidad Nacional del Litoral.

Desde muy joven acreditó dotes poco comunes de inteligencia y de estudioso que lo destacaron entre sus compañeros y en 1925 se graduó de Contador Público en la citada Facultad. Después de un interregno de algo más de una década, en que diversos factores y obligaciones trabaron la prosecución de sus estudios, probó su vocación y tesonera voluntad reanudándolos y, precisamente, pocos días antes de su lamentado deceso, se graduó brillantemente de doctor en ciencias económicas, en la misma Facultad, con su tesis ''Economía de los transportes ferroviarios'' que mereció la clasificación de sobresaliente siendo recomendada, por el jurado, para el premio ''Facultad''.

Su vocación matemática le aproximaba a cuanto con la materia se relacionaba, mostrando especial aptitud para el tratamiento de los problemas que se plantean en el campo aplicado y así, durante varios años, fué, honorariamente, ayudante de la cátedra de Estadística en la citada Facultad de Ciencias Económicas como Encargado de ejercitaciones y luego, en 1936, tuvo a su cargo la dirección de un Seminario de Estadística, con motivo del cual publicó un trabajo intitulado ''La curva logística representativa del desarrollo numérico de la población humana''. Ha publicado, además, los siguientes trabajos: ''Estudio de los juegos de azar más populares en la ciudad de Rosario'', ''Desenvolvimiento de las cooperativas en la provincia de Santa Fe'', ''Cuadraturas'', ''Elementos de determinantes'' y ''El origen de una demostración de una fórmula de análisis combinatorio''.

El Dr. Natale era, además, profesor titular en la Escuela Superior Nacional de Comercio anexa a la mencionada Facultad; en el desempeño de la cátedra puso de relieve destacadas condiciones de didacta que, unidas a sus nobles características personales, le granjearon estimación y respeto en la citada casa de estudios. Estos sentimientos se exteriorizaron en la emotiva ceremonia que fué el sepelio de sus restos.

F. L. Gaspar

INSTITUTO DE MATEMATICA APLICADA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

El Consejo Superior de la Universidad Nacional del Litoral, ha creado el Instituto de Matemática Aplicada sancionando una ordenanza cuya parte dispositiva dice:

''Créase el Instituto de matemática aplicada, dependiente de la Univer-
''sidad, que tendrá como funciones fundamentales:

''a) Realizar estudios e investigaciones originales de carácter biométrico, ''actuarial y sobre cuestiones de cálculo de probabilidades y análisis matemá- ''tico que le son afines.

''b) Contribuir a la formación de investigadores.

''c) Publicar los estudios de investigaciones realizados.

''d) Establecer vinculaciones con entidades científicas e instituciones si- ''milares del país y del extranjero''.

El espíritu de progreso que caracteriza a la obra de las autoridades de la Universidad del Litoral y la clara comprensión de la necesidad de fomentar la investigación original en nuestro país, se ponen de manifiesto, una vez más, con la creación del Instituto de Matemática Aplicada.

Ha sido designado director del nuevo Instituto nuestro consocio el profesor Fernando L. Gaspar; como subdirectora actuará nuestra consocia la profesora Clotilde A. Bula.

ASAMBLEA GENERAL DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

Con numerosa concurrencia entre la que se contaban miembros de las Universidades de Buenos Aires, de La Plata y del Litoral, se celebró en el local del Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional de Buenos Aires, el sábado 23 de mayo de 1942 a las 18, la Asamblea anual convocada para la renovación de autoridades.

El doctor Rey Pastor, después de tributar el elogio debido a la actuación del profesor Guitarte en la presidencia de la U. M. A. durante muchos años y a su incansable esfuerzo de propulsión del Doctorado y en general de los estudios matemáticos en el país, comunicó el deseo de ambos, reiterado desde el año anterior, de que se haga efectiva la renovación de los cargos directivos y se adopte este criterio en lo sucesivo.

Después de aprobarse diversas modificaciones al reglamento y algunas iniciativas tendientes a ampliar la acción cultural de la entidad, se eligió la siguiente Junta Directiva: Presidente José Babini; Vicepresidente José González Galé; Secretario Fernando L. Gaspar; Prosecretarios Juan Kervor y Angel J. Guarnieri; Tesorera Clotilde A. Bula; Protesorera Yanny Frenkel; Vocales José Sortheix, Cortés Plá, Esteban Terradas, Pedro Rosell Soler y Alberto González Domínguez.

Se resolvió que el presidente fuera designado por el término de un año, sin que pudiera ser reelecto, con la finalidad de que se turnen en la dirección de la entidad, los directores de institutos y seminarios de matemática y los profesores destacados de la materia, de los distintos centros universitarios del país.

Se designaron redactores de la Revista de la Unión Matemática Argentina los siguientes: J. Babini (Director); M. Balanzat; J. Barral Souto; E. Corominas; Y. Frenkel; F. L. Gaspar; A. González Domínguez; P. Pí Callejas; J. Rey Pastor; L. A. Santaló; F. Toranzos y A. Valeiras.

Fué nombrado delegado de la Unión Matemática Argentina en San Luis el Dr. Manuel Balanzat y en La Plata el Dr. Fausto Toranzos.

A propuesta del doctor B. Baidaff se nombró una comisión que estudie la organización de la sección dedicada a cuestiones elementales.

SESION CIENTIFICA DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA CELEBRADA EL DIA 23 DE MAYO DE 1942 EN EL INSTITUTO DE MATEMATICAS DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE B. AIRES

A continuación de la asamblea para elección de autoridades reseñada en la crónica, se celebró una sesión científica que se inició con la exposición del doctor L. Allende Lezama quien reseñó en forma sintética su obra científico-filosófica: *Lenguaje científico* que aparecerá próximamente.

Acto seguido el Dr. Fernando L. Gaspar expuso su último trabajo de investigación, sobre ciertas propiedades de las ecuaciones algebraicas. Demostró que si la ecuación

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

tiene sus n raíces $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reales y distintas, y se asignan n *pesos* y_i en los puntos de abscisas x_i $(i = 1,2,\ldots,n)$, puesto que los pesos pueden ser arbitrarios, existen infinitos sistemas de polinomios ortogonales respecto de los pesos y_i en el conjunto de puntos x_i; que para cada conjunto de pesos el sistema es único; que dichos sistemas son finitos; que el último polinomio de cada uno de ellos es el mismo polinomio de grado n que tiene los n ceros x_i y que la propiedad de ortogonalidad, en conjuntos finitos de puntos, es la siguiente

$$\sum_{i=1}^{n} y_i P_j(x_i) P_k(x_i) \begin{cases} = 0 & j \neq k \\ = 0 & j = k \geqq n \\ \neq 0 & j = k < n \end{cases}$$

en que los $P_r(x)$, $(r = 0, 1, 2, \ldots, n)$ son los polinomios que forman el sistema ortogonal formulando, en definitiva, el siguiente teorema:

Toda ecuación algebraica de grado n, *con* m raíces reales, las múltiples *contadas una sola vez, define, para cada conjunto de pesos asignados a dichas raíces, un único sistema de polinomios ortogonales en el conjunto de puntos formado por las mismas; los sistemas son finitos y el último polinomio de cada uno de ellos es, en menos de una constante multiplicativa, el mismo, de grado* m *y, precisamente, el que se deduce de las* m *raíces reales y distintas de la ecuación dada.*

Como corolario del teorema anterior, explicó las vinculaciones que ligan a cada uno de los polinomios de un sistema ortogonal en un intervalo, con los sistemas ortogonales en el conjunto de puntos que forman los ceros de los mismos.

Planteó, también, algunas cuestiones pendientes de resolución, como ser la determinación de las relaciones que vinculan a los momentos de una función de probabilidad con los momentos de ciertas funciones discontínuas como son las distribuciones de pesos o frecuencias, instando a abordar estos problemas, a los jóvenes estudiantes del Instituto que lo escuchaban, expresando, para terminar, que a su juicio la utilidad de la modesta y sencilla cuestión que había expuesto consistía, más que nada, en que mostraba a los jóvenes principiantes como podían realizar trabajos de investigación y descubrimientos desde un principio.

VOLUMEN III (Fascículos separados; 1938 - 1939)

Nº 1. — GINO LORIA. *Le Matematiche in Ispagna e in Argentina.*
» 2. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre las series de funciones de Hermite.*
» 3. — MICHEL PETROVICH. *Remarques arithmétiques sur une équation differentielle du premier ordre.*
» 4. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Una nueva demostración del teorema límite del Cálculo de Probabilidades. Condiciones necesarias y suficientes para que una función sea integral de Laplace.*
» 5. — NIKOLA OBRECHKOFF. *Sur la sommation absolue par la transformation d'Euler des séries divergentes.*
» 6. — RICARDO SAN JUAN. *Derivación e integración de series asintóticas.*
» 7. — Resolución adoptada por la U. M. A. en la cuestión promovida por el Sr. Carlos Biggeri.

VOLUMEN IV (Fascículo separado; 1939)

Nº 8. — F. AMODEO. *Origen y desarrollo de la Geometría Proyectiva.*

VOLUMEN V (Fascículos separados; 1940)

Nº 9. — CLOTILDE A. BULA. *Teoría y cálculo de los momentos dobles.*
» 10. — COTILDE A. BULA. *Cálculo de superficies de frecuencia.*

VOLUMEN VI (Fascículos separados; 1940 - 1942)

Nº 11. — R. FRUCHT. *Zur Geometria auf einer Fläche mit indefiniter Metrik (Sobre la Geometría de una superficie con métrica indefinida).*
» 12. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre una memoria del Prof. J. C. Vignaux.*
» 13. — F. TORANZOS. *Sobre las singularidades de las curvas de Jordan.*
» 14. — M. BALANZAT. *Fórmulas integrales de la intersección de conjuntos.*
» 15. — G. KNIE. *El problema de varios electrones en la mecánica cuantista.*
» 16. — A. TERRACINI. *Sobre la existencia de superficies cuyas líneas principales son dadas.*
» 17. — L. A. SANTALÓ. *Valor medio del número de partes en que una figura convexa es dividida por* n *rectas arbitrarias.*
» 18. — A. WINTNER. *On the iteration of distribution functions in the calculus of probability (Sobre la iteración de funciones de distribución en el cálculo de probabilidades).*
» 19. — E. FERRARI. *Sobre la paradoja de Bertrand.*
» 20. — J. BABINI. *Sobre algunas propiedades de las derivadas y ciertas primitivas de los polinomios de Legendre.*
» 21. — R. SAN JUAN. *Un algoritmo de sumación de series divergentes.*
» 22. — A. TERRACINI. *Sobre algunos lugares geométricos.*
» 23. — V. y A. FRAILE y C. CRESPO. *El lugar geométrico y lugares de puntos áreas en el plano.*
» 24. — R. FRUCHT. *Coronas de grupos y sus subgrupos, con una aplicación a los determinantes.*
» 25. — E. R. RAIMONDI. *Un problema de probabilidades geométricas sobre los conjuntos de triángulos.*

VOLUMEN VII (1940 - 1941)

Notas y memorias de J. BABINI, H. E. CALCAGNO, E. FERRARI, V. y A. FRAILE y C. CRESPO, G. KNIE, J. J. REBELLA, S. RIOS, R. SAN JUAN, L. A. SANTALÓ, A. TERRACINI.

Soluciones de temas propuestos. Bibliografía, Crónica, etc.

En 1942 la U. M. A. ha iniciado la publicación de una nueva serie de "Memorias y monografías" de las que han aparecido hasta ahora las siguientes:

Nº 1. — GUILLERMO KNIE, *Mecánica ondulatoria en el espacio curvo* (1 volumen de 152 páginas).

Además han aparecido tres cuadernos de *Miscelanea matemática.*

SUMARIO

PÁG.

Julio Rey Pastor. En el vigésimoquinto aniversario de su llegada a la Argentina, por José Babini 41

Coronas de grupos y sus subgrupos. Con una aplicación a los determinantes, por R. Frucht 42

Sobre el comportamiento de la derivada de una función armónica en el contorno (Tema Nº 17), por M. Sadosky 70

Temas resueltos. — Nº 1 y 12, por L. A. Santaló 71

Temas propuestos. — 34 - 35 74

Bibliografía. — Galois Lectures by Jesse Douglas, Philip Franklin, Cassius Jackson Keyser, Leopold Infeld. — M. Richardson, Fundamentals of mathematics (J. Babini) 75

Varia. — 10 - 11 77

Crónica. — Dr. Ernesto Natale, por F. L. Gaspar. — Instituto de Matemática Aplicada de la Universidad Nacional del Litoral. — Asamblea general de la Unión Matemática Argentina. — Sesión científica de la U. M. A. celebrada el día 23 de Mayo de 1942 en el Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional de B. Aires: Lenguaje científico. por L. Allende Lezama. Sobre una propiedad de las ecuaciones algebraicas con raíces reales, por Fernando L. Gaspar 78

Contribuyen especialmente al sostenimiento de las publicaciones de la UNION MATEMATICA ARGENTINA los siguientes

MIEMBROS PROTECTORES

COMPAÑÍA INDUSTRIAL DEL NORTE DE SANTA FE. INGENIO AZUCARERO "ARNO" (Villa Ocampo. F. C. S. F.). — JULIO REY PASTOR (Buenos Aires). — T. G. BERLENGIERI y CIA. (Rosario). — TRICERRI HNOS. (Rosario). — MANUEL GUITARTE (Buenos Aires). — CLOTILDE A. BULA (Rosario). — ELBA R. RAIMONDI (Buenos Aires). — FERNANDO L. GASPAR (Rosario). — PÓ M. OLCESE (Rosario). — CARLOS ISELLA (Rosario). — PEDRO J. TRICERRI (Rosario).