Volumen VIII Número 4

REVISTA

DE LA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

(MIEMBRO DEL PATRONATO DE LA MATHEMATICAL REVIEWS)

□

□

BUENOS AIRES

1942

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Para ingresar como miembro titular de la Unión Matemática Argentina, es necesaria la presentación del solicitante por dos socios fundadores, la admisión por la Junta, y el pago de una cuota de $ 5. — m/n. mensuales o de $ 50.— anuales.

Para ingresar como miembro adherente (con derecho a la Revista y a las Memorias en fascículos separados) es necesario el pago de una cuota de $ 10.— anuales. Los pagos deberán efectuarse por cheque, giro u otro medio libre de gastos, a la orden de la Tesorera, Prof. Clotilde A. Bula, Moreno 364, Rosario.

Los señores miembros adherentes domiciliados en la Ciudad de Buenos Aires podrán, si lo prefieren, efectuar su pago en doce cuotas mensuales de $ 1.00 m/n. cada una, que serán cobradas a domicilio.

Por ser la U. M. A. miembro del patronato de la Mathematical Reviews (sponsoring member), los socios de la U. M. A. tienen derecho a suscribirse a esa importante revista de bibliografía y crítica con 50 % de rebaja sobre el precio de suscripción que es de 13 dólares por año. Los socios de la U. M. A. pagarán por tanto sólo 6.50 dólares por año.

Los trabajos originales enviados para su publicación serán previamente analizados por un ponente, quien emitirá dictamen acerca de la novedad y corrección de sus resultados.

La impresión de las tiradas aparte, y las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

Abonnement annuel à l'etranger: 4.00 dollars (Etats-Unis).

Prière d'adresser toute la correspondance scientifique et administrative à l'adresse ci-dessous:

SR. SECRETARIO DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

PROF. FERNANDO L. GASPAR

PERÚ 222, Buenos Aires (REP. ARGENTINA)

PUBLICACIONES DE LA U. M. A.

VOLUMEN I (1936 - 1937)

Notas y memorias de C. BIGGERI, J. FAYET, J. BABINI, F. CERNUSCHI, A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ, J. REY PASTOR, SIXTO RIOS.
Bibliografía. Extractos.

VOLUMEN II (1938 - 1939)

Notas y memorias de CLOTILDE A. BULA, T. LEVI-CIVITA, A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ, M. PETROVICH, C. BIGGERI, S. RIOS, F. L. GASPAR, J. REY PASTOR, YANNY FRENKEL, J. A. DEL PERAL, F. TORANZOS.
Bibliografía. Crónica. Revista de revistas, etc.

(Sigue en la contratapa)

ALGUNOS VALORES MEDIOS Y DESIGUALDADES REFERENTES A CURVAS SITUADAS SOBRE LA SUPERFICIE ESFERICA

por L. A. Santaló

Introducción

Supongamos la superficie esférica de radio uno y en ella inscrito uno cualquiera de los poliedros regulares convexos. Si trazamos los arcos de círculo máximo que unen los vértices consecutivos de tal poliedro, tendremos sobre la superficie de la esfera dibujada una *red uniforme,* es decir, tendremos descompuesta la superficie esférica en un cierto número de polígonos esféricos regulares e iguales. Por ejemplo, las figuras 1 y 2 representan respectivamente las redes derivadas del dodecaedro y del icosaedro.

Supuesta, sobre la superficie de la esfera, una curva K de longitud L, móvil sin deformación, en cada posición tendrá un cierto número n de puntos de intersección con la red anterior (por ej. en la fig. 1 es $n=3$). Queremos hallar, en § 1, el *valor medio* de este número n y deducir de él algunas consecuencias.

Si consideramos únicamente los *vértices* de la red esférica tal como la hemos definido, y suponemos móvil sin deformación sobre la superficie de la esfera una figura cualquiera de área F, en cada posición contendrá en su interior un cierto número ν de tales vértices. En § 2 hallamos el *valor medio* de este número ν, junto con algunas consecuencias que de él derivan (1).

(1) Problemas análogos en el plano y en el espacio han sido estudiados en L. A. Santaló, *Geometría integral 31. Sobre valores medios y probabilidades geométricas,* Hamburg. Abh. 13, 1939, y *Geometría integral de figuras ilimitadas,* Publicaciones del Instituto de Matemáticas de Rosario, vol. 1, N° 2, 1939.

Ver también sobre cuestiones análogas en el plano los siguientes trabajos de H. Hadwiger, *Ueber Mittelwerte im Figurengitter,* Comm. Math. Helvetici, 11, 1938-39. *Ueberdeckung ebener Bereiche durch Kreise und Qua-*

En § 3 damos unas condiciones *suficientes* para que una figura esférica convexa pueda contener totalmente en su interior a otra figura esférica también convexa, generalizando así sobre la esfera un resultado que H. HADWIGER obtuvo para las figuras planas.

En § 4 aplicamos los resultados de § 3 a la obtención de algunas acotaciones que mejoran la desigualdad isoperimétrica clásica $L^2 + F^2 - 4\pi F \geqq 0$ de las figuras esféricas.

§ 1.

1. *Fórmula de Poincaré sobre la superficie esférica.* Una curva, o en general una figura cualquiera susceptible de movimiento sin deformación sobre la superficie esférica, queda determinada por la posición de un punto Ω invariablemente unido a la misma, más una rotación τ alrededor de Ω. Para medir un conjunto de posiciones de una misma figura o, lo que es lo mismo, un conjunto de figuras congruentes sobre la superficie esféricaa, se toma la integral, extendida al conjunto considerado, de la forma diferencial

$$d K_e = d\Omega \, d\tau \tag{1}$$

siendo $d\Omega$ el elemento de área de la superficie esférica correspondiente al punto Ω. La expresión dK_e se llama *densidad cinemática esférica.*

Si la figura móvil es una curva de longitud L y sobre la esfera existe otra curva fija de longitud L_0, llamando n al número de puntos de intersección de ambas curvas para cada posición de la primera, tiene lugar la siguiente fórmula, llamada de Poincaré,

$$\int n \, dK_e = 4 L L_0. \tag{2}$$

---

drate, Comm. Math. Helvetici, 13, 1941. *Gegenseitige Bedeckbarkeit zweier Eibereiche und Isoperimetrie,* Vierteljahrschrift der Nat. Gess. Zürich, 86, 1941.

El origen de los trabajos referentes a cuestiones como las tratadas en § 1 y § 2 se remonta a E. BARBIER, *Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert,* Journal de Liouville, 2ª Serie, 5, 1860.

La integración se puede considerar extendida, respecto Ω, a toda la superficie esférica y, respecto τ, de 0 a 2π, siendo $n=0$ cuando las dos curvas no tienen punto común.

Esta fórmula (2) es la única que necesitamos en este § 1 y que no demostramos, suponiéndola conocida [2].

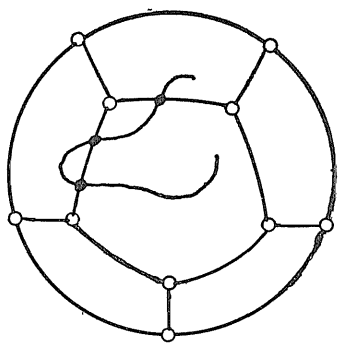

Fig. 1

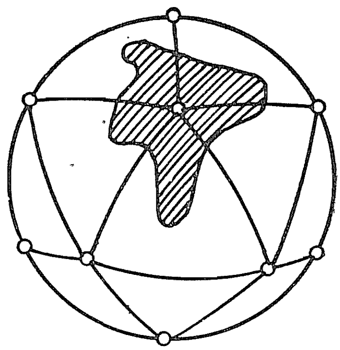

Fig. 2

2. *Valor medio del número de puntos de intersección de una curva móvil con una red uniforme.* Supongamos dibujada sobre la superficie esférica una red uniforme tal como se ha definido en la Introducción. Representemos por d_c la longitud de los lados de las caras de la red (que son polígonos esféricos), indicando c ($c=4, 6, 8, 12, 20$) el número de caras del poliedro regular que da origen a la red.

Sea K una curva de longitud L móvil sin deformación sobre la superficie. Para aplicar la fórmula (2) a esta curva K y a toda la red, observemos que la longitud de esta última es $a_c d_c$ siendo a_c el número de aristas del poliedro regular de c caras. Es pues

$$\int n \, dK_e = 4 \, a_c d_c \, L. \tag{3}$$

Como la integración está extendida a toda la superficie esférica (cuya área es 4π por suponer la esfera de radio unidad) respecto $d\,\Omega$ y de 0 a 2π respecto $d\tau$, es también

[2] Para la definición anterior de densidad cinemática esférica y fórmula de Poincaré, ver W. Blaschke, *Vorl. über Integralgeometrie, II* Hamburger Math. Eizelschriften, 1937, pág. 81.

$$\int dK_e = 8\,\pi^2. \tag{4}$$

Por tanto, por definición de *valor medio* se obtiene

$$\bar{n} = \frac{\int n\, dK_e}{\int dK_e} = \frac{L\, a_c\, d_c}{2\,\pi^2}.$$

Este es el valor medio buscado del número de puntos de intersección de la curva K con los lados de la red.

Consecuencias. I. Como el valor medio no puede ser superior a todos los valores posibles de n, ni tampoco inferior a todos ellos, se tiene:

Sobre la superficie esférica de radio uno, toda curva de longitud L se puede colocar de tal manera que corte a la red esférica definida por el poliedro regular de c *caras en un número de puntos igual o mayor que* $\frac{L\, a_c\, d_c}{2\,\pi^2}$ *y también existe alguna posición en que corta a la misma red en un número de puntos igual o menor que el mismo cociente.* Si este cociente no es entero, se puede sustituir por el entero superior más próximo en el primer caso y por el entero inferior más próximo en el segundo.

II. Si $\bar{n} < 1$ quiere decir que habrá posiciones en que $n = 0$, y por tanto:

Una condición suficiente *para asegurar que una curva esférica K puede colocarse en una posición tal que no tenga ningún punto común con una red uniforme de c caras, es que* $L < \frac{2\,\pi^2}{a_c\, d_c}$.

III. Más general:

Si una curva K no puede cortar a una red de c caras en más de n *puntos, es* $\bar{n} \leq n$, *y por tanto*

$$L \leq \frac{2\,\pi^2\, n}{a_c\, d_c} \tag{5}$$

Recíprocamente, si se cumple (5), existen posiciones de K en las cuales corta a la red en menos de n puntos.

§ 2.

1. *Valor medio del número de puntos cubiertos por una figura de área F.* Supongamos ahora que K es una figura de área F, no necesariamente convexa, y también móvil sin deformación sobre la superficie esférica de radio uno. Si ν es el número de vértices de una red esférica que K contiene en su interior en una determinada posición (por ej. en la figura 2 es $\nu = 1$), queremos hallar el *valor medio* de este número ν.

Para ello observemos que la medida del conjunto de posiciones de K en las cuales contiene un punto fijo P es igual a $2\pi F$, pues para calcular $\int dK_e$ extendida a todas las posiciones en las cuales P pertenece a K, se puede suponer primero fijo τ (recordar (1)) y entonces la integral de $d\,\Omega$ vale F, e integrar luego $d\tau$ de 0 a 2π. Si no se trata de un solo punto P sino que existe un número N de ellos sobre la superficie esférica, al integrar dK_e como acabamos de decir para cada punto, se obtiene en total $2\pi F N$, pero de esta manera las posiciones en las cuales K contiene ν puntos vienen contadas ν veces; en definitiva se puede escribir, por tanto,

$$\int \nu\, dK_e = 2\pi F N. \tag{6}$$

La integración, como siempre, se puede considerar extendida a todas las posiciones posibles de K, entendiendo que es $\nu = 0$ cuando no contenga ningún punto en su interior.

Siendo, como en § 1, $\int dK_e = 8\pi^2$, resulta como *valor medio* de ν (cuando sobre la esfera existen N puntos en cualquier posición)

$$\bar{\nu} = \frac{\int \nu\, dK_e}{\int dK_e} = \frac{F N}{4\pi}. \tag{7}$$

Si los puntos fijos son los vértices de la red derivada del polígono regular de c caras, podremos poner v_c en lugar de N, indicando con v_c el número de vértices del poliedro regular de c caras.

Por las mismas razones que en § 1, se deduce:

Consecuencias: I. *Una figura K de área F situada sobre la esfera de radio uno, siempre se puede colocar en una posición tal que contenga un número de vértices de la red definida por el poliedro regular de* c *caras, igual o mayor que* $\frac{F\,v_e}{4\,\pi}$, *y también en otra posición tal que el número de dichos puntos sea igual o menor que el mismo cociente.* Si el cociente $\frac{F\,v_e}{4\,\pi}$ no es entero, se puede sustituir por el entero superior más próximo en el primer caso y por el entero inferior más próximo en el segundo.

II. *Si una figura K* (que puede ser múltiplemente conexa, o bien compuesta de distintos pedazos, siempre que ellos conserven constante su posición relativa) *no puede contener en su interior más de* ν *vértices de una red, su área F cumple la limitación*

$$F \leqq \frac{4\,\pi\,\nu}{v_e}. \tag{8}$$

Recíprocamente, *si se cumple la desigualdad* (8) *se puede asegurar que hay alguna posición de K en la cual contiene menos de* ν *puntos en su interior.*

Análogamente, *si la figura K, en cualquier posición contiene por lo menos* ν *vértices de una red, su área F cumple*

$$F \geqq \frac{4\,\pi\,\nu}{v_e}, \tag{9}$$

siendo, como siempre, v_c *el número de vértices de la red.*

§ 3.

1. *Unas condiciones suficientes para que una figura esférica convexa pueda estar contenida en el interior de otra* [3].

---

[3] Un recinto esférico se llama *convexo* cuando su contorno no puede ser cortado por un círculo máximo en más de dos puntos. Una línea esférica cerrada y convexa divide a la superficie de la esfera en dos regiones: al decir recinto o figura convexa consideramos siempre aquella región que es *igual* o *menor* que una semiesfera.

H. HADWIGER ha obtenido condiciones *suficientes* para que un recinto plano convexo de área F y perímetro L pueda estar contenido totalmente en el interior de otro recinto convexo de área F_0 y perímetro L_0 (4).

Vamos a obtener unas condiciones análogas para el caso de figuras esféricas.

Sea F el área y L el perímetro de la figura convexa K y F_0, L_0 los correspondientes valores para K_0. Considerando K fija sobre la superficie esférica de radio unidad y K_0 móvil sobre la misma, la medida de todas las posiciones de K_0 en las que tiene algún punto común con K (medida obtenida con la densidad cinemática (1)) es conocida y vale (5)

$$\int_{K \cdot K_0 \neq 0} dK_e = 2\pi (F + F_0) + L L_0 - F F_0. \qquad (10)$$

Esta medida comprende las posiciones en que una de las figuras, K o K_0, está totalmente contenida en la otra (cuya medida representaremos por M_0), más la medida de las posiciones en que el contorno de K_0 corta al de K en i puntos ($i = 2, 4, 6, \ldots$) que representaremos por M_i. Por tanto (10) se puede escribir (6).

$$M_0 + M_2 + M_4 + M_6 + \ldots = 2\pi (F + F_0) + L L_0 - F F_0. \qquad (11)$$

Por otra parte, la fórmula de POINCARÉ (2), nos da

$$2 M_2 + 4 M_4 + 6 M_6 + \ldots = 4 L L_0. \qquad (12)$$

(4) H. HADWIGER, *Ueberdeckung ebener Bereiche durch Kreise und Quadrate*, Comm. Math. Helvetici, 13, 1941. No hemos podido consultar directamente este trabajo de Hadwiger; conocemos únicamente la crítica del mismo aparecida en "Mathematical Reviews", vol. 3, 1942. Ignoramos, por tanto, si nuestra demostración para las figuras esféricas, que evidentemente tiene su análoga para el caso del plano, coincide o no, en tal caso, con la demostración de Hadwiger.

(5) W. BLASCHKE, *Vorl. über Integralgeometrie II*, pág. 82.

(6) Obsérvese que por ser K y K_0 convexas, las posiciones en que $i = 1, 3, 5, \ldots$ tienen medida cero y no hay que considerarlas.

De (11) y (12) se deduce

$$M_0 - (M_4 + 2 M_6 + 3 M_8 + \ldots) = 2\pi (F + F_0) - (F F_0 + L L_0).$$

Como todas las medidas M_i ($i = 0, 2, 4, 6, \ldots$) son siempre positivas o nulas, de aquí se deduce que *una condición suficiente para que existan posiciones en las cuales una de las dos figuras convexas K, K_0 esté contenida totalmente en el interior de la otra* (es decir, para que $M_0 > 0$), *es que*

$$2\pi (F + F_0) - (F F_0 + L L_0) > 0. \tag{13}$$

De aquí se deduce, en consecuencia, que si dos figuras K y K_0 son tales que ninguna de ellas pueda estar contenida en el interior de la otra debe ser

$$2\pi (F + F_0) - (F F_0 + L L_0) \leqq 0. \tag{14}$$

En particular, tomando dos figuras iguales a K, esta desigualdad (14) nos da (haciendo $F = F_0$, $L = L_0$) (7)

$$L^2 \geqq F (4\pi - F), \tag{15}$$

o bien, tomándolas ambas iguales a K_0:

$$L_0^2 \geqq F_0 (4\pi - F_0). \tag{16}$$

Como estas desigualdades (15) y (16) son válidas cualesquiera que sean K y K_0, se seduce que para cualquier par de figuras esféricas convexas, vale siempre

$$L^2 L_0^2 \geqq F F_0 (4\pi - F)(4\pi - F_0). \tag{17}$$

Esta desigualdad (17) nos va a permitir afinar más la condición (13). En efecto, la desigualdad (13) deja sin establecer *cuál de las dos figuras K, K_0* es aquella que está con-

(7) Se observa que la desigualdad (15) es la clásica desigualdad isoperimétrica para figuras esféricas. La demostración dada, que aquí necesitamos solo de paso, es en el fondo la de BLASCHKE, *Vorl. Integralgeom. II*, pág. 83.

tenida en la otra. Queremos, más concretamente, escribir una condición *suficiente* para asegurar que K está contenida en K_0.

Para ello observemos la desigualdad

$$L L_0 - F(4\pi - F_0) > \sqrt{L^2 L_0^2 - F F_0 (4\pi - F)(4\pi - F_0)} \quad (18)$$

cuya expresión subradical es siempre positiva o nula, según (17).

Si esta desigualdad (18) se cumple, se cumplirá también (13) y por tanto una de las dos figuras K, K_0 puede estar contenida en la otra. Vamos a demostrar, además, que la realización de (18) implica que $F < F_0$, con lo cual ya será seguro que es K la figura que puede estar contenida en K_0. En efecto, de (13) (que es consecuencia de 18)) se deduce

$$L L_0 \leqq 2\pi (F + F_0) - F F_0. \quad (19)$$

Si fuera $F \geqq F_0$, según (19), sería $L L_0 \leqq (4\pi - F_0) F$ y por lo tanto (18) no podría verificarse por ser el segundo miembro esencialmente positivo o nulo.

En lugar de (18) se puede también considerar

$$F_0 (4\pi - F) - L L_0 > \sqrt{L^2 L_0^2 - F F_0 (4\pi - F)(4\pi - F_0)}. \quad (20)$$

Esta desigualdad tiene como consecuencia (13) y además exige también que sea $F < F_0$. En efecto, si fuera $F \geqq F_0$, de la desigualdad (17) se deduciría

$$L^2 L_0^2 \geqq F_0^2 (4\pi - F)^2$$

o sea $L L_0 \geqq F_0 (4\pi - F)$, con lo cual, por la misma razón de antes, (20) no podría realizarse, por resultar el primer miembro negativo o nulo.

En definitiva, la condición (13) se puede puntualizar con las desigualdades (18) y (20), las cuales, cambiando un poco la estructura, permiten enunciar, sobre la esfera de radio unidad:

Condiciones suficientes *para afirmar que la figura convexa K puede estar contenida en el interior de la figura convexa K_0, son que se realice una de las dos condiciones:*

$$\frac{L L_0 - \sqrt{L^2 L^2_0 - F F_0 (4\pi - F)(4\pi - F_0)}}{F(4\pi - F_0)} > 1 \quad (21)$$

o bien

$$\frac{L L_0 + \sqrt{L^2 L^2_0 - F F_0 (4\pi - F)(4\pi - F_0)}}{F_0(4\pi - F)} < 1. \quad (22)$$

2. *Casos particulares.* I. Si consideramos el caso en que K_0 es un círculo de radio esférico R $\left(\leqq \frac{\pi}{2}\right)$, es

$$L_0 = 2\pi \operatorname{sen} R, \qquad F_0 = 2\pi(1 - \cos R) \qquad (23)$$

y las condiciones (21) y (22) se escriben, después de simples transformaciones,

$$L - F \cot \frac{R}{2} > \sqrt{L^2 - F(4\pi - F)} \qquad (23)$$

y

$$(4\pi - F) \operatorname{tang} \frac{R}{2} - L > \sqrt{L^2 - F(4\pi - F)} \qquad (24)$$

Luego:

Para que una figura convexa esférica K situada sobre la esfera de radio unidad pueda estar contenida totalmente en el interior de un círculo menor de radio esférico R, es suficiente *que se cumpla una cualquiera de las condiciones* (23), (24).

II. *Paso al caso del plano.* Las condiciones *suficientes* (21) y (22) se refieren al caso de figuras esféricas convexas situadas sobre la esfera de radio uno. Si se trata de figuras situadas sobre la esfera de radio ρ, bastará escribir las mismas condiciones (21) y (22) para las figuras obtenidas proyectando las figuras dadas, desde el centro de la esfera, sobre la esfera de radio uno. Bastará, por tanto, sustituir L, L_0, F, F_0 por $\frac{L}{\rho}$, $\frac{L_0}{\rho}$, $\frac{F}{\rho^2}$, $\frac{F_0}{\rho^2}$ respectivamente. Escritas (21) y (22) de esta manera y haciendo tender ρ a infinito, para pasar al caso del plano como límite de una esfera cuyo radio crece infinitamente, se obtienen las condiciones

$$\frac{L L_0 - \sqrt{L^2 L^2_0 - 16 \pi^2 F F_0}}{4 \pi F} > 1,$$

$$\frac{L L_0 + \sqrt{L^2 L^2_0 - 16 \pi^2 F F_0}}{4 \pi F_0} < 1,$$

que son las condiciones *suficientes* obtenidas por HADWIGER [8] para que la figura plana y convexa K de área F y perímetro L pueda estar contenida en el interior de la figura convexa K_0 de área F_0 y perímetro L_0.

§ 4.

1. *Desigualdades isoperimétricas sobre la esfera.* Si en lular de escribir las condiciones (23) y (24) suficientes para que la figura K pueda estar contenida en el interior del círculo de radio R queremos escribir de manera análoga *las condiciones suficientes para que un círculo de radio esférico r pueda estar contenido en el interior de K*, de las desigualdades (21) y (22) se obtiene

$$F \cot \frac{r}{2} - L > \sqrt{L^2 - F(4\pi - F)} \tag{25}$$

$$L - (4\pi - F) \operatorname{tang} \frac{r}{2} > \sqrt{L^2 - F(4\pi - F)}. \tag{26}$$

Supongamos que sea R el máximo de los radios de los círculos que no pueden contener a K en su interior y r el mínimo de los radios de aquellos que no pueden estar contenidos en la misma K.

Según esta definición, para estos valores de R y r, no puede verificarse ninguna de las desigualdades (23), (24), (25), (26). Por tanto, llamando para abreviar

$$\Delta = L^2 - F(4\pi - F) = L^2 + F^2 - 4\pi F$$

se tendrá, según (23),

$$\sqrt{\Delta} \geqq L - F \cot \frac{R}{2}$$

y también

$$\sqrt{\Delta} \geqq F \cot \frac{R}{2} - L$$

puesto que si se verificase la desigualdad contraria, según (25), la figura K podría contener en su interior al círculo de radio R, lo cual no es posible. De estas desigualdades se deduce

$$\text{(a)} \quad \Delta \geqq \left(L - F \cot \frac{R}{2} \right)^2,$$

y análogamente, de (24), (25) y (26) se deduce también

$$\text{(b)} \quad \Delta \geqq \left((4\pi - F) \tang \frac{R}{2} - L \right)^2,$$

$$\text{(c)} \quad \Delta \geqq \left(F \cot \frac{r}{2} - L \right)^2, \qquad (27)$$

$$\text{(d)} \quad \Delta \geqq \left(L - (4\pi - F) \tang \frac{r}{2} \right)^2.$$

La expresión Δ es lo que se llama «déficit isoperimétrico» para las figuras convexas situadas sobre la esfera de radio unidad (9) y las desigualdades (27) nos dan algunas acotaciones mejoradas de la desigualdad isoperimétrica clásica $L^2 + F^2 - 4\pi F \geqq 0$.

Aplicando la relación

$$x^2 + y^2 \geqq \frac{1}{2} (x + y)^2,$$

(8) Ver *loc. cit.* en (4); además H. Hadwiger, *Gegenseitige Bedeckbarkeit zweier Eibereiche und Isoperimetrie,* Viertejahrssch. der Nat. Gess. Zürich, 86, (1941), pág. 153.

(9) Sobre el problema de la isoperimetria sobre la esfera ver, por ejemplo, T. Bonnesen, *Les Problemes des isopérimètres et des isépiphanes,* Gauthier-Villars, París 1929, pág. 80. Para bibliografía ver Bonnesen-Fenchel, *Theorie der konvexen Körper,* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Berlín, 1934, pág. 113.

las desigualdades (a) y (c) nos dan

$$\Delta \geqq \frac{1}{4} F^2 \left(\cot \frac{r}{2} - \cot \frac{R}{2}\right)^2 \tag{28}$$

y las (b), (d)

$$\Delta \geqq \frac{1}{4} (4\pi - F)^2 \left(\tang \frac{R}{2} - \tang \frac{r}{2}\right)^2. \tag{29}$$

Análogamente, sumando (a), (b) y (c), (d) respectivamente, se obtienen las nuevas acotaciones

$$\Delta \geqq \left(2\pi \tang \frac{R}{2} - \frac{F}{\operatorname{sen} R}\right)^2 \quad , \quad \Delta \geqq \left(\frac{F}{\operatorname{sen} r} - 2\pi \tang \frac{r}{2}\right)^2. \tag{30}$$

Todas estas desigualdades (27), (28), (29), (30) son nuevas acotaciones para el «déficit isoperimétrico». Al pasar al plano como caso límite de una esfera cuyo radio crece infinitamente (tal como se hizo en § 3, caso particular II) ellas dan acotaciones conocidas para el déficit isoperimétrico de figuras planas.

Rosario, Institúto de Matemáticas, abril de 1942.

TEMA PROPUESTO

38. - Demostrar que

$$\lim_{n \to \infty} e^{-n}\left(1 + n + \frac{n^2}{2!} + \frac{n^3}{3!} + \dots + \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}\right) = \frac{1}{2}.$$

S.

CURVA DE CONTACTO DE UN CONOIDE CON LA SUPERFICIE DIRECTRIZ

(Tema Nº 13, Vol. VII, pág. 27)

Entre los temas de estudio propuestos en números anteriores, figura con el Nº. 13, éste del Prof. Rosell Soler: *Construir la tangente en cada uno de sus puntos a la curva de contacto de una esfera con el conoide circunscripto definido por una directriz rectilínea exterior y la recta impropia del plano perpendicular a ésta. Generalización.*

Para construir efectivamente la curva de contacto pedida, es cómodo considerar planos perpendiculares a la directriz rectilínea del conoide, planos que cortarán a la superficie esférica según círculos menores. Tendremos así en uno de estos planos, una circunferencia menor, y la traza de dicha directriz; las dos rectas tangentes desde esta traza a la circunferencia, pertenecen al conoide circunscripto a la esfera, y los dos puntos de tangencia pertenecen a la curva de contacto de ambas superficies. Por tanto, para cada sección se tiene un par de puntos de la curva de contacto. Puede observarse que siendo recto el ángulo de la recta tangente a la circunferencia menor desde la traza de la directriz, y el radio, los puntos de la curva en cuestión pueden considerarse como determinados por la intérsección de la esfera con una superficie cilíndrica, de radio igual a la mitad de la distancia entre el centro de la esfera y la directriz, siendo su eje paralelo a esta última y coplanar con la misma y el centro de la esfera.

Para determinar ahora la recta tangente en cada punto de la curva de contacto del conoide con la esfera (o de intersección del cilindro con la esfera), basta trazar en un punto de la misma el plano tangente a la esfera, que queda determinado por dos rectas tangentes, por ejemplo a la circunferencia menor que nos determinaba un punto de la curva de contacto, y a un círculo máximo cualquiera que pase por el punto de dicha curva, y otro plano tangente al cilindro de intersección, en el mismo punto, plano éste que puede determinarse por la generatriz del cilindro, que pasa por el punto, y la tangente a la sección normal en el mismo. La intersección de estos dos planos, determina la recta tangente pedida.

El procedimiento puede ser generalizado, siendo aplicable a curvas de contacto determinadas suponiendo cualquier superficie de revolución, en vez de esferas, con la condición que la generatriz sea una curva continua, y que admita tangentes en todos sus puntos.

Para construir geométricamente la recta pedida, es cómodo usar la representación Monge, en que las tangentes a las secciones que intervienen en el razonamiento, se reducen, en el caso de la esfera, a trazar tangentes a circunferencias.

El problema se resuelve también fácilmente en forma analítica. Para ello representaremos la curva de contacto del conoide y la esfera en coordenadas esféricas. A tal efecto, tomamos en la esfera, cuyo radio indicaremos con R, el plano del ecuador normal a la directriz rectilínea del conoide, y fijamos un meridiano cualquiera como origen de longitudes, por comodidad el determinado por el plano normal al plano de la directriz rectilínea y el centro de la esfera. Indicando con ϑ, φ las coordenadas (latitud y longitud) de un punto de la curva de contacto, se tiene (fig. 1), que fijado ϑ, tenemos una sección paralela de la esfera; y φ queda determinado por la longitud del

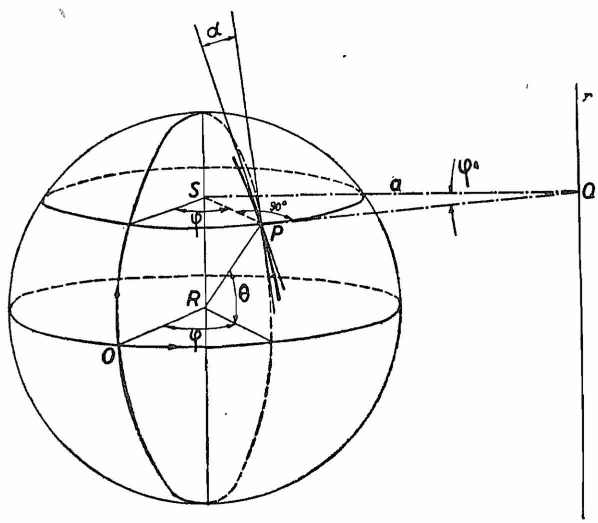

Fig. 1

punto de tangencia de la generatriz del conoide en ese plano, en el que se tiene

$$\rho = R \cos \vartheta$$

y en el triángulo PQS

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{R \cos \vartheta}{a}$$

o sea

$$\varphi = \operatorname{arc\,sen} \frac{R \cos \vartheta}{a} \qquad (1)$$

ecuación de la curva de contacto.

Para cada punto de la curva (1), se puede determinar la dirección de la tangente por el ángulo que forma con la tangente al meridiano de la esfera que pasa por el punto. Designando con α este ángulo, para un incremento $d\vartheta$ del ángulo ϑ se tiene un nuevo punto de la curva, sea P', al que corresponden las coordenadas $(\vartheta + d\vartheta;\ \varphi + d\varphi)$, y considerando el triángulo equiparable a un triángulo rectángulo plano que se forma en la superficie esférica y uno de cuyos lados es PP', siendo los otros dos parte del meridiano que pasa por P', de medida $R d\vartheta$, y parte del paralelo por P, de medida $R \cos \vartheta d\varphi$, se tiene

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R \cos \vartheta \, d\varphi}{R \, d\vartheta} = \cos \vartheta \, . \, \frac{d\varphi}{d\vartheta}$$

y teniendo en cuenta (1)

$$\alpha = \operatorname{arc} . \operatorname{tg} \frac{- R \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta}{\sqrt{a^2 - R^2 \cos^2 \vartheta}} .$$

De igual manera se resolvería el problema analíticamente, si en vez de una superficie esférica se tratara de una superficie de revolución (fig. 2).

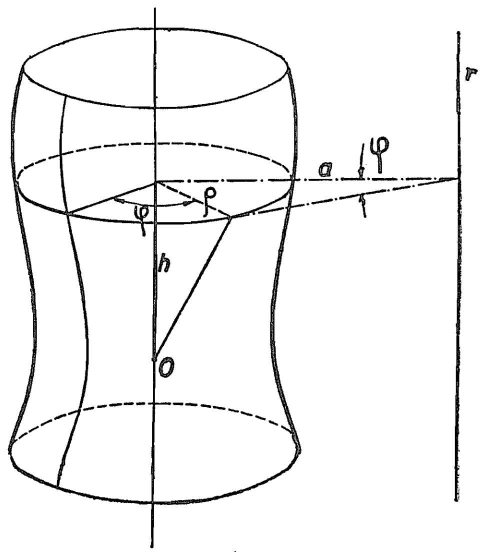

Fig. 2

Fijado como origen de ordenadas un punto sobre el eje de esta superficie, sea

$$\rho = \rho\,(h)$$

la ecuación de la sección meridiana. Utilizando el mismo simbolismo que para la esfera se tiene,

$$\varphi = \text{arc . sen}\,\frac{\rho}{a}$$

y siendo, como antes, α el ángulo de la tangente en el punto de la curva de contacto de la superficie con el conoide circunscripto y la sección meridiana que pasa por dicho punto, se tiene, repitiendo el razonamiento anterior

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\rho \, d\varphi}{ds}$$

siendo ds la diferencial del arco de la sección meridiana de la superficie de revolución. Luego

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\rho \, d\varphi}{\sqrt{1+\rho'^2} \, dh}$$

o sea

$$\alpha = \operatorname{arc.} \operatorname{tg} \frac{\rho \, \rho'}{\sqrt{1+\rho'^2} \sqrt{a^2-\rho^2}}.$$

En el caso particular de la esfera, se tendría

$$\rho = \sqrt{R^2 - h^2} \qquad \rho' = - \frac{h}{\sqrt{R^2 - h^2}}$$

y por consiguiente, haciendo operaciones y poniendo $R^2 - h^2 = R^2 \cos^2 \vartheta$, queda

$$\alpha = \operatorname{arc.} \operatorname{tg} \frac{- R \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta}{\sqrt{a^2 - R^2 \cos^2 \vartheta}}$$

que coincide con la hallada directamente.

Eduardo Gaspar

CONOIDE ESFERICO CON DOS DIRECTRICES RECTILINEAS

(Tema Nº 13, Vol. VII, pág. 27)

Como la solución dada por el Sr. Eduardo Gaspar al tema propuesto por el profesor Rosell Soler hace una generalización distinta de la que el autor deseaba, puede interesar quizás la siguiente solución, levemente modificada, que en diciembre de 1940 enviamos al autor, cuando nos propuso el tema.

Conoide recto. Si es P la traza de la directriz rectilínea con el plano diametral horizontal, siendo recto el ángulo formado por cada tangente horizontal a la esfera con el radio correspondiente de la sección circular (horizontal) resulta como proyección horizontal de la curva de contacto Γ la circunferencia de diámetro OP. Es decir: dicha curva Γ es la intersección de la superficie esférica con el cilindro vertical circular cuya traza es dicha circunferencia, y es trivial la construcción de la tangente como intersección del plano tangente a ese cilindro circular con el plano tangente a la esfera.

Conoide oblicuo. Si es P la traza de la directriz oblicua s sobre el plano diametral horizontal, y se supone, como siempre es posible, situada esa directriz s en el plano diametral paralelo al vertical del dibujo, siendo Q la intersección de s con el eje vertical de la esfera, los puntos de la curva se proyectan confundidos de dos en dos sobre el plano vertical, por simetría, y la curva que forman es una hipérbola, como se ve inmediatamente por generación proyectiva o simplemente observando la relación

$$DA \,.\, DE = r^2 \qquad \text{o sea} \qquad x \,.\, k\,(z - q) = R^2 - z^2$$

siendo R el radio de la esfera, r el de la circunferencia sección horizontal a la altura z, q la altura u ordenada z de Q y k la pendiente negativa de PQ. Esa hipérbola tiene, pues, como asíntota la recta $z = q$ horizontal trazada por Q y su tangente en A se construye inmediatamente con el exágono $JJKAAH$. Basta cortar las cuerdas AH, AK con las horizontales por H y K y la recta $H'K'$ determina sobre JQ un punto T de la tangente en A a la hipérbola (1).

La intersección del plano que proyecta sobre el vertical la recta AT así obtenida, con el plano tangente a la esfera, es la tangente buscada. Su proyección vertical es AT y la horizontal se deduce inmediatamente por rotación del plano tangente a la esfera, como se ve en la figura.

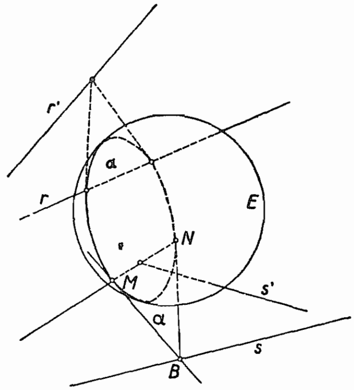

Fig. 1

Se ha dibujado además la elipse traza del cono proyectante de la curva Γ desde el vértice Q, la cual resulta del método general que ahora daremos y puede utilizarse también en lugar de la hipérbola. No se confunda esa elipse con la proyección horizontal de Γ, que es una cuártica no dibujada.

Finalmente, por la misma regla del exágono se han construído las tangentes a la hipérbola en H y K, que son las trazas de los planos osculadores en H y K a la curva Γ; todas las líneas de construcción están indicadas en la figura.

Conoide de directrices propias. Dada la esfera E y las directrices rectilíneas r y s las rectas que cortan a r, s y son tangentes a la esfera, forman un conoide cuya curva de contacto con la esfera vamos a estudiar, quedando incluídos como casos particulares el conoide *recto*, en que r sea una recta impropia y s una recta propia perpendicular, y también el caso del co-

(1) Cada letra designa el punto en el espacio y también su proyección vertical. La horizontal la designamos con subíndice 1.

noide llamado *oblicuo*, en que s es oblicua respecto de la orientación definida por la recta impropia r.

Excluído el caso trivial en que r y s se cortan, caso en que el conoide se reduce al plano rs más el cono circunscrito a E desde el punto común, supongamos que r y s se cruzan. El haz de planos (α) de arista r determina sobre s una serie (B) y sus polos A respecto de E forman otra serie (A) siendo $(A) \barwedge (B) \barwedge (\alpha)$.

Las generatrices del conoide que pasan por B son las tangentes desde B a la circunferencia sección por el plano α; los puntos de contacto M, N están en el plano polar de B y como los planos polares de los diversos puntos B de s forman un haz proyectivo con (B) cuya arista es la recta s' polar de s, resulta que los puntos M, N de la curva de contacto están situados en la superficie engendrada por los haces de planos $(\alpha) \barwedge (\beta)$ de aristas r y s'.

En el caso más general en que r y s' se crucen, resulta pues una cuádrica F alabeada que contiene las rectas r y s', cuya intersección con E determina la curva de contacto, lugar de los puntos M, N. Tal curva es, por consiguiente, una cuártica de primera especie, que contiene los puntos, reales o imaginarios, de intersección de r con E, así como también los de s' con E; por ella pasan infinitas cuádricas, una la esfera E y otra la F. La tangente en M a la curva en cuestión es, por tanto, la intersección del plano tangente a E con el plano μ tangente a F, o sea, la tangente en M a la cónica C en que el plano tangente a E corta a F.

Todo se reduce, pues, a construir la tangente en M a esta cónica C, perfectamente determinada por los dos haces proyectivos en que dicho plano μ corta a los haces $(\alpha) \barwedge (\beta)$. Si el conoide está representado por un sistema de proyección, bastará considerar en cada plano de proyección los haces de rectas proyecciones de dichos haces de rectas proyectivos, y la tangente a la cónica engendrada por tales haces es la proyección de la tangente buscada, quedando resuelto el problema muy sencillamente.

Fijémonos por ejemplo en el caso más frecuente y anteriormente resuelto en que una de las directrices r sea impropia y la otra s sea una recta cualquiera no paralela a aquella orientación, es decir, no secante de r. Como los puntos comunes a

r y E son los puntos cíclicos de r resulta una cuártica circular. El caso más sencillo será aquél en que las rectas s' y r se cortan o, lo que es equivalente, se cortan s y r', es decir, la directriz s corta en un punto Q a la recta diametral que es per-

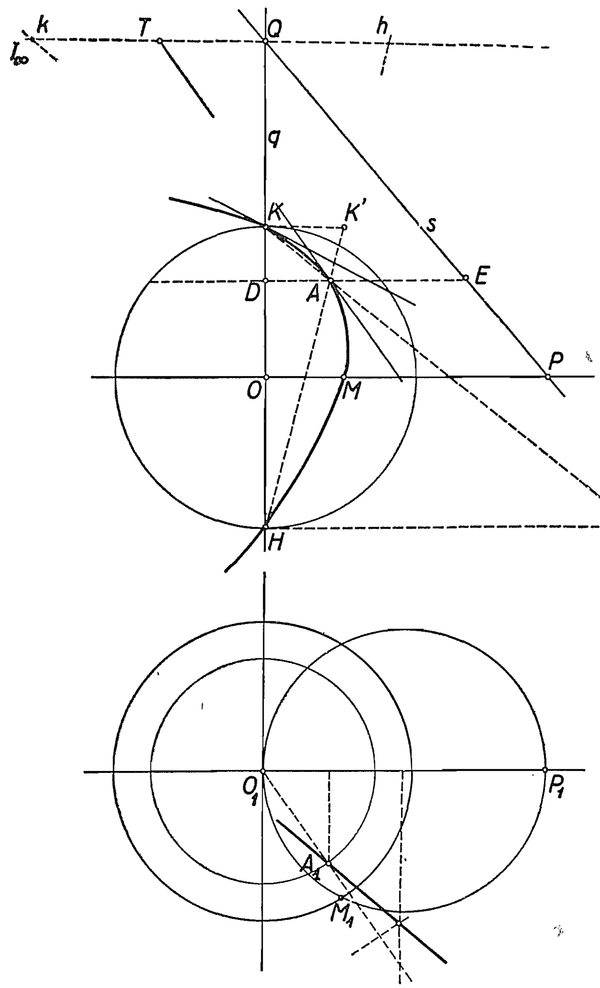

Fig. 2

pendicular a la orientación de r. Entonces los haces proyectivos s y r' cuyas aristas tienen un punto impropio común, engendran un cilindro cuya intersección con E es la curva estudiada. Suponiendo, para fijar ideas, una representación diédrica, si se elige, como antes hemos hecho, s paralela al plano vertical, resulta un cono de segundo orden, con vértice Q, que contiene a la curva. Aunque la tangente buscada se obtiene inmediatamente, como intersección del plano tangente a este cono con el tangente a E, es preferible utilizar el otro cono, cuyo vértice es el punto $s' r$, es decir, el cilindro proyectante de la curva sobre el plano vertical, que es de segundo grado por lo antes demostrado, y está perfectamente determinado por su traza sobre el plano vertical, la cual es una hipérbola de la que se conocen los puntos siguientes: H y K proyecciones de los puntos situados en el diámetro vertical; L proyección de los puntos situados en la circunferencia ecuatorial, cuya determinación es inmediata; el punto impropio J con su tangente horizontal y todavía, si se quiere, el punto proyección vertical del par de puntos de contacto de los planos tangentes trazados por s y que determinan la polar s'. Con cinco puntos se determina cualquier otro M de la curva mediante la regla y lo mismo la tangente en él utilizando el exágono de Pascal, como hemos hecho antes, o bien haces proyectivos.

Caso del conoide recto. Si la directriz s es perpendicular a la orientación de la recta impropia r, es decir, si s es vertical, la proyección vertical de Γ es simétrica respecto el diámetro horizontal y por tanto es una parábola que tiene este eje y pasa por los puntos HK siendo su vértice el punto L polo de la recta s respecto de la circunferencia. La construcción de la tangente a esa parábola puede hacerse por cualquiera de los métodos conocidos, pero más sencillo es utilizar el cono de vértice Q, que es precisamente el cilindro proyectante vertical, cuya sección por el plano horizontal es una circunferencia de diámetro $O_1 P_1$, como ya hemos visto al principio.

J. Rey Pastor

TEMAS RESUELTOS

25. *Sumar la serie*

$$\sum_0^\infty \frac{n!}{(2n)!\,(n+1)}$$

R. P.

Solución. La serie de potencias

$$y=\sum_0^\infty \frac{n!\,x^n}{(2n)!\,(n+1)}$$

es una trascendente entera, pues el cociente de dos términos consecutivos

$$h=x\frac{(n+1)\,(2n)!\,(n+1)!}{(n+2)\,(2n+2)!\,n!}=\frac{(n+1)^2\,x}{(n+2)\,(2n+1)\,(2n+2)}$$
$$=\frac{(n+1)\,x}{2\,(n+2)\,(2n+1)}$$

tiene por límite o.

Para el cálculo aproximado de la trascendente entera sea

$$S_n=\sum_0^n \frac{m!\,x^m}{(2m)!\,(m+1)}; \qquad \text{y} \qquad y=S_n+\alpha$$

donde, para $x>0$

$$\alpha=\alpha+\frac{n!\,x^n}{(2n)!\,(n+1)}-\frac{n!\,x^n}{(2n)!\,(n+1)}<\frac{n!\,x^n}{(2n)!\,(n+1)}\left(\frac{1}{1-h}-1\right)$$
$$=\frac{n!\,x^n}{(2n)!\,(n+1)}\,\frac{h}{1-h} \qquad \text{y como} \qquad h<\frac{x}{2\,(2n+1)}$$
$$\alpha\leqq\frac{n!\,x^n}{(2n)!\,(n+1)}\,\frac{x}{4n+2-x}$$

por lo tanto el error de S_n es, por defecto, menor que su último término por la fracción $\dfrac{x}{4n+2-x}$.

Para $x < 0$, por ser alternada, su error es menor que el último término de S_n y de igual signo que él.

Así el valor de la serie pedida, con todas sus cifras exactas por defecto, es 1,27998 haciendo $x = 1$ y tomando $n = 5$. En cambio la serie alternada

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n \, n!}{(2n)! \, (n+1)}$$

toma el valor 0,77581 con todas sus cifras exactas haciendo $x = -1$ y tomando $n = 5$.

Podemos expresar la trascendente entera, y por lo tanto la serie pedida en forma de integral haciendo

$$y = \frac{1}{x} \int_0^x \sum_{0}^{\infty} \frac{n! \, u^n \, du}{(2n)!} = 1 - \frac{1}{x} \int_0^x \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n \, u^n \, du}{(-2n)^{(n, -1}}$$

donde el denominador indica la factorial de base $-2n$, de grado n y diferencia -1. Como la serie integrando puede expresarse por una integral definida [1]

$$y = 1 - \frac{1}{x} \int_0^x u \, du \int_0^{-\infty} e^{2t - u(e^{2t} - e^t)} \, dt = 1 + \frac{1}{x} \int_0^x u \, du \int_0^1 v e^{uv(1-v)} \, dv$$

La segunda integral, cambiando v por $1 - v$, se puede expresar

$$\int_0^1 v e^{uv(1-v)} \, dv = \int_0^1 (1 - v) \, e^{uv(1-v)} \, dv = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{uv(1-v)} \, dv$$

$$= \frac{1}{2} \, e^{\frac{u}{4}} \int_0^1 e^{-u\left(v - \frac{1}{2}\right)^2} \, dv$$

$$= e^{\frac{u}{4}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-uv^2} dv = \frac{e^{\frac{u}{4}}}{\sqrt{u}} \int_0^{\frac{\sqrt{u}}{2}} e^{-t^2} dt = \frac{e^{\frac{u}{4}}}{\sqrt{u}} \, \vartheta \left(\frac{\sqrt{u}}{2} \right)$$

---

(1) Ver: Babini, José, *Series cuyos coeficientes contienen factoriales*, en esta Revista, vol. I, pág. 27 y 28. Buenos Aires 1937. En la fórmula que ahí da ω_2 hay que tomar $z = -\frac{1}{u}$; $h = -\alpha = 2$; $k = 1$.

siendo $\vartheta(x)$ la función error de Gauss. En definitiva

$$y = 1 + \frac{1}{x}\int_0^x e^{\frac{u}{4}}\sqrt{u}\,\vartheta\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)du$$

y la serie pedida tendrá por suma $1 + \int_0^1 e^{\frac{u}{4}}\sqrt{u}\,\vartheta\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)du.$

J. Babini

Otra solución. Aunque la serie propuesta sufrió una alteración de copia que impide su expresión por números conocidos o más fáciles de calcular que la propia serie, rápidamente convergente, resulta interesante por conducir a una integral que así queda expresada mediante la serie. Ante todo descompongamos:

$$\frac{n!}{(2n)!\,(n+1)} = \frac{4\,(n+1)!}{(2\,n+2)!} - \frac{2\,.\,n!}{(2\,n+2)!}$$

y aplicando el método de Borel, la suma de la serie viene expresada así:

$$s = 4\int_0^\infty e^{-t}\,\Sigma\,\frac{t^{n+1}}{(2\,n+2)!}\,dt - 2\int_0^\infty e^{-t}\,\Sigma\,\frac{t^n}{(2\,n+2)!}\,dt$$

La primera integral transformada por partes y poniendo $t = x^2$ es:

$$4\int_0^\infty e^{-x^2}\,s\,h\,x\,.\,dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}(e^x - e^{-x})\,dx = 2\,e^{\frac{1}{4}}\int_0^\infty e^{-(x-\frac{1}{2})^2}\,dx -$$

$$- 2\,e^{\frac{1}{4}}\int_0^\infty e^{-(x+\frac{1}{2})^2}\,dx = 2\,e^{\frac{1}{4}}\int_{-1/2}^\infty e^{-u^2}\,du - 2\,e^{\frac{1}{4}}\int_{1/2}^\infty e^{-u^2}\,du = 4\,e^{\frac{1}{4}}\,\vartheta\left(\frac{1}{2}\right)$$

Haciendo también $t = x^2$ en la segunda integral resulta:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\left[e^x + e^{-x} - 2\right]\frac{dx}{x} = 2\,e^{\frac{1}{4}}\,\vartheta\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{s}{2}.$$

J. R. P.

EL PROFESOR PEDRO PI CALLEJA

NUEVO PROFESOR DE LA UNIVERSIDAD N. DE CUYO

El Profesor Dr. Pedro Pi Calleja ha sido llamado por la Universidad de Cuyo para que dicte las cátedras de Análisis Matemático y Geometría Descriptiva de la Escuela de Ingeniería, con asiento en San Juan.

El eminente Profesor Pedro Pi Calleja es brillante y destacado representante de la joven escuela matemática española, que junto con la argentina, ve, en su fundador Dr. J. Rey Pastor, el constante e infatigable propulsor que la dirige y orienta con sus enseñanzas desde sus cátedras de Madrid y Buenos Aires.

El Prof. Pi Calleja inició simultáneamente los estudios de Arquitectura y de Ciencias Exactas en la Escuela Superior de Arquitectura y en la Universidad respectivamente de Barcelona, desarrollando siempre paralelamente, desde aquella época, su doble formación técnica y científica. Egresó de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Barcelona en 1928, al realizar una brillante prueba de Licenciatura que le valió el premio extraordinario. Más tarde obtuvo con la más alta clasificación el grado de Doctor en Matemáticas leyendo su Tesis ante el claustro de la misma Facultad. Su tesis doctoral, titulada «*Convergencia de integrales dependientes de un módulo variable*» fué publicada en la colección de Memorias de la Academia de Ciencias de Barcelona (Tercera época, Vol. XXV, nº. 13, 1936). Después de un breve período de Profesor Ayudante, es nombrado Profesor titular de Análisis Matemático de la misma Universidad de Barcelona.

Pensionado por la Junta para Ampliación de Estudios de Madrid, se trasladó a Alemania, siguiendo en la Universidad de Berlín los cursos lectivos de 1933-34 y 1934-35 por un tiempo total de 14 meses. Siguió en Berlín, además de los cursos de matemática pura dictados por los Profesores Schur, Hammerstein y Bieberbach entre otros, los cursos de la «Technische Hochschule» con lo cual perfeccionó al mismo tiempo sus conocimientos técnicos que no dejó nunca de lado y que le llevaron, a partir del año 1933, en que egresó de Arquitecto, a dirigir construcciones diversas. Fruto de su estancia en Alemania es el trabajo titulado «*Ueber die Konvergenz-bedingungen der komplexen Form des Fourierschen Integrales*», publicado en el Mathematische Zeitschrift, Bd. 40, 1935, y que ha merecido elogiosa mención por parte de S. Bochner (actualmente en Princeton), máxima autoridad en la materia.

En esta memoria analiza las condiciones de convergencia de la forma compleja de la Integral de Fourier, que muchos tratados enuncian sin demostración en forma equivocada. Para ello estudia la convergencia de la parte imaginaria de dicha forma compleja, llamada también Integral asociada de Fourier y que se obtiene sustituyendo en esta última el coseno por el seno. En este caso la integral no es singular en el sentido de Lebesgue o Hobson y el estudio de su convergencia sirve también para aclarar el distinto carácter de la condición de Dini y de Jordan. La validez de las condiciones de la Vallée Poussin, Lebesgue, logarítmica de Dini, etc., es también analizada.

Posteriormente el autor, en trabajos publicados por la Academia de Ciencias de Barcelona y la Société Mathematique de France, sistematiza a la manera de Lebesgue, los anteriores resultados. En dichos trabajos, aparte su valor de síntesis, se obtiene como principal contribución a la teoría, la generalización y extensión de los teoremas sobre integrales singulares de Lebesgue y Hobson al estudiar la convergencia de estas integrales para familias más restringidas como las «continuas de Lipschitz».

De regreso a España, su actuación no se limitó a la Universidad, sino que nombrado director del «Centre d'estudis matemátics» del «Institut d'Estudis Catalans» dictó como tal diversos cursos monográficos en el seno de tan importante institución y multitud de conferencias en varios centros culturales.

Con bastante posterioridad (año 1939) ha trabajado en el Institut Henry Poincaré de la Sorbonne de París, continuando con el estudio de las integrales singulares que había iniciado en su tesis doctoral y produciendo un trabajo que, después de un elogioso informe de H. Lebesgue fué publicado en el Bulletin de la Société Mathematique de France con el título «*Note sur les integrales singulières et leur application a la forme complexe de l'Integrale de Fourier*». A propuesta de H. Lebesgue y P. Montel fué admitido, en la misma época, como miembro de la Société Mathématique de France.

Recientemente, de viaje hacia la Argentina, aprovechando su paso por Cuba, pronunció por invitación de la Facultad de Ciencias de la

Habana, tres conferencias sobre el tema «*El concepto moderno de integral y su aplicación al análisis funcional*», que pronto aparecerán publicadas.

Hemos detallado, a grandes rasgos, las principales actuaciones del Dr. Pi Calleja. Aparte de ellas se podrían citar entre otras las publicaciones siguientes: «*Sobre un desarrollo de Teixeira*» (Rev. Mat. Hispano-Americana, 1932), «*Contribución a la teoría geométrica de la polaridad*» (Rev. Mat. Hispano-Americana, 1933), «*Demostración aritmética de una propiedad sobre límites de diferencias y su aplicación al teorema de Vivanti-Pringsheim*» (R. M. H. A., 1936) y otras.

Terminaremos felicitando a la Universidad de Cuyo y a sus autoridades por haber realizado la fórmula justa e ideal de profesor de matemáticas para una escuela de ingeniería. Dichas características son: ser docente con experiencia para que no se pierdan las explicaciones; saber de manera práctica la técnica de la construcción, para que de esta manera no se dé una matemática extraña a la cultura general de un ingeniero y por fin ser conocedor profundo de la Matemática para no perder la necesaria y siempre útil altura de miras. Todas estas cualidades reúne el profesor Pi Calleja y sabemos que lo mismo aquí ahora, que antes en España, dará por sí mismo su justificación. La incorporación de Pi Calleja a la cultura argentina, dará un valor joven y entusiasta capaz de contribuir en gran medida al mayor progreso de la cultura técnica y al mayor adelanto de la investigación matemática en la República.

E. C.

BIBLIOGRAFIA

L. SOBRERO, *Elasticidade*. Río de Janeiro, 1942. Un vol. en 4º de 666 págs.

Una teoría matemática de la elasticidad, debe ser tratada con miras de encarar la resolución general de los sistemas elásticos, es decir establecer cuales son las ecuaciones diferenciales que permitan determinar la distribución de las tensiones y deformaciones en un cuerpo elástico conocido, bajo la acción de un sistema arbitrario de fuerzas que le sean aplicadas, viendo igualmente en qué forma pueden ser trasladados tales resultados al estudio de casos particulares que adquieren un especial interés en la técnica, y hacer evidente la aproximación que resulta en las soluciones que suponen premisas previas sobre el comportamiento de los fenómenos elásticos.

En tal sentido el Prof. Sobrero en su reciente obra ''Elasticidade'' supera el estrecho límite que un tratado pueda imponer al desarrollo de los innumerables temas que la materia propone.

A pesar de estar constituída con las lecciones dictadas por el autor en Roma durante los años 1935 y 36 y en la Universidad de Rio de Janeiro en 1939, no debe presuponerse en dicha obra una finalidad exclusivamente didáctica, sino que por el contrario en su desarrollo deja el Prof. Sobrero, amplios horizontes y sugestiones para el estudio y profundización de interesantes temas.

Sus primeros capítulos se refieren al análisis de las deformaciones de naturaleza elástica, independientemente de las causas que las producen, con sus condiciones de compatibilidad, al estudio de los esfuerzos internos, como así también a las relaciones de estos y aquellas mediante la ley de Hooke.

En los capítulos subsiguientes analiza la existencia de una función potencial ligada a las tensiones y deformaciones, puntualizando la definición de la energía interna de los sólidos y relacionándola con los amplios principios de la Termodinámica. Las elegantes demostraciones de los teoremas de Clapeyron, el de unicidad de las deformaciones para un sistema dado de fuerzas, el teorema de Betti, el de los trabajos virtuales, y el teorema de Menabrea adquieren en esta obra un particular relieve y significado ya que encarado bajo su aspecto sintético han hecho innecesario el uso de una excesiva algoritmia.

Después de dedicar algunos capítulos a estados particulares de los sólidos elásticos hace el análisis de los sistemas planos, sus deformaciones, las simplificaciones respectivas de las ecuaciones generales considerando sistemas simplemente y múltiplemente conexos; la introducción de la función de Avry, la función potencial interna y el correspondiente examen de las funciones biarmónicas, demostrando igualmente los teoremas de Almansi y Levi Civita sobre la inversión y el principio de Schwarz sobre la reflexión. Tratando de ampliar el instrumento matemático para la resolución de estos sistemas introduce el Prof. Sobrero las funciones hipercomplejas a cuyos fundamentos dedica un capítulo de su obra. El problema de la determinación de los esfuerzos internos en un sistema plano se reduce así a determinar una función de variable hipercompleja poseyendo ciertas singularidades preestablecidas y un cierto comportamiento de contorno.

Hace notar el Prof. Sobrero que muchas partes de la teoría de las funciones hipercomplejas no han sido aun sometidas a una sistematización definitiva, desconociéndose por ejemplo, la equivalencia en el campo hipercomplejo del teorema fundamental del álgebra y el principio de reflexión analítica.

A los capítulos mencionados debe agregarse el referente a las coordenadas curvilineas generales a las que traduce las ecuaciones fundamentales, finalizando con la exposición de los métodos de la fotoelasticidad para la investigación de los sistemas elásticos planos.

Al final de cada capítulo se completan los conceptos desarrollados con un interesante grupo de ejercicios y problemas.

Es de esperar que "Elasticidade" sea acogida entre los estudiosos con el beneplácito que le corresponde no sólo por el mérito que significa la organización de tan amplia materia sino también por el esfuerzo indudable que implica la presentación de tan excelente tratado.

D. A. FALCO - R. SCARFIELLO

QUÉ DEBE HACERSE PARA EL ADELANTO DE LA MATEMATICA EN LA ARGENTINA

Con este título la Asociación Argentina para el Progreso de las Ciencias acaba de editar un folleto (Buenos Aires, 1942) con los resultados de la encuesta por ella promovida, sobre ese tema, entre personas, residentes o de paso en el país, dedicadas al estudio de la matemática o ciencias afines.

De las 27 personas consultadas contestaron las siguientes: JOSÉ BABINI (Santa Fe), GEORGE D. BIRKHOFF (Harvard), JUAN BLAQUIER (Buenos Aires), CLOTILDE A. BULA (Rosario), JULIO R. CASTIÑEIRAS (La Plata), FÉLIX CERNUSCHI (Tucumán), CARLOS E. DIEULEFAIT (Rosario), AGUSTÍN DURAÑONA Y VEDIA y ALBERTO E. SAGASTUME BERRA (La Plata), FERNANDO L. GASPAR (Rosario), MANUEL GUITARTE (Buenos Aires), BEPPO LEVI (Rosario), CORTÉS PLA (Rosario), JULIO REY PASTOR (Buenos Aires), LUIS A. SANTALÓ (Rosario), ALEJANDRO TERRACINI (Tucumán) y ESTEBAN TERRADAS (La Plata).

El folleto contiene, además de las respuestas de dichas personas, un *Comentario de los informes y resumen general*, redactado por el doctor JUAN T. LEWIS, a pedilo del presidente de la Asociación, doctor BERNARDO A. HOUSSAY, y, a manera de conclusión, las siguientes *Declaraciones*:

La Asociación Argentina para el Progreso de las Ciencias considera que una nación no tiene jerarquía intelectual de primera clase si no contribuye a la creación científica. A este fin se ha propuesto estudiar cuáles son las medidas aconsejables para el progreso de cada una de las principales ramas científicas en nuestro país, y ha comenzado por las ciencias matemáticas por su importancia fundamental.

Después de examinar las opiniones de distinguidos matemáticos de nuestro país sobre "Qué debe hacerse para el adelanto de la matemática en la Argentina" ha resuelto aprobar las siguientes declaraciones:

1º El adelanto de la matemática depende de la formación de hombres competentes y consagrados exclusivamente a la investigación desinteresada, pues el cultivo de la llamada ciencia pura es la base de todas las aplicaciones prácticas.

2ª Para tal fin deben existir institutos de matemática en todas las universilades de nuestro país.

3ª Dichos institutos unidos a los de las ciencias Físicas, Químicas y Naturales deben agruparse en Facultades de Ciencias, cuya creación separada. es indispensable para que el país cumpla su deber de contribuir al adelanto de los conocimientos científicos.

4ª Los institutos o cátedras de matemática deben ser fundamentalmente centros de investigación original, en los que puedan formarse y perfeccionar sus conocimientos y capacidad quienes posean idoneidad y méritos suficientes.

Deben crear los conocimientos y propagarlos, y además desarrollar las aptitudes y vocaciones.

5ª Los profesores y personal de estos institutos deben estar dedicados exclusivamente a sus tareas, condición fundamental y absoluta para obtener hombres de primera clase y con producción original. Deberá asegurárseles tranquilidad espiritual y un ambiente estimulante, evitando e impidiendo las tareas u obligaciones que puedan distraerlos o fatigarlos. Para ello deben recibir sueldos adecuados que les permitan vivir sin dificultades económicas.

6ª Es imprescindible que en cada una de las universidades del país exista una biblioteca de matemática muy bien dotada, con obras clásicas y modernas, y que reciba sin demora las principales revistas y libros que aparecen y que representan la vida actual de dicha ciencia. Sin una buena biblioteca no puede esperarse la realización de obra original en matemática.

7ª Deben establecerse licencias periódicas de un año o medio año, cada 5 ó 7 años, para que los profesores y sus auxiliares se trasladen a visitar las instituciones extranjeras o trabajen en ellas.

8ª Es indispensable la creación de becas para que los graduados en matemática se perfeccionen en el país y en el extranjero.

9ª Deben organizarse cursos a cargo de investigadores extranjeros descollantes, de manera tal que éstos formen discípulos destinados a la investigación.

10ª Es menester coordinar y subvencionar las publicaciones de trabajos originales de matemática, cuidando su alta calidad y evitando duplicaciones innecesarias de revistas.

11ª Fomentar el intercambio y la mayor colaboración posible entre los matemáticos del país y del extranjero.

12ª Tender a la utilización de los matemáticos como auxiliares de la industria, la agricultura, la economía, la higiene y medicina, etc., asegurando así que un gran número de personas se dedique a la matemática.

13ª Promover la vocación por la matemática en los jóvenes por medio de revistas de divulgación, premios, becas para estudiantes y creación de cargos de ayudantes.

14ª Establecer que la enseñanza secundaria de la matemática deberá ser impartida por matemáticos dedicados exclusivamente a la docencia y a los estudios originales.

15ª Mejorar los planes de estudio de la matemática en la instrucción secundaria por comisiones de especialistas en la materia.

VOLUMEN III (Fascículos separados; 1938 - 1939)

Nº 1. — GINO LORIA. *Le Matematiche in Ispagna e in Argentina.*
» 2. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre las series de funciones de Hermite.*
» 3. — MICHEL PETROVICH. *Remarques arithmétiques sur une équation differentielle du premier ordre.*
» 4. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Una nueva demostración del teorema límite del Cálculo de Probabilidades. Condiciones necesarias y suficientes para que una función sea integral de Laplace.*
» 5. — NIKOLA OBRECHKOFF. *Sur la sommation absolue par la transformation d'Euler des séries divergentes.*
» 6. — RICARDO SAN JUAN. *Derivación e integración de series asintóticas.*
» 7. — Resolución adoptada por la U. M. A. en la cuestión promovida por el Sr. Carlos Biggeri.

VOLUMEN IV (Fascículo separado; 1939)

Nº 8. — F. AMODEO. *Origen y desarrollo de la Geometría Proyectiva.*

VOLUMEN V (Fascículos separados; 1940)

Nº 9. — CLOTILDE A. BULA. *Teoría y cálculo de los momentos dobles.*
» 10. — COTILDE A. BULA. *Cálculo de superficies de frecuencia.*

VOLUMEN VI (Fascículos separados; 1940 - 1942)

Nº 11. — R. FRUCHT. *Zur Geometria auf einer Fläche mit indefiniter Metrik (Sobre la Geometría de una superficie con métrica indefinida).*
» 12. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre una memoria del Prof. J. C. Vignaux.*
» 13. — F. TORANZOS. *Sobre las singularidades de las curvas de Jordan.*
» 14. — M. BALANZAT. *Fórmulas integrales de la intersección de conjuntos.*
» 15. — G. KNIE. *El problema de varios electrones en la mecánica cuantista.*
» 16. — A. TERRACINI. *Sobre la existencia de superficies cuyas líneas principales son dadas.*
» 17. — L. A. SANTALÓ. *Valor medio del número de partes en que una figura convexa es dividida por* n *rectas arbitrarias.*
» 18. — A. WINTNER. *On the iteration of distribution functions in the calculus of probability (Sobre la iteración de funciones de distribución en el cálculo de probabilidades).*
» 19. — E. FERRARI. *Sobre la paradoja de Bertrand.*
» 20. — J. BABINI. *Sobre algunas propiedades de las derivadas y ciertas primitivas de los polinomios de Legendre.*
» 21. — R. SAN JUAN. *Un algoritmo de sumación de series divergentes.*
» 22. — A. TERRACINI. *Sobre algunos lugares geométricos.*
» 23. — V. y A. FRAILE y C. CRESPO. *El lugar geométrico y lugares de puntos áreas en el plano.*
» 24. — R. FRUCHT. *Coronas de grupos y sus subgrupos, con una aplicación a los determinantes.*
» 25. — E. R. RAIMONDI. *Un problema de probabilidades geométricas sobre los conjuntos de triángulos.*

VOLUMEN VII (1940 - 1941)

Notas y memorias de J. BABINI, H. E. CALCAGNO, E. FERRARI, V. y A. FRAILE y C. CRESPO, G. KNIE, J. J. REBELLA, S. RIOS, R. SAN JUAN, L. A. SANTALÓ, A. TERRACINI.

Soluciones de temas propuestos. Bibliografía, Crónica, etc.

En 1942 la U. M. A. ha iniciado la publicación de una nueva serie de ''Memorias y monografías'' de las que han aparecido hasta ahora las siguientes:

Nº 1. — GUILLERMO KNIE, *Mecánica ondulatoria en el espacio curvo* (1 volumen de 152 páginas).

Además han aparecido tres cuadernos de *Miscelanea matemática.*

SUMARIO

PÁG.

Algunos valores medios y desigualdades referentes a curvas situadas sobre la superficie esférica, por L. A. Santaló 113

Tema propuesto. Nº 38 125

Curva de contacto de un conoide con la superficie directriz, por E. Gaspar 126

Conoide esférico con dos directrices rectilíneas, por J. Rey Pastor 131

Tema resuelto. Nº 25. Soluciones de J. Babini y R. P. 136

El profesor Pedro Pi Calleja, por E. C. 139

Bibliografía. — L. Sobrero, Elasticidade (D. A. Falco. R. Scarfiello) . . 141

Que debe hacerse para el adelanto de la matemática en la Argentina. Declaraciones de la Asociación Argentina para el progreso de las ciencias 143