

REVISTA

DE LA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

(MIEMBRO DEL PATRONATO DE LA MATHEMATICAL REVIEWS)

REDACTADA por

J. Babini, (Director), M. Balanzat, J. Barral Souto, E. Corominas, Y. Frenkel,
F. L. Gaspar, A. González Domínguez, P. Pi Calleja, J. Rey Pastor, L. A.
Santaló, F. Toranzos y A. Valeiras



MIEMBROS TITULARES DE LA U. M. A.

J. BABINI (Santa Fe) (fundador). — M. BALANZAT (San Luis). — J. BARRAL SOUTO (B. Aires) (fundador). — C. A. BULA (Rosario) (fundador). — E. COROMINAS (Mendoza). — E. CHICHIZOLA (Rosario). — C. DIEULEFAIT (Rosario) (fundador). — FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES (B. Aires) (fundador). — FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS (Rosario) (fundador). — FACULTAD DE QUÍMICA INDUSTRIAL (Santa Fe) (fundador). — Y. FRENKEL (B. Aires). — E. GASPAR (Rosario) (fundador). — F. L. GASPAR (Rosario) (fundador). — J. GIANNONE (Rosario) (fundador). — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ (Buenos Aires) (fundador). — J. GONZÁLEZ GALE (Buenos Aires) (fundador). — M. GUITARTE (Buenos Aires) (fundador). — W. S. HILL (Montevideo) (fundador). — C. ISELLA (Rosario) (fundador). — H. MAGLIANO (La Plata). — OBSERVATORIO ASTRONÓMICO (La Plata). — J. OLGUIN (Rosario) (fundador). — P. PI CALLEJA (San Juan). — E. R. RAIMONDI (Buenos Aires) (fundador). — J. E. REYNAL (Buenos Aires). — J. REY PASTOR (Buenos Aires) (fundador). — E. L. SAMATÁN (Buenos Aires) (fundador). — L. A. SANTALÓ (Rosario) (fundador). — J. SORTHEIX (Tucumán) (fundador). — D. T. A. DE SPELUZZI (Buenos Aires) (fundador). — E. TERRADAS (La Plata) (fundador). — F. TORANZOS (La Plata).



BUENOS AIRES

1942

UNION MATEMATICA ARGENTINA

JUNTA DIRECTIVA

Presidente, José Babini. Vicepresidente, José González Galé. Secretario, Fernando L. Gaspar. Prosecretarios, Juan B. Kervor y Angel J. Guarnieri. Tesorera, Clotilde A. Bula. Protesorera, Yanny Frenkel. Vocales, José Sortheix. Cortés Plá, Esteban Terradas, Pedro Rossell Soler y Alberto González Domínguez.

DELEGADOS DE LA U. M. A.

En Tucumán, Prof. José Sortheix. En Córdoba, Prof. Fernando Sánchez Sarmiento. En Santa Fe, Prof. José Babini. En Rosario, Prof. Fernando L. Gaspar. En San Luis, Prof. Manuel Balanzat. En La Plata, Prof. Fausto Toranzos. En Montevideo (R. O.), Prof. Walter S. Hill.

Para ingresar como miembro titular de la Unión Matemática Argentina, es necesaria la presentación del solicitante por dos socios fundadores, la admisión por la Junta, y el pago de una cuota de \$ 5. — m/n. mensuales o de \$ 50.— anuales.

Para ingresar como miembro adherente (con derecho a la Revista y a las Memorias en fascículos separados) es necesario el pago de una cuota de \$ 10.— anuales. Los pagos deberán efectuarse por cheque, giro u otro medio libre de gastos, a la orden de la Tesorera, Prof. Clotilde A. Bula, Moreno 364, Rosario.

Los señores miembros adherentes domiciliados en la Ciudad de Buenos Aires podrán, si lo prefieren, efectuar su pago en doce cuotas mensuales de \$ 1.00 m/n. cada una, que serán cobradas a domicilio.

Por ser la U. M. A. miembro del patronato de la Mathematical Reviews (sponsoring member), los socios de la U. M. A. tienen derecho a suscribirse a esa importante revista de bibliografía y crítica con 50 % de rebaja sobre el precio de suscripción que es de 13 dólares por año. Los socios de la U. M. A. pagarán por tanto sólo 6.50 dólares por año.

Los trabajos originales enviados para su publicación serán previamente analizados por un ponente, quien emitirá dictamen acerca de la novedad y corrección de sus resultados.

La impresión de las tiradas aparte, y las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

Abonnement annuel à l'étranger: 4.00 dollars (Etats-Unis).

Prière d'adresser toute la correspondance scientifique et administrative à l'adresse ci-dessous:

SR. SECRETARIO DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

PROF. FERNANDO L. GASPAR

PERÚ 222, Buenos Aires (REP. ARGENTINA)

PUBLICACIONES DE LA U. M. A.

VOLUMEN I (1936-1937)

Notas y memorias de C. BIGGERI, J. FAYET, J. BABINI, F. CERNUSCHI, A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ, J. REY PASTOR, SIXTO RIOS.
Bibliografía. Extractos.

VOLUMEN II (1938-1939)

Notas y memorias de CLOTILDE A. BULA, T. LEVI-CIVITA, A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ, M. PETROVICH, C. BIGGERI, S. RIOS, F. L. GASPAR, J. REY PASTOR, YANNY FRENKEL, J. A. DEL PERAL, F. TORÁNZOS.
Bibliografía. Crónica. Revista de revistas, etc

(Sigue en la contratapa)

SOBRE UNA PROPIEDAD DE LAS SECCIONES CONICAS VERDADERAS CON CENTRO

por W. MÄCHLER, Valparaíso (Chile)

Teorema: Sea $A_0 A_1 \dots A_{v-1} A_v A_{v+1} \dots A_n$ una línea poligonal cuyos vértices A_v ($v=0, 1, 2, \dots, n$) estén sobre una $\begin{cases} \text{elipse} \\ \text{rama de hipérbola} \end{cases}$ con el centro C y los ejes $2a, 2b$. Si se coordina al vector $\vec{p}_v = \overrightarrow{A_{v-1} A_v}$ el vector $\vec{q}_v = \overrightarrow{CS_v}$ ($v=1, 2, \dots, n$) de modo que

I) $\vec{p}_v$ y $\vec{q}_v$ sean conjugados respecto a la $\begin{cases} \text{elipse} \\ \text{hipérbola} \end{cases}$

II) valga la relación $\vec{p}_v \wedge \vec{q}_v = -(\vec{p}_{v+1} \wedge \vec{q}_{v+1}) (*)$
($v=1, 2, \dots, n-1$)

entonces las rectas $S_v S_{v+1}$ ($v=1, 2, \dots, n-1$) determinadas por los vértices sucesivos de la línea poligonal $S_1 S_2 \dots S_v S_n$ son tangentes de una $\begin{cases} \text{elipse} \\ \text{hipérbola} \end{cases}$ que resulta respectivamente de la elipse o de la hipérbola conjugada a la hipérbola dada por una homotecia con el centro C y la razón de homotecia absoluta $\frac{|\vec{p}_1 \wedge \vec{q}_1|}{2ab}$.

Demostración:

A) Caso de la elipse.

Demos la elipse por la ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(\varphi) = a \cos \varphi + b \sin \varphi \quad [1]$$

con $a \times b = 0 (*)$ y $0 \leq \varphi < 2\pi$. Podemos tomar $|a| \geq |b|$, incluyendo de este modo también el caso especial de la circunferencia. Pongamos $\overrightarrow{CA_v} = \mathbf{r}(\varphi_v) = \mathbf{r}_v$. Los vectores

$$\overrightarrow{A_{v-1} A_v} = \vec{p}_v = \mathbf{r}_v - \mathbf{r}_{v-1} \quad \text{y} \quad \vec{q}_v = \lambda_v (\mathbf{r}_{v-1} + \mathbf{r}_v)$$

(*) $\wedge$ Producto vectorial; $\times$ producto escalar.

satisfacen a la condición I). La condición II) la podemos escribir en la forma

$$p_v \wedge q_v = (-1)^v 2k (a \wedge b) \quad [2]$$

donde k es una constante. De [1] obtenemos

$$\begin{aligned} p_v &= a (\cos \varphi_v - \cos \varphi_{v-1}) + b (\sin \varphi_v - \sin \varphi_{v-1}) \\ \frac{1}{\lambda_v} q_v &= a (\cos \varphi_{v-1} + \cos \varphi_v) + b (\sin \varphi_{v-1} + \sin \varphi_v) \end{aligned} \quad [3]$$

y substituyendo en [2] resulta

$$\lambda_v = (-1)^v k \frac{1}{\sin (\varphi_{v-1} - \varphi_v)}$$

luego

$$q_v = (-1)^v k \frac{r_{v-1} + r_v}{\sin (\varphi_{v-1} - \varphi_v)} \quad [4]$$

suponiendo $|\varphi_{v-1} - \varphi_v| \neq \pi$.

Con las abreviaturas

$$\begin{aligned} \alpha_v &= \frac{1}{2} (\varphi_{v-1} + \varphi_v) \\ \beta_v &= \frac{1}{2} (\varphi_{v-1} - \varphi_v) \end{aligned} \quad [5]$$

obtenemos mediante [4], [2]

$$q_v = (-1)^v k \frac{r(\beta_v)}{\sin \alpha_v} \quad [6]$$

que tiene sentido también para $|\varphi_{v-1} - \varphi_v| = \pi$.

La ecuación vectorial de la recta de la cual q_v y q_{v+1} ($v = 1, 2, \dots, n-1$) son radios vectores de dos de sus puntos es

$$r = q_v + \sigma (q_{v+1} - q_v), \quad [7]$$

con σ como parámetro.

Demostramos a continuación que existen sobre el soporte del vector $\mathbf{a}$ dos puntos F_1, F_2 con los radios vectores $\mathbf{s} = \mu k \mathbf{a}$ y $-\mathbf{s}$ de modo que el producto P de las distancias algebraicas de los puntos F_1, F_2 a la recta [7] sea independiente de v y positivo, eligiendo μ convenientemente. Por esto vemos pues que las rectas [7] con $v = 1, 2, \dots, n - 1$ son tangentes de una misma elipse con los focos F_1, F_2 .

Sean $\mathbf{s} + \mathbf{v}_{v1}$ y $-\mathbf{s} + \mathbf{v}_{v2}$ los radios vectores de los pies de las perpendiculares de F_1, F_2 a la recta [7]. Tenemos

$$\mathbf{v}_{v1} = -(\mathbf{s} - \mathbf{q}_v) + \frac{(\mathbf{s} - \mathbf{q}_v) \times (\mathbf{q}_{v+1} - \mathbf{q}_v)}{(\mathbf{q}_{v+1} - \mathbf{q}_v)^2} (\mathbf{q}_{v+1} - \mathbf{q}_v)$$

$$\mathbf{v}_{v2} = \mathbf{s} + \mathbf{q}_v - \frac{(\mathbf{s} + \mathbf{q}_v) \times (\mathbf{q}_{v+1} - \mathbf{q}_v)}{(\mathbf{q}_{v+1} - \mathbf{q}_v)^2} (\mathbf{q}_{v+1} - \mathbf{q}_v)$$

y el producto P de las distancias algebraicas arriba mencionadas puede escribirse en la forma siguiente

$$P = \mathbf{v}_{v1} \times \mathbf{v}_{v2} = \frac{\mathbf{q}_v^2 \mathbf{q}_{v+1}^2 - (\mathbf{q}_v \times \mathbf{q}_{v+1})^2 - s^2 (\mathbf{q}_{v+1} - \mathbf{q}_v)^2 + (\mathbf{s} \times (\mathbf{q}_{v+1} - \mathbf{q}_v))^2}{(\mathbf{q}_{v+1} - \mathbf{q}_v)^2}. \quad [8]$$

Con las abreviaturas

$$Q_v = \sin \alpha_v \cos \beta_{v+1} + \sin \alpha_{v+1} \cos \beta_v$$

$$R_v = \sin \alpha_v \sin \beta_{v+1} + \sin \alpha_{v+1} \sin \beta_v \quad [3]$$

$$\eta = \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|} = \frac{a}{b}$$

y tomando en cuenta las relaciones

$$\beta_v - \beta_{v+1} = \alpha_v + \alpha_{v+1}$$

$$Q_v^2 + R_v^2 = \sin^2 (\beta_v - \beta_{v+1}) \quad [10]$$

obtenemos con [6], [9], [10] por substitución en [8],

$$P = (k b)^2 \frac{Q_v^2 + (1 - \mu^2) R_v^2}{Q_v^2 + \eta^2 R_v^2}. \quad [11]$$

Eligiendo

$$\mu^2 = 1 - \eta^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

resulta con [11]

$$P = (kb)^2$$

independiente de v . La elipse cuyos focos tienen los radios vectores $\pm \mu k a$ y cuyo eje menor es $2|k|b$ tiene las rectas [7] con $v = 1, 2, \dots, n-1$ como tangentes. Como $\mu = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - b^2}$, el eje mayor es $2|k|a$. Con esto queda demostrado el teorema en el caso de la elipse. Para $|a|=|b|$ tenemos el caso especial de la circunferencia.

B) Caso de la hipérbola.

Con las denominaciones arriba introducidas y la ecuación vectorial de una rama de la hipérbola

$$\mathbf{r}(\varphi) = a \cosh \varphi + b \sinh \varphi$$

siendo $a \times b = 0$, $-\infty < \varphi < \infty$, obtenemos

$$q_v = (-1)^v k \frac{\mathbf{r}(\beta_v)}{\sinh \alpha_v}. \quad (v = 1, 2, \dots, n).$$

Poniendo en el caso presente

$$s = \mu k b$$

$$Q_v = \sinh \alpha_v \sinh \beta_{v+1} + \sinh \alpha_{v+1} \sinh \beta_v$$

$$R_v = \sinh \alpha_v \cosh \beta_{v+1} + \sinh \alpha_{v+1} \cosh \beta_v$$

$$\eta = \frac{b}{a}$$

y observando que

$$\beta_v - \beta_{v+1} = \alpha_v + \alpha_{v+1}$$

$$-R_v^2 + Q_v^2 = \sinh^2 (\beta_v - \beta_{v+1}).$$

resulta

$$P = - (ka)^2 \frac{R_v^2 + (\mu^2 - 1) Q_v^2}{R_v^2 + \frac{1}{\eta^2} Q_v^2}.$$

Para

$$\mu^2 - 1 = \frac{1}{\eta^2} \quad \text{sea} \quad \mu = \frac{1}{b} \sqrt{a^2 + b^2},$$

la expresión para P es independiente de v y tiene el valor

$$P = - (ka)^2.$$

Como $P < 0$ y $P + (\mu kb)^2 = (kb)^2 > 0$, las rectas [7] con $v = 1, 2, \dots, n-1$ son tangentes a una hipérbola cuyos focos tienen los radios vectores $\pm \mu kb$ y cuyo eje transversal es $2|kb|$. Su eje no transversal es pues $2|ka|$. Luego esta hipérbola es homotética a la hipérbola conjugada de la hipérbola dada respecto a C como centro y la razón de homotecia es k .

Nota: 1º) Si A_{v-1} tiende a A_v sobre la $\begin{cases} \text{elipse} \\ \text{hipérbola} \end{cases}$ el valor absoluto del vector q_v tiende a ∞ y la posición límite de su soporte es la recta CA_v . Esto tiene interés si se quiere aplicar el teorema a una línea poligonal cerrada con un número impar de lados, pudiendo conservar de esta manera la "condición de alternación" II.

2º) Si los vértices A_v de la línea poligonal $A_0 \dots A_v \dots A_n$ están sobre una circunferencia se puede demostrar el teorema fácilmente por una consideración geométrica directa, tomando respecto a A_v como centro una transformación por radios recíprocos que transforma los puntos A_{v-1} , A_{v+1} en los puntos A'_{v-1} , A'_{v+1} y girando después los vectores $A_v A'_{v-1}$, $A_v A'_{v+1}$ en el mismo sentido en el ángulo $\frac{\pi}{2}$ alrededor de A_v .

17 de Agosto 1942.

W. Mächler,
Valparaíso (Chile)
Universidad técnica

REPRESENTACION GRAFICA DE LAS RAICES. IMAGINARIAS DE LA ECUACION DE SEGUNDO GRADO

por JUAN JOSÉ REBELLA (Montevideo)

Sea la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Para obtener una representación gráfica de sus raíces consideremos la función

$$y = ax^2 + bx + c, \quad (1)$$

la cual representa, como se sabe, una parábola con el eje paralelo al eje y . Las coordenadas del vértice de esta parábola son

$$x_v = -\frac{b}{2a}, \quad y_v = a \frac{4ac - b^2}{4a^2} \quad (2)$$

como se encuentra inmediatamente observando que en el vértice la tangente es horizontal y por tanto la derivada de (1) debe ser cero, o sea $y' = 2ax + b = 0$, de donde se deduce el valor de x_v y sustituyendo en (1) el de y_v .

Las dos raíces de la ecuación de 2º. grado se pueden escribir, por tanto,

$$x = x_v \pm \sqrt{-\frac{y_v}{a}}. \quad (3)$$

Si $y_v < 0$ estas raíces son reales y su representación gráfica consiste simplemente en que son iguales a las distancias del origen de coordenadas a los dos puntos en que la parábola (1) corta al eje x .

Más importante es el caso en que $y_v > 0$, y por tanto las dos raíces (3) son imaginarias. Para obtener también en este caso una representación gráfica de las raíces construyamos la

parábola simétrica de la anterior respecto su vértice (fig. 1); ella cortará al eje x en dos puntos cuyas distancias al origen O

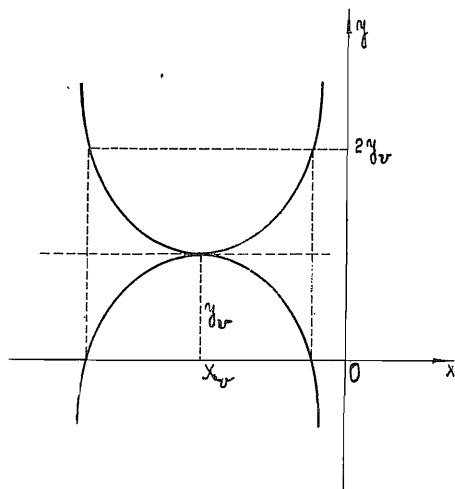


Fig. 1.

se calculan inmediatamente observando que por simetría deben ser iguales a las que se obtienen cortando la parábola primera por la recta $y = 2y_v$. Es, pues,

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac + 8ay_v} =$$

$$-\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = x_v \pm \sqrt{\frac{y_v}{a}}. \quad (4)$$

Es decir, en este caso de las raíces imaginarias, si construimos la parábola simétrica de la (1) respecto su vértice, la parte real de las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ es la abscisa del vértice de dicha parábola y el coeficiente de i es igual, con signo $+$ o $-$, a la mitad de la cuerda que sobre esta última parábola determina el eje x .

SOBRE LA RESOLUCION GRAFICA DE LA ECUACION CUBICA

I. La sencilla representación gráfica de las raíces imaginarias de la ecuación cuadrática dada por el Sr. Rebella, sugiere dar otra análoga para la de tercer grado, probablemente conocida también. Todo se reduce a sustituir el punto impropio del eje x por la intersección real a de la curva, que se supone dibujada. La abscisa p del punto de contacto de la tangente trazada desde dicho punto a es la parte real de las raíces imaginarias; y trazada por a la recta de pendiente doble, las proyecciones sobre el eje de los dos puntos de intersección, son simétricas respecto de p , y su distancia δ de él es la componente imaginaria. Se determinará x_0 más exactamente con esta secante que con la tangente, pues ésta deja un tanto indeterminado el punto de contacto, mientras que dicha secante da muy exactamente las dos componentes de las raíces imaginarias.

La demostración es inmediata; sea la ecuación:

$$y = a(x - x_0)(x^2 - 2px + q);$$

para toda recta $y = k(x - x_0)$ las intersecciones vienen dadas por la ecuación

$$k = a(x^2 - 2px + q) \quad \text{de donde,}$$

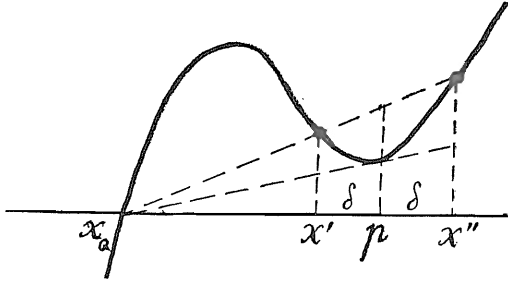
$$\frac{x' + x''}{2} = p \qquad \frac{x' - x''}{2} = \sqrt{p^2 - q + \frac{k}{a}},$$

luego las proyecciones tienen el mismo punto medio p , que en particular es la abscisa del punto de contacto de la tangente; la pendiente de ésta es $k' = a(q - p^2)$ y para $k = 2k'$ resulta como semidiferencia de raíces precisamente $\delta = \sqrt{q - p^2}$, que es la componente imaginaria de las raíces $p \pm \delta i$.

En su nota de Math. Monthly (1941), da Gehman⁽¹⁾ como

⁽¹⁾ H. M. GEHMAN, *Complex roots of a polynomial equation*, American Mathematical Monthly, Vol. 48, 1941.

interpretación de la componente imaginaria la raíz de la pendiente de la tangente; pero aparte de exigir la construcción de una media y una cuarta proporcional, tal regla es válida solamente cuando el coeficiente es $a=1$, y esto se ignora si se da la curva sin su ecuación. En cambio, con la regla que damos,



construida la tangente, como puede hacerse con excelente aproximación, y dibujada la recta de pendiente doble, la proyección de sus intersecciones representa gráficamente el par de raíces imaginarias y da entrambas componentes: p y δ , como se ve en la figura.

J. R. P.

II. Otra construcción gráfica, por el método de las coordenadas, de las raíces reales y complejas de la ecuación cúbica, puede basarse sobre la siguiente propiedad: si para $p > 0$ y $q'^2 - q^2 = \frac{4p^3}{27}$, las raíces de las ecuaciones $x^3 + px + q = 0$ y $x^3 - px + q' = 0$ son, respectivamente, x_1 (real), $x_{2,3}$ (imaginarias) y x'_1 (real), $x'_{2,3}$ (imaginarias) se verifica

$$x_{2,3} = \frac{-x_1 \pm i \sqrt{3} x'_1}{2}$$

$$x'_{2,3} = \frac{-x'_1 \pm i \sqrt{3} x_1}{2}.$$

Basta considerar que las dos ecuaciones anteriores tienen como radicales de Cardano, respectivamente u , v y u , $-v$.

De donde, si se representan gráficamente las ecuaciones

$$y = x^3 + px \quad (1)$$

$$x = y^3 - py \quad (2)$$

$$x^2 - y^2 = \frac{4p^3}{27} \quad (3)$$

las paralelas a los ejes por el punto $(-q', -q)$ de la hipérbola (3) determinan sobre (1) y (2) los valores x_1 y x'_1 ; vale decir, la raíz real y números proporcionales a los componentes de las raíces complejas de ambas ecuaciones $x^3 + px + q = 0$; $x^3 - px + q' = 0$.

Esta misma propiedad podría utilizarse para la determinación nomográfica de las raíces complejas de la cúbica $x^3 + px + q = 0$, superponiendo al clásico nomograma para la ecuación (ver, por ejemplo, D'OCAGNE, M., *Cálculo gráfico y nomografía*, ed. española, pág. 319) sobre la escala de p una de $\left(\frac{p}{3}\right)^3$ y sobre la de q una de $\frac{q^2}{2}$, y dibujando el soporte de la escala «muda» de K para completar el nomograma de ecuación

$$\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27} = \frac{q'^2}{2} + \frac{(-p)^3}{27} = K,$$

con lo que las alineaciones p, q y $-p, q'$ que se cortan sobre el soporte de K permiten conocer q' partiendo de q o viceversa.

J. B.

CUESTIONES ELEMENTALES

15. — En qué dirección debe atravesarse una calle por la que avanza un vehículo de modo que el riesgo de ser alcanzado al cruzar delante del mismo sea mínimo?

16. — Dos cilindros circulares rectos, del mismo radio $r = 1$ y de alturas ilimitadas en ambas direcciones, están colocados de modo que sus ejes se cortan bajo un ángulo φ . Determinar, para $0 < \varphi \leq 90^\circ$, el volumen $V(\varphi)$ de la “penetración” o sea del conjunto de los puntos que pertenecen a los dos cilindros a la vez.

EXTENSION DE LA FUNCION DE DIRICHLET AL CAMPO COMPLEJO

(Tema N° 15, Vol. VII, pág. 28)

La llamada función de Dirichlet que toma el valor 1 en los puntos racionales y el valor 0 en los irracionales, admite, como es sabido, la siguiente expresión algorítmica

$$D(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos m! \pi x)^{2n} = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x)$$

y pertenece a la 2ª. clase de Baire, como límite de funciones de primera clase y no pertenecer a ella por ser totalmente discontinua. Se trata de extender esta función al campo complejo, es decir, considerar la función $D(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(z)$, donde z es un punto cualquiera del plano complejo, estudiando el doble paso al límite y la sucesión de funciones $f_m(z)$.

A tal fin, hacemos $m! \pi = k$ y escribimos

$$w = \cos kz = \frac{1}{2} (e^{kzi} + e^{-kzi})$$

o bien, con $\zeta = e^{kzi}$,

$$w = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right).$$

Resulta así

$$f_m(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} w^{2n}, \quad D(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} w^{2n}.$$

En virtud de esta definición de $f_m(z)$ ella tomará el valor 0 en los puntos z correspondientes a valores w tales que $|w| < 1$, mientras que será ∞ en aquellos en que $|w| > 1$. Además, será 1 en los puntos de la circunferencia $|w| = 1$ que tengan argumento racional respecto de π , no teniendo, en cambio, valor determinado en los de argumento irracional respecto de π .

El problema consiste, pues, en determinar a que puntos del plano z corresponden estos puntos w . Para ello debemos transformar en el plano ζ el círculo $|w| \leq 1$ del plano w y luego pasar de esa región transformada a su correspondiente en el plano z .

Prácticamente procedemos así: la función de Joukowski $w = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right)$, transforma circunferencias del haz AB en circunferencias del mismo haz. En particular, la circunferencia del haz de centro i cuya ecuación en coordenadas polares es $\rho^2 - 2\rho \sin \varphi = 1$ se transforma en la circunferencia de centro en el origen y radio 1, pues los vectores $\frac{1}{2} \zeta$ y $\frac{1}{2} \frac{1}{\zeta}$ dan una resultante constantemente igual a 1 como se comprueba fácilmente.

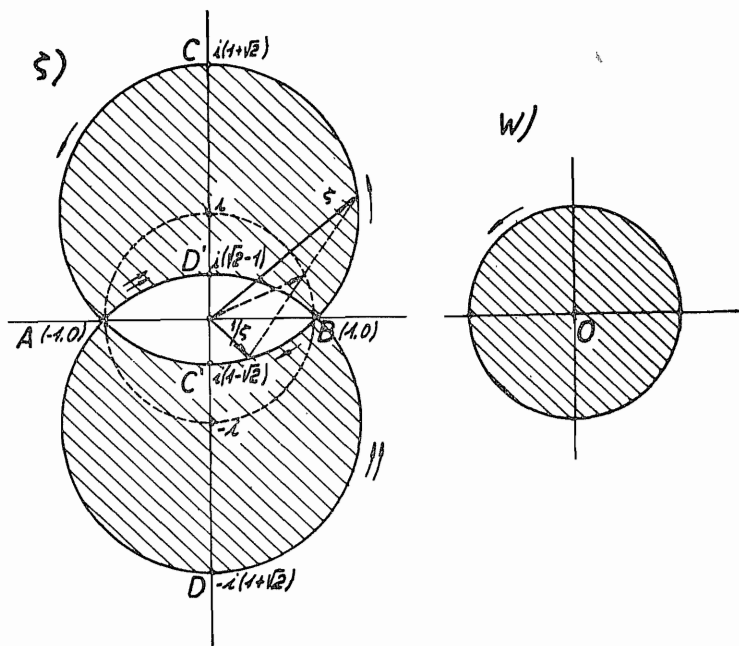


Fig. 1

Se comprende de inmediato que a la circunferencia del haz de centro $-i$, le corresponde también la circunferencia de centro en el origen y radio 1. Recíprocamente, a la circunferencia $|w| = 1$ del plano w , la función inversa $\zeta = w \pm \sqrt{w^2 - 1}$

hace corresponder en el plano ζ las circunferencias del haz AB de centros $i, -i$.

Además, como al centro $w=0$ en el plano w , le corresponden los centros $i, -i$ en el plano ζ , el interior de la circunferencia $w=1$, se transforma en el interior no común de las circunferencias centradas en $i, -i$ (región rayada).

Desde luego, se corresponden las regiones no rayadas y cuando un punto recorre la circunferencia $|w|=1$ en el sentido directo, sus dos correspondientes en el plano ζ se mueven sobre las circunferencias en el sentido indicado por las flechas, transformándose la semicircunferencia superior del plano w en la circunferencia superior del plano ζ .

Para pasar ahora de ζ a z , introducimos previamente el plano auxiliar $\log \zeta$, es decir, transformamos ζ en $\log \zeta$.

A lo largo de la circunferencia $\rho^2 - 2\rho \sin \varphi = 1$ es $\rho = |\sin \varphi \pm \sqrt{\sin^2 \varphi + 1}|$ y por eso, haciendo $\zeta = \rho e^{i\varphi}$, $\log \zeta = \log \rho + i\varphi$ (con abstracción de un múltiplo de 2π) se representa en la forma indicada en la figura, correspondiendo a la circunferencia del plano ζ la sinusoide α del plano $\log \zeta$. Las zonas rayadas se corresponden, pues el punto $\zeta = i$, se transforma en el plano $\log \zeta$ en el punto $i\frac{\pi}{2}$.

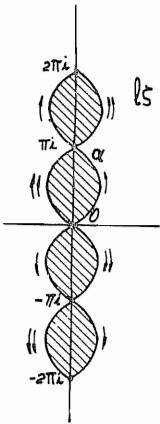


Fig. 2

Debemos pasar, por último, del plano $\log \zeta$ al plano z . Con

$$z = \frac{\log \zeta}{ki} = \frac{\log \zeta}{m! \pi i} = \frac{\varphi}{m! \pi} - i \frac{1}{m! \pi} \log \rho,$$

resulta para $m=3$, por ejemplo, las representación de la figura. Se corresponden, como es evidente, los interiores, exteriores y contornos entre sí. Tenemos así que la función $f_m(z)$ de primera clase toma tres valores

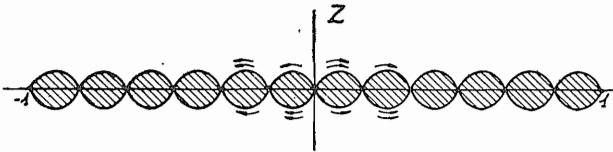


Fig. 3

$f_m(z) = 0$ dentro de los limbos rayados
 $= \infty$ fuera de los limbos rayados
 $= 1$ en los nodos y en un conjunto denso sobre
 el contorno (puntos correspondientes en el plano z a los pun-
 tos de la circunferencia $|w|=1$ de argumento racional res-
 pecto de π).

Finalmente, cuando $m \rightarrow \infty$, aumentan indefinidamente los
 nodos, conservándose los ya existentes, con lo cual el conjunto
 variable de limbos tiende a confundirse con el segmento $(-1, 1)$,
 quedando como conjunto interior a todos los recintos el de
 los puntos irracionales del intervalo $(-1, 1)$. Considerando
 las infinitas determinaciones de $\log \zeta$, resulta en conclusión que
 la función $D(z)$ vale 1 y 0 en los puntos del eje real e ∞
 en el resto del plano. La función real de dos valores se con-
 vierte, por tanto, en una de tres, resultado al que se puede lle-
 gar más brevemente sin necesidad del estudio que hemos hecho
 de las funciones $f_m(z)$, creyendo interpretar así el tema pro-
 puesto.

Félix Eduardo Herrera

Otra solución.

Si descomponemos $\cos z$ en su parte real e imaginaria ten-
 dremos, siendo $z = x + iy$,

$$\cos z = \cos x \operatorname{ch} y + i \operatorname{sen} x \operatorname{sh} y$$

y su módulo será

$$|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sh}^2 y}.$$

Teniendo en cuenta las fórmulas

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x, \quad \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{ch}^2 y - 1$$

obtenemos

$$|\cos z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1 + \cos^2 x}.$$

Aplicando esta fórmula a $m!\pi z$ tendremos

$$|(\cos m!\pi z)^{2n}| = (\operatorname{ch}^2 m!\pi y - 1 + \cos^2 m!\pi x)^n.$$

Como para todo $y \neq 0$ existe un m_0 tal que $\operatorname{ch}^2 m!\pi y > 2$, para todo $m > m_0$ será

$$|\cos m!\pi z| > 1$$

y por tanto, si $m > m_0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(\cos m!\pi z)^{2n}| = +\infty,$$

luego

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} |(\cos m!\pi z)^{2n}| = +\infty$$

o sea, que si $y \neq 0$, es decir, si z no es real, obtenemos el punto del infinito del plano complejo. Si $y = 0$, se obtiene la función de Dirichlet en el campo real.

Manuel Balanzat

TEMAS PROPUESTOS

39. — Determinar los órdenes de multiplicidad de los diversos puntos de la curva de Peano.

40. — Desarrollar en serie de potencias de x la función:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x \cdot \operatorname{sen} \alpha}{1 + x \cdot \cos \alpha}$$

y generalizar el método.

41. — Resolver la ecuación funcional:

$$\frac{f(x^m)}{f(x)} = m \cdot x^{m-1}.$$

SOBRE LA APLICACION DE LAS DIFERENCIAS FINITAS EN LA DERIVACION SUCESIVA DE LAS FUNCIONES COMPUESTAS

(Tema N° 28, Vol. VII, pág. 80)

El símbolo de las diferencias finitas puede aplicarse eficazmente en la derivación de las funciones compuestas y permitir una expresión explícita de las mismas. En efecto, si $\Delta p = 1$ se obtiene la identidad

$$\Delta^n \left(1 + \frac{k}{u}\right)^p = \left(\frac{k}{u}\right)^n \left(1 + \frac{k}{u}\right)^p \quad \text{de donde}$$

$$k^n = u^{n+p} (u+k)^{-p} \Delta^n (u+k)^p u^{-p}.$$

Si se aplica esta expresión en el desarrollo de Taylor de una función de dos variables (lo mismo si son más de dos)

$$f(u+k, v+k') = \sum_{r=0} \frac{1}{r!} \left(\frac{\partial f}{\partial u} k + \frac{\partial f}{\partial v} k' \right)^{(r)} \quad \text{se obtiene}$$

$$(u+k)^p (v+k')^q f(u+k, v+k') = \\ u^p v^q \sum_{r=0} \frac{1}{r!} \left(u \frac{\partial f}{\partial u} \Delta_1 + v \frac{\partial f}{\partial v} \Delta_2 \right)^{(r)}$$

donde, para las diferencias, los exponentes significan órdenes de diferencias y éstas se aplican a la expresión

$$u^{-p} v^{-q} (u+k)^p (v+k')^q$$

con $\Delta_1 p = \Delta_2 q = 1$.

Si ahora se supone que u y v son funciones de x e indicamos con D el símbolo de derivación respecto de esta última variable tendremos, aplicando nuevamente el desarrollo de Taylor e igualando los términos de igual potencia del incremento de la variable

$$D^n u^p v^q f(u, v) = u^p v^q \sum_{r=0}^n \frac{1}{r!} \left(u \frac{\partial f}{\partial u} \Lambda_1 + v \frac{\partial f}{\partial v} \Lambda_2 \right)^{(r)},$$

donde las diferencias se aplican ahora a $u^{-p} v^{-q} D^n u^p v^q$.

La expresión explícita será pues

$$D^n u^p v^q f(u, v) = u^p v^q \sum_{0 \leq r+s \leq n} \frac{u^r v^s}{r! s!} f_{r,s}^{(r+s)} \Lambda_1^r \Lambda_2^s u^{-p} v^{-q} D^n u^p v^q$$

donde, por comodidad
$$f_{r,s}^{(r+s)} = \frac{\partial^{r+s} f}{\partial u^r \partial v^s}.$$

La fórmula anterior es especialmente cómoda cuando u y v son funciones elementales, como lo muestran los siguientes ejemplos:

1º.) Si $u = x^h$ y $v = x^k$ con $hp + kq = m$

$$D^n x^m f(x^h, x^k) =$$

$$= x^{m-n} \sum_{0 \leq r+s \leq n} \frac{x^{hr+ks}}{r! s!} f_{r,s}^{(r+s)} \Lambda_1^r \Lambda_2^s m^{(n)} \text{ con } \Lambda_1 m = h \text{ y } \Lambda_2 m = k.$$

Si h y k toman los valores 1 y -1 respectivamente los símbolos de las diferencias pueden eliminarse. Así

$$D^n x^m f\left(x, \frac{1}{x}\right) =$$

$$= x^{m-n} \sum_{0 \leq r+s \leq n} \frac{x^{r-s}}{r! s!} f_{r,s}^{(r+s)} (-1)^s n^{(r+s)} (m-s)^{(n-r-s)}$$

donde $n^{(r)}$ indica la factorial de base n , grado r y diferencia 1.

2º.)
$$D^n x^m f(l, x) = \lim_{h \rightarrow 0} D^n x^m f\left(\frac{x^h - 1}{h}\right) =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} x^{m-n} \sum_{r=0}^n \frac{x^{hr}}{h^r r!} f^{(r)} \Lambda^r m^{(n)} = x^{m-n} \sum_{r=0}^n \frac{f^{(r)}}{r!} \frac{d^r m^{(n)}}{dm^n}$$

que puede escribirse

$$D^n x^m f(l.x) = x^{m-n} (f + m)^{(n)}$$

donde se sustituyen los exponentes de f por órdenes de derivación.

Esta fórmula, para $m=0$, está en CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Cours d'Analyse Infinitesimale* (5ª. ed.), tomo I, pág. 91.

Para $m=n$ y $f(l.x)=l.x$ se llega a este resultado curioso

$$D^n \frac{x^n l.x}{n!} = l.x + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Compruebe el lector la igualdad de este resultado con el que se obtiene aplicando al primer miembro la fórmula de Leibniz.

$$\begin{aligned} 3^o.) \quad D^n \arcsen x &= D^{n-1} (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{(r)} (-1)^r}{r!} (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}-r} x^{2r-n+1} \Delta^r 0^{(n-1)} \end{aligned}$$

con $\Delta 0 = 2$ de donde

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x^2}^{2n-1} D^n \arcsen x &= \\ &= \sum_{r \geq \frac{n-1}{2}}^{n-1} \binom{-\frac{1}{2}}{r} (-1)^r x^{2r+1-n} (1-x^2)^{n-r-1} \Delta^r 0^{(n-1)} \end{aligned}$$

pues $\Delta^r 0^{(n-1)} = 0$ para $r < \frac{n-1}{2}$.

$$\begin{aligned} 4^o.) \quad D^n \operatorname{arctg} x &= D^{n-1} (1 + x^2)^{-1} = \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\left(-1\right)^{(r)}}{r!} x^{2r+1-n} (1+x^2)^{-1-r} \Delta^r 0^{(n-1)} \end{aligned}$$

con $\Lambda_0 = 2$, de donde

$$(1+x^2)^n D^n \operatorname{arctg} x = \sum_{r \geq \frac{n-1}{2}}^{n-1} (-1)^r x^{2r+1-n} (1+x^2)^{n-r-1} \Lambda_0^{n-1}.$$

5º.) Con las exponenciales se obtienen resultados semejantes a los obtenidos con las funciones de potencia. Si $u = e^{hx}$ y $v = e^{kx}$ con $hp + kq = m$.

$$D^n e^{mx} f(e^{hx}, e^{kx}) = e^{mx} \sum_{0 \leq r+s \leq n} \frac{e^{(hr+ks)x}}{r! s!} f_{r,s}^{(r+s)} \Lambda_1^r \Lambda_2^s m^n$$

con $\Lambda_1 m = h$ y $\Lambda_2 m = k$.

Si $h + k = 0$

$$\Lambda_1^r \Lambda_2^s m^n = (-1)^s \Lambda^{r+s} (m - hs)^n \text{ con } \Lambda m = h.$$

6º.) Por lo tanto tendremos

$$\begin{aligned} D^n e^{mxi} \varphi(e^{hxi}, e^{-hxi}) &= \\ &= i^n \sum_{0 \leq r+s \leq n} \frac{\varphi_{r,s}^{(r+s)}}{r! s!} e^{[m+h(r-s)]xi} (-1)^s \Lambda^{r+s} (m - hs)^n \end{aligned}$$

$$\text{Si } \varphi(e^{hxi}, e^{-hxi}) = f(\operatorname{sen} hx); \quad \varphi_{r,s}^{(r+s)} = (-1)^s (2i)^{-r-s} f^{(r+s)}.$$

Sustituyendo, transformando e igualando, por ejemplo, las partes reales

$$\begin{aligned} D^n \cos mx f(\operatorname{sen} hx) &= \\ \sum_{r=0}^n \frac{f^{(r)}}{2^r r!} \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \cos[(m+h(r-2s))x + \frac{\pi}{2}(n-r)] \Lambda^r (m - hs)^n. \end{aligned}$$

Igualando las partes imaginarias se obtendrá la expresión para $\operatorname{sen} mx f(\operatorname{sen} hx)$ y en forma semejante para

$\cos mx f(\sin hx)$ y $\sin mx f(\cos hx)$ y para las expresiones correlativas con funciones hiperbólicas.

7º.) Por otra parte

$$D^n e^{mxi} \varphi(e^{2hxi}) = i^n \sum_{s=0}^n \frac{\varphi^{(s)}}{s!} e^{(m+2hs)xi} \Delta^s m^n \text{ con } \Delta m = 2h$$

y si

$$\varphi(e^{2hxi}) = F\left(\frac{1}{1+e^{2hxi}}\right) = f\left(\frac{2i}{1+e^{2hxi}} - i\right) = f(\operatorname{tg} hx)$$

$$\begin{aligned} \varphi^{(s)} &= \sum_{r=0}^s \frac{(-1)^r F^{(r)}}{r!} \frac{s(r-r)^{(s-r)}}{(1+e^{2hxi})^{s+r}} = \\ &= \frac{s!}{2^s} \sum_{r=0}^s \frac{f^{(r)}}{r!} \binom{-r}{s-r} \frac{e^{-hxi(s+r)}}{i^r \cos^{r+s} hx} \end{aligned}$$

por lo tanto, sustituyendo, transformando e igualando, por ejemplo, las partes reales

$$D^n \cos mx f(\operatorname{tg} hx) =$$

$$\sum_{r=0}^n \frac{f^{(r)}}{2^r r!} \sum_{s=0}^{n-r} \binom{-r}{s} \frac{\cos[(m+hs)x + \frac{\pi}{2}(n-r)]}{2^s \cos^{2r+s} hx} \Delta^{r+s} m^n$$

e igualmente se obtendrá, igualando las partes imaginarias, la expresión correspondiente a $\sin mx f(\operatorname{tg} hx)$ así como, en forma análoga, las expresiones correlativas correspondientes a las funciones hiperbólicas.

José Babini

UNA FORMULA INTEGRAL REFERENTE A FIGURAS CONVEXAS

(Tema N° 31, Vol. VII, pág. 109)

El tema propuesto con el n°. 31 en el vol. VII, pág. 109, de esta *Revista*, decía:

Se sabe que en la teoría de probabilidades geométricas la posición de una recta G del plano se determina por su distancia p a un punto fijo O y el ángulo φ que la normal a la recta desde O forma con una dirección fija. Además, para medir un conjunto de rectas se toma la integral doble de la expresión $dG = dp d\varphi$ que se llama *densidad de rectas*.

Sentado esto, consideremos una figura plana convexa K . Llamemos σ a la longitud de la cuerda que la recta G determina en ella y α_1, α_2 a los ángulos (menores que π) que G forma con las tangentes a K en los extremos de dicha cuerda. Suponiendo que el contorno de la figura K tiene en todo punto tangente determinada y que carece de segmentos rectilíneos, demostrar que

$$\int \frac{\sigma}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2} dG = \frac{1}{2} L^2 \quad (1)$$

siendo L la longitud de K y estando la integración extendida a todas las rectas G que cortan a K .

1. *Solución.* Tomando sobre el contorno de la figura convexa K un origen P de arcos, cada punto A del mismo estará determinado por la longitud s del arco PA . De esta manera toda recta G que corte a K estará determinada por las abscisas curvilíneas s_1, s_2 de sus puntos de intersección con el contorno. En las hipótesis del enunciado, de que el contorno de K no contiene segmentos de recta, la correspondencia entre las rectas G que cortan a K y los pares de puntos s_1, s_2 es biunívoca. Por consiguiente es posible expresar la densidad de rectas en función de los nuevos parámetros s_1, s_2 en lugar de los ordinarios p, φ .

Queremos, pues, expresar la forma diferencial $dG = dp d\varphi$ en las nuevas variables s_1, s_2 . Para ello procederemos en dos etapas. Supongamos primero que solamente queremos cambiar la variable p por la s_1 , conservando φ . Tomando un sistema de coordenadas rectangulares y llamando x_1, y_1 a las coordenadas del punto correspondiente a s_1 , las fórmulas de transformación son

$$\begin{aligned} p &= x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi \\ \varphi &= \varphi. \end{aligned} \quad (2)$$

De la primera se deduce

$$\frac{\partial p}{\partial s_1} = x'_1 \cos \varphi + y'_1 \sin \varphi$$

indicando los acentos derivados de las funciones $x_1 = x_1(s_1)$, $y_1 = y_1(s_1)$ (que son las ecuaciones paramétricas del contorno de K) respecto al arco s_1 . Llamando ϑ_1 al ángulo que forma la tangente a K en el punto s_1 con el eje x_1 , es $x'_1 = \cos \vartheta_1$, $y'_1 = \sin \vartheta_1$ y por tanto $\frac{\partial p}{\partial s_1} = \cos(\vartheta_1 - \varphi)$ y siendo α_1 , según el enunciado, el ángulo de la recta G con la tangente es $\vartheta_1 - \varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$ y por tanto $\frac{\partial p}{\partial s_1} = \sin \alpha_1$. Por consiguiente, el cambio de variables definido por (2) da

$$dG = dp d\varphi = \sin \alpha_1 ds_1 d\varphi. \quad (3)$$

Para introducir la abscisa curvilínea s_2 del segundo punto de intersección de G con el contorno de K , observemos que siendo x_2, y_2 las coordenadas de este segundo punto, las fórmulas de transformación serán

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctg \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} \\ s_1 &= s_1. \end{aligned} \quad (4)$$

De aquí

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s_2} = \frac{-(y_2 - y_1)x'_2 - (x_1 - x_2)y'_2}{(y_2 - y_1)^2 + (x_1 - x_2)^2}.$$

Siendo σ la cuerda que G determina en K , el denominador de esta expresión es σ^2 y en cuanto al numerador es igual al momento de la recta que pasa por el punto x_2, y_2 y cuyos cosenos directores son x'_2, y'_2 (o sea, la tangente al contorno de K en s_2) respecto al punto x_1, y_1 . Por tanto, siendo α_2 el ángulo que forma la tangente a K en s_2 con la recta G , es

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s_2} = \frac{\text{sen } \alpha_2}{\sigma}.$$

Con esto, de (3) y de (4) se deduce la nueva expresión buscada para la densidad de rectas del plano:

$$dG = \frac{\text{sen } \alpha_1 \text{ sen } \alpha_2}{\sigma} ds_1 ds_2. \quad (5)$$

Esta expresión se puede escribir

$$\frac{\sigma}{\text{sen } \alpha_1 \text{ sen } \alpha_2} dG = ds_1 ds_2 \quad (6)$$

e integrando sobre todas las rectas que cortan a K y teniendo en cuenta que al integrar s_1 y s_2 a toda la longitud L de K cada recta habrá venido contada dos veces, resulta la fórmula (1) del enunciado.

2. *Generalización.* El resultado anterior no es válido cuando el contorno de K contiene segmentos de recta. Ello es debido a que en tal caso los pares de puntos de un mismo segmento determinan la misma recta y por tanto la correspondencia entre las rectas y los pares s_1, s_2 no es biunívoca. Veamos cómo se puede proceder en este caso.

Supongamos que el contorno de K contenga n segmentos de recta de longitudes a_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$). La fórmula (6) será aplicable siempre y cuando s_1 y s_2 no correspondan a puntos de un mismo segmento. Por tanto, para calcular la integral del primer miembro, extendida a todas las rectas que cortan a K , deberemos integrar el segundo miembro a todas las posiciones de s_1 y s_2 que no pertenecen a un mismo segmento de recta del contorno. Por tanto, fijado s_1 , si pertenece a un

segmento de recta a_i , s_2 podrá variar a todo el contorno menos a este segmento, o sea la integral de ds_2 valdrá $L - a_i$. Si s_1 no pertenece a ningún segmento, sino a una parte curvilínea del contorno de K , s_2 podrá variar a todo el contorno y la integral de ds_2 valdrá L . Por tanto la integral del segundo miembro de (6) extendida a todos los valores de s_1, s_2 que no pertenecen a un mismo segmento del contorno de K , vale

$$\Sigma (L - a_i) a_i + (L - \Sigma a_i) L = L^2 - \Sigma a_i^2,$$

donde la sumatoria indica que hay que sumar a todos los segmentos a_i .

De esta manera, lo mismo que antes, cada recta viene contada dos veces, pues los puntos s_1, s_2 pueden permutarse entre sí sin cambiar la recta, y por tanto queda, en definitiva,

$$\int \frac{\sigma}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2} dG = \frac{1}{2} (L^2 - \Sigma a_i^2). \quad (7)$$

Esta fórmula generaliza la del enunciado del tema propuesto. La integración del primer miembro está extendida a todas las rectas que cortan a K y la fórmula es válida para cualquier figura convexa, siendo L su longitud total y a_i las longitudes de los segmentos rectilíneos de su contorno. Si el contorno no contiene segmentos rectilíneos queda la fórmula (1) del enunciado.

3. *Generalización al espacio.* En la teoría de Probabilidades Geométricas, una recta del espacio se determina por el elemento de área $d\Omega$ determinado sobre la esfera de radio unidad por un radio paralelo a la recta, más el elemento de área $dx dy$ correspondiente al punto de intersección de la recta por un plano normal⁽¹⁾. Es decir

$$dG = dx dy d\Omega. \quad (8)$$

Supongamos un cuerpo convexo K cuya superficie tenga plano tangente determinado en cada punto y no contenga caras planas. Sean df_1, df_2 los elementos de área de la superficie de K correspondientes a los puntos de su intersección con G ;

representaremos también por f_1, f_2 a estos puntos. Siendo $dx dy$ el elemento de área correspondiente a un plano normal a G y llamando α_1 al ángulo que forma G con la normal a la superficie de K en f_1 , es $dx dy = \cos \alpha_1 df_1$ y por tanto (8) se puede escribir en la forma conocida

$$dG = \cos \alpha_1 df_1 d\Omega. \quad (9)$$

Considerando la superficie esférica de centro el punto f_1 y radio la cuerda σ que la recta G determina en K , el elemento de área de la misma será $\sigma^2 d\Omega$ y al proyectar sobre ella el elemento df_2 , llamando α_2 al ángulo que forma la recta G con la normal a K en f_2 será $\sigma^2 d\Omega = \cos \alpha_2 df_2$. Despejando de aquí $d\Omega$ y sustituyendo en (9), queda

$$dG = \frac{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2}{\sigma^2} df_1 df_2. \quad (10)$$

Pasando el coeficiente del segundo miembro al primero e integrando a todas las rectas que cortan a K , se tiene, como fórmula análoga del espacio a la (1) del enunciado

$$\int \frac{\sigma^2}{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2} dG = \frac{1}{2} F^2 \quad (11)$$

siendo F el área de K .

Si la superficie de K tiene caras cuyas áreas sean a_i , procediendo exactamente igual que en el caso del plano, se obtiene

$$\int \frac{\sigma^2}{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2} dG = \frac{1}{2} (F^2 - \sum a_i^2),$$

extendida como siempre la integración a todas las rectas G que cortan al cuerpo convexo K y siendo σ la longitud de la cuerda que G determina en K y α_1, α_2 los ángulos que forma G con las normales a K en los puntos de intersección.

Luis A. Santaló

(1) Ver por ej. DELTHEIL *Probabilités géométriques*, Gauthier-Villars, París, 1926, pág. 90.

CUESTIONES DIDACTICAS Y METODOLOGICAS

SOBRE UN TEOREMA DE MÁXIMO Y MÍNIMO

Es conocida la dificultad con que suele tropezarse para demostrar rigurosamente el útil teorema de que un producto de factores reales de suma constante es máximo cuando todos los factores son iguales, si se quiere prescindir de los teoremas de existencia de máximos y mínimos de la Teoría de funciones reales de varias variables, aún no estudiadas en los cursos elementales.

Vamos aquí a recordar el elegante método seguido en esta cuestión por BARTRINA y CAPELLA, antiguo profesor del Instituto de 2ª enseñanza de Barcelona y contenido en su excelente "Aritmética universal", dando también una interesante aplicación del teorema para la introducción del número e .

El teorema mencionado es cierto para dos factores, pues basta considerar el producto

$$(m-x) \cdot (m+x) = m^2 - x^2$$

de suma constante $2m$ y que es máximo cuando $x = 0$.

Supuesto el teorema cierto para $n - 1$ factores, vamos a demostrarlo para n factores $abc \dots l$ de suma

$$a + b + c + \dots + l = s$$

y cuya media aritmética es $m = s/n$.

Si no son todos los factores iguales a m , habrá algún $a < m$ y algún otro $b > m$; entonces, siendo p y q números positivos pongamos $a = m - p$, $b = m + q$ y sustituyamos el producto $ab = (m - p)(m + q)$, cuyos factores suman $2m - p + q$, por el de igual suma

$$m(m - p + q) = ab + pq > ab,$$

es decir, será $abc \dots l < m(m - p + q) \dots l$, en que los n factores de ambos miembros tienen la misma suma s .

Por haber supuesto el teorema cierto para $n - 1$ factores, es

$$(m - p + q) c \dots l \leq m^{n-1}$$

por lo que podemos escribir para el producto de los n factores *desiguales* dados:

$$abc \dots l < m^n$$

como queríamos demostrar.

La aplicación de este teorema a demostrar la monotonía del par de sucesiones convergentes por las que puede introducirse el número e :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

es inmediata y sencillísima.

La desigualdad que establece es creciente la sucesión $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ puede escribirse

$$1. \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

en que tenemos $n + 1$ factores en cada miembro de suma $n + 2$, siendo iguales los del segundo.

La sucesión decreciente establecida por la desigualdad

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

puede escribirse, considerando los valores recíprocos :

$$1. \left(\frac{n-1}{n}\right)^n < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

en que tenemos $n + 1$ factores en cada miembro de suma n , siendo también iguales los del segundo.

Recordemos finalmente que ambas sucesiones son “contiguas” porque la diferencia

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \frac{1}{n} \leq \frac{4}{n}$$

puede hacerse tan pequeña como se quiera.

P. P. C.

QUE DEBE HACERSE PARA EL ADELANTO DE LA MATEMATICA EN LA ARGENTINA ⁽¹⁾

Publicamos a continuación, parcialmente, el *Comentario de los informes y resumen general*, redactado por el Doctor JUAN T. LEWIS, a raíz de las respuestas recibidas en la encuesta promovida por la Asociación Argentina para el progreso de las ciencias.

Al final hemos agregado el informe del profesor GEORGE D. BIRKHOFF, de la Universidad de Harvard, matemático de renombre mundial que hace poco nos visitara.

Preguntar a un hombre de ciencia cuál es la importancia de la ciencia que él cultiva, sería una ingenuidad tan grande como la de inquirir de un enamorado la belleza de la amada. La matemática con ese “algo de semi-juego y de semirreligiosidad” al decir de Spranger, recordado por Babini, ejerce esta atracción sobre sus cultores con singular poderío. De estos informes sobre “lo que debe hacerse para el adelanto de la matemática en la Argentina” se desprende la devoción que por ella tienen los matemáticos. Y es bueno haberles hecho esta pregunta, pues nadie mejor que quienes están imbuídos de un espíritu tan fervoroso para hallar los medios de difundir el amor a esta ciencia, de hacerla resplandecer con mayor brillo y de convertirla en una fuente más rica de nuevas verdades.

La matemática es en primer término un precioso instrumento, auxiliar indispensable en el estudio de los fenómenos de la naturaleza y de uso tan

⁽¹⁾ Ver este mismo volumen, p. 143.

corriente en la vida diaria que, parafraseando a C. Bernard, podría decirse que se hace matemática como se respira. La atracción que desde el Renacimiento ejerce la matemática sobre las ciencias naturales, queda bien de manifiesto en la célebre frase de Galileo sobre el objeto de la ciencia: Medirlo todo, hacerlo todo mensurable. El físico y el biólogo no quedan satisfechos, si es que alguna vez quedan satisfechos de sus aproximaciones, hasta que llegan a dar expresión matemática a las leyes que han descubierto. La aplicación de la matemática a la biología, a la medicina, a la industria, a toda la actividad moderna impregnada por la técnica es cada vez mayor. Su utilidad por eso se acrecienta cada día.

En un orden superior la matemática “cumple un papel organizador de la inteligencia, los hechos brutos están sin matemática, es ella quien les asigna un orden por el cual se nos presentan en su lugar” (B. LEVI), sería en nuestra mente el reflejo del “orden inmanente en la naturaleza”. Su práctica se convierte en un juego de gimnasia mental, que al igual que las demás ciencias adiestra en el razonamiento lógico y en la astracción, pero en un grado superior al de las ciencias naturales, al permitir una mayor liberación del mundo sensible.

Pero la misión suprema de la matemática al decir de Babini, “es la de poner de manifiesto la existencia de un mundo de objetos determinados, de metodología propia y dotados de caracteres específicos... mostrando los objetos matemáticos en su esencial idealidad, independientes del tiempo y desvinculados del mundo exterior, mostrando el quehacer matemático como un libre juego de la inteligencia y como un admirable ejemplo de convivencia posible en la estricta necesidad de las leyes y la libertad creadora, sin limitaciones impuestas por experimentos cruciales y sin los apremios de un afán utilitario; sin forzadas ataduras a otras disciplinas, pero sí armoniosamente entrelazadas con las restantes esferas de la realidad y las demás actividades humanas; así contribuye a la formación de esa emanación que llena y envuelve al espíritu, que es la cultura personal”. (J. Babini, *La matemática en la enseñanza media*.)

¿Cómo se podrá conseguir que en nuestro país la matemática desempeñe este triple papel de instrumento, de medio de educación intelectual y cultural? “Las medidas que han de adoptarse... han de ser por una parte aquellas medidas genéricas que propenden al desarrollo de la ciencia cualquiera sea el sector del saber a que pertenece; y por otra, ciertas medidas específicas que consideran la naturaleza propia de las matemáticas y las circunstancias especiales que favorecen su desarrollo en nuestro país” (Babini). Conviene analizar en primer término las medidas condicionadas por la naturaleza de la matemática.

“La investigación matemática es íntegramente intelectual” (Santaló), por esto el factor hombre es de importancia tan fundamental que casi se podría decir que es exclusiva. Para hacer matemática se necesitan pocos recursos materiales: “La matemática se realiza al través de actos de pensamientos. No importa para la misma, necesidad de montar institutos con costosos aparatos. Bibliotecas excelentes, material conveniente de revistas, y tiempo, con lápiz y papel y tiza, son los elementos indispensables” (Dieulefait).

La biblioteca es quizá el único instrumento, pero su importancia, si es posible, es aun mayor que en otras ramas de la ciencia. En parte esto se debe a la continuidad histórica de la matemática y al valor siempre actual de sus descubrimientos, mientras que en las ciencias naturales que progresan por aproximaciones, lo pasado va perdiendo ese valor que podríamos llamar viviente, para quedarse con sólo el valor de gesta. Los descubrimientos de los matemáticos de los siglos XVII y XVIII son tan útiles hoy como lo fueron en sus días prístinos, mientras que los de los biólogos o los químicos de las mismas épocas han sido superados. Puede hacerse fisiología ignorando a Harvey, pero no puede hacerse matemática sin conocer los problemas planteados y resueltos por Leibniz, Cauchy o Gauss, pues la historia de la matemática no se va a un pasado cada vez más remoto, queda siempre en el presente. Casi no hay uno de estos informes en el cual no se hace notar el papel de la biblioteca, de la necesidad de ponerlas “en condición de proveerse, no sólo de las publicaciones recientes de todo el mundo culto, sino de integrarse por medio de la adquisición de ese fondo admirable que representa el pensamiento de los siglos XVII, XVIII y XIX” (B. LEVI).

Por suerte “los libros y revistas no son muy numerosos y son fáciles de adquirir comparado con lo necesario para otras disciplinas como la historia, filología, etc.” (Santaló). En cada centro donde se hacen estudios matemáticos debería existir esa biblioteca matemática, no necesariamente reunida en un sitio, lo cual sin embargo no dejaría de tener ventajas, pero por lo menos accesible a todos los estudiosos, con catálogos completos y mantenidos al día, que permitan localizar fácilmente la existencia de una obra o de una revista, en una ciudad y sitio determinado.

La preponderante importancia del factor hombre, debido a la naturaleza puramente intelectual de la actividad matemática, hace que no cualquiera puede ser matemático, sólo quienes tengan “aptitud, deseo de saber y capacidad de esfuerzo” (Terradas), podrán llegar a serlo. Las condiciones “vocacionales” pasan así al primer plano al considerarse el porvenir de la matemática.

El reclutamiento de los matemáticos debe iniciarse en la enseñanza media. En nuestro país “la observación evidencia que tanto en el niño como en el hombre existe una marcada predisposición hostil y un terror enorme hacia el estudio de la matemática” (Cortés Pla). “La matemática suele ser, para los estudiantes secundarios, obstáculo difícil de vencer; la materia acaba por convertirse en pesadilla; el ciclo secundario se termina, por lo general, con una preparación matemática deficiente” (Bula). Este grave mal se debe en parte a una estructuración defectuosa de los programas y en parte a que no siempre los profesores de los colegios secundarios están capacitados para desempeñar su tarea.

El ingeniero Babini ha hecho un estudio prolijo del papel de la matemática en la educación media, con apreciaciones críticas sobre los programas; el ingeniero Cortés Pla propone se inicie un estudio completo y profundo de este tema; el ingeniero Dieulefait propone la organización de un “Consejo Asesor de la Enseñanza de la matemática... con dos miembros por cada Facultad en la cual existan centros de estudios matemáticos y que controlaría los planes generales de la enseñanza”. El doctor Gaspar propone a la Asocia-

ción que constituya un “Comité de Asesoramiento, coordinación y orientación de los estudios matemáticos en la Argentina” que tendría entre otras funciones la de “dar orientación uniforme a la enseñanza de la matemática en las escuelas medias... aconsejaría los planes de estudio más convenientes para cada tipo de escuela y los textos adecuados”. Es de primordial importancia tener una enseñanza adecuada de la matemática en el ciclo secundario, pues “la bondad de la misma puede tener repercusiones favorables en capas muy extensas de la población que irán a formar la clase dirigente de mañana” (Terracini). En cambio sus defectos pueden causar vicios de formación de muy difícil, si no imposible, corrección ulterior. Obtener programas estables, hechos por “profesores que hayan cumplido estudios superiores en la materia y tengan algunos años de experiencia en la docencia” (Bula), es el primer paso necesario para evitar que el primer contacto serio con la matemática produzca el rechazo casi general que hoy despierta, y para dar un fundamento inicial sólido y equilibrado a los conocimientos del futuro matemático. No debe olvidarse sin embargo que “todos los programas son buenos, si apenas son tolerables, con tal que no sean demasiado rígidos, para dejar una cierta libertad de interpretación a los buenos profesores; a los malos, ninguna prescripción programática, podrá volverlos buenos” (Levi).

El segundo paso, más importante aún que el primero, debe ser la designación de matemáticos auténticos para desempeñar las cátedras secundarias, pues “para despertar vocación por la matemática hay que saber enseñarla y para ello hay que entenderla. Para esto se necesita tener un conocimiento acabado y completo del campo que abarca, de las cuestiones de fundamento, de la evolución del pensamiento matemático, de la orientación de la ciencia de acuerdo con los modernos avances, de los problemas que aun esperan solución. Este conocimiento sólo están en condiciones de poseerlo, quienes habiendo cumplido un ciclo formativo de estudios especializados, se han dedicado al cultivo de la ciencia, y es a estas personas a quienes se deberá encomendar la importante y básica tarea de la enseñanza” (Bula).

“Para que el profesor secundario pueda cumplir con su tarea, es preciso que: a) tenga la mejor preparación específica posible; b) pueda perfeccionarse continuamente; c) no esté distraído, ni alejado de su tarea docente por otras ocupaciones o preocupaciones profesionales” (Terracini). La dedicación completa a la docencia en el ciclo secundario es preconizada por todos quienes se ocupan de este aspecto del problema (Cernuschi, Dieulefait, Durañona Vedia y Sagastume Berra, Levi, Terracini). Las ventajas para la enseñanza son obvias y algunas quedan puestas de manifiesto en los párrafos anteriores. Pero es preciso que las tareas docentes no sean excesivas, pues de otro modo no hay la posibilidad del perfeccionamiento continuo. “El ser matemático no es una cuestión “dada” para siempre, sino prevalentemente una función, cuyo mantenimiento debe cuidarse y asegurarse” (Dieulefait). Es difícil establecer un límite máximo de labor docente: Cernuschi propone 20 horas semanales, lo cual es probablemente excesivo, Dieulefait dos cátedras (12 horas). Durañona Vedia y Sagastume Berra sugieren la conveniencia de establecer un escalafón con disminución progresiva de horas de enseñanza y aumento de emolumentos. Lo importante es que al profesor de enseñanza se-

cundaria le quede tiempo para el estudio y la investigación científica, únicos medios de mantenerse activo y fresco y de no caer en una rutina que mata todo entusiasmo. No debe olvidarse que la adolescencia es la edad en que el entusiasmo y la depresión alternan, y que es fácil darle al joven el impulso iniciar que ha de conducirle quizás a grandes destinos, o anular para siempre, o cuando menos torcer o apocar, el desarrollo de una vocación incipiente.

.....

Es preciso tener bien presente que en la actualidad el país cuenta con un número muy reducido de matemáticos, y que es de primera necesidad el formarlos por la ampliación y perfeccionamiento de los cursos universitarios de matemática; “no es necesario para ello pensar en crear nuevas Facultades o escuelas especiales costosas” (Dieulefait). Pero es necesario organizar cursos en los cuales la matemática sea la primera consideración y el objeto primario la formación y de matemáticos capaces de pensar en forma original. Mientras no hayan en nuestras Universidades, Facultades de Ciencias dedicadas a cultivar disciplinas sin aplicación profesional inmediata y a preparar hombres de ciencia, estos cursos podrán estar en otras Facultades, como las de ingeniería o ciencias económicas, pero debe dárseles jerarquía y vida propias. Esto no quiere decir que deben ser aislados de otras ciencias, por el contrario conviene que vayan unidos a los de física, pues “no es posible y no es conveniente separar las dos ramas científicas que toda historia del pensamiento nos muestra que siempre han caminado juntas” (Levi). La vinculación con el estudio de ciencias concretas tienen ventajas, pues no sólo da conocimientos de mayor aplicación sino también que es beneficioso para el estudio de la matemática, pues si bien es cierto que “es muy raro que se haya inventado una teoría matemática para resolver determinado problema físico o técnico planteado *a priori*” (Durañona Vedia y Sagastume Berra), “la matemática progresará en forma más rápida y vigorosa cuando se trate de fomentar por igual los estudios de matemática pura que los de matemática aplicada” (Cernuschi).

Los profesores universitarios “deben ser investigadores” (Terracini). Dieulefait, Levi, Terracini y otros hacen notar las ventajas recíprocas que hay para el investigador y para el alumno en esta asociación de la labor docente y de investigación original. En la docencia el matemático halla esa “rutina” que lo mantiene constantemente activo, como la recolección de hechos mantiene activo al que cultiva las ciencias naturales; pues no debe olvidarse que la producción matemática es eminentemente discontinua, dada su naturaleza puramente intelectual, como lo hacen notar Levi y Santaló. Por su misma naturaleza la matemática es absorbente y requiere una dedicación completa para poder florecer. De ahí que el acuerdo sea unánime en que el profesor de matemática, tanto universitario como secundario, sea remunerado en forma adecuada para no dedicarse a otra cosa que a su tarea científica y docente. Esta remuneración debe ser suficiente para permitirle vivir sin preocupaciones de índole económica, pero no son necesarios sueldos principeseos, pues “el hombre de ciencia sabe que el estudio y la cultura son en primer lugar una

satisfacción moral, a la cual se puede sacrificar alguna ventaja material” (Levi).

La cátedra universitaria debe ser un centro de investigación científica, de otro modo no puede desempeñar bien su papel docente de mayor trascendencia, el de despertar vocación y dar los medios intelectuales para que se prosiga la tarea de ensanchar los límites de la verdad y transmitir ésta a las generaciones futuras. El profesor universitario necesita tiempo y tranquilidad para dedicar su pensamiento a la búsqueda original, no debe estar recargado de tareas docentes. “En ninguna circunstancia deberá permitirse que un profesor de una universidad lo sea al mismo tiempo de otra”, pues ello no sólo redundaría en perjuicio de su propia eficacia, sino que “impide la formación de otros profesores dedicados a la misma materia o materias afines, y la beneficiosa emulación que de ello resulta” (Guitarte). Es también perniciosa la costumbre de acumular cátedras aun dentro de una misma universidad (Guitarte), pues, se multiplican las tareas docentes y tiende a convertirse en rutinaria la labor del profesor.

Los profesores tienen la necesidad de renovarse intelectualmente para evitar el decaimiento del entusiasmo. La investigación original es el más eficaz de los medios profilácticos contra la “fossilización precoz”, pero hay otro, muy útil, puesto en práctica en otros países: los viajes al extranjero. “Debe darse a los profesores ayuda y facilidades para que puedan cada 5 o 6 años visitar universidades e institutos del extranjero, estableciendo un contacto, que es indispensable, con otros maestros” (Guitarte).

La necesidad de que el profesor tenga tiempo para hacer investigaciones es una primera razón para asociarle auxiliares en la enseñanza, dedicados también por completo a cultivar su ciencia. Pero no es la única razón: en esos auxiliares están los profesores, investigadores y expertos del futuro. La formación de un hombre de ciencia o de un especialista no ha concluido con la graduación universitaria, puede decirse que con ella recién empieza la etapa final y definitiva.

Para despertar la afición a la matemática que ha de llevar a la especialización, se ha propuesto la publicación de revistas de divulgación dirigidas a los estudiantes secundarios y universitarios en las cuales “se expondrán teorías en forma elemental, se plantearán cuestiones y problemas, proponiéndose temas sencillos de investigación” (Gaspar), se añadirán notas biográficas y todo cuanto atraiga la atención y el interés por la matemática. Tal parece ser en gran parte el objeto de “*Mathematicae notae*”, según el profesor Levi. Igual resultado se obtendrá por medio de concursos, con premios de libros de matemáticas, becas o ayudantías en institutos de matemáticas.

El medio más eficaz será la creación de becas o de cargos rentados en los institutos de matemática para que, graduados que hayan demostrado tener aptitudes y vocación puedan proseguir sus estudios (Bula, Durañona Vedia y Sagastume Berra, Gaspar, Guitarte, Levi, Terracini, etc.). Las becas al exterior, para que jóvenes que ya han demostrado su capacidad puedan completar su formación en centros de estudios del extranjero, tienen en esta ciencia como en las demás una importancia grande y numerosos informantes así

lo han propuesto. No debe olvidarse sin embargo, que las becas son tan sólo para períodos breves y que a su regreso estos jóvenes deben tener un puesto de trabajo adecuadamente remunerado para proseguir su actividad, de ahí la importancia de expandir su utilización como auxiliares de las demás ciencias, de la economía, de la industria, etc. y de asegurarles a ellos las cátedras de matemática de la enseñanza secundaria.

Se puede estimular la producción científica por medio de premios pero no conviene otorgarlos “antes de que haya transcurrido un intervalo suficiente como para que el trabajo publicado haya podido ser conocido por muchos y en otros países” (Guitarte). De ese modo se podrá apreciar mejor el verdadero valor del trabajo.

.....

El informe del profesor BIRKHOFF, traducido, dice así:

Queridos colegas:

Tengo el agrado de enviarles mi respuesta a su importante pregunta: “Qué debe hacerse para el adelanto de la Matemática en la Argentina”, que me formula en su amable carta del 30 de junio.

A mi juicio, *lo más vital en este momento*, es dar una oportunidad razonable a los jóvenes que verdaderamente prometen, para que puedan continuar su trabajo matemático. Tales jóvenes deben conseguir a los 25 años de edad una remuneración que les permita subvenir a sus gastos, sin tener más de 10 ó 12 horas de enseñanza por semana, y habiéndola obtenido, no permitirles que aumenten sus salarios realizando ninguna otra tarea. A la edad de 30 años deben tener asegurada una posición estable en la comunidad, en una ocupación “*full-time*”, si han demostrado habilidad para investigar y alcanzar resultados.

Creo que está en el mayor interés de cualquiera universidad o de cualquier gobierno hacer todo lo posible para ayudar en esta forma a los jóvenes matemáticos verdaderamente dotados. Estos jóvenes se pueden encontrar sin dificultad y es preciso que reciban todo el apoyo posible.

Sin duda, observaciones semejantes pueden aplicarse a otros campos de la ciencia, pero actualmente me parecen especialmente adecuadas a la matemática, porque ella está en una situación particularmente promisoría en este país.

Creo que el adelanto actual logrado en la Argentina demuestra que en este país incumbe a las universidades mismas la responsabilidad de estimular y desarrollar a los hombres jóvenes capaces para que realicen una carrera científica, lo que se conseguirá dándoles mejores condiciones para el trabajo que han elegido. Además, me parece que sería muy importante que se constituyera una Comisión nacional, de la más alta calidad científica, autorizada para conceder becas y estipendios adicionales a los hombres sobresalientes que representan promesas para apoyarlos durante sus años más difíciles, a fin de los cuales las universidades estarían capacitadas para reconocer su trabajo por medio de apropiadas posiciones “*full-time*”.

(Fdo.): GEORGE D. BIRKHOFF.

CRONICA

CONFERENCIAS DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

Durante el mes de octubre próximo pasado se realizaron tres conferencias organizadas por la Unión Matemática Argentina.

La primera de ellas tuvo lugar el 23 de octubre a cargo del profesor brasileño MELO E. SOUZA, de la Universidad del Brasil, sobre el tema: *Funciones moduladas. Matemáticos brasileños*. En esa conferencia, realizada en el Seminario Matemático de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Buenos Aires, el conferenciante expuso el comportamiento de algunas curvas, al sustituir en sus respectivas ecuaciones cartesianas, las variables, por sus módulos en primer grado; obtiene en todos los casos rectas, cuya disposición guarda un notable parecido con la curva de partida. Luego pasa a estudiar la derivada del módulo de una función. Por fin refiere como ha obtenido las ecuaciones de muchas letras del alfabeto, de algunos poliedros y la ecuación de la cruz. Durante la segunda parte de su conferencia expuso, en amena charla, interesantes detalles sobre la vida de los más notables matemáticos brasileños, deteniéndose especialmente en los biografías de los profesores GOMES SOUZA y AMOROSO COSTA.

La segunda conferencia, organizada en colaboración con la Asociación Argentina de Electrotécnicos, tuvo lugar el viernes 30 de octubre en el salón de actos de la Transradio Internacional y estuvo a cargo del doctor GUILLERMO KNIE, quien disertó sobre el tema: *El spin electrónico y el principio de exclusión*. Transcribimos a continuación el resumen de esa conferencia. La duplicidad de los términos energéticos de los álcalis ha inducido a los físicos a atribuir al electrón un momento mecánico propio de rotación, llamado spin y por consiguiente un momento magnético propio. Este es capaz de dos orientaciones en un campo magnético, paralela o antiparalela. El spin explica también el efecto anormal de ZEEMANN, es decir el desdoblamiento de las líneas espectrales en un campo magnético débil y el agrupamiento de los electrones atómicos en capas concéntricas, siempre que se admita el principio de exclusión. Este afirma que en un sistema no puede haber dos electrones en el mismo estado, es decir, caracterizado por los mismos cuatro números cuánticos. El principio de exclusión supone la existencia de una interacción entre los electrones de una naturaleza desconocida hasta ahora. El spin causa el desdoblamiento de la función ondulatoria en dos spinores. Estos se transforman según una representación bidimensional del grupo de rotaciones y representan las magnitudes físicas con la ley de transformación más sencilla. A ellas se pueden reducir todos los vectores y tensores de rango más alto.

La tercera conferencia estuvo a cargo del profesor BOGUMIL JASINOWSKY, de la Universidad de Wilno, y se realizó el sábado 31 de octubre en el Seminario Matemático de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Buenos Aires, versando sobre el tema: *El sentido de la matemática griega y su tránsito hacia la moderna*. Damos a continuación una síntesis de esa conferencia. A pesar de los innumerables estudios dedicados a la historia de la ciencia antigua, la cuestión de su esencia e índole verdadera en relación con la ciencia moderna, no fué todavía debidamente aclarada. Ahora bien, los caracteres fundamentales de la ciencia antigua no se pueden comprender

sino en función de una actitud cognoscitiva que le es peculiar y en la que se diferencia de la ciencia moderna. De la comparación con ésta se desprenden algunos rasgos fundamentales de la matemática griega del período clásico, como la preponderancia del punto de vista geométrico sobre el aritmético, el desarrollo de la estática y ausencia de una ciencia del movimiento con su consecuencia, que culminó en la inaplicabilidad de la matemática a la investigación de la naturaleza. Todavía, aquellos rasgos que son otras tantas limitaciones de la matemática griega de la época clásica, tienen su contrapeso en la tan admirable geometría, esa primera realización del ideal de una ciencia sistemático-demostrativa en la historia del pensamiento humano. Una investigación profundizada de la matemática clásica conduce a un resultado de importancia transcendental, presentándose los rasgos mencionados como la realización de cierta estructura racional, la cual no deja de reflejarse también en las particularidades de los sistemas filosóficos clásicos. Cabe subrayar, en la estructura y formación de la especulación de índole matemática, la influencia de dos corrientes distintas, que dan origen a sendos elementos constructivos de la matemática, elemento pitagórico, el uno, y sistemático-demostrativo (o apodeiético), el otro, expresándose en este último la actitud cognoscitiva de la escuela filosófica de Elea. El aspecto estático del Universo —aquel objeto privilegiado de la ciencia griega— junto con el desarrollo del aspecto sintético-progresivo del pensamiento en forma de una concatenación sistemática de las proposiciones matemáticas, está indicado sobre todo en la actitud cognoscitiva eleática, generadora también de los principios lógicos de identidad y de contradicción, portadores de aquella concatenación en el sentido formal. Por esta razón las llamadas paradojas de ZENON DE ELEA, lejos de tener una influencia decisiva sobre la evolución ulterior de la matemática antigua y causar la deficiencia de investigaciones del orden infinitesimal, no es sino la realización íntima de la índole matemática del período clásico. Así, lo general, presentándose al mismo tiempo como lo racional y lo estable, se hizo el objeto adecuado de la matemática y física clásica, debieron pasar a ocupar el segundo lugar. Así también se hace comprensible la deficiencia principal de la matemática clásica, es decir su imposibilidad de abarcar el *proceso* y manejar matemáticamente la variación, especialmente la variabilidad continua. Pero la trama íntima del pensamiento matemático se había trocado durante el período helenístico, y los elementos pitagóricos, todavía transformados y asociados al heracliteísmo, volvieron a ocupar el primer lugar: a ellos se debe la fundación del álgebra y las primeras anticipaciones de las teorías del continuo y del infinito, como también de la ley de inercia en la física teórica. Ahora bien, todos estos cambios en la actitud cognoscitiva quedan ligados con una subestructura del orden axiológico, distinta en el período clásico y helenístico. Es así que nuestra ciencia sobre la ciencia griega, es decir la ciencia cuyo objeto es la ciencia griega, deja de ser una repetición o una asimilación reproductiva de su contenido (lo que no sería mas que un género de iteración), pero se constituye en una ciencia de orden superior, donde al lado del aspecto de *deducibilidad* axiomática surge el aspecto nuevo de *reducibilidad al orden axiológico*, el cual aspecto, integrándose al primero, al mismo tiempo lo supera y se le sobrepone.

VARIA

14. *Psicología del descubrimiento*

Es bien conocido que la mayoría de los descubrimientos, así como las soluciones de muchos problemas intrincados, aparecen en la mente de manera instantánea y en circunstancias especiales e imprevistas.

La historia de la Ciencia abunda en ejemplos, muchos de ellos sin duda fantásticos, que ilustran la espontaneidad de la inspiración: Arquímedes descubriendo su principio famoso mientras estaba en el baño, Newton descubriendo el principio de la gravitación viendo caer una manzana, Watt descubriendo el principio de la máquina de vapor mientras vigilaba el agua que calentaba para el té, Poincaré descubriendo las funciones fuchsianas en el momento de subir a un ómnibus, Gauss descubriendo la ley de inducción a las 7 de la mañana, antes de levantarse. El descubrimiento de los cuaterniones por Hamilton es descrito por el mismo con las siguientes palabras: "Ellos aparecieron a la luz de un golpe y de manera completa el 16 de octubre de 1843, mientras paseaba con Lady Hamilton camino de Dublin. Es decir, yo sentí entonces como se cerraba el circuito galvánico del pensamiento y las chispas que saltaron de él fueron las ecuaciones fundamentales entre I, J, K , exactamente igual como las he usado desde entonces. En el mismo momento saqué un cuaderno de notas, que todavía existe, e hice una anotación cuyo valor desde aquel instante comprendí que sería suficiente como para absorber mi trabajo de 10 o tal vez de 15 años sucesivos. Pero es justo decir que ello fué debido a que yo sentí en aquel momento la solución de un problema, la satisfacción de una necesidad intelectual, que me había estado obsesionando por lo menos desde hacía 15 años".

Helmholtz también nos ha dado una clara descripción de sus propios métodos de descubrimiento: "Muy a menudo la inspiración está escondida quieta en nuestra mente y de primera impresión no se aprecia su importancia; algunas veces ocurre que circunstancias fortuitas nos ayudan a conocer cuando y bajo qué condiciones se presenta, pero otras muchas veces aparece repentinamente, sin esfuerzo, como un relámpago del pensamiento. En lo que personalmente he podido experimentar, ella nunca aparece en un cerebro fatigado ni en la mesa de trabajo. Yo debo primero haber dado vueltas a mi problema una y otra vez en todas direcciones hasta poder ver sus vueltas y recodos por los ojos de la mente y pasear por ellos libremente antes de escribir nada. Sin embargo nunca es posible llegar a este punto sin un largo período de trabajo preliminar: únicamente entonces, cuando la consiguiente fatiga ha sido mitigada y tras unas horas de pacífica tranquilidad, es cuando la inspiración nos recompensa. A menudo ella aparece por la mañana en el momento de despertarse... Ella venía más prontamente, como experimenté en Heidelberg, cuando iba a trepar por las arboladas colinas en días soleados. La más pequeña traza de alcohol, sin embargo, bastaba para hacerla desaparecer".

De "*An introduction to the Philosophy of Science*"
de A. Cornelius Benjamin, New York, 1937; pág. 176.

VOLUMEN III (Fascículos separados; 1938-1939)

- Nº 1. — GINO LORIA. *Le Matematiche in Ispagna e in Argentina.*
 » 2. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre las series de funciones de Hermite.*
 » 3. — MICHEL PETROVICH. *Remarques arithmétiques sur une équation différentielle du premier ordre.*
 » 4. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Una nueva demostración del teorema límite del Cálculo de Probabilidades. Condiciones necesarias y suficientes para que una función sea integral de Laplace.*
 » 5. — NIKOLA OBRÉCHKOFF. *Sur la sommation absolue par la transformation d'Euler des séries divergentes.*
 » 6. — RICARDO SAN JUAN. *Derivación e integración de series asintóticas.*
 » 7. — Resolución adoptada por la U. M. A. en la cuestión promovida por el Sr. Carlos Biggeri.

VOLUMEN IV (Fascículo separado; 1939)

- Nº 8. — F. AMODEO. *Origen y desarrollo de la Geometría Proyectiva.*

VOLUMEN V (Fascículos separados; 1940)

- Nº 9. — CLOTILDE A. BULA. *Teoría y cálculo de los momentos dobles.*
 » 10. — COTILDE A. BULA. *Cálculo de superficies de frecuencia.*

VOLUMEN VI (Fascículos separados; 1940-1942)

- Nº 11. — R. FRUCHT. *Zur Geometria auf einer Fläche mit indefiniter Metrik (Sobre la Geometría de una superficie con métrica indefinida).*
 » 12. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre una memoria del Prof. J. C. Vignaux.*
 » 13. — F. TORANZOS. *Sobre las singularidades de las curvas de Jordan.*
 » 14. — M. BALANZAT. *Fórmulas integrales de la intersección de conjuntos.*
 » 15. — G. KNIE. *El problema de varios electrones en la mecánica cuantista.*
 » 16. — A. TERRACINI. *Sobre la existencia de superficies cuyas líneas principales son dadas.*
 » 17. — L. A. SANTALÓ. *Valor medio del número de partes en que una figura convexa es dividida por n rectas arbitrarias.*
 » 18. — A. WINTNER. *On the iteration of distribution functions in the calculus of probability (Sobre la iteración de funciones de distribución en el cálculo de probabilidades).*
 » 19. — E. FERRARI. *Sobre la paradoja de Bertrand.*
 » 20. — J. BABINI. *Sobre algunas propiedades de las derivadas y ciertas primitivas de los polinomios de Legendre.*
 » 21. — R. SAN JUAN. *Un algoritmo de sumación de series divergentes.*
 » 22. — A. TERRACINI. *Sobre algunos lugares geométricos.*
 » 23. — V. y A. FRAILE y C. CRESPO. *El lugar geométrico y lugares de puntos áreas en el plano.*
 » 24. — R. FRUCHT. *Coronas de grupos y sus subgrupos, con una aplicación a los determinantes.*
 » 25. — E. R. RAIMONDI. *Un problema de probabilidades geométricas sobre los conjuntos de triángulos.*

VOLUMEN VII (1940-1941)

Notas y memorias de J. BABINI, H. E. CALCAGNO, E. FERRARI, V. y A. FRAILE y C. CRESPO, G. KNIE, J. J. REBELLA, S. RIOS, R. SAN JUAN, L. A. SANTALÓ, A. TERRACINI.

Soluciones de temas propuestos. Bibliografía, Crónica, etc.

En 1942 la U. M. A. ha iniciado la publicación de una nueva serie de "Memorias y monografías" de las que han aparecido hasta ahora las siguientes:

- Nº 1. — GUILLERMO KNIE, *Mecánica ondulatoria en el espacio curvo* (1 volumen de 152 páginas).

Además han aparecido tres cuadernos de *Miscelánea matemática*.

S U M A R I O

	Pág.
Sobre una propiedad de las secciones cónicas verdaderas con centro, por W. Mächler	145
Representación gráfica de las raíces imaginarias de la ecuación de se- gundo grado, por Juan José Rebella	150
Sobre la resolución gráfica de la ecuación cúbica, por J. R. P. y J. B.	152
Cuestiones elementales. 15-16	154
Extensión de la función de Dirichlet al campo complejo (Tema N° 15), por F. E. Herrera y por M. Balanzat	155
Temas propuestos. 39-41	159
Sobre la aplicación de las diferencias finitas en la derivación sucesiva de las funciones compuestas (Tema N° 28), por J. Babini	160
Una fórmula integral referente a figuras convexas (Tema N° 31), por L. A. Santaló	165
Cuestiones didácticas y metodológicas. Sobre un teorema de máximo y mínimo, por P. P. C.	170
Qué debe hacerse para el adelanto de la matemática en la Argentina. Comentario de los informes y resumen general, por J. T. Lewis. Informe del profesor Birkhoff	171
<i>Crónica.</i> — Conferencias de la Unión Matemática Argentina. Funciones moduladas. Matemáticos brasileños, por M. E. Souza. El spin elec- trónico y el principio de exclusión, por G. Knie. El sentido de la matemática griega y su tránsito hacia la moderna, por B. Jasinowsky	178
Varia. 14	180

Contribuyen especialmente al sostenimiento de las publicaciones de
la UNION MATEMATICA ARGENTINA los siguientes

MIEMBROS PROTECTORES

COMPANÍA INDUSTRIAL DEL NORTE DE SANTA FE. INGENIO AZUCARERO "ARNO"
(Villa Ocampo. F. C. S. F.). — JULIO REY PASTOR (Buenos Aires). — T. G.
BERLENGIERI y CIA. (Rosario). — TRICERRI HNOS. (Rosario). — MANUEL GUI-
TARTE (Buenos Aires). — CLOTILDE A. BULA (Rosario). — ELBA R. RAIMONDI
(Buenos Aires). — FERNANDO L. GASPÁR (Rosario). — PÓ M. OLCESE (Rosa-
rio). — CARLOS ISELLA (Rosario). — PEDRO J. TRICERRI (Rosario).