Volumen VIII Número 3

REVISTA

DE LA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

(Miembro del patronato de la Mathematical Reviews)

□

MIEMBROS TITULARES DE LA U. M. A.

J. Babini (SantaFe) (fundador). — M. Balanzat (San Luis). — J. Barral Souto (Buenos Aires) (fundador). — C. A. Bula (Rosario) (fundador). — E. Chichizola (Rosario). — C. Dieulefait (Rosario) (fundador) — Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (Buenos Aires) (fundador). — Facultad de Ciencias Matemáticas (Rosario) (fundador). — Facultad de Química Industrial (Santa Fe) (fundador). — Y. Frenkel (Buenos Aires). — E. Gaspar (Rosario) (fundador). — F. L. Gaspar (Rosario) (fundador). — J. Giannone (Rosario) (fundador). — A. González Domínguez (Buenos Aires) (fundador). — J. González Gale (Buenos Aires) (fundador). — M. Guitarte (Buenos Aires) (fundador). — W. S. Hill (Montevideo) (fundador). — C. Isella (Rosario) (fundador). — H. Magliano (La Plata). — Observatorio Astronómico (La Plata). — J. Olguin (Rosario) (fundador). — P. Pí Calleja (San Juan). — E. R. Raimondi (Buenos Aires) (fundador). — J. E. Reynal (Buenos Aires). — J. Rey Pastor (Buenos Aires) (fundador). — E. L. Samatán (Buenos Aires) (fundador). — L. A. Santaló (Rosario) (fundador). — J. Sortheix (Tucumán) (fundador). — D. T. A. de Speluzzi (Buenos Aires) (fundador). — E. Terradas (La Plata) (fundador). — F. Toranzos (La Plata).

□

BUENOS AIRES
1942

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Para ingresar como miembro titular de la Unión Matemática Argentina, es necesaria la presentación del solicitante por dos socios fundadores, la admisión por la Junta, y el pago de una cuota de \$ 5. — m/n. mensuales o de \$ 50.— anuales.

Para ingresar como miembro adherente (con derecho a la Revista y a las Memorias en fascículos separados) es necesario el pago de una cuota de \$ 10.— anuales. Los pagos deberán efectuarse por cheque, giro u otro medio libre de gastos, a la orden de la Tesorera, Prof. Clotilde A. Bula, Moreno 364, Rosario.

Los señores miembros adherentes domiciliados en la Ciudad de Buenos Aires podrán, si lo prefieren, efectuar su pago en doce cuotas mensuales de \$ 1.00 m/n. cada una, que serán cobradas a domicilio.

Por ser la U. M. A. miembro del patronato de la Mathematical Reviews (sponsoring member), los socios de la U. M. A. tienen derecho a suscribirse a esa importante revista de bibliografía y crítica con 50 % de rebaja sobre el precio de suscripción que es de 13 dólares por año. Los socios de la U. M. A. pagarán por tanto sólo 6.50 dólares por año.

Los trabajos originales enviados para su publicación serán previamente analizados por un ponente, quien emitirá dictamen acerca de la novedad y corrección de sus resultados.

La impresión de las tiradas aparte, y las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

Abonnement annuel à l'etranger: 4.00 dollars (Etats-Unis).

Prière d'adresser toute la correspondance scientifique et administrative à l'adresse ci-dessous:

SR. SECRETARIO DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

PROF. FERNANDO L. GASPAR

PERÚ 222, Buenos Aires (REP. ARGENTINA)

PUBLICACIONES DE LA U. M. A.

VOLUMEN I (1936 - 1937)

Notas y memorias de C. BIGGERI, J. FAYET, J. BABINI, F. CERNUSCHI, A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ, J. REY PASTOR, SIXTO RIOS.
Bibliografía. Extractos.

VOLUMEN II (1938 - 1939)

Notas y memorias de CLOTILDE A. BULA, T. LEVI-CIVITA, A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ, M. PETROVICH, C. BIGGERI, S. RIOS, F. L. GASPAR, J. REY PASTOR, YANNY FRENKEL, J. A. DEL PERAL, F. TORANZOS.
Bibliografía. Crónica. Revista de revistas, etc.

(Sigue en la contratapa)

SOBRE UNA PROPIEDAD DE LAS ECUACIONES ALGEBRAICAS CON RAICES REALES

Por FERNANDO L. GASPAR

1. — Sea la ecuación

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n = 0 \qquad (1)$$

y sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sus n raíces supuestas distintas y reales.

Vamos a demostrar que existen infinitos sistemas de polinomios ortogonales en el conjunto de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, formado por dichas raíces, que todos estos sistemas son finitos, que el último polinomio de cada uno de ellos es de grado n, y que es el mismo, siendo, en menos de una constante multiplicativa, el polinomio

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n \qquad [2]$$

que tiene, precisamente, aquellos ceros.

En efecto; asignemos n pesos y_i (llamados también ponderaciones o frecuencias) en los puntos de abscisas x_i y sea $\{P_r(x)\}$ un sistema de polinomios, ortogonal en ese conjunto de puntos respecto de los pesos y_i, cuya existencia vamos a demostrar; por tanto, deberá verificarse

$$\sum_{i=1}^{n} y_i P_j(x_i) P_k(x_i) = 0 \qquad (j \neq k) \qquad [3]$$

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son los ceros del polinomio [2] es

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_0 + \alpha_1 x_i + \ldots + \alpha_n x_i^n) = 0$$

por la nulidad de cada uno de los sumandos; por la misma razón, es

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \left(\alpha_0 + \alpha_1 x_i + \ldots + \alpha_n x_i^n\right) x_i^s = 0 \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots)$$

Llamando μ_s a los *momentos* de los pesos y_i es

$$\mu_s = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^s \qquad [4]$$

Por tanto, resulta

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \left(\alpha_0 + \alpha_1 x_i + \ldots + \alpha_n x_i^n\right) x_i^s =$$
$$\alpha_0 \mu_s + \alpha_1 \mu_{s+1} + \ldots + \alpha_n \mu_{s+n} = 0 \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots) \quad [5]$$

de donde, la fórmula de recurrencia de orden n

$$\mu_{s+n} = -\frac{1}{\alpha_n}\left(\alpha_0 \mu_s + \alpha_1 \mu_{s+1} + \ldots + \alpha_{n-1} \mu_{s+n-1}\right) \qquad [6]$$

que expresa los momentos μ_s como combinación lineal de los n anteriores; los coeficientes de la combinación lineal son los n primeros coeficientes del polinomio [2], ordenado según las potencias crecientes de x, divididos por el coeficiente de x^n.

En el caso particular de que no exista ponderación, esta recurrencia resulta inmediatamente como aplicación del conocido teorema de álgebra, relativo a las propiedades de las funciones simétricas enteras de las raíces de una ecuación algebraica (1).

Ahora bien; si existe el sistema $\{P_r(x)\}$ ortogonal respecto de los pesos y_i, en el conjunto de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, los polinomios que lo forman pueden ser siempre escritos en forma de determinante, en función de los momentos μ_s (2); el

---

(1) Rey Pastor, J., *Lecciones de Algebra*, 2ª ed., (Madrid, 1935), pág. 153.

(2) Gaspar, Fernando L., *Sobre la finitud de los sistemas de polinomios ortogonales en dominio discontinuo y la ley de recurrencia que la define.* Rev. de la Fac. de C. Econ. 3ª serie, T. VIII, Nº 2 (Rosario, 1939).

de grado n, en menos de una constante multiplicativa sería, pues.

$$P_n(x) = c \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots x^n \\ \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \dots \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \dots \mu_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \mu_{n+1} & \dots \mu_{2n-1} \end{vmatrix} \quad (c = \text{constante}) \qquad [7]$$

Si en [5] damos a s los valores 0, 1, 2, ..., $n-1$, obtenemos n ecuaciones de condición a que deben satisfacer los coeficientes α_i; eliminando las α_i entre la ecuación dada [1] y las n ecuaciones lineales y homogéneas anteriores, se obtiene la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots x^n \\ \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \dots \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \dots \mu_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \mu_{n+1} & \dots \mu_{2n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

El primer miembro de esta ecuación, es un polinomio de grado n en x que se anula para los valores $x_1, x_2, \dots, x_n$, que son las raíces de la ecuación [1]; este polinomio que no es otro, en menos de una constante multiplicativa, que el $P_n(x)$ escrito en forma de determinante según [7] es, pues, el mismo polinomio [2]; suprimiendo la última fila y la última columna se tiene un polinomio de grado $n-1$; suprimiendo las dos últimas filas y las dos últimas columnas se tiene otro de grado $n-2$ y así sucesivamente, suprimiendo las n últimas filas y n últimas columnas queda la unidad. Vamos a demostrar que estos $n+1$ polinomios, incluyendo el $P_0(x) = 1$, son los que forman el sistema $\{P_r(x)\}$ y que, por tanto, cumplen la condición [3].

Consideremos el par $P_j(x)$, $P_k(x)$ con $j < k \leq n$. $P_j(x)$ será una función de la forma $\beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_j x^j$; escribiendo en [3] a $P_j(x)$ en esta forma y a $P_k(x)$ en forma de determinante, es inmediato ver que la condición de ortogonalidad se cumple. Resulta

$$\sum_{i=1}^{n} y_i P_j(x_i) P_k(x_i) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left[c \begin{vmatrix} 1 & x_i & \dots & x_i^k \\ \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{k-1} & \mu_k & \dots & \mu_{2k-1} \end{vmatrix} (\beta_0 + \beta_1 x_i + \dots + \beta_j x_i^j) \right] = 0$$

pues el segundo miembro se descompone en una suma de $j+1$ determinantes de orden $k+1$, todos nulos por tener, cada uno de ellos, la primera fila igual a la 2ª., o a la 3ª., . . ., o a la $(j+1)$-ésima; por tanto, la nulidad, en este caso, está demostrada.

Si es $j=k=n$, la nulidad también se verifica, pues se tiene la suma de $n+1$ determinantes de orden $n+1$ todos nulos; los n primeros lo son por tener la primer fila igual a una de las n filas siguientes; el último también lo es pues, por la ley de recurrencia [6], tiene la primer fila que es combinación lineal de los n siguientes.

En cambio, si es $j=k<n$ se verificará

$$\sum_{i=1}^{n} P_k^2(x_i) \neq 0 \qquad [8]$$

Esto resulta, inmediatamente, siguiendo el procedimiento anterior, pues se tendría una suma de $k+1$ determinantes de orden $k+1$, de los cuales los k primeros serían nulos por tener la primer fila igual a una de las k filas siguientes. El último determinante, pasando la primer fila al último puesto, podemos escribirlo así:

$$(-1)^k c \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_k \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{k-1} & \mu_k & \dots & \mu_{2k-1} \\ \mu_k & \mu_{k+1} & \dots & \mu_{2k} \end{vmatrix} \qquad [9]$$

Formemos las matrices horizontales semejantes con n columnas y $k+1$ filas $(k+1 \leqq n)$

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 1 & \dots 1 & \dots 1 \\ x_1 & x_2 & \dots x_k & \dots x_n \\ x^2{}_1 & x^2{}_2 & \dots x^2{}_k & \dots x^2{}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^k{}_1 & x^k{}_2 & \dots x^k{}_k & \dots x^k{}_n \end{matrix}\right. \qquad \left\{\begin{matrix} y_1 & y_2 & \dots y_k & \dots y_n \\ y_1x_1 & y_2x_2 & \dots y_k x_k & \dots y_nx_n \\ y_1x^2{}_1 & y_2x^2{}_2 & \dots y_k x^2{}_k & \dots y_nx^2{}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1x^k{}_1 & y_2x^k{}_2 & \dots y_k x^k{}_k & \dots y_nx^k{}_n \end{matrix}\right.$$

Recordando la ley del producto por filas de dos matrices horizontales semejantes, si lo efectuamos en este caso, obtenemos una matriz cuadrada de orden $k+1$ que, por [4], podemos escribir así:

$$\left\{\begin{matrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots \mu_k \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots \mu_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mu_k & \mu_{k+1} & \dots \mu_{2k} \end{matrix}\right.$$

cuyo determinante, que no es otro que el [9], es la suma de los productos obtenidos multiplicando los determinantes de orden máximo de cada matriz, por sus homólogos en la otra (3). Por tanto, el determinante [9] es igual a una suma de $\binom{n}{k+1}$ determinantes de orden $k+1$ de la forma

$$(-1)^k c\, y_1 \dots y_l \dots y_n \begin{vmatrix} 1 & \dots 1 & \dots 1 \\ x_1 & \dots x_l & \dots x_n \\ x^2{}_1 & \dots x^2{}_l & \dots x^2{}_n \\ \dots & \dots & \dots \\ x^k{}_1 & \dots x^k{}_l & \dots x^k{}_n \end{vmatrix}^2$$

determinantes de Vandermonde que sólo se anulan si tienen elementos iguales; por tanto, la nulidad sólo puede verificarse si no hay $k+1$ raíces desiguales; pero, por hipótesis, hay n raíces desiguales y siendo $k < n$, cada uno de los sumandos es

(3) REY PASTOR, J., *Elementos de Análisis Algebraico*, 5ª ed., (Madrid, 1939), pág. 260.

distinto de cero y positivo por ser un cuadrado. Por consiguiente, el determinante [9] también es distinto de cero y positivo. La desigualdad [8] está demostrada.

Si del polinomio de grado n pasamos al de grado $n+1$, escrito en forma de determinante, por la ley de recurrencia [6] resulta que la última fila es combinación lineal de las n anteriores, por lo cual el polinomio es idénticamente nulo y lo mismo ocurre con todo polinomio $P_s(x)$ con $s > n$; luego el sistema es finito y el último polinomio es el de grado n.

Por tanto existe el sistema de polinomios $\{P_r(x)\}$ que, en el conjunto de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tienen, respecto de los pesos y_i, la siguiente propiedad:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i\, P_j(x_i)\, P_k(x_i) \begin{cases} = 0 \text{ si es } j \neq k \\ = 0 \text{ si es } j = k \geqq n \\ \neq 0 \text{ si es } j = k < n \end{cases}$$

que es, precisamente, la que tienen los sistemas de polinomios ortogonales en conjuntos finitos de puntos (4).

Los pesos pueden ser arbitrarios y sean cuales fueren los que asignemos a las n abscisas x_i, por lo demostrado, se deduce que siempre existirá un polinomio de grado n, perteneciente a un sistema ortogonal respecto de esos pesos, que se anulará para los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, es decir, que en menos de una constante multiplicativa, dichos polinomios son todos iguales e iguales al polinomio [2].

Además, fijados los pesos, el sistema ortogonal es único. Esto se deduce, de inmediato, del hecho que, dadas las n abscisas x_i y los n momentos, $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$, existe una única distribución de pesos que, asignados a dichas abscisas, tienen aquellos momentos, pues la determinación de ella resulta de la solución de un sistema de n ecuaciones lineales no homogéneas en las n incógnitas y_i, sistema que, como se sabe, tiene solución única cuando el determinante de los coeficientes es distinto de cero, lo que, en este caso, se verifica por ser, según la hipótesis, $x_1 \neq x_2 \neq \ldots \neq x_n$.

(4) GASPAR, FERNANDO L., *Ibidem.*

Por tanto, podemos formular el siguiente teorema:

Toda ecuación algebraica de grado n *con* m *raíces reales, las múltiples contadas una sola vez* (5), *define, para cada conjunto de pesos asignados a dichas raíces, un único sistema de polinomios ortogonales en el conjunto de puntos formado por las mismas; los sistemas son finitos y el último polinomio de cada uno de ellos es, en menos de una constante multiplicativa, el mismo, de grado* m *y, precisamente, el que se deduce de las* m *raíces reales y distintas de la ecuación dada.*

2. — Es sabido que los polinomios ortogonales en un intervalo (a, b), finito o infinito, tienen todos sus ceros reales y distintos; entonces, por el teorema anterior, existe una correspondencia entre los polinomios de un sistema ortogonal en un intervalo, y los sistemas finitos que se deducen de cada uno de ellos, ortogonales en el conjunto de puntos formados por sus ceros. Como, a su vez, los polinomios de un sistema ortogonal en un conjunto finito de puntos, tienen todos sus ceros reales y distintos (6) resulta, en definitiva, el siguiente teorema que es corolario del anterior:

A cada uno de los polinomios de grado n, $\mathrm{R}_n(\mathrm{x})$, *de un sistema* $\{\mathrm{R}_r(\mathrm{x})\}$, *ortogonal en un intervalo* (a, b), *finito o infinito, sea el sistema ponderado o sin ponderar, corresponde una sucesión finita de sistemas de polinomios ortogonales. El primer elemento de la sucesión está formado por los sistemas cuyo último polinomio es de grado* n *y son ortogonales en el conjunto de puntos* $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$ *formado por las* n *raíces reales de* $\mathrm{R}_n(\mathrm{x})$; *el segundo elemento de la sucesión está formado por los sistemas cuyo último polinomio es de grado* $\mathrm{n} - 1$ *y se deducen del polinomio de grado* $\mathrm{n} - 1$ *de cada uno de los sistemas anteriores y así sucesivamente.*

(5) De [4] y [5] se ve, inmediatamente, que si hay raíces múltiples la ley de recurrencia no es más de orden n sino de orden $l < n$ y entonces, el último polimonio del sistema no es ya de grado n sino de grado l; siendo nulos todos los siguientes.

(6) GASPAR, FERNANDO L., *Sobre algunas series funcionales*, Publicaciones de la Fac. de C. Matemáticas, Serie Técnico-científica, Nº 10, (Rosario, 1937), pág. 54. (Basta sustituir, en la demostración, $\int$ por Σ).

3. — En un trabajo anterior [7], hemos demostrado el siguiente teorema relativo a los polinomios ortogonales en un intervalo (a, b):

Cada una de las n *raíces de un polinomio de grado* n, *perteneciente a un sistema ortogonal, es una combinación lineal distinta de los* n *momentos* $\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2 \ldots, \mathrm{m}_\mathrm{n}$; *el cuadrado de cada una de esas raíces, es la misma combinación lineal de los* n *momentos* $\mathrm{m}_2, \mathrm{m}_3, \ldots, \mathrm{m}_{\mathrm{n}+1}$, *y así sucesivamente hasta la n-ésima potencia de esas raíces, cada una de las cuales es la misma combinación lineal de los* n *momentos* $\mathrm{m}_\mathrm{n}, \mathrm{m}_{\mathrm{n}+1}, \ldots, \mathrm{m}_{2\mathrm{n}-1}$.

Esas n *combinaciones lineales distintas, aplicadas a los* n *momentos* $\mathrm{m}_0, \mathrm{m}_1, \ldots, \mathrm{m}_{\mathrm{n}-1}$, *resultan todas iguales a la unidad.*

Es decir, que si se tiene un sistema de polinomios $\{R_r(x)\}$ ortogonal respecto de una función $\varphi(x)$ en un intervalo (a, b), finito o infinito y, por tanto, se verifica

$$\int_a^b \varphi(x)\, R_j(x)\, R_k(x)\, dx \begin{cases} = 0 \text{ si es } j \neq k \\ \neq 0 \text{ si es } j = k \end{cases}$$

siendo $\varphi(x) \geqq 0$ en (a, b), m_s sus momentos definidos así:

$$m_s = \int_a^b \varphi\, (x)\, x^s\, dx$$

y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ los ceros de $R_n(x)$, existen n combinaciones lineales distintas tales que, designando sus coeficientes por

$$l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_n;\ j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_n;\ \ldots;\ k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n$$

se verifica

---

[7] *Ibidem*, pág. 34.

$$
\left\{\begin{array}{llll}
l_1 m_0 + l_2 m_1 & + \ldots + l_n m_{n-1} & = 1 \\
j_1 m_0 + j_2 m_1 & + \ldots + j_n m_{n-1} & = 1 \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\
k_1 m_0 + k_2 m_1 & + \ldots + k_n m_{n-1} & = 1
\end{array}\right.
$$

y, además,

$$
\left.\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{llll}
l_1 m_1 + l_2 m_2 & + \ldots + l_n m_n & = x_1 \\
l_1 m_2 + l_2 m_3 & + \ldots + l_n m_{n+1} & = x^2{}_1 \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\
l_1 m_n + l_2 m_{n+1} & + \ldots + l_n m_{2n-1} & = x^n{}_1
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{llll}
j_1 m_1 + j_2 m_2 & + \ldots + j_n m_n & = x_2 \\
j_1 m_2 + j_2 m_3 & + \ldots + j_n m_{n+1} & = x^2{}_2 \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\
j_1 m_n + j_2 m_{n+1} & + \ldots + j_n m_{2n-1} & = x^n{}_2
\end{array}\right. \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\left\{\begin{array}{llll}
k_1 m_1 + k_2 m_2 & + \ldots + k_n m_n & = x_n \\
k_1 m_2 + k_2 m_3 & + \ldots + k_n m_{n+1} & = x^2{}_n \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\
k_1 m_n + k_2 m_{n+1} & + \ldots + k_n m_{2n-1} & = x^n{}_n
\end{array}\right.
\end{array}\right\} \quad [10]
$$

Ahora bien, por tener $R_n(x)$ sus n ceros reales y distintos, existen, por lo demostrado, infinitos sistemas $\{P_r(x)\}$ ortogonales en el conjunto de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, que forman esos ceros (que también son los de los polinomios de grado n de dichos sistemas), siendo estos sistemas finitos y el último polinomio de cada uno de ellos el de grado n. Estos polinomios de grado n pueden ser siempre escritos en forma de determinante según [7], determinantes que se anularán cuando, en su primera fila, en vez de las potencias sucesivas de x, se pongan las potencias sucesivas de x_1, o de x_2, ..., o de x_n, pero, por la conocida propiedad de los determinantes, cuando un determinante es nulo, una línea es combinación lineal de las otras. En el determinante [7], que es de orden $n+1$, las n filas siguientes a la primera, son independientes entre sí, porque si no el polinomio sería idénticamente nulo, por lo tanto, es la primer fila la que resulta combinación lineal de las demás, cuando se ha sustituído en ella, en lugar de las potencias sucesivas de x, las potencias sucesivas de los ceros del polimonio.

Como hay n ceros distintos, hay n combinaciones lineales distintas y llamando a los coeficientes de cada una de ellas por

$$\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_n;\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n;\ \ldots;\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,$$

se tendrá, en forma análoga a la anterior, el siguiente sistema de igualdades:

$$\left.\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}
\gamma_1\,\mu_0+\gamma_2\,\mu_1+\ldots+\gamma_n\,\mu_{n-1}=1\\
\lambda_1\,\mu_0+\lambda_2\,\mu_1+\ldots+\lambda_n\,\mu_{n-1}=1\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\xi_1\,\mu_0+\xi_2\,\mu_1+\ldots+\xi_n\,\mu_{n-1}=1
\end{array}\right.\\[2ex]
\left\{\begin{array}{l}
\gamma_1\,\mu_1+\gamma_2\,\mu_2+\ldots+\gamma_n\,\mu_n=x_1\\
\gamma_1\,\mu_2+\gamma_2\,\mu_3+\ldots+\gamma_n\,\mu_{n+1}=x^2{}_1\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\gamma_1\,\mu_n+\gamma_2\,\mu_{n+1}+\ldots+\gamma_n\,\mu_{2n-1}=x^n{}_1
\end{array}\right.\\[2ex]
\left\{\begin{array}{l}
\lambda_1\,\mu_1+\lambda_2\,\mu_2+\ldots+\lambda_n\,\mu_n=x_2\\
\lambda_1\,\mu_2+\lambda_2\,\mu_3+\ldots+\lambda_n\,\mu_{n+1}=x^2{}_2\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\lambda_1\,\mu_n+\lambda_2\,\mu_{n+1}+\ldots+\lambda_n\,\mu_{2n-1}=x^n{}_2
\end{array}\right.\\[1ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\[1ex]
\left\{\begin{array}{l}
\xi_1\,\mu_1+\xi_2\,\mu_2+\ldots+\xi_n\,\mu_n=x_n\\
\xi_1\,\mu_2+\xi_2\,\mu_3+\ldots+\xi_n\,\mu_{n+1}=x^2{}_n\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\xi_1\,\mu_n+\xi_2\,\mu_{n+1}+\ldots+\xi_n\,\mu_{2n-1}=x^n{}_n
\end{array}\right.
\end{array}\right\}\ [11]$$

Como existen infinitos sistemas de polinomios ortogonales en el conjunto de puntos $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, existirán infinitos sistemas de igualdades [11] cuyos primeros miembros son iguales entre sí e iguales a los primeros miembros de las igualdades [10].

UN PROGRESO EN LA TEORIA ELEMENTAL DE LAS SUPERFICIES CURVAS

Por ROBERTO FRUCHT

Es sabido que la teoría clásica de las superficies curvas del espacio euclidiano de tres dimensiones se basa en la consideración de dos «tensores (o formas cuadráticas) fundamentales» y sus invariantes.

El primer tensor fundamental mide el cuadrado de la distancia entre dos puntos «infinitamente vecinos» de la superficie:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2, \tag{1}$$

siendo u y v coordenadas curvilíneas cualesquiera en la superficie; el segundo tensor, que escribimos (siguiendo a Blaschke [1]) en la forma: $L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2$, se obtiene por ejemplo cuando se considera, en un punto de la superficie y en una dirección $du : dv$ que pasa por él, la curvatura de la «sección normal», siendo esta curvatura igual al cociente de las dos «formas cuadráticas fundamentales»:

$$\frac{1}{R} = \frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}. \tag{2}$$

Con los 6 coeficientes E, F, G, L, M, N que, por supuesto, son funciones de u y v, se pueden calcular, en cada punto de la superficie, dos importantísimos invariantes, la curvatura de Gauss:

(1) Véase el capítulo ''Anfangsgruende der Flaechentheorie'' en el libro de W. Blaschke: ''Vorlesungen ueber Differentialgeometrie I: Elementare Differentialgeometrie'' (3ª edición, Berlín 1930).

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \tag{3}$$

(que se anula para superficies desarrollables), y la curvatura media:

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} \tag{4}$$

(que se anula para las superficies mínimas).

Pero esos 6 coeficientes no son funciones completamente independientes entre sí. Es un resultado célebre («théorema egregium») de Gauss que la curvatura K se puede expresar también en función sólo de $E, F, G,$ y sus derivadas parciales hasta el 2º. orden, p. e. en la forma [1]:

$$(5)\quad K = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left\{ \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} G_{uu} + F_{uv} - \frac{1}{2} E_{vv}, & \frac{1}{2} E_u, & F_u - \frac{1}{2} E_v \\ F_v - \frac{1}{2} G_u & E & F \\ \frac{1}{2} G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} E_v & \frac{1}{2} G_u \\ \frac{1}{2} E_v & E & F \\ \frac{1}{2} G_u & F & G \end{vmatrix} \right\}.$$

En otras palabras, L, M, N no son completamente independientes de $E, F, G,$ puesto que la expresión $LN - M^2$, en virtud de la relación (3), es función de E, F, G y sus derivadas:

$$LN - M^2 = (EG - F^2)K, \tag{6}$$

usando la letra K ahora como abreviación para el segundo miembro de la fórmula (5).

Hay otra interdependencia más entre los 2 tensores fundamentales de una superficie: las llamadas ecuaciones de Codazzi permiten expresar las diferencias $\frac{\partial L}{\partial v}-\frac{\partial M}{\partial u}$ y $\frac{\partial M}{\partial v}-\frac{\partial N}{\partial u}$ en función de E, F, G (y sus derivadas) y de L, M, N mismas; se pueden escribir en la forma [1]:

$$(7) \qquad \frac{\partial L}{\partial v}-\frac{\partial M}{\partial u}=\left(\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{\partial F}{\partial u}\right) H-\frac{1}{2(EG-F^2)}\begin{vmatrix} E & \frac{\partial E}{\partial u} & L \\ F & \frac{\partial F}{\partial u} & M \\ G & \frac{\partial G}{\partial u} & N \end{vmatrix}.$$

$$(8) \qquad \frac{\partial M}{\partial v}-\frac{\partial N}{\partial u}=\left(\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{\partial G}{\partial u}\right) H-\frac{1}{2(EG-F^2)}\begin{vmatrix} E & \frac{\partial E}{\partial v} & L \\ F & \frac{\partial F}{\partial v} & M \\ G & \frac{\partial G}{\partial v} & N \end{vmatrix}$$

«No hay otra interdependencia entre los dos tensores fundamentales, fuera de las expresadas por las identidades (6), (7), (8)» dicen los textos de geometría diferencial. Nada dicen, por lo general, sobre la curvatura media H en función de E, F, G y sus derivadas, aunque se presenta aquí casi espontáneamente el siguiente problema muy interesante: ¿Dado el tensor (1) de una superficie, puede H ser una función cualquiera, o es la curvatura media también una función bien determinada de E, F, G y sus derivadas — tal como es el caso de la curvatura de Gauss en virtud de la identidad (5)?

Parece que este problema no ha sido tratado en la geometría diferencial clásica y que la respuesta ha sido dada, por primera vez, en un trabajo del yugoslavo A. Vakselj [2] (trabajo que contiene también otras contribuciones interesantes a la teoría de las superficies). Independientemente de Vakselj (y sin conocer su publicación), algunos años más tarde ha tratado el mismo problema el norteamericano H. W. Alexander,

(2) A. VAKSELJ: *''Beitraege zur Flaechentheorie''*, Math. Zeitschrift, Bde 38, Heft 3 (Berlín 1934).

en la primera parte de una interesante publicación (3). Los dos matemáticos llegan al mismo resultado sorprendente:

La curvatura media H de una superficie no está determinada por E, F, G y sus derivadas, pero tampoco es completamente independiente de ellas; sino que *hay dos ecuaciones diferenciales parciales de tercer orden las que debe cumplir* H *en función de las coordenadas* u *y* v, con coeficientes que dependen sólo de E, F, G y sus derivadas.

Desgraciadamente, estas ecuaciones diferenciales son tan complicadas que ninguno de los dos autores citados las indica de manera explícita para coordenadas generales, de modo que no se podría pensar en su resolución. También los cálculos efectuados por los dos autores son demasiado largos para poder reproducirlos aquí, y requieren bastante práctica en cálculo tensorial para poder seguir y comprender cada detalle del desarrollo (4).

Por eso esperamos que no serán sin interés las siguientes consideraciones elementales sobre cierta clase de ecuaciones diferenciales (a las que pertenecen las ecuaciones de Codazzi); pues ellas dejarán aparecer menos sorprendente la existencia de dos ecuaciones diferenciales parciales de tercer orden para la curvatura media H. Demostraremos de un modo general que *cualquier función* de L, M, N cumple (por lo general) con dos ecuaciones diferenciales parciales de tercer orden (con coeficientes que pueden depender de E, F, G y sus derivadas). Claro está que tales consideraciones generales no quieren ni pueden de ninguna manera reemplazar los desarrollos de Vakselj y Alexander (4).

*

* *

(3) H. W. Alexander: "*The role of the mean curvature in the immersion theory of surfaces*", Transactions of the American Math. Society, vol. 47, Nº 2 (March 1940).

(4) Para quien quiera estudiar los trabajos originales observo que en la fórmula (4.4) de Alexander hay, según mi opinión, un pequeño error: hay que reemplazar el término $-\frac{\Delta_1 K}{2N^4}$ por $+\frac{\Delta_1(K, N^2)}{2N^4}$. La lectura del trabajo de Vakselj se ve dificultada por el hecho de que el autor cambia la notación durante el desarrollo; p. e. nuestro segundo tensor fundamental (L, M, N) que en los primeros párrafos de Vakselj se llama a_{ik}, desde el § 5 en adelante se llama $\overline{a_{ik}}$, siendo pues a_{ik} otro tensor distinto.

Vamos a considerar el siguiente sistema lineal de dos ecuaciones diferenciales parciales de primer orden para dos funciones de dos variables que llamaremos $L(u,v)$ y $M(u,v)$, en vista de la aplicación que haremos más tarde a nuestro problema de geometría diferencial. Pero, por ahora suponemos sólo que se trate de un sistema de dos ecuaciones que sean lineales en las derivadas $\frac{\partial L}{\partial u}, \frac{\partial L}{\partial v}, \frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v}$ y cuyos coeficientes A_i y B_i sean funciones cualesquiera de u, v, L, M:

$$(9) \qquad \begin{cases} A_1 \dfrac{\partial L}{\partial u} + A_2 \dfrac{\partial L}{\partial v} + A_3 \dfrac{\partial M}{\partial u} + A_4 \dfrac{\partial M}{\partial v} + A_5 = 0 \\ B_1 \dfrac{\partial L}{\partial u} + B_2 \dfrac{\partial L}{\partial v} + B_3 \dfrac{\partial M}{\partial u} + B_4 \dfrac{\partial M}{\partial v} + B_5 = 0. \end{cases}$$

Ahora bien, lo que nos interesa no es la resolución del sistema (9), es decir la determinación de posibles funciones L y M que cumplan con esas ecuaciones diferenciales; sino que queremos obtener, con procesos de eliminación y derivación, ecuaciones diferenciales *para una función cualquiera* Φ *de las funciones «incógnitas»* L y M, la que puede depender además, de manera explícita, de las variables independientes u y v (5). Demostraremos lo siguiente:

Introduciendo, en una función $\Phi(u, v, L, M)$ de 4 variables, para 2 variables L y M soluciones $L(u,v)$ y $M(u,v)$ del sistema (9), Φ pasará a ser una función $\Phi(u, v, L(u,v), M(u,v))$ de las 2 variables u y v sólo; como tal *cumplirá por lo general* (es decir salvo en casos excepcionales) *con dos ecuaciones diferenciales parciales de tercer orden* bien determinadas las que son lineales en las derivadas de tercer orden o sea de la forma:

$$a \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^3} + b \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^2 \partial v} + c \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u \, \partial v^2} + d \frac{\partial^3 \Phi}{\partial v^3} + e = 0,$$

siendo a, b, c, d, e funciones de u, v, Φ y sus derivadas parciales hasta el segundo orden.

---

(5) Se entiende que Φ debe poseer derivadas continuas hasta el tercer orden.

Para demostrar ahora la existencia de 2 tales ecuaciones diferenciales para una dada función Φ de L y M observamos en primer lugar que también para Φ y L como funciones «desconocidas» habrá un sistema de dos ecuaciones diferenciales del mismo tipo (9), siempre que la definición de la función Φ admita una resolución respecto de M, de la forma:

$$M = f(u, v, \Phi, L); \tag{10}$$

pues, en este caso bastará reemplazar, en el sistema (9), la función M por el valor (10); se entiende que hay que reemplazar también $\frac{\partial M}{\partial u}$ por su valor:

$$\frac{\partial M}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial \Phi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial L} \cdot \frac{\partial L}{\partial u} \tag{11}$$

etc.

Se ve fácilmente que el resultado de esta substitución de M, será otro sistema del mismo tipo (9), pero esta vez para las funciones L y Φ. Introduciendo letras minúsculas para los nuevos coeficientes, en

$$\left\{ \begin{aligned} & a_1 \frac{\partial L}{\partial u} + a_2 \frac{\partial L}{\partial v} + a_3 \frac{\partial \Phi}{\partial u} + a_4 \frac{\partial \Phi}{\partial v} + a_5 = 0 \\ & b_1 \frac{\partial L}{\partial u} + b_2 \frac{\partial L}{\partial v} + b_3 \frac{\partial \Phi}{\partial u} + b_4 \frac{\partial \Phi}{\partial v} + b_5 = 0 \end{aligned} \right. \tag{12}$$

tendremos el sistema de ecuaciones diferenciales para L y Φ en función de u y v; las a_i y b_i serán funciones bien determinadas de u, v, L, Φ (por ejemplo: $a_1 = A_1 + \frac{\partial f}{\partial L} \cdot A_3$ etc.).

Siempre que $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, podremos resolver el sistema (12) respecto de $\frac{\partial L}{\partial u}$ y $\frac{\partial L}{\partial v}$; por ejemplo será:

(13)

$$\frac{\partial L}{\partial u} = -\frac{a_3 b_2 - a_2 b_3}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{a_4 b_2 - a_2 b_4}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{a_5 b_2 - a_2 b_5}{a_1 b_2 - a_2 b_1},$$

y análoga ecuación habrá para $\frac{\partial L}{\partial v}$. Introduciendo todavía notaciones abreviadas para los negativos cocientes de determinantes que se presentan, podremos escribir más brevemente:

$$(14) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial u} = \alpha_1 \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} + \alpha_2 \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} + \alpha_3 \\ \dfrac{\partial L}{\partial v} = \beta_1 \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} + \beta_2 \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} + \beta_3 ; \end{cases}$$

nótese que también las α_i y β_i serán funciones bien determinadas de u, v, L, Φ.

Derivando la primera de las 2 ecuaciones (14) respecto de v, y la segunda respecto de u, e igualando los segundos miembros así obtenidos, resultará como «condición de integrabilidad» del sistema (14):

$$(15) \qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\alpha_1 \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \alpha_3\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\beta_1 \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \beta_2 \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \beta_3\right),$$

o escrito detalladamente (y recordando el hecho de que las α_i y β_i son funciones de u, v, L, Φ):

(16)

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u\, \partial v} + \alpha_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial v} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial L} \cdot \frac{\partial L}{\partial v} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \Phi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \ldots$$

$$= \beta_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \beta_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u\, \partial v} + \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial u} + \frac{\partial \beta_1}{\partial L} \cdot \frac{\partial L}{\partial u} + \frac{\partial \beta_1}{\partial \Phi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u}\right) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \ldots$$

Reemplazando todavía $\frac{\partial L}{\partial u}$ y $\frac{\partial L}{\partial v}$ por los segundos miembros de las ecuaciones (14), la condición (16) llegará a ser una relación de la forma

$$(17) \qquad -\beta_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + (\alpha_1 - \beta_2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u\, \partial v} + \alpha_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + \\ + T\left(u, v, \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}, L\right) = 0,$$

si reunimos bajo la abreviación T todos los términos que *no* contengan *segundas* derivadas de Φ. Siendo, por lo general, α_1, α_2, β_1, β_2 y T funciones también de L, en (17) tenemos, pues, una relación entre la función L, las variables u, v, la función Φ y sus derivadas hasta el segundo orden. No entrando más las derivadas de la función L, podemos imaginar resuelta la relación (17) respecto de L, obteniendo de esta manera L como función de u, v, Φ y sus derivadas hasta el segundo orden. En otras palabras, por lo general [6] la ecuación (17) admitirá una resolución de la forma:

$$(18) \qquad L = \varphi\left(u, v, \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u\, \partial v}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}\right).$$

Por fin, podemos derivar esta última función φ respecto de u y v, obteniendo para $\frac{\partial L}{\partial u}$ y $\frac{\partial L}{\partial v}$ ciertas expresiones que dependerán de u, v, Φ y las derivadas de Φ *hasta el tercer orden* (p .e. será $\frac{\partial L}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi u} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} +$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi v} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi uu} \cdot \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^3} + \ldots).$$

Volviendo ahora al sistema de ecuaciones (14), en sus primeros miembros podremos sustituir a las derivadas parciales $\frac{\partial L}{\partial u}$ y $\frac{\partial L}{\partial v}$ sus valores que acabamos de desarrollar, y si todavía en los segundos miembros de (14) — en las funciones α_i y β_i que pueden depender de L — reemplazamos L siempre por la expresión φ indicada por la relación (18), el sistema (14) se transformará en *dos ecuaciones diferenciales parciales de tercer orden* para Φ (en función de u y v) sólo (es decir sin entrar más las funciones L y M de las que han partido nuestras

[6] No ofrece ningun interés el caso de no ser posible una resolución de la forma (18) por no figurar L en la relación (17); pues en tal caso tendríamos en (17) hasta una ecuación diferencial de segundo orden para Φ (cuya derivación respecto de u y v nos daría inmediatamente dos ecuaciones diferenciales de tercer orden para Φ .

consideraciones). Aun sin efectuar todas esas substituciones, se ve claramente que las dos ecuaciones diferenciales obtenidas son lineales en las 4 derivadas de tercer orden

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^3}, \quad \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^2 \partial v}, \quad \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u \, \partial v^2}, \quad \frac{\partial^3 \Phi}{\partial v^3}.$$

*

* *

¿Cómo se aplican ahora las consideraciones generales que acabamos de hacer, al caso de la curvatura media H de una superficie?

Considerando E, F, G como funciones *conocidas* de las variables u y v, podemos usar la relación (6) para expresar N en función de L y M:

$$N = \frac{1}{L}\left\{M^2 + (EG - F^2)\, K\right\}; \tag{19}$$

K sirve aquí como abreviación para el 2°. miembro de la identidad (5).

Reemplazando este valor de N en las ecuaciones (7) y (8) de Codazzi, estas últimas nos darán un sistema de ecuaciones de la forma

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial M}{\partial u} = A\left(u, v, L, M, E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \ldots\right) \\ &\frac{M^2 + (EG - F^2)K}{L^2} \cdot \frac{\partial L}{\partial u} - \\ &- \frac{2M}{L} \cdot \frac{\partial M}{\partial u} + \frac{\partial M}{\partial v} = B\left(u, v, L, M, E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \ldots\right) \end{aligned}\right. \tag{20}$$

en donde A y B sirven como abreviaciones para funciones «complicadas», pero bien determinadas de u, v, E, F, G (y sus derivadas), L, M.

Por lo tanto, si E, F, G son funciones dadas de u y v, en (20) tenemos para las dos funciones $L(u, v)$ y $M(u, v)$ un sistema de ecuaciones diferenciales lineales del tipo (9). (Por ejemplo será $A_1 = 0$, $A_2 = 1$, $B_3 = -\frac{2M}{L}$, etc.).

Por consiguiente, habrá por lo general dos ecuaciones diferenciales parciales de tercer orden para cualquier función Φ de L y M, y también para cualquier función de L, M, N, puesto que N, en virtud de (19), es expresable por L y M. Por ejemplo, podremos tomar, como función Φ, la curvatura media H, la que, por su definición (4), es una función de u, v, L, M y N, si consideramos E, F, G como funciones dadas de u y v. Siempre que todas las suposiciones hechas más arriba (en el desarrollo general) sean cumplidas, nuestras consideraciones elementales nos enseñan que la existencia de dos ecuaciones diferenciales parciales de tercer orden para la curvatura media es una consecuencia formal de las identidades (6), (7) y (8) entre los dos tensores fundamentales de una superficie.

Desgraciadamente, el cálculo efectivo de las dos ecuaciones diferenciales para H, según el método general considerado por nosotros, no parece ser posible por varias dificultades de orden práctico (p .e., siempre en el caso de H como función Φ, no parece posible encontrar, de la manera indicada, una resolución explícita del tipo (18) para la relación (17), por ser demasiado «complicada» la función T que entra en esta última).

Universidad Técnica F. Santa María
Valparaíso (Chile), 1941.

TEMAS PROPUESTOS

36. — Estudiar la sucesión recurrente $u_1, u_2, u_3, \ldots$ definida por la relación

$$a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \ldots\ldots + a_p u_{n+p} = 0 \qquad a_p \neq 0,$$

y en especial obtener la relación existente entre $p+1$ términos cualesquiera $u_{n_0}, u_{n_1}, \ldots, u_{n_p}$.

J. Babini

37. — Estudiar las propiedades de la función introducida por Legendre (Exercices vol. I, p. 262) definida así:

$$(x, n)^m = \frac{1}{x^m} + \frac{1}{(x+n)^m} + \frac{1}{(x+2n)^m} + \ldots\ldots$$

CUESTIONES ELEMENTALES RESUELTAS

No. 9. Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *son los términos de una progresión armónica, demostrar que:* $\sum\limits_{r=1}^{n} d^{r-1} C\,n,r = n\,\alpha_1$*; siendo* d *la razón de la progresión aritmética y* $C\,n,r$ *los productos de las* α *tomadas de* r *en* r.

Si desarrollamos el siguiente producto de binomios:

$$(1+\alpha_1 d)(1+\alpha_2 d)\ldots(1+\alpha_n d) = 1 + d(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n) + d^2(\alpha_1\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n)+\ldots$$

$+\,d^n \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ es la sumatoria expresada en el primer miembro, aumentada en 1 y multiplicada por d; o sea: $\sum\limits_{r=1}^{n} d^{r-1} C\,n,r =$

$$= \frac{(1+\alpha_1 d)(1+\alpha_2 d)\ldots(1+\alpha_n d) - 1}{d}.$$

Pero siendo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ una progresión armónica, es $\frac{1}{\alpha_1}$; $\frac{1}{\alpha_2}$; $\ldots \frac{1}{\alpha_n}$ una progresión aritmética de razón d; luego un término cualquiera $\frac{1}{\alpha_i}$ se obtiene mediante el algoritmo siguiente:

$$\frac{1}{\alpha_i} = \frac{1}{\alpha_{i-1}} + d \;\therefore\; \frac{1}{\alpha_i} = \frac{1 + d\,\alpha_{i-1}}{\alpha_{i-1}} \;\therefore\; (1 + d\,\alpha_{i-1}) = \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} \quad (1)$$

y además resulta: $\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{\alpha_1} + (n-1)\,d \;\therefore\; \alpha_n = \frac{\alpha_1}{1+(n-1)\,d\,\alpha_1}$ (2);

luego, sustituyendo los binomios por los valores dados en (1), resulta:

$$\sum_{r=1}^{n} d^{r-1} C\,n,r = \frac{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\cdot\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\cdots\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}(1+\alpha_n d) - 1}{d} = \frac{1}{d}\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_n}(1+\alpha_n d) - 1\right]$$

y sustituyendo α_n por el valor dado en (2):

$$\sum_{r=1}^{n} d^{r-1} C\,n,r = \frac{1}{d}\left[(1+\alpha_1(n-1)\,d)\left(1+\frac{\alpha_1 d}{1+(n-1)\,d\,\alpha_1}\right) - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{d}\left(1+\alpha_1(n-1)\,d + \alpha_1 d - 1\right) \therefore$$

$$\sum_{r=1}^{n} d^{r-1} C\,n,r = n\,\alpha_1.$$

Juan José Rodríguez

Alumno de 2º Año de Matemáticas del I. N. P. S.

ENIGMAS DE LA MATEMATICA

III. - La «Hipótesis del continuo»

La teoría de conjuntos creada por Cantor, en el último tercio del siglo pasado, tiene como base el concepto de potencia de un conjunto infinito, generalización del concepto de número cardinal de un conjunto finito. Según Cantor, dos conjuntos tienen la misma potencia cuando se puede establecer entre los elementos de ambos una correspondencia biunívoca, es decir, una correspondencia tal que a cada elemento de un conjunto le corresponda un elemento y uno solo del otro conjunto.

Este concepto carecería de mayor interés si todos los conjuntos infinitos tuvieran la misma potencia; toda la teoría de Cantor, la mayor contribución a la matemática desde la invención del cálculo infinitesimal, reposa en última esencia en el hecho de que existen conjuntos infinitos que tienen distinta potencia; el primer ejemplo que dió Cantor para demostrar esta proposición es particularmente notable por la importancia de los dos conjuntos que lo constituyen, el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números reales.

Los conjuntos que tienen la misma potencia que el de los números reales se dicen de potencia del continuo (entre ellos figura el conjunto de los puntos de un espacio cartesiano de cualquier número de dimensiones); los conjuntos que tienen la misma potencia que el de los números naturales se dicen numerables (entre ellos figuran el conjunto de los números racionales y el de los números algebraicos).

Una vez estos resultados establecidos se plantea naturalmente el siguiente problema: ¿todo conjunto de números o de puntos del plano o de puntos de un espacio cartesiano de cualquier número de dimensiones, será forzosamente numerable o de potencia del continuo?

La respuesta de esta pregunta es, posiblemente, el más importante de los problemas sin resolver de la matemática actual y ya Hilbert, en su famosa conferencia del Congreso de Matemáticas de París a comienzos del presente siglo, lo clasificaba en primer lugar entre los problemas no resueltos de la matemática.

La respuesta afirmativa a esta cuestión constituye la «hipótesis del continuo», que puede por tanto enunciarse como la hipótesis de que *todo conjunto no numerable de números reales tiene la potencia del continuo.*

Esta hipótesis es equivalente, una vez definidos los conceptos de mayor y menor potencia de dos conjuntos (un conjunto se dice de menor potencia que otro cuando tiene la misma potencia que un subconjunto de este último y la recíproca no se verifica), a afirmar que no existe ningún conjunto de potencia mayor que la de los conjuntos numerables y menor que la del continuo.

Puede darse otra manera de enunciar la hipótesis del continuo ligada con el concepto de número ordinal de un conjunto.

Un conjunto se dice que está *ordenado* cuando, dados dos elementos a y b, se puede decir o bien que a precede a b o que b precede a a, y esta relación es transitiva.

Un elemento al que no le precede ningún otro de un conjunto, se dice el primer elemento del conjunto, y un conjunto tal que todo subconjunto no nulo admita un primer elemento se llama *bien ordenado*.

Dos conjuntos ordenados se dice que tienen el mismo tipo de orden o el mismo número ordinal cuando se puede establecer entre ambos una correspondencia biunívoca y que conserve el orden en los elementos homólogos. Evidentemente, dos conjuntos que tienen el mismo tipo de orden tienen la misma potencia, pero la recíproca en cambio no es cierta (1).

El concepto de tipo de orden o de número ordinal de un conjunto se aplica en particular a los conjuntos bien ordenados. Los números ordinales de los conjuntos finitos se dicen que son de clase I y los correspondientes a los conjuntos bien ordenados numerables son los números transfinitos de clase II. Ahora bien, se demuestra que el conjunto de todos los números transfinitos de clase II no es numerable y que no existe ninguna potencia intermedia entre la de los conjuntos numerables y la de este conjunto.

La hipótesis de que esta potencia es la del continuo es otra forma distinta de enunciar la hipótesis del continuo; se llama también la hipótesis H).

Estas dos maneras de enunciar la hipótesis del continuo son equivalentes, pero, si bien es verdad que se demuestra que la hipótesis H) implica que todo conjunto no numerable de números reales tiene la potencia del continuo, la demostración de la recíproca necesita la aplicación del axioma de Zermelo.

Si se pudiera demostrar la hipótesis del continuo, la teoría de conjuntos se simplificaría grandemente, puesto que para demostrar que un conjunto de números reales, o de puntos de un plano, o de un espacio cartesiano, tiene la potencia del continuo, bastaría demostrar que no es finito ni numerable, lo que simplificaría muchas demostraciones; por otra parte, la hipótesis H) implica la existencia de un conjunto bien ordenado de potencia del continuo, luego apoyándose en ella podrían demostrarse, sin utilizar el axioma de Zermelo, los teoremas cuyas demostraciones se apoyan en un caso particular del

(1) Ver por ejemplo: Sierpinski, *Leçons sur les nombres transfinis.*

teorema de Zermelo, es decir en la existencia de un conjunto bien ordenado cuyos elementos son todos los números reales (2).

El problema de la resolución afirmativa o negativa de la hipótesis del continuo ha sido el objeto de numerosos trabajos de parte de los matemáticos contemporáneos, pero hasta ahora sin ningún resultado; estos esfuerzos, no obstante, han servido para establecer numerosas proposiciones que son consecuencia y aun que son equivalentes a la hipótesis del continuo, sin que en ningún caso se haya encontrado una contradicción que hubiera probado la falsedad de la hipótesis. Por otra parte existen hoy día matemáticos que creen en la imposibilidad de resolver este problema sin admitir un nuevo axioma (3).

Vamos ahora a enunciar algunas proposiciones que no han podido ser demostradas sin la ayuda de la hipótesis del continuo o que son equivalentes a ésta y que, como veremos, se relacionan con diversas ramas de la matemática actual.

Son equivalentes a la hipótesis del continuo, es decir, que admitida ésta se pueden demostrar y recíprocamente de ellas se puede deducir la hipótesis, las proposiciones siguientes:

A) «El conjunto de todos los puntos del plano es una suma de dos conjuntos, de los cuales uno tiene como intersección con toda paralela al eje de abscisas un conjunto a lo más numerable, y el otro tiene como intersección con toda paralela al eje de ordenadas un conjunto también a lo más numerable (es decir nulo, finito o numerable)».

B) «El espacio ordinario de tres dimensiones es una suma de una infinidad numerable de curvas». Se entiende por curva en este caso el conjunto de todos los puntos (x, y, z) que satisfacen a las ecuaciones $x = f(z)$, $y = g(z)$, o a las análogas considerando la x o la y como variables independientes, siendo las funciones f y g funciones unívocas de una variable real.

C) «Existe una sucesión de funciones unívocas de una variable real $f_1(x), f_2(x), \dots f_n(x), \dots$ tal que cualquiera que sea el conjunto no numerable de números reales que se considere, todas las funciones de la sucesión, salvo a lo más un número finito, transforman dicho conjunto en el conjunto de todos los números reales».

(2) Recordemos que el enunciado del teorema de Zermelo es que "todo conjunto puede ser, de una posibilidad ideal, considerado como conjunto de elementos de un conjunto bien ordenado".

(3) A los eminentes matemáticos que han dedicado sus esfuerzos a resolver este problema sin conseguirlo pero que han hecho progresar la matemática en general y en particular la teoría de conjuntos, se les podría aplicar la conocida frase del Dr. Letamendi, "El que se dedique a tirar piedras a la Luna no conseguirá su objeto, pero llegará a ser el mejor tirador de su país", sin que esto signifique prejuzgar la posibilidad o imposibilidad de la resolución de este problema.

D) «El conjunto de todos los números reales es una suma de conjuntos crecientes y numerables». Varios conjuntos se dice que son crecientes cuando tomados dos conjuntos distintos cualesquiera, uno de ellos es parte alícuota del otro.

E) «Existe en el espacio de Hilbert un conjunto no numerable de puntos tal que ningún subconjunto no numerable sea homeomorfo a una parte de un espacio euclidiano».

Las proposiciones que vamos a citar ahora son simplemente consecuencia de la hipótesis del continuo, es decir, que admitida ésta las proposiciones quedan demostradas, pero en cambio si postulamos la validez de las proposiciones no sabemos deducir la hipótesis del continuo, quedando por tanto la posibilidad de que puedan más adelante demostrarse sin utilizar la hipótesis; vamos a enunciar algunas de ellas:

1) «Existe un conjunto lineal de potencia del continuo que admite como intersección con cualquier conjunto lineal perfecto no denso un conjunto a lo más numerable».

2) «Existe un conjunto lineal de potencia del continuo del que todas las imágenes homeomorfas son de medida nula».

3) «Existe un conjunto plano de potencia del continuo tal que todo subconjunto no numerable del mismo no es medible superficialmente en el sentido de Lebesgue».

4) «Entre los tipos de dimensiones de Fréchet de los conjuntos lineales no numerables no existe ninguno que sea el más pequeño».

Otra de las consecuencias de la hipótesis del continuo se relaciona con el llamado problema de la medida generalizada; es sabido que existen conjuntos de puntos que no son medibles en el sentido de Lebesgue; lógicamente se plantea el problema de encontrar otra definición de medida de un conjunto que comprenda a la de Lebesgue y que esté definida para cualquier conjunto de puntos. Ahora bien, si se admite la hipótesis del continuo se demuestra que no es posible esta definición de medida, es decir se demuestra que:

5) No existe ninguna función real de conjunto lineal, es decir, una función $m(E)$, que haga corresponder a cada conjunto E un número real finito $m(E)$, y que verifique las condiciones siguientes:

a) m(E) *está definida cualquiera que sea el conjunto lineal* E.

b) m(E) *no es idénticamente nula.*

c) m(E) *es completamente aditiva,* es decir que cualquiera que sea la sucesión de conjuntos sin parte común $E_1, E_2, \ldots E_n, \ldots$ se verifica

$$\sum_1^\infty m\,(E_i) = m\,(\sum_1^\infty E_i)$$

d) m(E) *se anula si* E *se compone de un solo punto,* y en virtud de c) también si E es un conjunto numerable.

Terminamos esta exposición remitiendo al lector para su ampliación y para las demostraciones de los resultados en ella enunciados a la obra del eminente matemático, fundador de la escuela polaca, Waclaw Sierpinski, titulada «Hypothese du continu» (de la colección de monografías matemáticas de la Universidad de Varsovia). En ella encontrarán además muchas más proposiciones equivalentes a la hipótesis del continuo o consecuencias de ella, así como un estudio del *problema del continuo* y de la llamada *hipótesis del continuo generalizada*, problemas de importancia en teoría de conjuntos pero que aquí no podemos hacer más que enunciar.

Manuel Balanzat

VARIA

12. — *Una disertación de Weyl sobre el pensar matemático*

En ocasión del segundo centenario de la University of Pennsylvania, se celebraron reuniones y conferencias, una de las cuales estuvo a cargo de Hermann Weyl, quien disertó sobre: The mathematical way of thinking, entendiendo por ello, en primer lugar la forma de raciocinio a través del cual la matemática penetra en las ciencias del mundo exterior: física, química, biología, economía, etc., así como en el pensar común; y en segundo lugar la forma de raciocinio que el matemático aplica en su propio campo. Caracteriza el pensar matemático como un pensar concretamente, que se enfrenta cara a cara con las cosas, y como un pensar abstracto que reemplaza las ideas intuitivas por puros símbolos. Toda la disertación está impregnada por la tendencia constructivista de la matemática, aunque al final la compara con la tendencia axiomática refiriéndose a los esfuerzos de Hilbert y al teorema de Gödel, concluyendo, respecto de los fundamentos de la matemática, que nunca como hoy hemos estado tan poco seguros de los fundamentos últimos sobre los que ella descansa; lo que no impide, termina diciendo la interesante disertación, que esta ciencia, a pesar de su edad y de su creciente complejidad, no esté afectada por una esclerosis progresiva y, por el contrario, siga intensamente viva y alimentándose continuamente a través de sus profundas raíces arraigadas en la mente y en la naturaleza.

De *Studies in the history of Science*. Philadelphia, 1941.

13. — *De la correspondencia de Hermite a Stieltjes*

''Querido amigo. mucho me alegro de tener conocimiento de su opinión de que hay que transformarse en naturalista para observar los fenómenos del mundo aritmético. Su doctrina es la mía; yo no creo que los números y las funciones del análisis sean productos arbitrarios de nuestro espíritu; más bien pienso que tienen existencia fuera de nosotros, con el mismo carácter de necesidad que los objetos de la realidad objetiva, y que nosotros los encontramos o los descubrimos y los estudiamos lo mismo que los físicos, los químicos o los naturalistas''.

PROFESOR GEORGE D. BIRKHOFF

A mediados de este año fué grato huesped de la Argentina, el matemático norteamericano George D. Birkhoff, profesor en la Universidad de Harvard. Durante su breve permanencia entre nosotros desarrolló una fecunda actividad, pronunciando conferencias en universidades e instituciones científicas e interviniendo en reuniones científicas. La Unión Matemática Argentina tuvo el placer de celebrar una sesión en su honor, de la cual se da cuenta en otro lugar de esta Revista, y en la que fué por aclamación designado miembro honorario de la Unión. A continuación publicamos una breve noticia biográfica del ilustre huesped.

Nació en Overisel, pequeña comunidad holandesa del Estado de Michigan, en 1884. Su padre, holandés de nacimiento, ejercía la medicina en ese pueblo. El prof. Birkhoff está orgulloso de su ascendencia holandesa y habla con veneración de sus ascendientes, que ocuparon cargos espectables en su país durante varios cientos de años.

Permaneció seis años en el Lens Institute, de Chicago, que fué uno de los primeros Junior Colleges del país. Después ingresó en la Universidad de Harvard, en la que se graduó de "bachelor", título equivalente al nuestro de licenciado. Obtuvo luego una beca para ir a estudiar al extranjero, pero prefirió continuar sus estudios en la Universidad de Chicago, que pasaba en aquel entonces por su edad de oro y reunía a las figuras científicas sobresalientes del país: los físicos Millikan (después premio Nobel) y Michelson; los matemáticos Moore, Bolza y Dickson y el filósofo Dewey. Moore lo hizo inmediatamente su asistente. Obtuvo en Chicago nuevamente una Beca, que aceptó por el honor que ello significa, aunque en realidad no la necesitaba, pues su familia estaba en situación acomodada. Obtuvo su grado de doctor en Matemáticas en 1907, a los 23 años, edad mucho más temprana de la usual. Inmediatamente fué nombrado Profesor en la Universidad de Wisconsin, donde a la sazón era van Vleck, otro matemático de ascendencia holandesa, director del Departamento de Matemática.

Después pasó a la Universidad de Princeton durante tres años. Allí fué hecho profesor titular. Para ese entonces ya había publicado trabajos notables, y la Universidad de Harvard le ofreció incorporarlo a su seno. El Prof. Birkhoff aceptó el ofrecimiento, y en Harvard ha permanecido desde entonces.

El Prof. Birkhoff realizó en Harvard trabajos extraordinarios que le valieron la admiración universal. Pero si su carrera científica ha sido descollante, no ha sido menor su éxito como maestro y como organizador. A la cabeza del Departamento de Matemática de Harvard ha realizado una obra benemérita para la matemática norteamericana. Ha formado discípulos que son hoy los primeros matemáticos norteamericanos; Morse, ahora profesor en el Institute of Advanced, continuador muy original de la obra matemática de Birkhoff; Marshall Stone, a quien han hecho famoso sus Memorias y un libro reciente sobre el espacio de Hilbert; su propio hijo, el profesor Garrett Birkhoff, también famoso antes de los treinta años; Saunders Mc Lane, algebrista de gran vuelo, y muchos otros.

Los honores se acumularon rápidamente sobre este matemático de genio. Miembro de la Academia Nacional de Ciencias a la edad mínima, antes de los treinta y cinco años, pertenece también a todas las corporaciones científicas norteamericanas. Es asimismo miembro de las principales sociedades doctas del mundo: la Academia de París, la Academia Pontificia, las de Göttingen, Berlín, Estocolmo; prácticamente todas las del mundo. A fuer de hombre de ciencia moderno, no ha permanecido ciertamente encerrado en su cuarto de estudio: ha recorrido el mundo ya dos veces, y ha dictado cursos, especialmente invitado, en París, en Roma, en Cambridge, en Londres, en Berlín, en Gotinga, en las principales universidades del mundo.

En cuanto a la producción matemática de Birkhoff, puede decirse que su carácter es la *sutileza*; se hizo famoso de un golpe, demostrando el famoso "último teorema de Poincaré"; teorema que Poincaré había enunciado en su última memoria, aparecida en 1912, poco antes de morir, y había tratado inútilmente de demostrar. Este teorema, puramente topológico, que afirma la existencia de dos puntos fijos en un anillo sometido a una transformación topológica que conserva las áreas, y en la cual las circunferencias fronteras se mueven en sentido inverso, es de importancia fundamental, según Poincaré había visto, para el estudio cualitativo de las curvas integrales de las ecuaciones de la dinámica en todo su campo de existencia.

Birkhoff siguió luego estudiando los problemas topológicos relacionados con los sistemas dinámicos, obteniendo resultados de una profundidad extraordinaria. Ha hecho una exposición de conjunto de sus trabajos en ese campo en el libro "Dynamical Systems", publicado en 1917 por la American Mathematical Society. Este libro sigue siendo, y lo será todavía por mucho tiempo, la obra fundamental sobre sistemas dinámicos. Su labor en este campo puede colocarse sin desmedro al lado de la de Poincaré y Levi Civita.

Se ha ocupado también y ha logrado aportes fundamentales a la teoría de las ecuaciones lineales o no, en diferencias finitas, las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias y en derivadas parciales, las ecuaciones integrales; especial mención merece, por su elegancia, originalidad y profundidad, su trabajo sobre "puntos fijos" en el espacio funcional. Extiende en él, de manera originalísima, al espacio funcional, los resultados sobre puntos fijos en transformaciones del espacio ordinario, y logra así demostrar, de manera simplísima, y con método uniforme, los teoremas conocidos sobre existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales e integrales.

Otro aporte fundamental de Birkhoff a la matemática es su famoso "teorema ergódico", que demostró en una nota célebre publicada en los "Proceedings" de la Academia Nacional de Ciencias, en el año 1931. La célebre "hipótesis ergódica" que Maxwell y Boltzmann admitieron, a pesar de su extraño carácter, porque sin admitirla resultaba poco menos que imposible seguir adelante en la Mecánica Estadística, se convirtió, por obra del genio de Birkhoff, en un *"Teorema"*. Cosa no muy usual por cierto; lo común es, por lo contrario, que muchos que creemos teoremas resulten, al fin y a la postre, axiomas o postulados. El método de demostración de Birkhoff es sencillamente genial, por lo simple y a la vez por lo profundo. Puede decirse que la Mecánica estadística ha encontrado en el teorema de Birkhoff el instrumento que le permitirá convertirse en una disciplina rigurosa.

A. G. D.

CRONICA

Sesión científica de la Unión Matemática Argentina, en honor a George D. Birkhoff, celebrada el 30 de junio de 1942

El 30 de junio de 1942 en una de las aulas de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Buenos Aires, se celebró un acto organizado por la UMA, en honor del eminente matemático norteamericano George D. Kirkhoff, ilustre huésped en esos días de la Argentina.

El acto fué presidido por el invitado de honor, el decano de la Facultad, ingeniero Luis M. Ygartua, especialmente invitado, y por el presidente de la UMA ingeniero José Babini. Asistió también al mismo, como invitado especial, el director del Instituto de Matemática de Rosario profesor Beppo Levi y un crecido número de miembros y socios de la UMA de Buenos Aires, La Plata, Rosario y Santa Fe, así como numeroso público.

Abrió el acto el presidente de la UMA quien en breves palabras señaló el significado del acto y de la presencia en él del gran matemático norteamericano, como estímulo a la obra que realiza la UMA y como signo promisor de una mayor vinculación científica y de un mejor conocimiento mútuo entre los pueblos del continente americano. A continuación propuso que el profesor Birkhoff fuera designado miembro honorario de la UMA, lo que fué aprobado por aclamación entre grandes aplausos.

Acto seguido fueron presentadas las siguientes comunicaciones científicas, que resumimos a continuación.

A. DURAÑONA y VEDIA. — *Teoremas tauberianos sobre series dobles*

El método expuesto por el profesor Durañona, que ya fué publicado en la Revista de la Facultad de Ciencias Matemáticas de La Plata, permite abreviar la demostración que diversos autores, especialmente Knopp, han dado para los teoremas tauberianos conocidos sobre las series dobles. Con tal objeto introduce notaciones simbólicas que abrevian la escritura, previo un estudio de los operadores que llama (T), los cuales corresponden a las operaciones lineales de Topeplitz-Silverman, también llamados algoritmos lineales de convergencia y que Dienes designa ''T-transformations''.

Define además el ''límite conjunto'' tipo de convergencia que equivale a la convergencia ordinaria más la acotación de las sumas parciales. En el trabajo publicado desarrolló sistemáticamente con este método la demostración de los teoremas demostrados por otro camino en la memoria de Knopp, y de algunos otros, ya conocidos para series dobles o solamente para series simples. En esta breve exposición oral, su autor tuvo que limitarse a dar idea del método, del cual puede esperarse que conduzca a la extensión a las series dobles de otros teoremas ya conocidos ahora o más adelante para las simples, ya que el procedimiento de demostración resulta paralelo.

ALBERTO GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. — *Sobre una ecuación integral*

El autor obtiene, como consecuencia fácil de conocidos teoremas de Titchmarsch (Conjugate trigonometrical integrals, Proc. London Math. Society, (2) 24 (1924), 109-130) y de M. Riesz (Sur les fonctions conjuguées, Math. Zeitschrift, 27 (1927), 218-244), entre otros los siguientes teoremas:

Teorema 1. Sea $f(t)$ una función de la clase $L^p(0,\infty)$, $p>1$.

Existe entonces una función $g(x)$, perteneciente a la misma clase L^p, tal que en casi todo punto se cumplen las relaciones

$$1)\qquad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{xf(t)}{t^2-x^2}\,dt = g(x),\quad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{xg(x)}{t^2-x^2}\,dx = f(t);$$

se verifica también

$$2)\qquad \int_0^\infty |g(x)|^p\,dx \leq M_p^p \int_0^\infty |f(x)|^p\,dx,$$

donde M depende solamente de p.

Para $p=2$, el signo $\leq$ debe substituirse en la fórmula (2), por el signo $=$.

Teorema 2. Sea $f(t)$ una función acotada que satisface a una condición de Lipschitz de orden α, $(0<\alpha<1)$, y tal que converja la integral

$$\int^{\to\infty} \frac{f(t)\,lgt}{t}\,dt$$

Existe entonces una función $g(x)$ tal que se cumplen las relaciones (1); $g(x)$ satisface a la misma condición de Lipschitz que $f(t)$, y converge la integral

$$\int^{\to\infty} \frac{g(x)}{x}\,dx.$$

Estos teoremas constituyen amplias generalizaciones de resultados recientes debidos a B. Gross (*Sobre una transformaçao integral que interessa á electrotecnica,* (Annais da Academia Brasileira de Sciencias, Tomo XIII, Nº 1, marzo de 1941) y a Beppo Levi (*Sobre la inversión de una integral definida,* Publicaciones del Instituto de Matemática de la Universidad del Litoral, Vol. III, Nº 4, pp. 119-129, 1941.)

M. Cotlar. — *Estudio de las funciones holomorfas univalentes sobre el contorno en un conjunto de medida positiva.*

Después de definir los conceptos de "arco propio" y de función univalente sobre un arco propio, demuestra los siguientes resultados:

1) Toda familia compuesta de funciones univalentes sobre un arco propio AB de longitud l, es una familia quasi-normal en todo el círculo $|z| < r < 1$ y de orden que depende sólo de r y de ν, siendo ν la parte entera de $2\pi : l$. Si las funciones están acotadas en $\nu + 1$ puntos de un círculo interior a D ellas están acotadas en D.

2) Toda función univalente sobre AB cubre (y a lo sumo ν veces) un círculo al origen cuyo radio depende tan solo de las primeras ν derivadas en el origen.

3) $f(z)$ es univalente en AB, en todo círculo $|z| < r < 1$, el número de ceros no excede a una constante que depende sólo de l y de r a saber

$$\pi : arc\ tg\left(\frac{1-r}{1+r}\, tg\, \frac{l}{2}\right)$$

4) Si $f(z)$ es univalente sobre AB se tiene la acotación

$$|f(z)| \leq K(l)\ [f'(0) + \dots + f^{\nu}\ (0)]\ \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

donde $K(l)$ depende solo de $l(K(2\pi) = 1)$.

5) Si f es univalente sobre AB existe una región $\triangle$ de D, contigua a AB y que depende sólo de l tal que en $\triangle$ es la función univalente y no se anula.

6) Si AB es un arco propio de una función $f(z)$ continua, la serie de Taylor converge en todo punto de AB excepto, a lo sumo, en un conjunto no denso en AB. Estos resultados se extienden todavía al caso en que se reemplaza el arco de univalencia por un conjunto de medida $l > O$. En particular para $l = 2\pi$ se obtienen las propiedades de las funciones univalentes ordinarias.

VOLUMEN III (Fascículos separados; 1938 - 1939)

Nº 1. — GINO LORIA. *Le Matematiche in Ispagna e in Argentina.*
» 2. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre las series de funciones de Hermite.*
» 3. — MICHEL PETROVICH. *Remarques arithmétiques sur une équation differentielle du premier ordre.*
» 4. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Una nueva demostración del teorema límite del Cálculo de Probabilidades. Condiciones necesarias y suficientes para que una función sea integral de Laplace.*
» 5. — NIKOLA OBRECHKOFF. *Sur la sommation absolue par la transformation d'Euler des séries divergentes.*
» 6. — RICARDO SAN JUAN. *Derivación e integración de series asintóticas.*
» 7. — Resolución adoptada por la U. M. A. en la cuestión promovida por el Sr. Carlos Biggeri.

VOLUMEN IV (Fascículo separado; 1939)

Nº 8. — F. AMODEO. *Origen y desarrollo de la Geometría Proyectiva.*

VOLUMEN V (Fascículos separados; 1940)

Nº 9. — CLOTILDE A. BULA. *Teoría y cálculo de los momentos dobles.*
» 10. — COTILDE A. BULA. *Cálculo de superficies de frecuencia.*

VOLUMEN VI (Fascículos separados; 1940 - 1942)

Nº 11. — R. FRUCHT. *Zur Geometria auf einer Fläche mit indefiniter Metrik (Sobre la Geometría de una superficie con métrica indefinida).*
» 12. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre una memoria del Prof. J. C. Vignaux.*
» 13. — F. TORANZOS. *Sobre las singularidades de las curvas de Jordan.*
» 14. — M. BALANZAT. *Fórmulas integrales de la intersección de conjuntos.*
» 15. — G. KNIE. *El problema de varios electrones en la mecánica cuantista.*
» 16. — A. TERRACINI. *Sobre la existencia de superficies cuyas líneas principales son dadas.*
» 17. — L. A. SANTALÓ. *Valor medio del número de partes en que una figura convexa es dividida por* n *rectas arbitrarias.*
» 18. — A. WINTNER. *On the iteration of distribution functions in the calculus of probability (Sobre la iteración de funciones de distribución en el cálculo de probabilidades).*
» 19. — E. FERRARI. *Sobre la paradoja de Bertrand.*
» 20. — J. BABINI. *Sobre algunas propiedades de las derivadas y ciertas primitivas de los polinomios de Legendre.*
» 21. — R. SAN JUAN. *Un algoritmo de sumación de series divergentes.*
» 22. — A. TERRACINI. *Sobre algunos lugares geométricos.*
» 23. — V. y A. FRAILE y C. CRESPO. *El lugar geométrico y lugares de puntos áreas en el plano.*
» 24. — R. FRUCHT. *Coronas de grupos y sus subgrupos, con una aplicación a los determinantes.*
» 25. — E. R. RAIMONDI. *Un problema de probabilidades geométricas sobre los conjuntos de triángulos.*

VOLUMEN VII (1940 - 1941)

Notas y memorias de J. BABINI, H. E. CALCAGNO, E. FERRARI, V. y A. FRAILE y C. CRESPO, G. KNIE, J. J. REBELLA, S. RIOS, R. SAN JUAN, L. A. SANTALÓ, A. TERRACINI.

Soluciones de temas propuestos. Bibliografía, Crónica, etc.

En 1942 la U. M. A. ha iniciado la publicación de una nueva serie de "Memorias y monografías" de las que han aparecido hasta ahora las siguientes:

Nº 1. — GUILLERMO KNIE, *Mecánica ondulatoria en el espacio curvo* (1 volumen de 152 páginas).

Además han aparecido tres cuadernos de *Miscelanea matemática.*

S U M A R I O

Contribuyen especialmente al sostenimiento de las publicaciones de la UNION MATEMATICA ARGENTINA los siguientes

MIEMBROS PROTECTORES

COMPAÑÍA INDUSTRIAL DEL NORTE DE SANTA FE. INGENIO AZUCARERO ''ARNO'' (Villa Ocampo. F. C. S. F.). — JULIO REY PASTOR (Buenos Aires). — T. G. BERLENGIERI y CIA. (Rosario). — TRICERRI HNOS. (Rosario). — MANUEL GUITARTE (Buenos Aires). — CLOTILDE A. BULA (Rosario). — ELBA R. RAIMONDI (Buenos Aires). — FERNANDO L. GASPAR (Rosario). — PÓ M. OLCESE (Rosario). — CARLOS ISELLA (Rosario). — PEDRO J. TRICERRI (Rosario).