Volumen IX Número 2

REVISTA

DE LA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

(MIEMBRO DEL PATRONATO DE LA MATHEMATICAL REVIEWS)

□

MIEMBROS TITULARES DE LA U. M. A.

□

BUENOS AIRES
1943

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Para ingresar como miembro titular de la Unión Matemática Argentina, es necesaria la presentación del solicitante por dos socios fundadores, la admisión por la Junta, y el pago de una cuota de \$ 5. — m/n. mensuales o de \$ 50.— anuales.

Para ingresar como miembro adherente (con derecho a la Revista y a las Memorias en fascículos separados) es necesario el pago de una cuota de \$ 10.— anuales. Los pagos deberán efectuarse por cheque, giro u otro medio libre de gastos, a la orden de la Tesorera, Prof. Clotilde A. Bula, Moreno 364, Rosario.

Los señores miembros adherentes domiciliados en la Ciudad de Buenos Aires podrán, si lo prefieren, efectuar su pago en doce cuotas mensuales de \$ 1.00 m/n. cada una, que serán cobradas a domicilio.

Por ser la U. M. A. miembro del patronato de la Mathematical Reviews (sponsoring member), los socios de la U. M. A. tienen derecho a suscribirse a esa importante revista de bibliografía y crítica con 50 % de rebaja sobre el precio de suscripción que es de 13 dólares por año. Los socios de la U. M. A. pagarán por tanto sólo 6.50 dólares por año.

Los trabajos originales enviados para su publicación serán previamente analizados por un ponente, quien emitirá dictamen acerca de la novedad y corrección de sus resultados.

La impresión de las tiradas aparte, y las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

Abonnement annuel à l'etranger: 4.00 dollars (Etats-Unis).

Prière d'adresser toute la correspondance scientifique et administrative à l'adresse ci-dessous:

SR. SECRETARIO DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

PROF. FERNANDO L. GASPAR

PERÚ 222, Buenos Aires (REP. ARGENTINA)

PUBLICACIONES DE LA U. M. A.

(*Sigue en la contratapa*)

UN PROBLEMA DE ANALISIS INDETERMINADO

por Sergio Sispánov

Sea la ecuación indeterminada

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3\,x\,y\,z = k\,t^3 .$$

con cuatro incógnitas, siendo k un número entero arbitrario.

Dejando a un lado la solución trivial

$$x = y = z = 0, \qquad t = 0,$$

nos ocuparemos de las soluciones en que una de las incógnitas, por ejemplo, z es distinta de 0. Dividiendo por z^3 la ecuación propuesta y haciendo

$$\frac{x}{z} = \xi, \quad \frac{y}{z} = \eta, \quad \frac{t}{z} = w, \tag{1}$$

llegamos a la relación

$$F = \xi^3 + \eta^3 + 1 - 3\,\xi\,\eta - k\,w^3 = 0. \tag{2}$$

Las fórmulas (1) nos indican que a los valores enteros de las incógnitas x, y, z, t les corresponden valores racionales de las incógnitas ξ, η, w, y viceversa.

En efecto, conociendo ciertos valores racionales de ξ, η, w podríamos reducirlos al mismo denominador e igualar z a dicho denominador multiplicado por un número entero arbitrario h. Los valores de x, y, t serán iguales a los numeradores respectivos multiplicados por el mismo número h.

De tal modo el problema queda reducido a la determinación de todas las soluciones racionales de la ecuación (2) que, representada geométricamente, corresponde a una superficie de 3er. orden con el punto múltiple 0_1 ($\xi = 1$, $\eta = 1$, $w = 0$).

Para comprobar esto basta considerar las derivadas

$$F'_\xi = 3\,(\xi^2 - \eta), \qquad F'_\eta = 3\,(\eta^2 - \xi), \qquad F'_w = -3\,k\,w^2$$

que para las coordenadas del punto 0_1 arriba indicadas se anulan simultáneamente con la función F.

Si se traslada el sistema coordenado, tomando el punto 0_1 por origen y cambiando en 180° la dirección de los ejes de las abscisas y de las ordenadas, las fórmulas de paso serán

$$\xi = 1 - u, \qquad \eta = 1 - v \tag{3}$$

y la ecuación (2) en el nuevo sistema $0_1\,U\,V\,W_1$ toma la forma

$$u^3 + v^3 + k\,w^3 = 3\,(u^2 - u\,v + v^2). \tag{4}$$

Tracemos ahora el rayo $0_1\,M$

$$u = \alpha\,w, \qquad v = \beta\,w \tag{5}$$

que sale del origen 0_1 y corta a la superficie (4) en un punto M.

Sustituyendo en la ecuación (4) u y v por sus expresiones (5) y simplificando por w^2, encontramos la aplicada

$$w = \frac{3\,(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)}{\alpha^3 + \beta^3 + k} \tag{6}$$

del punto M.

Las demás coordenadas del mismo punto se hallarán por las fórmulas (5) reemplazando en ellas w por su expresión re-cién obtenida y tendrán la forma

$$u = \frac{3\,\alpha\,(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)}{\alpha^3 + \beta^3 + k}, \qquad v = \frac{3\,\beta\,(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)}{\alpha^3 + \beta^3 + k}. \tag{7}$$

Por las relaciones (5) vemos que a los valores racionales de las coordenadas u, v, w les corresponden valores racionales de los coeficientes angulares α y β. Por el contrario, las fórmulas (6) y (7) nos indican que a los valores racionales de α y β les corresponden valores racionales de u, v, w.

De manera que todos los puntos racionales M de la superficie (4) se encontrarán atribuyendo a los coeficientes α y β diferentes valores racionales.

Para hallar las coordenadas antiguas de los puntos M servirán las relaciones

$$\xi = \frac{(\alpha^3 + \beta^3 + k) - 3\,\alpha\,(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)}{\alpha^3 + \beta^3 + k} = \frac{(\beta - \alpha)^3 - \alpha^3 + k}{\alpha^3 + \beta^3 + k}$$

$$\eta = \frac{(\alpha^3 + \beta^3 + k) - 3\,\beta\,(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)}{\alpha^3 + \beta^3 + k} = \frac{(\alpha - \beta)^3 - \beta^3 + k}{\alpha^3 + \beta^3 + k}$$

que se deducen de las fórmulas (3) sustituyendo u y v por sus iguales (7).

Si las expresiones recién halladas para ξ, η, y la expresión (6) para w se introducen en las relaciones (1), se llega a las siguientes igualdades

$$\frac{x}{z}=\frac{(\beta-\alpha)^3-\alpha^3+k}{\alpha^3+\beta^3+k}$$

$$\frac{y}{z}=\frac{(\alpha-\beta)^3-\beta^3+k}{\alpha^3+\beta^3+k}$$

$$\frac{t}{z}=\frac{3\,(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)}{\alpha^3+\beta^3+k}.$$

Supongamos ahora que los números racionales α y β, después de ser reducidos a mismo denominador, tienen la forma

$$\alpha=\frac{a}{c}, \qquad \beta=\frac{b}{c},$$

siendo a, b, c números enteros sin divisor común (tomándolos de dos en dos pueden no ser primos entre sí).

Reemplazando α y β por sus iguales en las fórmulas anteriores y multiplicando por c^3 los numeradores y los denominadores en los segundos miembros, encontramos

$$\frac{x}{z}=\frac{X}{Z}, \quad \frac{y}{z}=\frac{Y}{Z}, \quad \frac{t}{z}=\frac{T}{Z},$$

en donde

$$\left\{\begin{aligned} X &= (b-a)^3-a^3+k\,c^3 \\ Y &= (a-b)^3-b^3+k\,c^3 \\ Z &= a^3+b^3+k\,c^3 \\ T &= 3\,c\,(a^2-a\,b+b^2) \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Las relaciones obtenidas pueden representarse más cómodamente en forma de una serie de razones iguales del siguiente modo

$$\frac{x}{X}=\frac{y}{Y}=\frac{z}{Z}=\frac{t}{T}=\frac{h}{d},$$

siendo $\frac{h}{d}$ una fracción a que son iguales las cuatro razones y cuyos términos h y d son primos entre sí.

De la serie de razones iguales se deduce que

$$x=h\,.\frac{X}{d},\quad y=h\,.\frac{Y}{d},\quad z=h\,.\frac{Z}{d},\quad t=h\,.\frac{T}{d}. \tag{9}$$

Como las incógnitas x, y, z, t deben ser enteras y h es primo con d, entonces este último número es un divisor de los números X, Y, Z, T.

Es evidente que igualando d al máximo común divisor de X, Y, Z, T y atribuyendo a h diferentes valores enteros, hallaremos todos los valores enteros de x, y, z, t, correspondientes a los números a, b, c. La solución en que todas las incógnitas son iguales a 0 no ofrece excepción y se obtiene haciendo $h=0$. Poniendo $h=1$ se llega a una solución en que las incógnitas x, y, z, t no tienen divisor común.

Para otros valores de los parámetros a, b, c las fórmulas (8) suministran otros valores para X, Y, Z, T y las igualdades (9) conducen a otros sistemas de soluciones.

Ocupémonos ahora más detenidamente del máximo común divisor d de los números X, Y, Z, T.

Conforme al teorema de *Fermat* el cubo de un entero es congruente a la primera potencia del mismo número por módulo 3. Teniendo en cuenta este resultado deducimos de las relaciones (8) las siguientes congruencias:

$$\left.\begin{aligned} X &\equiv (b-a)-a+kc \equiv a+b+kc \\ Y &\equiv (a-b)-b+kc \equiv a+b+kc \\ Z &\equiv a+b+kc \\ T &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \pmod{3}$$

Vemos que los números X, Y, Z son todos divisibles o no divisibles por 3, según que lo sea o no la suma $a+b+kc$.

Valiéndonos de las mismas igualdades (8) encontramos también que

$$\left\{\begin{array}{l} Z=(a+b)\,(a^2-ab+b^2)+kc^3 \\ Z-X=3\,a\,(a^2-ab+b^2) \\ Z-Y\;=3\,b\,(a^2-ab+b^2) \\ T=3\,c\,(a^2-ab+b^2). \end{array}\right. \qquad (10)$$

Supongamos, en primer lugar, que $a+b+kc$ no es divisible por 3 y demostremos que en tal ocasión el máximo común divisor d de los números X, Y, Z, T es igual al máximo común divisor de la forma a^2-ab+b^2 y del producto kc^3.

Sea d_1 uno de los divisores comunes de los números X, Y, Z, T. El divisor d_1 no puede ser divisible por 3, porque en el caso considerado X, Y, Z no son divisibles por 3.

Los primeros miembros de las fórmulas (10) son divisibles por d_1 y como a, b, c están elegidos de tal manera que no tengan factor común, entonces la forma a^2-ab+b^2 que figura en los segundos miembros de las tres últimas fórmulas debe ser divisible por d_1. La primera de las fórmulas (10) nos indica además que el término kc^3 es divisible por d_1.

Por el contrario, un divisor d_2 de a^2-ab+b^2 y de kc^3 es también divisor de Z y de T, en virtud de la primera y la última fórmulas. La segunda y la tercera de las fórmulas (10) demuestran que X e Y igualmente son divisibles por d_2.

Vemos, pues, que cada divisor de X, Y, Z, T es también divisor de a^2-ab+b^2 y de kc^3, y viceversa. Por consiguiente el máximo común divisor de X, Y, Z, T coincide con el máximo común divisor de a^2-ab+b^2 y de kc^3.

Pasemos al estudio del caso en que $a+b+kc$ sea divisible por 3, suponiendo, primero, que kc^3 no es divisible por 3.

En esta hipótesis los números X, Y, Z, T son divisibles por 3 y las relaciones (10) pueden representarse bajo la forma

$$\left\{\begin{array}{l} 3\,.\,\dfrac{Z}{3}=(a+b)\,(a^2-ab+b)+kc^3 \\[2ex] \dfrac{Z}{3}-\dfrac{X}{3}=a.(a^2-ab+b^2) \\[2ex] \dfrac{Z}{3}-\dfrac{Y}{3}=b\,(a^2-ab+b^2) \\[2ex] \dfrac{T}{3}=c\,(a^2-ab+b^2) \end{array}\right. \qquad (11)$$

en donde $\frac{X}{3}$, $\frac{Y}{3}$, $\frac{Z}{3}$, $\frac{T}{3}$ son enteros.

Las tres últimas de las relaciones (11) nos indican que cualquier divisor d_1 de $\frac{X}{3}$, $\frac{Y}{3}$, $\frac{Z}{3}$, $\frac{T}{3}$ es también divisor de a^2-ab+b^2, ya que a, b, c no tienen factores comunes. La primera de las relaciones (11) demuestra la divisibilidad de kc^3 por el mismo número d_1.

Como el producto kc^3 por hipótesis no es divisible por 3, no lo es también el divisor d_1.

Por el contrario, un divisor d_2 de a^2-ab+b^2 y de kc^3 que, como recién hemos visto, no es divisible por 3, divide el número $\frac{Z}{3}$, en virtud de la primera de las relaciones (11). La segunda y la tercera de las relaciones (11) demuestran la divisibilidad de $\frac{X}{3}$ y de $\frac{Y}{3}$ por d_2 y la última, la divisibilidad de $\frac{T}{3}$ por el mismo número.

De lo expuesto se desprende que el máximo común divisor de los números $\frac{X}{3}$, $\frac{Y}{3}$, $\frac{Z}{3}$, $\frac{T}{3}$ es idéntico al máximo común divisor de la forma a^2-ab+b^2 y del producto kc^3.

Consideremos, por último, el caso en que la suma $a+b+kc$ y el producto kc^3 son divisibles por 3 simultáneamente.

Es fácil ver que en esta ocasión kc y $a+b$ son también divisibles por 3 y la primera de las igualdades (11) puede rerepresentarse bajo la forma

$$\frac{Z}{3}=\frac{a+b}{3}\cdot(a^2-ab+b^2)+\frac{kc^3}{3}, \tag{12}$$

siendo $\frac{Z}{3}$, $\frac{a+b}{3}$, $\frac{kc^3}{3}$ números enteros.

La igualdad (12) y las tres últimas de las igualdades (11) permiten comprobar, como antes, que cada divisor de $\frac{X}{3}$, $\frac{Y}{3}$, $\frac{Z}{3}$, $\frac{T}{3}$, que en el presente caso puede ser divisible por 3, es también divisor de a^2-ab+b^2 y de $\frac{kc^3}{3}$ y viceversa.

Por lo tanto el máximo común divisor de $\frac{X}{3}, \frac{Y}{3}, \frac{Z}{3}, \frac{T}{3}$ será igual al máximo común divisor de a^2-ab+b^2 y de $\frac{kc^3}{3}$.

Ahora se puede resumir los resultados obtenidos en la siguiente forma:

Todas las soluciones enteras de la ecuación indeterminada

$$x^3+y^3+z^3-3\,xyz=kt^3 \tag{13}$$

se expresan por las fórmulas

$$x=\frac{h}{d}\left[(b-a)^3-a^3+kc^3\right]$$

$$y=\frac{h}{d}\left[(a-b)^3-b^3+kc^3\right]$$

$$z=\frac{h}{d}\left(a^3+b^3+kc^3\right)$$

$$t=3\,.\frac{h}{d}\,.\,c\left(a^2-ab+b^2\right)$$

en las cuales $a+b+kc$ no es divisible por 3, y por las fórmulas

$$x=\frac{h}{3d}\left[(b-a)^3-a^3+kc^3\right]$$

$$y=\frac{h}{3d}\left[(a-b)^3-b^3+kc^3\right]$$

$$z=\frac{h}{3d}\left(a^3+b^3+kc^3\right)$$

$$t=\frac{h}{d}\,.\,c\left(a^2-ab+b^2\right)$$

en donde $a+b+kc$ es divisible por 3.

En ambos grupos de fórmulas; a, b, c son números enteros arbitrarios sin divisor común.

Por la letra d está designado el máximo común divisor de la forma a^2-ab+b^2 y del producto kc^3, exceptuando el caso en que la suma $a+b$ y el producto kc son divisibles por 3 simultáneamente. En este último caso d significa el máximo común divisor de a^2-ab+b^2 y de $\frac{kc^3}{3}$.

La letra h es igual a un número entero arbitrario. Si se desea obtener soluciones sin divisor común, basta hacer $h=1$.

En conclusión hagamos constar que el primer miembro de la ecuación (13) puede ser representado en forma de un circulante

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ z, & x, & y \\ y, & z, & x \end{vmatrix}$$

o de una norma

$$(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)=$$
$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy),$$

siendo

$$\omega=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}) \quad \text{y} \quad \omega^2=\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$$

raíces primitivas de la unidad de 3er. grado.

Ambas formas conducen a otros métodos de resolución de la naturaleza netamente aritmética. La demostración geométrica que hemos expuesto nos parece más clara y sencilla.

Sergio Sispánov

Asunción, Paraguay.
9 de Marzo de 1943.

CONOIDE CON NUCLEO ESFERICO

TRAZADO DE TANGENTES A LA CURVA DE CONTACTO

En el N°. 4, 1942, de esta Revista, se publican soluciones al problema del título, que apareció como tema propuesto (N°. 13) en otro número anterior.

En la una, del señor E. Gaspar, se trata únicamente del caso sencillo del conoide recto; en la otra, del Dr. J. Rey Pastor, se resuelve el problema en su aspecto más general, pero con método un tanto laborioso. Esta circunstancia fué la que nos indujo, cuando conocimos esa solución, que el estimado maestro tuvo a bien enviarnos, a continuar la investigación de otro método más simple, y conforme a los procedimientos de la Geometría Descriptiva.

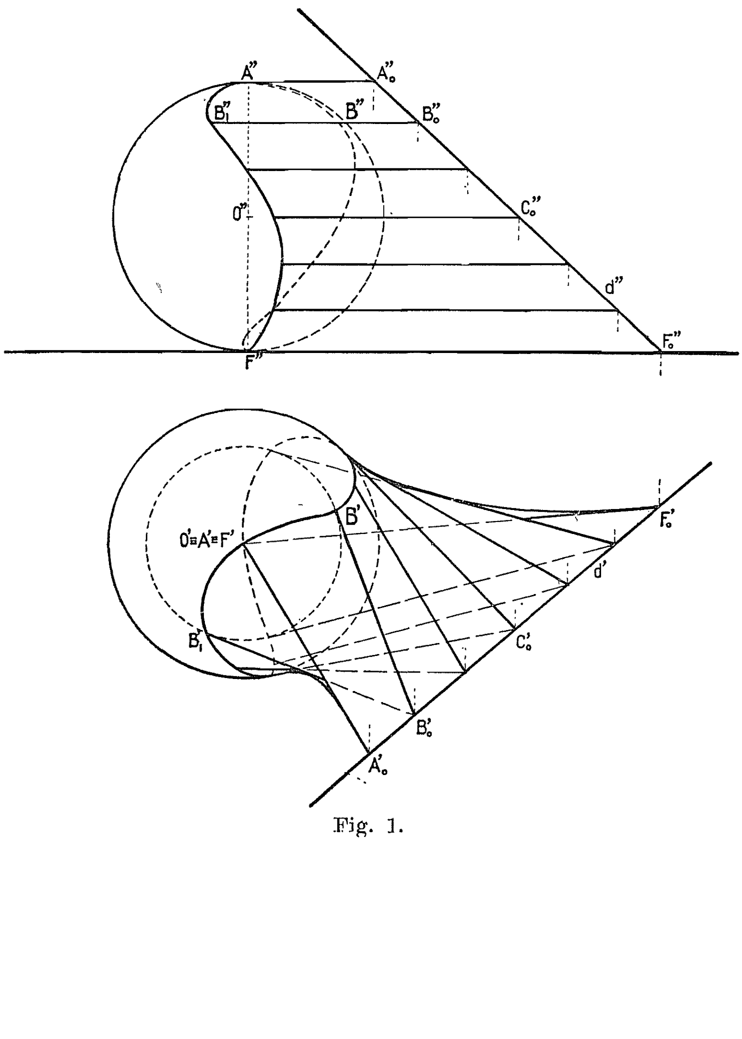

Fig. 1.

El problema se refiere a un conoide, oblícuo como caso general, determinado por un núcleo esférico y dos directrices rectilíneas, una de ellas impropia, y se trata de trazar tangentes a la curva de contacto con el núcleo.

En los puntos de esa curva, el plano tangente a la superficie reglada coincide con el plano tangente a la esfera; se necesita otro plano que dé, por intersección con aquél, la tangente buscada.

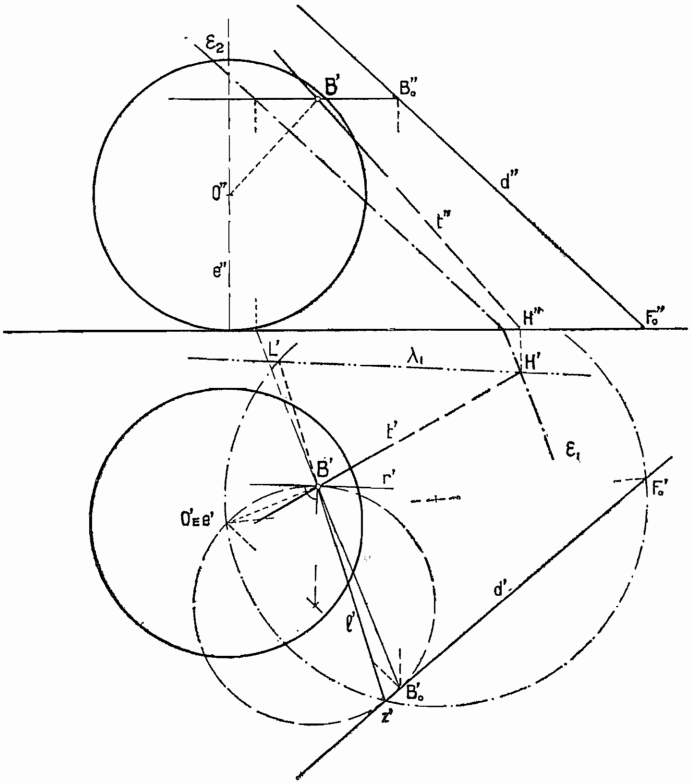

Fig. 2.

Nuestro procedimiento consiste en: *Encontrar otra superficie que contenga a la curva, que resultará así como de intersección con la esfera; trazarle el plano tangente en el punto elegido y determinar su intersección con el plano tangente a la esfera.*

Representemos el conoide en proyección diédrica (Monge) (Fig. 1) y sea la directriz impropia la recta en el infinito del plano horizontal. Generatrices de la superficie se obtienen mediante planos horizontales, que cortan a la directriz propia en puntos A_0, B_0, C_0, y trazando luego, desde éstos, las tangentes a las respectivas secciones circulares de la esfera.

Resulta un conoide de 4°. orden y la curva de contacto una cuártica, de primera especie.

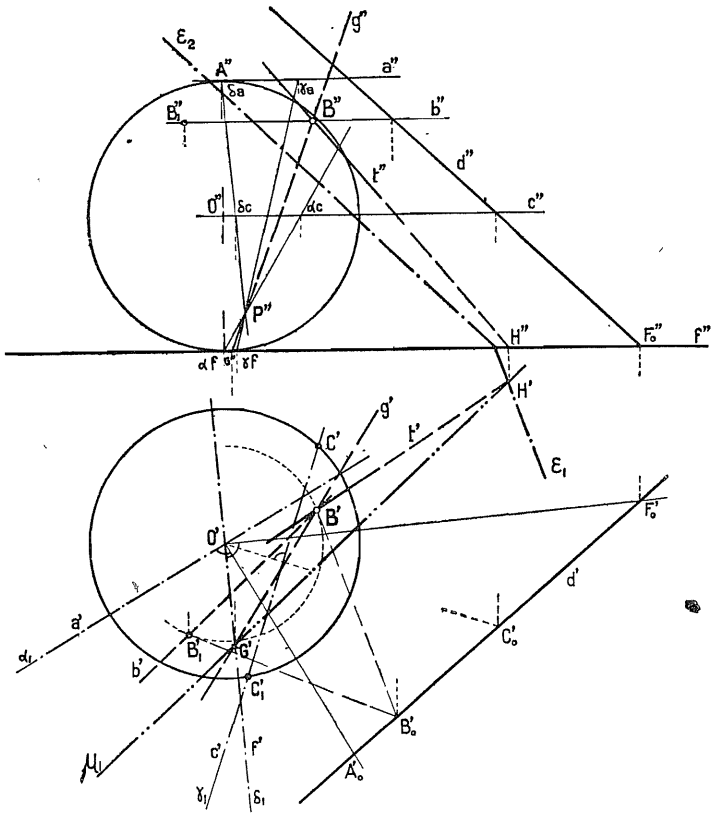

Fig. 3.

La construcción indicada muestra que cada plano auxiliar da dos puntos de la curva de contacto, los que están sobre círculos que tocan al eje de la esfera y a la directriz propia; sus centros están alineados en una recta equidistante de esas dos. Todos esos círculos son pues, secciones horizontales de un *hiperboloide reglado* del que el eje *e* de la esfera y la directriz *d* propia son generatrices y que corta a la esfera (y al conoide) según la curva de contacto.

El trazado de la tangente es ahora fácil. Sea el punto B (Fig. 2). El plano ε tangente a la esfera se traza inmediatamente como plano perpendicular al radio OB. El plano tangente al hiperboloide se obtiene con la tangente r a la sección circular horizontal y la generatriz l por B, cuya posición se deduce de las consideraciones siguientes: Si e es una generatriz del hiperboloide, habrá otra, z, (del otro sistema) que le es

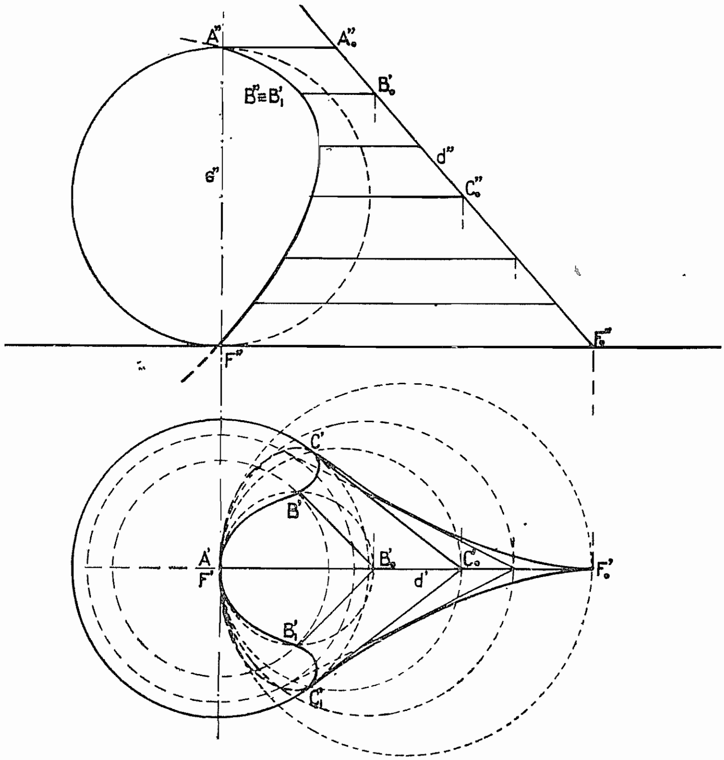

Fig. 4.

paralela y a la que tocarán todas las g. En el caso de la figura, como e es vertical, z también lo será, y su icnografía un punto z' por el que pasará la icnografía l' de la g buscada; la traza de ésta L' se encuentra sobre el círculo de diámetro $O'F'_0$, traza del hiperboloide. La traza λ_1 del plano tangente a éste, corta a la ε_1 del plano tangente a la esfera en el punto H', que determina la tangente pedida a la curva de contacto. De la proyección H'' se deduce t''.

Otro procedimiento. — En vez de un hiperboloide puede emplearse como superficie auxiliar un *paraboloide reglado* (Fig. 3) del cual son directrices las rectas que unen los pares de puntos correspondientes a cada plano horizontal. Estas rectas son perpendiculares a la bisectriz de las generatrices del conoide, que, para los puntos más alto y más bajo son coincidentes y sus perpendiculares son ya tangentes a la curva.

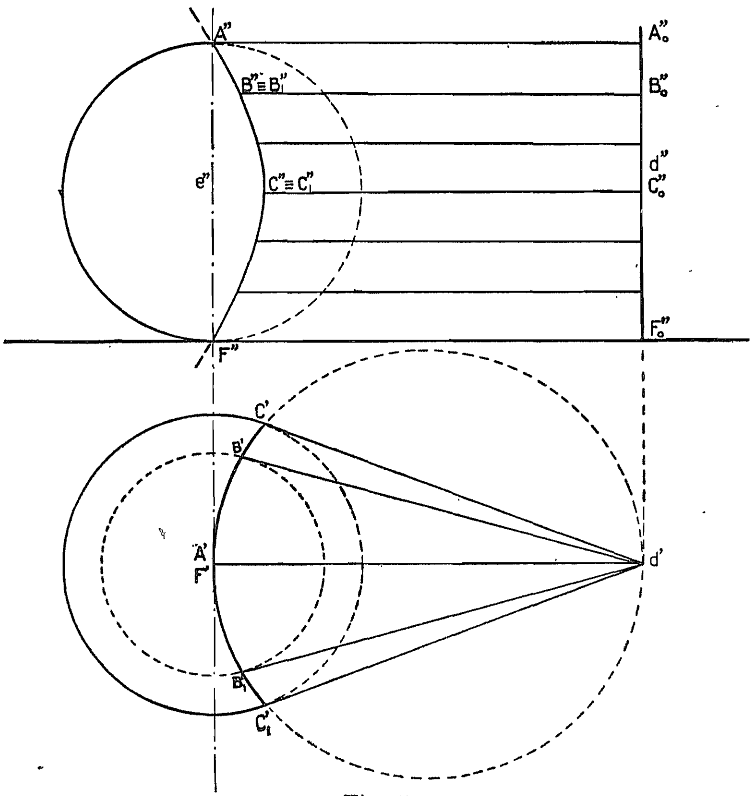

Fig. 5.

Para un punto B por ej., se buscan la g y la d del paraboloide; la d es la recta BB_1; la g hay que determinarla por el método corriente, partiendo de tres directrices conocidas, a, c, f, por ej. y planos que pasan por ellas α, γ, δ; en nuestro caso se simplifica la construcción, pues siendo el plano ortográfico perpendicular al plano director del paraboloide, la proyección vertical de éste será un sistema de rectas concurrentes. La g por el punto B es, pues, en ortografía, la $B''P''$; su traza horizontal G' (sobre f') da la del plano tangente μ, paralelo a b', cuya intersección con el plano tangente ε a la esfera es el punto H, por el que pasa la tangente buscada.

Casos particulares. — Si la directriz propia del conoide es coplanar con el eje de la esfera perpendicular al plano director, las superficies de sustitución es un *cono* (Fig. 4) o un *cilindro* (Fig. 5); pero siempre será el caso de la intersección de dos cuádricas con un plano principal común; y si el plano de proyección es paralelo a éste, la proyección de la curva será una *cónica,* hipérbola en el caso del cono, parábola en el caso del cilindro. En este caso, además, la proyección horizontal es un arco de círculo.

Buenos Aires, Enero 1943.

Pedro Rossell Soler

CRONICA

HOMENAJE AL PROF. J. REY PASTOR

En el número anterior (Vol. IX, nº 1) dimos cuenta del acuerdo del C. D. de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional del Litoral por el cual se dedicaba un volumen de las Publicaciones del Instituto de Matemáticas de dicha Facultad en homenaje al Prof. J. REY PASTOR. A la lista de adhesiones y trabajos recibidos para dicho volumen que dimos en aquella oportunidad, debemos agregar que con ulterioridad han prometido también el envío de trabajos los siguientes: Dr. AGUSTÍN DURAÑONA Y VEDIA (La Plata) *''Algunas clases especiales de operadores lineales del espacio de Hilbert''*, Dr. ELÍAS A. DE CESARE (La Plata) *''Los elementos imaginarios en Geometría Proyectiva según el método de C. Segre''*.

También debemos advertir que en el número anterior el título del trabajo enviado por el Dr. ALDO MIELI apareció incompleto, debiendo decir *''Rivoluzione nelle rappresentazioni del macrocosmo e del microcosmo nell' anno fatidico 1543''*.

SOBRE LA CONICA OSCULATRIZ EN UN PUNTO ORDINARIO DE UNA CURVA PLANA

(Tema nº 29 - Vol. VII, p. 80)

Tomemos como eje x la tangente y como eje y la normal a la curva en el punto considerado. En un entorno de este punto la ecuación de la curva puede escribirse

$$y = \alpha x^2 + \beta x^3 + \gamma x^4 + \delta x^5 + \dots \tag{1}$$

Para interpretar los coeficientes α, β, γ, ... de manera intrínseca a la curva, vamos a calcular sus valores en función del radio de curvatura de la curva en el punto considerado y de sus derivadas sucesivas en el mismo punto.

De (1) se deduce que las derivadas sucesivas de y respecto x en el origen valen

$$y'_0 = 0, \qquad y''_0 = 2\alpha, \qquad y'''_0 = 6\beta, \qquad y^{IV}_0 = 24\gamma. \tag{2}$$

Por otra parte la fórmula clásica que da el radio de curvatura r permite escribir

$$r^2 y''^2 = (1 + y'^2)^3 \tag{3}$$

y también, derivando dos veces,

$$2\,r\,r'\,y''^2 + 2\,r^2\,y''\,y''' = 6\,(1 + y'^2)^2\,y'\,y'' \tag{4}$$

$$\begin{aligned} 2\,r'^2\,y''^2 + 2\,r\,r''\,y''^2 + 8\,r\,r'\,y''\,y''' + 2\,r^2\,y'''^2 + 2\,r^2\,y''\,y^{IV} \\ = 6\,(1 + y'^2)^2\,y''^2 + A\,y' \end{aligned} \tag{5}$$

indicando por A una expresión cuya forma explícita no interesa.

Tomando las expresiones (3), (4), (5) en el origen, para el cual valen las expresiones (2), se deduce

$$\alpha = \frac{1}{2r}, \qquad \beta = -\frac{r'}{6r^2}, \qquad \gamma = \frac{3 + 2r'^2 - r\,r''}{24\,r^3} \tag{5}$$

siendo r, r', r'' los valores del radio de curvatura y de sus dos primeras derivadas respecto la variable x en el origen.

Para que r' y r'' no dependan de los ejes coordenados elegidos conviene expresar estas derivadas, no respecto la variable x, sino respecto el arco s de la curva. Pero observando que es $ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$ y que $y'_0 = 0$, se deduce fácilmente, haciendo el cambio de variables, que r', r'' toman en el origen los mismos valores tanto si las derivadas son respecto x como respecto el arco s. Supondremos, pues, que en (5) las derivadas son respecto el arco s y que, por tanto, tenemos los valores de α, β, γ en función de elementos intrínsecos de la curva.

Vamos a obtener ahora la ecuación de la cónica osculatriz a la currva (1). La ecuación general de una cónica tangente al eje x en el origen es:

$$y = L\,x^2 + 2\,M\,x\,y + N\,y^2. \tag{6}$$

Para hacer que esta cónica tenga con la curva (1) cinco puntos confundidos disponemos de los coeficientes L, M, N. Sustituyendo en (6) el desarrollo de y dado por (1) y ordenando se tiene

$$\begin{aligned}(\alpha - L)\,x^2 + (\beta - 2\,M\,\alpha)\,x^3 + (\gamma - 2\,M\,\beta - N\,\alpha^2)\,x^4 + \\ (\ldots)\,x^5 + \ldots = 0.\end{aligned} \tag{7}$$

Para que (6) sea la cónica osculatriz, los coeficientes L, M, N deben anular los 3 primeros coeficientes de este desarrollo (7) y por tanto tenemos 3 ecuaciones lineales que nos dan

$$L = \alpha, \qquad M = \frac{\beta}{2\alpha}, \qquad N = \frac{1}{\alpha^2}\left(\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha}\right)$$

o bien, sustituyendo los valores (5),

$$L = \frac{1}{2r}, \qquad M = -\frac{r'}{6r}, \qquad N = \frac{9+2r'^2-3rr''}{18r}. \tag{8}$$

Tenemos así la ecuación de la cónica osculatriz (6) con los coeficientes, expresados por (8), dependientes de cantidades intrínsecas de la curva.

Para hallar el parámetro y la excentricidad de la cónica osculatriz (6) tenemos que hallar los semiejes a y b. El cálculo de los semiejes de una cónica dada por su ecuación (6) es un problema elemental de Geometría Analítica. Aplicando, por ejemplo, el método de los invariantes, se obtiene que entre los semiejes a, b y los coeficientes de (6) hay las relaciones:

$$a^2 + b^2 = \frac{L(L+N)}{4(MN-M^2)^2}, \qquad a^2 b^2 = \frac{L^2}{16(LN-M^2)^3}. \tag{9}$$

Si $LN - M^2 = 0$, la cónica osculatriz (6) es una parábola, caso que estudiaremos después. Las ecuaciones (9) dan

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= \frac{L(L+N)+L\sqrt{(L-N)^2+4M^2}}{8(LN-M^2)^2} \\ b^2 &= \frac{L(L+N)-L\sqrt{(L-N)^2+4M^2}}{8(LN-M^2)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

La distancia focal c se deduce de

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{L\sqrt{(L-N)^2+4M^2}}{4(LN-M^2)^2}. \tag{11}$$

Conocidos los valores de a, b, c dados por (10), (11) se pueden escribir inmediatamente los valores del *parámetro* $p = \frac{b^2}{a}$ y de la *excentricidad* $e = \frac{c}{a}$ en función de los coeficientes L, M, N y por tanto, aplicando (8), en función del radio de curvatura r y sus dos primeras derivadas respecto el arco.

En el caso $LN - M^2 = 0$, en que la cónica (6) es una parábola, la excentricidad vale 1, y el parámetro se puede determinar, bien aplicando los invariantes como enseña la geometría analítica elemental, entre la ecuación (6) y la ecuación reducida $y^2 = 2px$, o bien escribiendo el valor del parámetro para el caso de elipse o hipérbola y hacer luego tender M^2 a LN. En ambos casos se obtiene sin dificultad

$$p = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{(L+N)^3}}.$$

De todo lo anterior se deducen algunas consecuencias notables:

a) Para que la cónica osculatriz sea un *círculo* debe ser en (6),

$$L = N, \quad M = 0$$

o sea, según (8), $r' = 0$, $r = \text{cte}$. Por tanto: excepto el caso trivial de los mismos círculos, no existen curvas planas cuyas cónicas osculatrices sean todas círculos.

b) Para que la cónica osculatriz (6) sea una parábola, debe ser $LN - M^2 = 0$, o sea, según (8),

$$9 + r'^2 - 3\,r\,r'' = 0 \tag{12}$$

Esta es, pues, la condición que debe cumplir el radio de curvatura de una curva y sus derivadas respecto el arco, para que la cónica osculatriz en el punto correspondiente sea una *parábola.*

c) Para que la cónica osculatriz (6) sea una hipérbola equilátera debe ser $L + N = 0$, o sea, según (8),

$$18 + 2\,r'^2 - 3\,r\,r'' = 0. \tag{13}$$

Esta es, por tanto, la condición que deben cumplir el radio de curvatura y sus derivadas respecto el arco en un punto de una curva, para que la cónica osculatriz en el mismo sea una *hipérbola equilátera.*

d) Análogamente, de (6) y (8) se deduce que la condición para que la cónica osculatriz en un punto sea una *elipse* es,

$$9 + r'^2 - 3\,r\,r'' > 0 \tag{14}$$

y para que sea una *hipérbola*

$$9 + r'^2 - 3\,r\,r'' < 0. \tag{15}$$

Estas condiciones (12), (13), (14), (15) se pueden enlazar con relaciones conocidas de la geometría diferencial afín de curvas planas.

En el tratado de Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie, II. Affine differentialgeometrie,* después de definir la *curvatura afín* de una curva plana en un punto, se encuentra para la misma la expresión (pág. 32)

$$k = p^3 \left(p + \frac{d^2 p}{d\tau^2}\right) \tag{16}$$

siendo $p = r^{-\frac{1}{3}}$ y τ el ángulo que forma la tangente a la curva con una dirección fija. Por tanto, es $ds = r\,d\tau$ y de aquí, a partir de (16), por simple cambio de variables, se obtiene como valor de la curvatura afín en función del radio de curvatura ordinario y sus derivadas respecto el arco ordinario, la expresión

$$k = \frac{9 + r'^2 - 3rr''}{9r^{4/3}}. \tag{17}$$

Según esto, las condiciones a), c), d) anteriores equivalen al hecho conocido (Blaschke, loc. cit., pág. 27) de que la cónica osculatriz en un punto de una curva es una parábola, elipse o hipérbola, según que la curvatura afín en el mismo punto sea igual, mayor o menor que cero.

Además, las únicas curvas con curvatura afín nula en todo punto son las parábolas (Blaschke, loc. cit., p.ª 18) y por tanto: si la cónica osculatriz en todos los puntos de una curva es una parábola, la misma curva es una parábola. Por consiguiente, (12) será la ecuación intrínseca de las parábolas.

En cuanto al caso c) en que la cónica osculatriz es una hipérbola equilátera, observemos que si se verifica (13) para todos los puntos de una curva, la curvatura afín es constante. En efecto, de (13) y (17) se deduce

$$k = -\frac{9 + r'^2}{9r^{4/3}},$$

y de aquí, derivando respecto el arco s y teniendo en cuenta (13),

$$\frac{dk}{ds} = \frac{(18 + 2r'^2 - 3rr'')r'}{6r^{7/3}} = 0.$$

Se sabe que las curvas que tienen k constante son cónicas

(Blaschke, loc. cit., p. 18) y por tanto: si la cónica osculatriz a una curva es siempre una hipérbola equilátera, la misma curva es una hipérbola equilátera.

Según esto, la ecuación (13) será la ecuación intrínseca de las hipérbolas equiláteras.

Nota. — Agradezco al Prof. A. Terracini la indicación anterior de que la relación (12) podía relacionarse con la curvatura afín. Al mismo tiempo el Prof. Terracini nos ha indicado la elegante demostración sintética siguiente del hecho de que toda curva plana cuyas cónicas osculatrices son parábolas o hipérbolas equiláteras, es ella misma una de estas curvas, o bien, más generalmente: «No pueden las cónicas osculatrices de una curva C, consideradas como lugares o como envolventes, pertenecer a un mismo sistema lineal S, sin que la propia curva C se reduzca a una cónica de dicho sistema». Consideremos primero el caso de las cónicas como lugar; si reemplazamos el plano de la línea C por una superficie de Veronese representada sobre el mismo de manera que las secciones hiperplanas de la superficie tengan como imágenes las cónicas del plano, la curva C viene a ser la imágen de una curva C_1 de la superficie cuyos S_4 osculadores pasan todos por un punto fijo G, de forma que lo mismo ocurre, si es que dichos S_4 son distintos, para los S_3 y los S_2 osculadores y por tanto también para las rectas tangentes, lo que es manifiestamente imposible.

Esto explica porqué si las cónicas osculatrices son hipérbolas equiláteras, la propia curva es una hipérbola equilátera.

Por una razón análoga y dual, si las cónicas osculatrices, consideradas como envolventes, pertenecen a un sistema lineal, la curva es una cónica del mismo sistema, lo cual explica el caso en que todas las cónicas osculatrices sean parábolas.

Luis A. Santaló

EJEMPLOS DE DESARROLLOS REALES MEDIANTE SERIES DE VARIABLE COMPLEJA

por SERGIO SISPÁNOV

Los desarrollos para la función indicada en el tema 40 y para la otra similar, con el logaritmo natural, son de la forma

$$\operatorname{arctng} \frac{x \operatorname{sen} \alpha}{1+x \cos \alpha} = \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \operatorname{sen} k\alpha,$$

$$\frac{1}{2} \ln (1+2x\cos\alpha + x^2) = \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \cos k\alpha.$$

Ambas series tienen el radio de convergencia igual a 1 (*).

Un procedimiento de carácter muy amplio, perteneciente a *Euler*, en rasgos generales consiste en lo siguiente:

En el desarrollo,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{k=\infty} c_k z^k \tag{1}$$

se hace:

$$c_k = a_k + b_k i, \qquad z = x(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha); \qquad |x| < r,$$

siendo r radio de convergencia.

En ambos miembros de la igualdad (1) se separan las partes reales de las imaginarias, lo que nos da $f[x(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)] = u + vi$ y

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} c_k z^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{k=\infty} (a_k \cos k\alpha - b_k \operatorname{sen} k\alpha) x^k + i \sum_{k=0}^{k=\infty} (a_k \operatorname{sen} k\alpha + b_k \cos k\alpha) x^k.$$

(*) Una sencilla demostración que tiene por base las fórmulas

$$\lim_{\mu=0} \frac{\operatorname{sen} \mu\theta}{\mu} = \theta, \quad \lim_{\mu=0} \frac{\rho^{\mu}-1}{\mu} = \ln \rho,$$

se halla en el texto "Enzyklopädie der Elementarmathematik" por Weber-Wellstein, 1er. tomo.

La comparación de los resultados conduce a las series para las funciones u y v

$$u\,(x \cos \alpha,\ x \operatorname{sen} \alpha) = \sum_{k=0}^{k=\infty} (a_k \cos k\,\alpha - b_k \operatorname{sen} k\,\alpha),$$

$$v\,(x \cos \alpha,\ x \operatorname{sen} \alpha) = \sum_{k=0}^{k=\infty} (a_k \operatorname{sen} k\,\alpha + b_k \cos k\,\alpha).$$

De estas series pueden deducirse otras por integración.

A veces conviene integrar previamente la relación (1), lo que nos da

$$\int f(z)\,dz = C + \sum_{k=\infty}^{k=0} \frac{c_k}{k+1}\, z^{k+1},$$

en donde $C = C_1 + C_2\, i$ es constante de integración.

Efectuando, luego, las mismas sustituciones que antes y poniendo

$$\int f(z)\,dz = U + V\,i,$$

se llega a los siguientes desarrollos .

$$U = C_1 + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k}\,(a_{k-1} \cos k\,\alpha - b_{k-1} \operatorname{sen} k\,\alpha)\, x^k,$$

$$V = C_2 + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k}\,(a_{k-1} \operatorname{sen} k\,\alpha + b_{k-1} \cos k\,\alpha)\, x^k,$$

en los que, a fin de abreviar las fórmulas, k está cambiado en $k-1$.

Son numerosísimas las aplicaciones de este clásico método de *Euler* y de sus diferentes variaciones.

Consideremos algunos ejemplos más sencillos.

Dividiendo 1 por $1+z$ vamos a tener

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots \qquad (2)$$

Haciendo aquí

$$z = x(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha), \tag{3}$$

efectuando las operaciones indicadas, y comparando entre sí las partes reales y las imaginarias de ambos miembros, se obtienen series para las siguientes funciones

$$\frac{1+x\cos\alpha}{1+2x\cos\alpha+x^2} = 1 - x\cos\alpha + x^2\cos 2\alpha - x^3\cos 3\alpha + \ldots$$

$$\frac{x\operatorname{sen}\alpha}{1+2x\cos\alpha+x^2} = x\operatorname{sen}\alpha - x^2\operatorname{sen}2\alpha + x^3\operatorname{sen}3\alpha - x^4\operatorname{sen}4\alpha + \ldots,$$

cuyos radios de convergencia son iguales a 1.

Si la relación (2) se integra previamente entre los límites $0, z$ y en el resultado

$$ln(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots$$

la variable z se reemplaza por la misma expresión (3), con auxilio de la fórmula

$$\ln[1 + x(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)] =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1 + 2x\cos\alpha + x^2) + i\operatorname{arctng}\frac{x\operatorname{sen}\alpha}{1+x\cos\alpha},$$

se llega a los desarrollos

$$\frac{1}{2}\ln(1 + 2x\cos\alpha + x^2) = x\cos\alpha - \frac{x^2}{2}\cos 2\alpha +$$

$$+ \frac{x^3}{3}\cos 3\alpha - \frac{x^4}{4}\cos 4\alpha + \ldots$$

$$\operatorname{arctng}\frac{x\operatorname{sen}\alpha}{1+x\cos\alpha} = x\operatorname{sen}\alpha - \frac{x^2}{2}\operatorname{sen}2\alpha + \frac{x^3}{3}\operatorname{sen}3\alpha - \frac{x^4}{4}\operatorname{sen}4\alpha + \ldots$$

El segundo de ellos es el que figura en el enunciado del problema.

Tomemos otro ejemplo. Partiendo de la serie

$$\frac{e^z-1}{z}=\frac{1}{1!}+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^3}{4!}+\ldots$$

què converge para todos los valores finitos de z y aplicando la sustitución (3), encontramos las series

$$\frac{1}{x}\left[e^{x\cos\alpha}\cos(x\,\mathrm{sen}\,\alpha-\alpha)-\cos\alpha\right]=$$

$$=\frac{1}{1!}+\frac{x}{2!}\cos\alpha+\frac{x^2}{3!}\cos 2\alpha+\frac{x^3}{4!}\cos 3\alpha+\ldots$$

$$\frac{1}{x}\left[e^{x\cos\alpha}\,\mathrm{sen}\,(x\,\mathrm{sen}\,\alpha-\alpha)+\mathrm{sen}\,\alpha\right]=$$

$$=\frac{x}{2!}\,\mathrm{sen}\,\alpha+\frac{x^2}{3!}\,\mathrm{sen}\,2\alpha+\frac{x^3}{4!}\,\mathrm{sen}\,3\alpha+\frac{x^4}{5!}\,\mathrm{sen}\,4\alpha+\ldots$$

con radios de convergencia iguales a ∞.

Integrando las relaciones obtenidas resultan

$$\int_0^x\left[e^{x\cos\alpha}\cos(x\,\mathrm{sen}\,\alpha-\alpha)-\cos\alpha\right]\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!2}\cos\alpha+\frac{x^3}{3!3}\cos 2\alpha+\frac{x^4}{4!4}\cos 3\alpha+\ldots$$

$$\int_0^x\left[e^{x\cos\alpha}\,\mathrm{sen}\,(x\,\mathrm{sen}\,\alpha-\alpha)+\mathrm{sen}\,\alpha\right]\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{x^2}{2!2}\,\mathrm{sen}\,\alpha+\frac{x^3}{3!3}\,\mathrm{sen}\,2\alpha+\frac{x^4}{4!4}\,\mathrm{sen}\,3\alpha+\frac{x^5}{5!5}\,\mathrm{sen}\,4\alpha+\ldots$$

Si en estas series de carácter general hacemos primero $\alpha=0$, y luego $\alpha=\frac{\pi}{2}$ llegamos a las conocidas integrales

$$\int_0^x\frac{e^x-1}{x}\,dx,\quad\int_0^x\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\,dx,\quad\int_0^x\frac{1-\cos x}{x}\,dx.$$

A la primera de estas integrales se reduce el cálculo de la integral logarítmica de *Tshebysheff*. Las demás dos figuran en varios problemas de Análisis. Ninguna de ellas se expresa en funciones elementales trascendentes.

He aquí un ejemplo más. Si en el desarrollo

$$e^{-z^2} = 1 - \frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} - \frac{z^6}{3!} + \dots$$

se pone

$$z = x\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2}\right),$$

se llega a las series para las funciones

$$e^{-x^2\cos\alpha}\cos(x^2\,\mathrm{sen}\,\alpha) = 1 - \frac{x^2}{1!}\cos\alpha + \frac{x^4}{2!}\cos 2\alpha - \frac{x^6}{3!}\cos 3\alpha + \dots$$

$$e^{-x^2\cos\alpha}\,\mathrm{sen}\,(x^2\,\mathrm{sen}\,\alpha) =$$

$$= \frac{x^2}{1!}\,\mathrm{sen}\,\alpha - \frac{x^4}{2!}\,\mathrm{sen}\,2\alpha + \frac{x^6}{3!}\,\mathrm{sen}\,3\alpha - \frac{x^8}{4!}\,\mathrm{sen}\,4\alpha + \dots$$

Integrando resultan

$$\int_0^x e^{-x^2\cos\alpha}\cos(x^2\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,dx =$$

$$= x - \frac{x^3}{1!3}\cos\alpha + \frac{x^5}{2!5}\cos 2\alpha - \frac{x^7}{3!7}\cos 3\alpha + \dots$$

$$\int_0^x e^{-x^2\cos\alpha}\,\mathrm{sen}\,(x^2\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{1!3}\,\mathrm{sen}\,\alpha - \frac{x^5}{2!5}\,\mathrm{sen}\,2\alpha + \frac{x^7}{3!7}\,\mathrm{sen}\,3\alpha - \frac{x^9}{4!9}\,\mathrm{sen}\,4\alpha + \dots$$

Igualando α primero a 0, y luego a $\frac{\pi}{2}$ en estas fórmulas generales, se obtiene la conocida integral de *Laplace*, de suma importancia para la teoría de probabilidades y las dos de *Fresnel*, que desempeñan gran papel en la teoría de la difracción:

$$\int_0^x e^{-x^2}\,dx,\quad \int_0^x \cos x^2\,dx,\quad \int_0^x \operatorname{sen} x^2\,dx.$$

Finalmente hagamos constar que otros interesantes desarrollos se puede obtener valiéndose de la fórmula de *Gauss*

$$p\,.\int_0^z z^{p-1}(1-z)^q\,dz = z^p\ F(-q, p, p+1\,; z),$$

en donde F representa la serie hipergeométrica.

Asunción, Paraguay
5 de Enero de 1943.

Sergio Sispánov

CUESTIONES ELEMENTALES

21. En la prestigiosa revista Mathematical Monthly se calcula

$$\lim_{x\to\infty}\left[x.\ \operatorname{sen}\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right]^x$$

diciendo que por ser x sen $\frac{1}{x}$ equivalente a 1 el límite es e. Dar ejemplos en que tal razonamiento conduce a error y calcular correctamente el límite propuesto.

22. — Demostrar que el área del menisco cóncavo-convexo limitado por dos circunferencias C y C' de radio r y cuyos centros O y O' distan una longitud d, es igual al área de la porción de círculo C comprendida entre dos rectas perpendiculares a la línea de centros O, O' y equidistantes del centro una longitud $\frac{d}{2}$. Deducir que el área del menisco es aproximadamente

$$2d\sqrt{r^2-\frac{d^2}{4}}$$

acotando el error.

23. — Si en un ángulo triedro se inscribe una sucesión de esferas tal que cada una toque a la precedente, ¿qué relación existe entre los radios de dos esferas consecutivas?

24. — Demostrar que las normales en cuatro puntos concíclicos de una parábola son tangentes a una parábola cuyo eje es paralelo al de la primera.

TEMA RESUELTO

38. *Demostrar que*

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\left(1+n+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{3!}+\ldots+\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}\right)=\frac{1}{2}.$$

S.

Solución. Integrando reiteradamente por partes se obtiene

$$(1)\qquad I_n=\int_n^{\infty} e^{-t}\frac{t^n}{n!}dt=e^{-n}\left(1+n+\frac{n^2}{2}+\cdots+\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{n^n}{n!}\right).$$

Como para n tendiendo a infinito los términos de la forma $e^{-n}\dfrac{n^m}{m!}$ tienen por límite cero, para resolver el problema basta demostrar que tiende a $^1/_2$ sea la expresión (1) o cualquier otra que difiera de ella en un número finito de los términos mencionados.

Con el cambio de variable $t=\sqrt{n}z+n$, la (1) se convierte en

$$(2)\qquad I_n=\frac{e^{-n}\,n^n\sqrt{n}}{n!}\int_0^{\infty} e^{-z\sqrt{n}}\left(1+\frac{z}{\sqrt{n}}\right)^n dz$$

y como por la fórmula de *Stirling* se tiene que

$$(3)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{e^{-n}\,n^n\sqrt{n}}{n!}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

bastará demostrar que

$$(4)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-z\sqrt{n}+n\log\left(1+\frac{z}{\sqrt{n}}\right)}\,dz=\frac{1}{2}.$$

Para ello escribiremos el exponente de la e con los tres primeros términos del desarrollo en serie de Mac-Laurin y su resto, obteniendo

$$(5)\qquad \varphi(z)=e^{-z\sqrt{n}+n\log\left(1+\frac{z}{\sqrt{n}}\right)}=e^{-\frac{z^2}{2}+\frac{n\,z^3}{3(\sqrt{n}+\eta)^3}}\quad(0<\eta<z),$$

y se tiene entonces, evidentemente

$$(6)\qquad e^{-\frac{z^2}{2}}<\varphi(z)<e^{-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3\sqrt{n}}}.$$

Se observa también que la expresión

$$\varphi(z)\,e^z=e^{-z(\sqrt{n}-1)+n\log\left(1+\frac{z}{\sqrt{n}}\right)}$$

es monótona decreciente a partir del máximo en $z=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1}$; en particular si $n\geqq 4$, para $z\geqq 2$; por tanto, siendo $M>2$ se tiene

$$(7)\qquad \int_M^\infty \varphi(z)\,dz=\int_M^\infty \varphi(z)\,e^z e^{-z}\,dz<\varphi(M)\,e^M\int_M^\infty e^{-z}\,dz=\varphi(M).$$

En base a la (6) se puede escribir entonces

$$(8)\qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_M^\infty e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz<\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_M^\infty \varphi(z)\,dz<\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{M^3}{3\sqrt{n}}}\,e^{-\frac{M^2}{2}}$$

$$(9)\qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^M e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz<\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^M \varphi(z)\,dz<\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{M^3}{3\sqrt{n}}}\int_0^M e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz.$$

y puesto que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^M e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz\leq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz=\frac{1}{2},$$

al sumar ordenadamente las desigualdades (8) y (9) resulta

$$(10) \qquad \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{o}^{\infty} \varphi(z)\, dz < e^{\frac{M^3}{3\sqrt{n}}} \left[\frac{e^{-\frac{M^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2} \right].$$

Dado un ε arbitrariamente pequeño, se puede elegir M de modo que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{M^2}{2}} < \varepsilon,$$

y luego elegir n tal que

$$e^{\frac{M^3}{3\sqrt{n}}} < 1 + \varepsilon,$$

y siendo $\varepsilon < 1$, como cota superior en (10) sè tiene

$$\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)(1 + \varepsilon) < \frac{1}{2} + 2\varepsilon.$$

Por tanto, finalmente

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{o}^{\infty} \varphi(z)\, dz < \frac{1}{2} + 2\varepsilon$$

lo cual equivale a la (4) y por tanto queda el problema resuelto.

J. Barral Souto

15. - *¿En qué dirección debe atravesarse una calle por la que avanza un vehículo de modo que el riesgo de ser alcanzado al cruzar delante del mismo sea mínimo?*

Llamemos x al segmento $\overline{MN}$, que mide la desviación, que es necesario efectuar. Sea V la velocidad del vehículo, que suponemos situado en P, y v la velocidad del transeúnte, cuyo punto de partida es O. Por comodidad, tomaremos la distancia del punto O a la trayectoria del vehículo igual a 1. En el tiempo t, el transeúnte recorrerá el espacio $OM = vt$ y como $\overline{OM} = \sqrt{1+x^2}$ es:

$$t = \frac{\sqrt{1+x^2}}{v}.$$

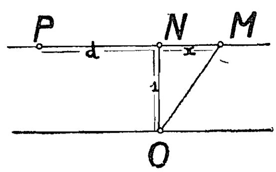

Fig. 1

En el mismo tiempo t, el móvil recorre el espacio $e = Vt = \frac{V}{v}\sqrt{1+x^2}$ y haciendo $\frac{V}{v} = k$ resulta:

$$e = k\sqrt{1+x^2}.$$

La distancia δ, que separa al vehículo del transeúnte es pues $\delta = \overline{PM} - e$

$$\delta = d + x - k\sqrt{1+x^2}, \tag{1}$$

y se trata de calcular δ como máximo.

Derivando:

$$\delta' = 1 - \frac{kx}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$

$$k^2 x^2 = 1 + x^2, \qquad x^2(k^2-1) = 1, \qquad x = \frac{\pm 1}{\sqrt{k^2-1}}.$$

La solución negativa se descarta, pues (1) ha sido escrito suponiendo $x > 0$, luego:

$$x = \frac{1}{\sqrt{k^2-1}} \qquad (2)$$

Este valor de x, corresponde en efecto a un máximo de δ, pues la derivada, en un entorno de $\frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$ pasa de positiva a negativa.

Discusión. Si consideramos ejes cartesianos, la δ de (1) está dada por la diferencia de ordenadas de la recta e hipérbolas siguientes:

$$\begin{cases} y = d + x \\ \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{k^2} = -1 \end{cases}$$

La distancia δ, se anula en los puntos de intersección de las dos curvas, para los cuales corresponde el valor de x que calculamos resolviendo la ecuación que resulta de sustituir la y de la primera ecuación en la segunda:

$$k^2 x^2 - d^2 - x^2 - 2dx + k^2 = 0$$

$$(k^2 - 1)\, x^2 - 2dx + (k^2 - d^2) = 0$$

luego

$$x = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - (k^2-1)\,(k^2-d^2)}}{(k^2-1)}.$$

Las raíces de esta ecuación dependen del discriminante:

$$\Delta = d^2 - (k^2 - 1)\,(k^2 - d^2) = k^2\,(d^2 + 1 - k^2);$$

luego:

1º) Si $k^2 < d^2 + 1$, existen dos raíces reales y distintas. x_1 y x_2 tales que cuando x varía en el intervalo abierto $(x_1\, x_2)$ el transeúnte pasa delante del móvil, a más o menos distancia, sin ser alcanzado, siendo menor el riesgo cuando $x = \frac{\sqrt{k^2-1}}{1}$.

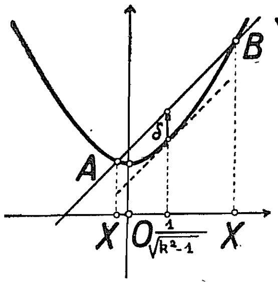

Fig. 2.

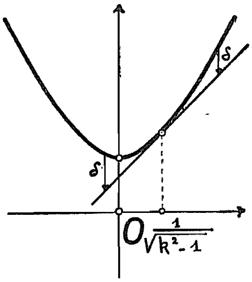

Fig. 3.

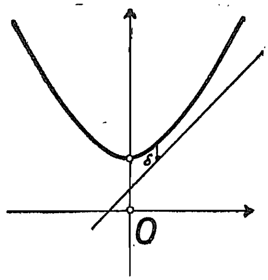

Fig. 4.

La gráfica se presenta entonces, como en la fig. 2. Los puntos A y B marcan el choque inevitable y corresponden a las dos direcciones posibles del transeúnte.

A la izquierda de A, y a la derecha de B, la δ resulta negativa, es decir, el vehículo ya ha pasado cuando el transeúnte alcanza la acera opuesta.

2º) Si $k^2 = d^2 + 1$, las dos raíces son reales e iguales, luego la recta es tangente a la hipérbola; la gráfica se presenta como en la fig. 3. El valor de x que resulta en este caso, que se obtiene sustituyendo en (2) el valor de k^2, es

$$x = \frac{1}{d}$$

y esta solución corresponde al choque inevitable. Cualquier otro valor de x hace a δ negativa, luego el móvil pasa antes que el transeúnte.

3º) Si $k^2 > 1 + d^2$, las raíces de la ecuación son imaginarias, luego la recta no corta para ningún valor de x, a la hipérbola.

La δ es siempre negativa, luego el vehículo pasa antes que el transeúnte.

La gráfica se presenta como en la fig. 4.

Juan José Rodríguez
(Alumno del Instituto del Profesorado de Buenos Aires)

17. - *Calcular el determinante de Vandermonde, sustituyendo las potencias por factoriales de diferencia d, con igual base y grado que los de las potencias.*

Se trata de calcular el siguiente determinante de orden n:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots\dots\dots & 1 \\ a_1^{1/d} & a_2^{1/d} & a_3^{1/d} & \dots\dots\dots & a_n^{1/d} \\ a_1^{2/d} & a_2^{2/d} & a_3^{2/d} & \dots\dots\dots & a_n^{2/d} \\ a_1^{3/d} & a_2^{3/d} & a_3^{3/d} & \dots\dots\dots & a_n^{3/d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1/d} & a_2^{n-1/d} & a_3^{n-1/d} & \dots\dots\dots & a_n^{n-1/d} \end{vmatrix}$$

con la notación

$$a^{k/d} = a\,(a+d)\,(a+2d)\dots(a+(k-1)\,d).$$

Si a cada fila h, le restamos el producto de la anterior multiplicada por $a_1+(h-2)\,d$, el determinante dado se reduce a:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & & a_n-a_1 \\ 0 & a_2^{2/d}-a_2^{1/d}(a_1+d) & a_3^{2/d}-a_3^{1/d}(a_1+d) & & a_n^{2/d}-a_n^{1/d}(a_1+d) \\ 0 & a_2^{3/d}-a_2^{2/d}(a_1+2d) & a_3^{3/d}-a_3^{2/d}(a_1+2d) & & a_n^{3/d}-a_n^{2/d}(a_1+2d) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2^{n-1/d}-a_2^{n-2/d}[a_1+(n-2)d] & a_3^{n-1/d}-a_3^{n-2/d}[a_1+(n-2)d] & \dots & a_n^{n-1/d}-a_n^{n-2/d}[a_1+(n-2)d] \end{vmatrix}$$

Sacando factores comunes en las diferencias, obtenemos una expresión más sencilla (luego de desarrollar por la primera columna):

$$\begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_3-a_1 & \dots\dots\dots & a_n-a_1 \\ a_2^{1/d}(a_2-a_1) & a_3^{1/d}(a_3-a_1) & \dots\dots\dots & a_n^{1/d}(a_n-a_1) \\ a_2^{2/d}(a_2-a_1) & a_3^{2/d}(a_3-a_1) & \dots\dots\dots & a_n^{2/d}(a_n-a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-2/d}(a_2-a_1) & a_3^{n-2/d}(a_3-a_1) & \dots\dots\dots & a_n^{n-2/d}(a_n-a_1) \end{vmatrix}.$$

o sea factoreando las diferencias:

$$(a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots(a_n-a_1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots\dots\dots & 1 \\ a_2{}^{1/d} & a_3{}^{1/d} & \dots\dots\dots & a_n{}^{1/d} \\ a_2{}^{2/d} & a_3{}^{2/d} & \dots\dots\dots & a_n{}^{2/d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2{}^{n-2/d} & a_3{}^{n-2/d} & \dots\dots\dots & a_n{}^{n-2/d} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Con esto, para calcular el determinante dado, basta calcular el (1), de orden $n-1$ y de su misma naturaleza; repitiendo sucesivamente las consideraciones hechas hasta aquí, llegaremos entonces a reducir el orden del determinante, hasta obtenerlo de segundo; en ese caso, el resultado será:

$$\begin{array}{r} (a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(a_n-a_1). \\ (a_3-a_2)\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(a_n-a_2). \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (a_{n-2}-a_{n-3})\cdot(a_{n-1}-a_{n-3})(a_n-a_{n-3}). \\ (a_{n-1}-a_{n-2})(a_n-a_{n-2})\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_{n-1}{}^{1/d} & a_n{}^{1/d} \end{vmatrix}\cdot\cdot \end{array}$$

el valor del determinante es:

$$(a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots(a_n-a_1)\cdot(a_3-a_2)(a_n-a_2)\ \dots\dots$$
$$\dots\ (a_{n-1}-a_{n-2}(\ (a_n-a_{n-2})\cdot(a_n-a_{n-1}).$$

resultado que, como vemos, coincide con el desarrollo del determinante de Vandermonde.

Andrés Valeiras
(Instituto Nac. del Profesorado de
B. Aires (2º curso))

TEMAS PROPUESTOS

42. (*Rectificado*). Encontrar la integral intermediaria, con una constante, de la ecuación diferencial de segundo orden:

$$\left[\ln \frac{1+y'}{y'}\right]' = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{x+y}$$

¿Qué problema de Dinámica tiene la integral de la misma forma?

S. Sispánov

44. Sea P un punto elíptico de una superficie S. Consideremos la superficie S_1 simétrica de S respecto del plano tangente en P. La superficie paralela exterior a S_1 a distancia h suficientemente pequeña determinará con S un volumen $V(h)$. Demostrar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{V(h)}{h^2} = \frac{\pi}{2} \sqrt{R_1 R_2}.$$

Hagamos girar S_1 un ángulo $\frac{\pi}{2}$ alrededor de la normal en el punto P y consideremos análogamente el volumen $V_1(h)$ limitado por S y la superficie paralela a distancia h a la superficie S_1 después del giro mencionado. Demostrar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{V_1(h)}{h^2} = \pi \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}.$$

R_1 y R_2 son los radios principales de curvatura de la superficie dada S en el punto P.

L. A. S.

45. Un fabricante de envases nos ha propuesto el tema siguiente: cortar una chapa rectangular en dos rectángulos, uno para sacar de él el fondo del envase y el otro para la superficie lateral del cilindro, de forma tal que la capacidad del mismo sea máxima.

46. Integrar la ecuación diferencial

$$\frac{y''}{y'(1-y')} + \frac{y-2xy'}{x(x+y)} = 0.$$

S. Sispánov

VARIA

15. *Sobre un ejemplo de Newton.*

Newton dió la explicación de su método de aproximación de las raíces de las ecuaciones numéricas con el ejemplo $x^3 - 2x - 5 = 0$, partiendo del valor $x_1 = 2$ aproximado por defecto con error menor que 0,1 y con la sustitución $x = 2 + y$ obtiene una nueva aproximación $y_1 = 0{,}1$ eliminando en el polinomio en y las potencias superiores a la primera; reiterando el procedimiento llega a $y = 0{,}1 + z$; $z = -0{,}0054 + u$; $u_1 = -0{,}00004853$ con lo que obtiene el valor de la raíz $x = 2{,}09455147$.

Aunque el método se encuentra substancialmente en *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* de 1666, aparece publicado por primera vez en el *Treatise of Algebra* de Wallis de 1685.

El procedimiento actual que consiste en ir calculando las aproximaciones sucesivas mediante la fórmula $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ sin transformar la ecuación inicial, fué dado por Joseph Raphson (1646-1715) en su *Analysis aequationum universalis* de 1690, donde, es claro, Raphson en lugar de $f(x_i)$ y $f'(x_i)$ toma polinomios. Con el ejemplo de Newton y partiendo del valor $x_1 = 2$ Raphson hubiera obtenido las aproximaciones sucesivas $x_2 = 2{,}1$; $x_3 = 2{,}0946$; $x_4 = 2{,}09455147$ calculando siempre $f(x_i)$ y $f'(x_i)$ como los dos últimos coeficientes del desarrollo de $f(x + x_i)$.

En cuanto al importante perfeccionamiento del método según el cual, dado el intervalo (a,b) tal que $a < x < b$ debe aplicarse la fórmula anterior en el extremo c tal que $f(c)f''(c) > 0$, él se debe a Fourier, quien lo dió en *Question d'Analyse algébrique* de 1818. Es curioso observar que aplicado este perfeccionamiento de Fourier al ejemplo de Newton, sabiendo que $2 < x < 2{,}1$ debe partirse del extremo $x_1 = 2{,}1$ y no de $x_1 = 2$ como lo hizo Newton. El conveniente ejemplo elegido salvó a Newton de que la tangente a la curva en el punto $(2; -1)$ cortara al eje fuera del intervalo $(2; 2{,}1)$.

» 4. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Una nueva demostración del teorema límite del Cálculo de Probabilidades. Condiciones necesarias y suficientes para que una función sea integral de Laplace.*
» 5. — NIKOLA OBRECHKOFF. *Sur la sommation absolue par la transformation d'Euler des séries divergentes.*
» 6. — RICARDO SAN JUAN. *Derivación e integración de series asintóticas.*
» 7. — Resolución adoptada por la U. M. A. en la cuestión promovida por el Sr. Carlos Biggeri.

VOLUMEN IV (Fascículo separado; 1939)

Nº 8. — F. AMODEO. *Origen y desarrollo de la Geometría Proyectiva.*

VOLUMEN V (Fascículos separados; 1940)

Nº 9. — CLOTILDE A. BULA. *Teoría y cálculo de los momentos dobles.*
» 10. — COTILDE A. BULA. *Cálculo de superficies de frecuencia.*

VOLUMEN VI (Fascículos separados; 1940 - 1942)

Nº 11. — R. FRUCHT. *Zur Geometria auf einer Fläche mit indefiniter Metrik (Sobre la Geometría de una superficie con métrica indefinida).*
» 12. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre una memoria del Prof. J. C. Vignaux.*
» 13. — F. TORANZOS. *Sobre las singularidades de las curvas de Jordan.*
» 14. — M. BALANZAT. *Fórmulas integrales de la intersección de conjuntos.*
» 15. — G. KNIE. *El problema de varios electrones en la mecánica cuantista.*
» 16. — A. TERRACINI. *Sobre la existencia de superficies cuyas líneas principales son dadas.*
» 17. — L. A. SANTALÓ. *Valor medio del número de partes en que una figura convexa es dividida por n rectas arbitrarias.*
» 18. — A. WINTNER. *On the iteration of distribution functions in the calculus of probability (Sobre la iteración de funciones de distribución en el cálculo de probabilidades).*
» 19. — E. FERRARI. *Sobre la paradoja de Bertrand.*
» 20. — J. BABINI. *Sobre algunas propiedades de las derivadas y ciertas primitivas de los polinomios de Legendre.*
» 21. — R. SAN JUAN. *Un algoritmo de sumación de series divergentes.*
» 22. — A. TERRACINI. *Sobre algunos lugares geométricos.*
» 23. — V. y A. FRAILE y C. CRESPO. *El lugar geométrico y lugares de puntos áreas en el plano.*
» 24. — R. FRUCHT. *Coronas de grupos y sus subgrupos, con una aplicación a los determinantes.*
» 25. — E. R. RAIMONDI. *Un problema de probabilidades geométricas sobre los conjuntos de triángulos.*

VOLUMEN VII (1940 - 1941)

Notas y memorias de J. BABINI, H. E. CALCAGNO, E. FERRARI, V. y A. FRAILE y C. CRESPO, G. KNIE, J. J. REBELLA, S. RIOS, R. SAN JUAN, L. A. SANTALÓ, A. TERRACINI.

Soluciones de temas propuestos. Bibliografía, Crónica, etc.

VOLUMEN VIII (1942)

Notas y memorias de J. BABINI, M. BALANZAT, R. FRUCHT, E. GASPAR, F. L. GASPAR, J. E. HERRERA, W. MÄCHLER, E. R. RAIMONDI, J. J. REBELLA, J. REY PASTOR, P. ROSSELL SOLER, M. SADOSKY, L. A. SANTALÓ.

Soluciones de temas propuestos, Bibliografía, Crónica, etc.

En 1942 la U. M. A. ha iniciado la publicación de una nueva serie de "Memorias y monografías" de las que han aparecido hasta ahora las siguientes:

Nº 1. — GUILLERMO KNIE, *Mecánica ondulatoria en el espacio curvo* (1 volumen de 152 páginas).

Además han aparecido tres cuadernos de *Miscelanea matemática.*

SUMARIO

Contribuyen especialmente al sostenimiento de las publicaciones de la UNION MATEMATICA ARGENTINA los siguientes

MIEMBROS PROTECTORES

Compañía Industrial del Norte de Santa Fe. Ingenio azucarero "Arno" (Villa Ocampo. F. C. S. F.). — Julio Rey Pastor (Buenos Aires). — T. G. Berlengieri y Cia. (Rosario). — Tricerri Hnos. (Rosario). — Manuel Guitarte (Buenos Aires). — Clotilde A. Bula (Rosario). — Elba R. Raimondi (Buenos Aires). — Fernando L. Gaspar (Rosario). — Carlos Isella (Rosario). — Pedro J. Tricerri (Rosario).