

REVISTA

DE LA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

(MIEMBRO DEL PATRONATO DE LA MATHEMATICAL REVIEWS)

REDACTADA por

J. Babini, (Director), M. Balanzat, J. Barral Souto, E. Corominas, Y. Frenkel,
F. L. Gaspar, A. González Domínguez, P. Pi Calleja, J. Rey Pastor, L. A.
Santaló, F. Toranzos y A. Valeiras



MIEMBROS TITULARES DE LA U. M. A.

J. BABINI (Santa Fe) (fundador). — M. BALANZAT (San Luis). — J. BARRAL SOUTO (B. Aires) (fundador) — C. A. BULA (Rosario) (fundador). — E. COROMINAS (Mendoza). — E. CHICHIZOLA (Rosario). — C. DIEULEFAIT (Rosario) (fundador). — FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES (B. Aires) (fundador). — FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS (Rosario) (fundador). — FACULTAD DE QUÍMICA INDUSTRIAL (Santa Fe) (fundador). — Y. FRENKEL (B. Aires). — E. GASPAR (Rosario) (fundador). — F. L. GASPAR (Rosario) (fundador). — J. GIANNONE (Rosario) (fundador). — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ (Buenos Aires) (fundador). — J. GONZÁLEZ GALE (Buenos Aires) (fundador). — M. GUITARTE (Buenos Aires) (fundador). — W. S. HILL (Montevideo) (fundador). — C. ISELLA (Rosario) (fundador). — H. MAGLIANO (La Plata). — OBSERVATORIO ASTRONÓMICO (La Plata). — J. OLGUIN (Rosario) (fundador). — P. PI CALLEJA (San Juan). — E. R. RAIMONDI (Buenos Aires) (fundador). — J. E. REYNAL (Buenos Aires). — J. REY PASTOR (Buenos Aires) (fundador). — E. L. SAMATÁN (Buenos Aires) (fundador). — L. A. SANTALÓ (Rosario) (fundador). — J. SORTHEIX (Tucumán) (fundador). — D. T. A. DE SPELUZZI (Buenos Aires) (fundador). — E. TERRADAS (La Plata) (fundador). — F. TORANZOS (La Plata).



BUENOS AIRES

1943

UNION MATEMATICA ARGENTINA

JUNTA DIRECTIVA

Presidente, José González Galé. Vicepresidente, Fernando L. Gaspar. Secretaria, Yanny Frenkel. Prosecretario, Juan B. Kervor. Tesorera, Clotilde A. Bula. Protesorera, Ester Ferrari. Vocales: José Sorthaix, Cortés Pla, Pedro Rossell Soler. José Barral Souto, Alberto González Domínguez, E. A. De Cesare.

DELEGADOS DE LA U. M. A.

En Tucumán, Prof. José Sorthaix. En Córdoba, Prof. Fernando Sánchez Sarmiento. En Santa Fe, Prof. José Babini. En Rosario, Prof. Fernando L. Gaspar. En San Luis, Prof. Manuel Balanzat. En La Plata, Prof. Fausto Toranzos. En Montevideo (R. O.), Prof. Walter S. Hill. En Asunción (Paraguay) Prof. Sergio Sispánov.

Para ingresar como miembro titular de la Unión Matemática Argentina, es necesaria la presentación del solicitante por dos socios fundadores, la admisión por la Junta, y el pago de una cuota de \$ 5. — m/n. mensuales o de \$ 50.— anuales.

Para ingresar como miembro adherente (con derecho a la Revista y a las Memorias en fascículos separados) es necesario el pago de una cuota de \$ 10.— anuales. Los pagos deberán efectuarse por cheque, giro u otro medio libre de gastos, a la orden de la Tesorera, Prof. Clotilde A. Bula, Moreno 364, Rosario.

Los señores miembros adherentes domiciliados en la Ciudad de Buenos Aires podrán, si lo prefieren, efectuar su pago en doce cuotas mensuales de \$ 1.00 m/n. cada una, que serán cobradas a domicilio.

Por ser la U. M. A. miembro del patronato de la *Mathematical Reviews* (sponsoring member), los socios de la U. M. A. tienen derecho a suscribirse a esa importante revista de bibliografía y crítica con 50 % de rebaja sobre el precio de suscripción que es de 13 dólares por año. Los socios de la U. M. A. pagarán por tanto sólo 6.50 dólares por año.

Los trabajos originales enviados para su publicación serán previamente analizados por un ponente, quien emitirá dictamen acerca de la novedad y corrección de sus resultados.

La impresión de las tiradas aparte, y las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

Abonnement annuel à l'étranger: 4.00 dollars (Etats-Unis).

Prière d'adresser toute la correspondance scientifique et administrative à l'adresse ci-dessous:

SR. SECRETARIO DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

PROF. YANNY FRENKEL

PERÚ 222, Buenos Aires (REP. ARGENTINA)

PUBLICACIONES DE LA U. M. A.

VOLUMEN I (1936 - 1937)

Notas y memorias de C. BIGGERI, J. FAYET, J. BABINI, F. CERNUSCHI, A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ, J. REY PASTOR, SIXTO RIOS.
Bibliografía. Extractos.

VOLUMEN II (1938 - 1939)

Notas y memorias de CLOTILDE A. BULA, T. LEVI-CIVITA, A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ, M. PETROVICH, C. BIGGERI, S. RIOS, F. L. GASPAR, J. REY PASTOR, YANNY FRENKEL, J. A. DEL PERAL, F. TORANZOS.
Bibliografía. Crónica. Revista de revistas, etc.

VOLUMEN III (Fascículos separados; 1938 - 1939)

- Nº 1. — GINO LORIA. *Le Matematiche in Ispagna e in Argentina.*
» 2. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre las series de funciones de Hermite.*
» 3. — MICHEL PETROVICH. *Remarques arithmétiques sur une équation différentielle du premier ordre.*

(Sigue en la contratapa)

CALCULO ALGEBRAICO DEL ENDECAGONO REGULAR

por SERGIO SISPÁNOV

El lado a_{11} de un polígono regular de 11 lados inscrito en una circunferencia unitaria, propuesto como tema de estudio (*), se determina por las fórmulas trigonométricas

$$a_{11} = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{11} = \sqrt{2 - 2 \cos \frac{2\pi}{11}}.$$

Para pasar a la expresión algebraica del mismo, se introducen la compleja

$$x = \cos \frac{2\pi}{11} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{11}$$

y su conjugada

$$\frac{1}{x} = \cos \frac{2\pi}{11} - i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{11},$$

cuya suma y es igual, evidentemente, a $2 \cos \frac{2\pi}{11}$, esto es,

$$y = x + \frac{1}{x} = 2 \cos \frac{2\pi}{11}.$$

La expresión anterior para a_{11} toma la forma

$$a_{11} = \sqrt{2 - y}. \quad (1)$$

La compleja x es raíz de la ecuación de la división del círculo

$$X_{11} = x^{10} + x^9 + \dots + x + 1 = 0$$

(*) Tema 43, vol. IX núm. 1, pág. 38.

que después de ser dividida por x^5 se convierte en

$$\left(x^5 + \frac{1}{x^5}\right) + \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + \dots + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0.$$

Teniendo en cuenta las relaciones

$$x + \frac{1}{x} = y, \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2, \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y,$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = y^4 - 4y^2 + 2, \quad x^5 + \frac{1}{x^5} = y^5 - 5y^3 + 5y,$$

que todas se deducen fácilmente de la primera, podemos representar la ecuación obtenida bajo la forma

$$y^5 + y^4 - 4y^3 - 3y^2 + 3y + 1 = 0 \quad (2)$$

lo que es una ecuación cíclica irreducible en y .

Para su resolución es necesario adjuntar al dominio de racionalidad dos radicales cuadrados, los mismos que figuran en la expresión para la raíz primitiva de la unidad de 5º grado, y un radical de índice 5.

Todas las raíces

$$y_k = x^k + x^{-k} = 2 \cos k \frac{2\pi}{11} \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5)$$

de la ecuación (2) son reales y por consiguiente, conforme al teorema de *Kronecker*, el último radical adjuntado debe tener ineludiblemente un valor complejo.

Se sabe que para la ecuación general de la división del círculo

$$X_p = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1 = 0,$$

siendo $p = 2n + 1$ número primo, la cantidad

$$y = x + x^{-1},$$

que no es sino un período 2-membre de *Gauss*, se determina

por la fórmula

$$ny = -1 + \sum_{j=1}^{j=n-1} \sqrt[n]{w(\varepsilon^j)}$$

en la que

$$\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$$

es raíz primitiva de la unidad de n-simo grado y

$$w(\varepsilon) = p \cdot \prod_{h=1}^{h=n-2} \psi_h(\varepsilon). \quad (3)$$

Las funciones $\psi_h(\varepsilon)$ se encuentran mediante las relaciones de *Cauchy* y *Jacobi*, y tienen la siguiente forma

$$\psi_h(\varepsilon) = \sum_{\mu=1}^{\mu=p-2} \varepsilon^{i n \mu} \cdot \mu - (h+1) i n \mu \cdot (\mu+1). \quad (4)$$

En el presente caso

$$p = 11 \quad \text{y} \quad n = 5,$$

y las fórmulas generales nos dan

$$5y = -1 + \sqrt[5]{w(\varepsilon)} + \sqrt[5]{w(\varepsilon^2)} + \sqrt[5]{w(\varepsilon^3)} + \sqrt[5]{w(\varepsilon^4)}. \quad (5)$$

La raíz primitiva de la unidad de 5º grado y sus potencias sucesivas se determinan por las relaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \cos 72^\circ + i \operatorname{sen} 72^\circ = \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{5} + i \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}) \\ \varepsilon^2 = \cos 144^\circ + i \operatorname{sen} 144^\circ = \frac{1}{4} (-1 - \sqrt{5} + i \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}) \\ \varepsilon^3 = \cos 216^\circ + i \operatorname{sen} 216^\circ = \frac{1}{4} (-1 - \sqrt{5} - i \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}) \\ \varepsilon^4 = \cos 288^\circ + i \operatorname{sen} 288^\circ = \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{5} - i \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}) \end{array} \right. \quad (6)$$

o lo que es lo mismo

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}) \cdot (1 + i\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}) \\ \varepsilon^2 = -\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}) \cdot (1 - i\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}) \\ \varepsilon^3 = -\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}) \cdot (1 + i\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}) \\ \varepsilon^4 = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}) \cdot (1 - i\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}). \end{array} \right.$$

La raíz primitiva ε verifica a las siguientes igualdades

$$\varepsilon^5 = 1 \quad \text{y} \quad \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 = -1 \quad (7)$$

a que vamos a recurrir con frecuencia en adelante.

Teniendo en cuenta que el producto (3), que se compone de 3 factores, el 2º factor se deduce del 1º elevando al cuadrado su argumento y que los factores equidistantes del origen y del extremo son iguales, es decir, que

$$\psi_2(\varepsilon) = \psi_1(\varepsilon^2) \quad \text{y} \quad \psi_3(\varepsilon) = \psi_1(\varepsilon),$$

podemos escribir

$$w(\varepsilon) = 11 \psi_1^2(\varepsilon) \cdot \psi_1(\varepsilon^2).$$

Cambiando sucesivamente ε en ε^2 , ε^3 , ε^4 , y disminuyendo las potencias de ε mayores que 5 con auxilio de la primera de las igualdades (7), deducimos de la última relación las siguientes:

$$\begin{aligned} w(\varepsilon^2) &= 11 \psi_1^2(\varepsilon^2) \cdot \psi_1(\varepsilon^4), & w(\varepsilon^3) &= 11 \psi_1^2(\varepsilon^3) \cdot \psi_1(\varepsilon), \\ w(\varepsilon^4) &= 11 \psi_1^2(\varepsilon^4) \cdot \psi_1(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Si para abreviar la escritura pondremos

$$\psi_1(\varepsilon) = \psi_1, \quad \psi_1(\varepsilon^2) = \psi_2, \quad \psi_1(\varepsilon^3) = \psi_3, \quad \psi_1(\varepsilon^4) = \psi_4$$

y

$$w(\varepsilon) = w_1, \quad w(\varepsilon^2) = w_2, \quad w(\varepsilon^3) = w_3, \quad w(\varepsilon^4) = w_4,$$

resultan

$$\begin{aligned} w_1 &= 11 \psi_1^2 \psi_2, & w_2 &= 11 \psi_2^2 \psi_4, \\ w_3 &= 11 \psi_3^2 \psi_1, & w_4 &= 11 \psi_4^2 \psi_3. \end{aligned} \tag{8}$$

Necesitamos únicamente la 1ª de las fórmulas (4) que toma la forma

$$\psi_1 = \sum_{\mu=1}^{\mu=9} \varepsilon^{\text{ind } \mu - 2 \text{ind}(\mu+1)}. \tag{9}$$

Las funciones ψ_2, ψ_3, ψ_4 se obtendrán de la función ψ_1 sustituyendo ε por sus potencias sucesivas $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4$.

Para hallar ψ_1 adoptemos $g=2$ por raíz primitiva del número primo $p=11$ y formemos la serie de congruencias por módulo 11

$$\begin{aligned} 2^0 &\equiv 1, & 2^1 &\equiv 2, & 2^2 &\equiv 4, & 2^3 &\equiv 8, & 2^4 &\equiv 5, \\ 2^5 &\equiv 10, & 2^6 &\equiv 9, & 2^7 &\equiv 7, & 2^8 &\equiv 3, & 2^9 &\equiv 6. \end{aligned}$$

De conformidad con la relación (9) se construye la siguiente tabla

μ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\text{ind } \mu$	0	1	8	2	4	9	7	3	6	5
$\text{ind } \mu \pmod{5}$	0	1	3	2	4	4	2	3	1	0
$\text{ind } (\mu + 1)$	1	3	2	4	4	2	3	1	0	
$2 \text{ind } (\mu + 1)$	2	1	4	3	3	4	1	2	0	
$\text{ind } \mu - 2 \text{ind } (\mu + 1)$	3	0	4	4	1	0	1	1	1	

La última fila de la misma nos da

$$\psi_1 = 2 + 4 \varepsilon + \varepsilon^3 + 2 \varepsilon^4 = 2 \varepsilon - 2 \varepsilon^2 - \varepsilon^3$$

lo que se comprueba fácilmente con auxilio de la 2ª de las igualdades (7).

Reemplazando ε por ε^2 y disminuyendo las potencias de ε mayores que 5, en virtud de la 1ª de las igualdades (7), encontramos

$$\psi_2 = -\varepsilon + 2 \varepsilon^2 - 2 \varepsilon^4.$$

Siguiendo este procedimiento podríamos hallar también

$$\psi_3 = -2 \varepsilon + 2 \varepsilon^3 - \varepsilon^4$$

y

$$\psi_4 = -\varepsilon^2 - 2 \varepsilon^3 + 2 \varepsilon^4.$$

Multiplicando ψ_2 por ψ_1 , y el resultado otra vez por ψ_1 , con ayuda de las relaciones (7), vamos a tener

$$\psi_1 \psi_2 = 10 \varepsilon + 6 \varepsilon^2 + 12 \varepsilon^3 + 3 \varepsilon^4$$

y

$$\psi_1^2 \psi_2 = 6 \varepsilon + 41 \varepsilon^2 + 16 \varepsilon^3 + 26 \varepsilon^4.$$

Si esta expresión se introduce en la 1ª de las fórmulas (8), se obtiene

$$w_1 = 11 (6 \varepsilon + 41 \varepsilon^2 + 16 \varepsilon^3 + 26 \varepsilon^4). \quad (10)$$

Cambiando aquí sucesivamente ε en ε^2 , ε^3 y ε^4 se llega a las expresiones para w_2 , w_3 y w_4 .

Haciendo uso de las igualdades (7) no es difícil deducir varias relaciones auxiliares, útiles para los cálculos posteriores.

Si se multiplican, por ejemplo, ψ_1 por ψ_4 y ψ_2 por ψ_3 , resulta

$$\psi_1 \psi_4 = \psi_2 \psi_3 = 11. \quad (11)$$

Como la compleja ψ_4 es conjugada a la compleja ψ_1 y la ψ_3 a la ψ_2 , entonces para su módulo tendremos

$$|\psi_j| = \sqrt[5]{11}.$$

De una manera análoga, multiplicando ordenadamente la 1ª de las relaciones (8) por la 4ª, y la 2ª por la 3ª, vamos a tener para el módulo

$$|w_j| = (\sqrt[5]{11})^5.$$

En ambos resultados el subíndice j pasa por la serie de valores

$$1, 2, 3, 4.$$

Ahora se puede representar la expresión (5) bajo la forma

$$5y = -1 + \sqrt[5]{w_1} + \sqrt[5]{w_2} + \sqrt[5]{w_3} + \sqrt[5]{w_4}, \quad (12)$$

siendo

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{w_1} &= \sqrt[5]{11 \psi_1^2 \psi_2}, & \sqrt[5]{w_2} &= \sqrt[5]{11 \psi_2^2 \psi_4}, \\ \sqrt[5]{w_3} &= \sqrt[5]{11 \psi_3^2 \psi_1}, & \sqrt[5]{w_4} &= \sqrt[5]{11 \psi_4^2 \psi_3}. \end{aligned}$$

Los cuatro radicales que figuran en la fórmula (12) no son independientes. En efecto, teniendo en cuenta las relaciones (11) es muy fácil comprobar que

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{w_1} \cdot (\sqrt[5]{w_2})^2 &= 11 \psi_2, & \sqrt[5]{w_2} \cdot (\sqrt[5]{w_4})^2 &= 11 \psi_4, \\ \sqrt[5]{w_3} \cdot (\sqrt[5]{w_1})^2 &= 11 \psi_1, & \sqrt[5]{w_4} \cdot (\sqrt[5]{w_3})^2 &= 11 \psi_3, \end{aligned}$$

y además

$$\sqrt[5]{w_1} \cdot \sqrt[5]{w_4} = \sqrt[5]{w_2} \cdot \sqrt[5]{w_3} = 11.$$

Valiéndonos de estos resultados podemos atribuir a la expresión (12) la siguiente forma

$$5y = -1 + \sqrt[5]{w_1} + \frac{\psi_4}{11} (\sqrt[5]{w_1})^2 + \frac{11\psi_1}{(\sqrt[5]{w_1})^2} + \frac{11}{\sqrt[5]{w_1}}$$

o bien la forma *abeliana*

$$5y = -1 + \sqrt[5]{w_1} + \frac{\psi_4}{11} (\sqrt[5]{w_1})^2 + \frac{\psi_3\psi_4}{11^2} (\sqrt[5]{w_1})^3 + \frac{\psi_3\psi_4^2}{11^3} (\sqrt[5]{w_1})^4.$$

En ambas formas figura un solo radical de índice 5, cuyos distintos valores conducen a diferentes raíces de la ecuación (2). Las fórmulas generales serán

$$\begin{aligned} 5y_l &= -1 + \varepsilon^l \cdot \sqrt[5]{w_1} + \varepsilon^{2l} \cdot \sqrt[5]{w_2} + \varepsilon^{3l} \cdot \sqrt[5]{w_3} + \varepsilon^{4l} \cdot \sqrt[5]{w_4} = \\ &= -1 + \varepsilon^l \cdot \sqrt[5]{w_1} + \varepsilon^{2l} \cdot \frac{\psi_4}{11} (\sqrt[5]{w_1})^2 + \varepsilon^{3l} \cdot \frac{11\psi_1}{(\sqrt[5]{w_1})^2} + \varepsilon^{4l} \cdot \frac{11}{\sqrt[5]{w_1}} = \\ &= -1 + \varepsilon^l \cdot \sqrt[5]{w_1} + \varepsilon^{2l} \cdot \frac{\psi_4}{11} (\sqrt[5]{w_1})^2 + \\ &\quad + \varepsilon^{3l} \cdot \frac{\psi_3\psi_4}{11^2} (\sqrt[5]{w_1})^3 + \varepsilon^{4l} \cdot \frac{\psi_3\psi_4^2}{11^3} (\sqrt[5]{w_1})^4, \\ &\quad (l=0, 1, 2, 3, 4). \end{aligned}$$

De ellas nos interesan exclusivamente la primera que determina la raíz $y=y_0$ en una forma más sencilla, simétrica y cómoda para los cálculos.

Despejando y y sustituyendo, luego, en la expresión (10) para w_1 y en las otras similares para w_2, w_3, w_4 , las potencias $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4$, por sus iguales (6) resulta

$$y = \frac{1}{5} (-1 + \sqrt[5]{w_1} + \sqrt[5]{w_2} + \sqrt[5]{w_3} + \sqrt[5]{w_4}). \quad (13)$$

en donde

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1 = \frac{11}{4}(-89 - 25\sqrt{5} - 20i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + 25i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}) \\ w_2 = \frac{11}{4}(-89 + 25\sqrt{5} - 20i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - 25i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}) \\ w_3 = \frac{11}{4}(-89 + 25\sqrt{5} + 20i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + 25i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}) \\ w_4 = \frac{11}{4}(-89 - 25\sqrt{5} + 20i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - 25i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}) \end{array} \right.$$

o lo que es lo mismo

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1 = \frac{11}{4}[-89 - 25\sqrt{5} - 5i(7 - \sqrt{5})\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}] \\ w_2 = \frac{11}{4}[-89 + 25\sqrt{5} - 5i(7 + \sqrt{5})\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}] \\ w_3 = \frac{11}{4}[-89 + 25\sqrt{5} + 5i(7 + \sqrt{5})\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}] \\ w_4 = \frac{11}{4}[-89 - 25\sqrt{5} + 5i(7 - \sqrt{5})\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}]. \end{array} \right. \quad (14)$$

Entre los radicales cuadrados que figuran en las igualdades (14) existe la siguiente relación

$$\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

Reemplazando en la expresión (1) la cantidad y por su igual (13) llegamos a la fórmula definitiva

$$a_{11} = \sqrt{\frac{1}{5}(11 - \sqrt[5]{w_1} - \sqrt[5]{w_2} - \sqrt[5]{w_3} - \sqrt[5]{w_4})}. \quad (15)$$

Comprobemos numéricamente el resultado obtenido. A este objeto calculamos, primero, valores numéricos de

$$89 + 25\sqrt{5} = 144,901701; \quad 5(7 - \sqrt{5}) = 23,819660;$$

$$\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} = 0,726543$$

$$89 - 25\sqrt{5} = 33,098299; \quad 5(7 + \sqrt{5}) = 46,180340;$$

$$\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = 3,077684.$$

Luego, por las relaciones (14) encontramos

$$w_1 = (\sqrt{11})^5 \cdot (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha), \quad w_2 = (\sqrt{11})^5 \cdot (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta),$$

$$w_3 = (\sqrt{11})^5 \cdot (\cos \beta - i \operatorname{sen} \beta), \quad w_4 = (\sqrt{11})^5 \cdot (\cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha),$$

siendo $\alpha = 186^\circ 48' 38'' 6$ y $\beta = 256^\circ 53' 27'' 0$.

Extrayendo raíces se obtienen

$$\sqrt[5]{w_1} = \sqrt{11} \cdot \left(\cos \frac{\alpha}{5} + i \operatorname{sen} \frac{\alpha}{5} \right),$$

$$\sqrt[5]{w_2} = \sqrt{11} \cdot \left(\cos \frac{\beta}{5} + i \operatorname{sen} \frac{\beta}{5} \right),$$

$$\sqrt[5]{w_3} = \sqrt{11} \cdot \left(\cos \frac{\beta}{5} - i \operatorname{sen} \frac{\beta}{5} \right),$$

$$\sqrt[5]{w_4} = \sqrt{11} \cdot \left(\cos \frac{\alpha}{5} - i \operatorname{sen} \frac{\alpha}{5} \right),$$

en donde

$$\frac{\alpha}{5} = 27^\circ 21' 43'' 7 \quad \text{y} \quad \frac{\beta}{5} = 51^\circ 22' 41'' 4.$$

De manera que

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{w_1} + \sqrt[5]{w_2} + \sqrt[5]{w_3} + \sqrt[5]{w_4} &= 2\sqrt{11} \left(\cos \frac{\alpha}{5} + \cos \frac{\beta}{5} \right) = \\ &= 2 \cdot 3,316625 \cdot 1,418993 = 9,412536. \end{aligned}$$

Por la fórmula (13) hallamos

$$y = 1,682507 \dots$$

Para determinar a_{11} calculemos primero la expresión

$$\frac{1}{5} (11 - \sqrt[5]{w_1} - \sqrt[5]{w_2} - \sqrt[5]{w_3} - \sqrt[5]{w_4}) = 0,317493.$$

En virtud de la igualdad (15) vamos a tener

$$a_{11} = \sqrt{0,317493} = 0,563465 \dots$$

Los cálculos trigonométricos directos nos dan

$$\begin{aligned} y &= 2 \cos \frac{360^\circ}{11} = 2 \cos 32^\circ 43' 38'' 2 = \\ &= 2 \cdot 0,8412535 = 1,682507 \dots \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2 \operatorname{sen} \frac{180^\circ}{11} = 2 \operatorname{sen} 16^\circ 21' 49'' 1 = \\ &= 2 \cdot 0,2817326 = 0,563465 \dots \end{aligned}$$

Hagamos constar de paso que el valor

$$a_{11} = 0,5636 \dots$$

hallado por la fórmula aproximada

$$a_m = \frac{4}{m} \cdot \frac{11m^2 - 12}{7m^2 + 4},$$

haciendo en ella $m=11$, no difiere mucho del resultado más exacto recién obtenido.

Las sumas

$$y_k = x^k + x^{-k}$$

fueron introducidas en la teoría de la división del círculo por el matemático francés *N. Vandermonde* en el año 1770. Para el polígono regular de 11 lados él encontró

$$y = -\frac{1}{5} (1 + \sqrt[6]{\Delta'} + \sqrt[6]{\Delta''} + \sqrt[6]{\Delta'''} + \sqrt[6]{\Delta''''}),$$

siendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta' = \frac{11}{4} (89 + 25 \sqrt{5} - 5 \sqrt{-5} + 2 \sqrt{5} + 45 \sqrt{-5 - 2 \sqrt{5}}) \\ \Delta'' = \frac{11}{4} (89 + 25 \sqrt{5} + 5 \sqrt{-5} + 2 \sqrt{5} - 45 \sqrt{-5 - 2 \sqrt{5}}) \\ \Delta''' = \frac{11}{4} (89 - 25 \sqrt{5} - 5 \sqrt{-5} + 2 \sqrt{5} - 45 \sqrt{-5 - 2 \sqrt{5}}) \\ \Delta'''' = \frac{11}{4} (89 - 25 \sqrt{5} + 5 \sqrt{-5} + 2 \sqrt{5} + 45 \sqrt{-5 - 2 \sqrt{5}}). \end{array} \right.$$

Comparando estos resultados con las igualdades (13) y (14) vemos que las expresiones para Δ' y Δ'' son erróneas.

Tampoco son correctas las fórmulas para w e y obtenidas por el Prof. *Paul Bachmann* en su libro «Die Lehre von der Kreisteilung» (pág. 98).

Sergio Sispánov

Asunción, Paraguay.

TEOREMA DE JORDAN PARA LAS VARIEDADES POLIEDRICAS CERRADAS

por J. REY PASTOR

El interesante artículo del profesor Beppo Levi en las «*Mathematicae Notae*», ha puesto de actualidad el viejo problema de la división del plano por una curva cerrada de Jordan y por ende la generalización de Brouwer y Lebesgue para el espacio E_n , cuyas demostraciones no pueden considerarse como satisfactorias, por presentar puntos oscuros a través de su largo desarrollo. Entendiendo que el principio de economía de pensamiento aconseja preferir aquellas demostraciones de Geometría plana que señalan el camino para extenderlas a los espacios pluridimensionales, expusimos hace años en nuestros cursos una demostración del teorema de Jordan para curvas planas que podría extenderse a E_n . Mucho más sencillo es naturalmente el caso de polígonos planos, para los cuales dimos una breve demostración que sin dificultad se extiende a las variedades poliédricas cerradas de cualquier número de dimensiones; y al informarse de ellas el profesor Levi nos hizo el honor de sugerirnos su publicación.

Existiendo, como es sabido, demostraciones del teorema general relativo a las variedades curvas, que presuponen conocida la demostración para las variedades poliédricas, y no siendo satisfactorias las existentes, será quizás útil acceder a esta exhumación de nuestros viejos apuntes de clase, por si sugieren el camino para abordar el teorema general de Brouwer y Lebesgue.

Quienes crean problema demasiado sencillo el abordado en esta nota y supongan la existencia de alguna satisfactoria solución ya incorporada a los textos, harán bien en estudiar las nada simples ni breves demostraciones de *B. Levi* en *Math. Notae* (1941) o la de *H. Hahn* en *Monatshefte* (1908) relativas al caso del polígono plano, problema que exige ya, como reconoce el propio Hahn, «einen recht langwierigen, recht kunstvollen Beweis^(*). En cuanto al caso tridimensional, la dificul-

(*) *Krise und Neuaufbau in den Exakten Wissenschaften*, Wien 1933. Die *Krise der Anschauung*, pág. 57.

tad sube de punto, como subraya el propio Hahn, quien no alude siquiera al de E^n , naturalmente más complicado, y por ello prefieren los autores citados al pie(*) detenerse en el caso tridimensional. Conviene advertir que la demostración que damos para E^n no presupone la del plano; pero hemos antepuesto ésta por conveniencia didáctica, dado el origen de esta nota.

Poligonales cerradas en E_2

Tracemos por todos los vértices paralelas a una misma dirección, distinta de las de todos los lados, la cual adoptaremos como dirección del eje x ; y sean $y = y_i$ ($y_1 < y_2 < \dots < y_n$) las ecuaciones de estas rectas. Cada lado AB de la poligonal tiene sus extremos en dos de estas rectas, e introduciendo vértices intermedios puede suponerse que cada dos vértices consecutivos de la poligonal están en rectas consecutivas.

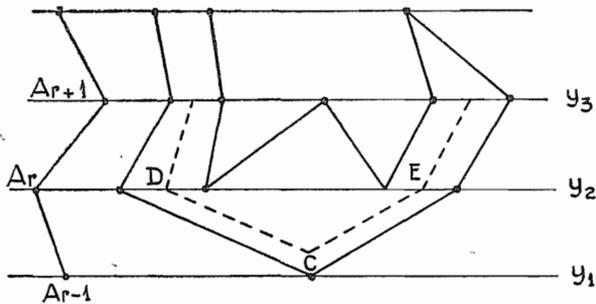


Fig. 1

Los dos lados $A_{r-1}A_r$ y A_rA_{r+1} que concurren en el vértice A_r pueden ocupar una de estas posiciones:

- a) Están separados por la recta en que está A_r , es decir, A_{r-1}, A_{r+1} pertenecen uno a la recta anterior y otro a la posterior.

(*) Una demostración, muy larga y minuciosa para el caso de tres dimensiones, dió LENNES, *Amer. Journ. of Math.*, 33 (1911) pág. 50-55; otra es de VEULEN, *Trans. Amer. Math. Soc.* 14 (1913) p. 65-72. Finalmente. LILLY HAHN en *Monatshefte Math. Phys.* 25 (1914) p. 303-320.

b) A_{r-1} y A_{r+1} están en la recta anterior o ambos en la posterior.

Cada dos rectas consecutivas $y=y_r$, $y=y_{r-1}$, limitan una zona, dividida en trapecios y triángulos por los lados que tienen sus vértices en ellas, más dos semizonas infinitas; los tres tipos pueden incluirse bajo el nombre genérico de *trapecios*.

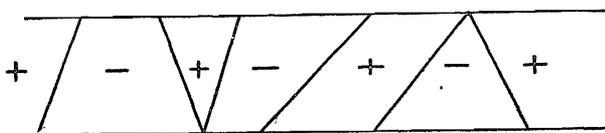


Fig. 2

Como toda poligonal cerrada es cortada en número par de puntos por cada secante que no pase por ningún vértice, resulta *impar* el número de estos trapecios; y si se atribuye signo + a uno de los trapecios infinitos, dando alternativamente los signos - + a los trapecios sucesivos, resultará signo + en el otro trapecio infinito.

Estos signos afectan también a los segmentos de las rectas y_r , pero no a los lados de la poligonal, cada uno de los cuales es común a dos trapecios de signo distinto.

Veamos que a cada segmento de las rectas y_r corresponde el mismo signo, partiendo de la zona $y_{r-1}y_r$ o de la $y_r y_{r+1}$.

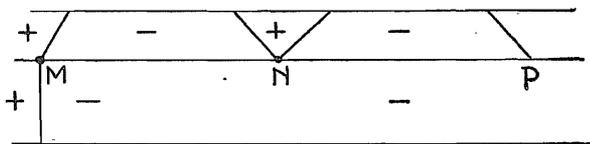


Fig. 3

En los segmentos infinitos este signo es + en ambas; suponiendo a cordes los signos hasta llegar a un vértice M del tipo a) los trapecios siguientes tienen signo opuesto a los precedentes y por tanto iguales entre sí.

Si el vértice es de tipo b) como el N de la figura, en una de las zonas los segmentos MN y NP pertenecen al mismo trapecio, mientras en la otra hay un triángulo intermedio

de vértice N , que produce dos cambios de signo y por tanto el segmento NP tiene en los dos trapecios colindantes el mismo signo que el MN .

Puesto que cada trapecio de una zona es colindante por cada base (una sola en el caso de triángulo) con otro trapecio, la suma de ambos es un recinto.

Prescindiendo de los puntos de la poligonal quedan, pues, los puntos del plano clasificados en dos conjuntos: X^+ suma de los trapecios de signo $+$ (a los que agregamos los puntos exteriores a todas las zonas) y el conjunto X^- , suma de los trapecios de signo $-$. Veamos que ambos son conexos. Esto resulta como consecuencia de tener un solo contorno; pero es preferible no presuponer nada de la teoría de conjuntos, salvo las definiciones primeras para no salir del campo de la geometría elemental.

Dados dos trapecios cualesquiera de signo $-$, sea $A_r A_{r+1}$ un lado de la poligonal perteneciente a uno y $A_{s-1} A_s$ un lado perteneciente al otro. Estos dos lados dividen a la poligonal cerrada en dos poligonales parciales abiertas. Sea una de ellas:

$$P = A_r A_{r+1} A_{r+2} \dots A_{s-1} A_s$$

y por cada vértice de éstos, de clase a), hay un segmento con signo $-$, el cual es por tanto común a dos trapecios contiguos. Si el vértice es de tipo b) y los dos segmentos que parten de él tienen signo $+$, el lado opuesto en el triángulo a que pertenece tiene signo $-$.

El primer caso se presenta en la fig. 3, y el segundo en la fig. 4.

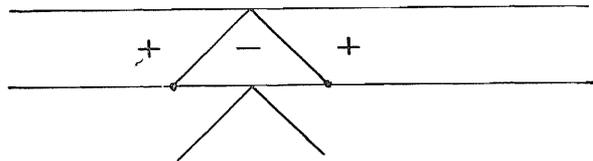


Fig. 4

En ambos casos, la suma de los trapecios contiguos a los lados de dicha poligonal P es, por inducción, un recinto co-

nexo, X^- , al cual pertenecen los dos trapecios arbitrariamente dados.

Igualmente resulta la conexión del conjunto $X^+ (*)$.

Nota: Todavía cabe no utilizar siquiera el concepto de recinto, pues elegido un punto interior a cada trapecio y unido con los puntos medios de sus bases resulta una poligonal perteneciente al conjunto X^- cuyos extremos son dos puntos prefijados de este conjunto.

Solamente al llegar a un triángulo de signo — es preciso modificar levemente la construcción uniendo el punto interior C , con los puntos medios de los segmentos extremos de la base opuesta como se indica en la figura primera.

Hipersuperficies poliedricas cerradas de E_n

Como todo poliedro de cualquier número de dimensiones se puede descomponer en *simples* (**), podemos suponer que la hipersuperficie poliédrica S^{n-1} tiene caras simples, esto es poliedros P^{n-1} de n vértices. Así por ejemplo las caras de las superficies poliédricas de E^3 serán triángulos.

Elijamos un eje x no paralelo a ninguna de estas caras y proyectemos S^{n-1} en esa dirección sobre el E^{n-1} perpendicular a X_n . La proyección de cada $(n-1)$ -cara es otro $(n-1)$ -simple, pero dentro de él o en su contorno puede haber proyecciones A'_r de otros vértices A_r no pertenecientes a esa $(n-1)$ -cara y en ambos casos adoptamos como nuevos vértices de P los puntos de la $(n-1)$ -cara que tiene esas mismas proyecciones A'_r .

Así logramos que las proyecciones de las $(n-1)$ -caras sean $(n-1)$ -simples tales que dos cualesquiera carecen de puntos comunes; o sólo tienen comunes varios vértices y el simple de contorno que éstos determinan; o bien coinciden.

Consideremos uno de los espacios prismáticos Q^n proyectante de una $(n-1)$ -cara c_1 que también lo es de otras c_2, c_3, \dots, c_{2p} ($p \geq 1$), puesto que siendo cerrada la hipersuperficie P_{n-1} , cada recta la corte en un número par de puntos.

(*) Quizás pueda parecer preferible otro método que después seguimos en el caso E_n ; en la duda exponemos ambos.

(**) Recordemos que un *poliedro simple* o brevemente, un *simple* en E_n es el poliedro que tiene $n+1$ vértices linealmente independientes. Sus $(n+1)$ caras son los simples que determinan los diversos grupos de n vértices.

Dos de estas caras c_r carecen de puntos comunes o bien tienen un vértice o dos y el segmento que determinan, o 3 y el triángulo que forman, etc.; y a lo más tienen común un $(n-2)$ -simple, siendo el vértice restante distinto en ambas. En todo caso carecen de puntos comunes interiores y si las ecuaciones de los $(n-1)$ -planos que los contienen son: $x_n = A$; $x_n = B$ (*) la inequación $A \leq x_n \leq B$ (o bien \geq) representa un recinto parcial del espacio prismático Q^n .

Este queda así descompuesto por los simples C_1, C_2, \dots, C_{2p} en $(2p-1)$ prismas finitos, más dos prismas infinitos.

Asignaremos a estos prismas infinitos signo $+$ y a los prismas finitos intermedios signos alternados, $-, +, -, +, \dots, -$.

Las caras laterales de este n -espacio prismático Q^n son a su vez $(n-1)$ -espacios prismáticos Q^{n-1} que están divididos por los $(n-2)$ simples de contorno de las caras C_r en $(n-1)$ prismas de los cuales son finitos los $(2p-1)$ intermedios e infinitos los dos extremos.

Consideremos dos n -espacios prismáticos Q^n, Q^m colindantes con un mismo $(n-1)$ -espacio prismático Q^{n-1} .

Los dos n -prismas infinitos Q^n, Q^m correspondientes al sentido $X_n \rightarrow -\infty$ tienen signo $+$ e inducen por tanto signo $+$ en el $(n-1)$ -prisma infinito común Q^{n-1} , pero es preciso distinguir dos casos al llegar al primer simple C^{n-2} sección de Q^{n-1} , según las posiciones de los dos simples $C^{n-1}; C'^{n-1}$ que forman las caras colindantes con él.

I) El n -simo vértice de C^{n-1} y el n -simo de C'^{n-1} no pertenecientes a C_1^{n-2} están en distintas rectas proyectantes, es decir, los simples C^{n-1}, C'^{n-1} están en distinto espacio prismático Q^n, Q^m .

II) Dichos n -simos vértices están en el mismo rayo proyectante, o sea: los simples C^{n-1}, C'^{n-1} son secciones del mismo espacio prismático Q^n .

En el caso I, los segundos prismas Q_2, Q_2^m colindantes por $C_1^{n-1}, C_1'^{n-1}$ con los Q_1^n, Q_1^m que tienen signo $+$, tienen ambos signos $-$, es decir, inducen el mismo signo en el segundo $(n-2)$ -prisma Q_2^{n-2} que es común a ambos $(n-1)$ -prismas Q_2^{n-1}, Q_2^{m-1} .

(*) A y B son funciones lineales de x_1, x_2, \dots, x_{n-1} .

En el caso II el segundo n -prisma Q_2 tiene bases C_1^{n-1} , $C_1'^{n-1}$ que por estar fuera del espacio prismático Q^n no interrumpen la continuidad del primer prisma de éste, el cual tiene signo $+$ y por tanto induce en Q_2^{n-1} signo $+$; mientras que en Q^n el prisma Q_2^n limitado por C_1^{n-1} ; $C_1'^{n-1}$ tiene signo $-$ que no influye en los prismas de Q^{n-1} , por no tener en él cara de dimensión $n-1$ y es el siguiente Q_3^n con signo $+$ el que induce signo $+$ en Q_2^{n-1} , lo mismo que partiendo de Q^n .

Como el razonamiento es recurrente resulta que si hay coherencia de signos inducidos hasta Q_r^{n-1} , la hay también en el siguiente Q_{r+1}^{n-1} y por tanto en todos.

Veamos ahora que los prismas finitos de signo $-$ forman un recinto si se incluyen los puntos de los prismas Q_r^{n-1} comunes, pero se excluyen los puntos de las caras C_r^{n-1} . Tal conjunto está formado desde luego, por puntos interiores y falta probar su conexión.

Observamos ante todo que cada prisma tiene como bases dos caras C_r^{n-1} , C_s^{n-1} de S^{n-1} y recíprocamente cada cara es base de un solo prisma con signo $-$.

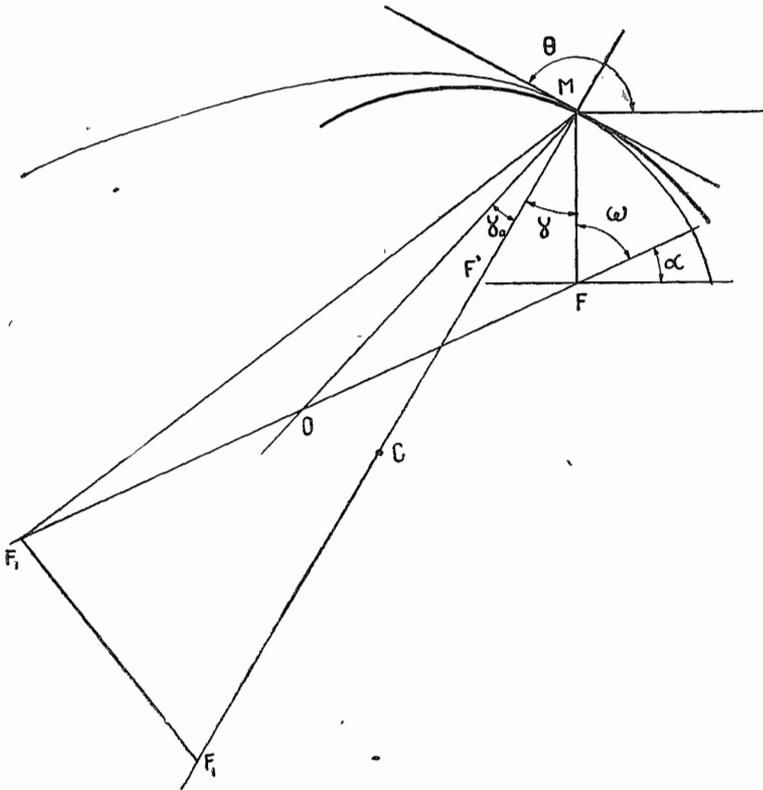
Dos caras contiguas con una C_r^{n-2} común, determinan un solo prisma (caso II) o bien dos prismas con una cara C_r^{n-1} (caso I).

En ambos casos, la suma de prismas cuyas bases son caras contiguas de S^{n-1} forman conjunto conexo.

Como todo prisma tiene una cara de S^{n-1} y dos caras cualesquiera de S^{n-1} pueden considerarse como primera y última de una cadena de caras contiguas, cada una con la siguiente, resulta que la suma de todos los prismas provistos de signo $-$ es un conjunto conexo que se llama *interior a S^{n-1}* . Y análogamente la suma de los que llevan signo $+$ más el conjunto complementario del espacio prismático ΣQ_r^n forma un conjunto conexo que se llama *exterior a S^{n-1}* .

SOBRE LAS CONICAS DE MAXIMO CONTACTO

En el número anterior de esta Revista, *Luis A. Santaló* publicó una solución al Tema propuesto N.º 29, en el que se pedía la determinación de la excentricidad y del parámetro de la cónica osculatriz en un punto ordinario de una curva plana. A continuación exponemos otra solución de ese tema, que difiere de la anterior por la elección de los parámetros utilizados para resolver la cuestión, y a la que agregamos algunas propiedades de las cónicas de máximo contacto.



Sea $M(x, y)$ un punto ordinario de una curva plana, que consideraremos afijo del número $z = x + iy$. Si ζ es, a su

vez, el número cuyo afijo es el foco F de la cónica de máximo contacto con la curva en M , será

$$z = \zeta + \frac{p e^{i(\omega + \alpha)}}{1 - k \cos \omega} \quad (1)$$

siendo p y k el parámetro y la excentricidad, respectivamente, de la cónica y α y ω los ángulos que forman, respectivamente, el eje de la cónica con el eje de las abscisas, y la semirrecta FM con el eje de la cónica.

Si se diferencia la (1) (α, p, k, ζ constantes) para eliminar ζ

$$dz = \frac{p i e^{i(\omega + \alpha)} (1 - k \cos \omega + i k \operatorname{sen} \omega)}{(1 - k \cos \omega)^2} d\omega = e^{i\vartheta} ds$$

siendo ds el elemento de arco y ϑ el ángulo que forma la tangente a la curva en M con el eje de las abscisas.

De la última fórmula se deduce

$$(1 - k \cos \omega)^2 ds = p (1 + k^2 - 2k \cos \omega)^{1/2} d\omega \quad (2)$$

y

$$\omega + \alpha + \pi - \left(\vartheta + \frac{\pi}{2} \right) = \gamma \quad (3)$$

siendo γ un ángulo tal que

$$\frac{\operatorname{sen} \gamma}{-k \operatorname{sen} \omega} = \frac{\cos \gamma}{1 - k \cos \omega} \quad (4)$$

es decir: el ángulo que forma la semirrecta MF con la normal a la curva en el punto M .

Si indicamos, desde ahora en adelante, con ápices las derivadas respecto del arco, tendremos de la (3) y (4)

$$\gamma' = \frac{k(k - \cos \omega)}{1 + k^2 - 2k \cos \omega} \omega' = \omega' - \vartheta' \quad (5)$$

y eliminando ω' entre estas ecuaciones y la (2), obtenemos

$$\vartheta' = \frac{(1 - k \cos \omega)^3}{p (1 + k^2 - 2k \cos \omega)^{3/2}} = \frac{\cos^3 \gamma}{p} = \frac{1}{\rho} \quad (6)$$

siendo ρ el radio de curvatura de la curva en M , y

$$\gamma' = \frac{k(k - \cos \omega)(1 - k \cos \omega)^2}{p(1 + k^2 - 2k \cos \omega)^{3/2}} = \frac{k(k - \cos \omega)}{\rho(1 - k \cos \omega)}. \quad (7)$$

Introduzcamos ahora dos nuevos parámetros u y v dados por

$$u = \operatorname{tg} \gamma; \quad v = \rho \gamma'$$

y como M estará siempre en un arco de cónica para el cual γ es creciente será $v \geq 0$. De la (6) se deduce inmediatamente el valor del parámetro p

$$p = \frac{\rho}{(1 + u^2)^{3/2}} \quad (8)$$

mientras que si se introducen u y v en la (4) y (7) se obtiene

$$1 - k \cos \omega = \frac{1 - k^2}{1 - v^2}; \quad -k \operatorname{sen} \omega = u \frac{1 - k^2}{1 - v^2}$$

y eliminando ω

$$(1 + k^2)(u^2 + v^2 - k^2(1 + u^2)) = 0$$

$$k^2 = \frac{u^2 + v^2}{u^2 + 1}. \quad (9)$$

Para determinar los valores de u y v partiendo de los elementos del punto M , consideremos, ante todo, que de la (6) y de sus definiciones

$$\rho' = 3p \operatorname{tg} \gamma \cos^{-3} \gamma, \quad \gamma' = 3uv \quad (10)$$

mientras que si derivamos u y v obtenemos

$$\rho u' = \frac{v}{\cos^2 \gamma} = v(1 + u^2)$$

$$\rho v' = \rho \omega' \frac{(1 - k^2)k \operatorname{sen} \omega}{(1 - k \cos \omega)^2} = \frac{\rho(1 - k^2)k \operatorname{sen} \omega}{p(1 + k^2 - 2k \cos \omega)^{1/2}}$$

$$= -\frac{u(1 - k^2)}{1 + u^2} = -u(1 - v^2)$$

de donde

$$\rho\rho'' = 3\rho(uv' + u'v) = 3(v^2 - u^2 + 2u^2v^2) = 3(v^2 - u^2) + \frac{2}{3}\rho'^2$$

y finalmente

$$2\rho'^2 - 3\rho\rho'' = 9(u^2 - v^2) \quad (11)$$

Si expresamos, finalmente, los valores de ω , α y ζ en función de u y v llegamos después de algunas sustituciones y transformaciones a las fórmulas

$$e^{i\omega} = \frac{u^2 - v - iu(1+v)}{(u^2 + v^2)^{1/2} (1+u^2)^{1/2}} \quad (12)$$

$$e^{i(\alpha - \delta)} = \frac{u + iv}{(u^2 + v^2)^{1/2}} \quad (13)$$

$$\zeta = z + \frac{\rho iz'}{(1-ui)(1+v)} \quad (14)$$

donde sustituimos $e^{i\delta}$ por z' .

Las expresiones 8 a 14 permiten resolver todos los problemas relacionados con los elementos y ubicación de la cónica de máximo contacto en un punto M de una curva plana.

Así: los valores de los semiejes (cuando existen) a y b y de la distancia focal c están dados por

$$a^2 = \frac{p^2}{(1-k^2)^2} = \frac{\rho^2}{(1+u^2)(1-v^2)^2}$$

$$b^2 = \frac{p^2}{1-k^2} = \frac{\rho^2}{(1+u^2)^2(1-v^2)}$$

$$c^2 = \frac{p^2 k^2}{(1-k^2)^2} = \frac{\rho^2(u^2 + v^2)}{(1+u^2)^2(1-v^2)^2}$$

y el segundo foco y el centro son afijos de

$$\zeta_1 = z + \frac{\rho iz'}{(1+ui)(1-v)} \quad (15)$$

$$\zeta_0 = z + \frac{\rho iz'(1+iu)}{(1+u^2)(1-v^2)} \quad (16)$$

respectivamente. La última fórmula nos da, además, una interpretación geométrica de ρ' , pues de ella se deduce fácilmente que el ángulo γ_0 que forma la normal en M con la semirrecta que va de M al centro de la cónica es tal que

$$\operatorname{tg} \gamma_0 = uv = \frac{\rho'}{3}.$$

La fórmula (13) da una nueva interpretación geométrica de los parámetros u y v , como números proporcionales al coseno y seno, respectivamente, del ángulo formado por el eje de la cónica con la tangente en el punto. Podemos obtener otra interpretación de v considerando sobre la normal MC el centro de curvatura C y los puntos F' y F'_1 obtenidos levantando desde los focos F y F' las perpendiculares a los radios vectores.

De la (14) obtenemos

$$1 + v = \frac{|\zeta - z|}{\rho \cos \gamma} = \frac{\overline{MF'}}{\overline{MC}} = 1 - \frac{\overline{CF'}}{\overline{CM}} \quad \therefore \quad v = - (CMF')$$

y de igual modo

$$v = (CMF'_1)$$

de donde, v es, con distinto o igual signo, la razón simple entre el centro de curvatura, el punto y el pie de la perpendicular levantada desde uno u otro de los focos, respectivamente. De aquí resulta la propiedad, ya conocida⁽¹⁾ de las cónicas: $(CMF_1F'_1) = -1$, es decir: el grupo formado por un punto de una cónica, el centro de curvatura y las intersecciones con la normal de las perpendiculares levantadas desde los focos a los radios vectores, es armónico. En la parábola, entonces, esa intersección es el punto medio entre el punto de la cónica y el centro de curvatura.

Entre los problemas que podrán resolverse con las fórmulas (8) a (14) podemos considerar:

⁽¹⁾ Es la llamada construcción de Engler para el centro de curvatura. Véase: L. MACK. *Archiv. Math. Phys.* I 61 (1877) 385.

a) *Determinar la cónica de máximo contacto en un punto.*
 Las fórmulas (10) y (11) con la condición $v \geq 0$ permiten determinar siempre un solo par de valores u y v , con el cual se determinan todos los demás elementos de la cónica. Esa cónica será elipse, parábola o hipérbola, según sea $k \leq 1$ o lo que es lo mismo $v \leq 1$. Eliminando u entre (10) y (11) esta condición se cumple para

$$3 \rho \rho'' \leq \rho'^2 + 9.$$

Si la cónica tiene centro, su ecuación reducida será

$$\frac{x^2}{1+u^2} + \frac{y^2}{1-v^2} = \frac{\rho^2}{(1+u^2)^2(1-v^2)^2}$$

y si es parábola, ella es

$$y^2 = \frac{2 \rho x}{(1+u^2)^{3/2}}.$$

Si el punto M de la curva es un vértice ($\rho' = 0$) será $uv = 0$ y $v^2 - u^2 = \frac{\rho \rho''}{3}$; de donde: si $\rho'' > 0$; $u = 0$, $v^2 = \frac{\rho \rho''}{3}$; la cónica será elipse, parábola o hipérbola, según sea $\rho \rho'' \leq 3$ y el vértice pertenecerá al eje de la cónica que contiene a los focos, mientras que si $\rho'' < 0$; $v = 0$, $u^2 = -\frac{\rho \rho''}{3}$, la cónica es siempre elipse y el vértice pertenece al eje normal al anterior.

Por ejemplo en el vértice de la catenaria $y = a \operatorname{Ch} \frac{x}{a}$ tendremos

$$v = 0; \quad \rho = a; \quad \rho' = 0; \quad \rho'' = \frac{2}{a}$$

de donde:

$$u = 0; \quad v^2 = \frac{2}{3}; \quad \alpha = \frac{\pi}{2}; \quad \zeta_0 = 4ai$$

y la cónica de máximo contacto es una elipse que, referida a

los mismos ejes que la catenaria, tiene por ecuación

$$\frac{x^2}{3a^2} + \frac{(y-4a)^2}{9a^2} = 1$$

de donde podemos deducir la siguiente expresión aproximada para el coseno hiperbólico

$$\operatorname{Ch} z = 4 - 3 \sqrt{1 - \frac{z^2}{3}} + \varepsilon$$

siendo

$$\varepsilon = -\frac{z^6}{144} - \frac{43z^8}{6 \cdot 7!} - \dots$$

que puede aplicarse al coseno circular cambiando z por zi

$$\cos z = 4 - 3 \sqrt{1 + \frac{z^2}{3}} + \varepsilon; \quad \varepsilon = \frac{z^6}{144} - \frac{43z^8}{6 \cdot 7!} + \dots$$

b) *Determinar la cónica de máximo contacto perteneciente a una familia dada de cónicas.* Si se conoce uno cualquiera de los valores: $p, k, a, b, c, \zeta, \zeta_1, \zeta_0$, que en cada caso caracterizan una familia determinada de cónicas, ese valor con la fórmula (10) permite determinar u y v . Por ejemplo, si se trata de la familia de parábolas ($k=1$) de donde $v=1$ y $3u=\rho'$

$$p = \frac{27\rho'}{(9+\rho'^2)^{3/2}}; \quad \zeta = z + \frac{3\rho iz'}{2(3-iz')}$$

Si, en cambio, se trata de la familia de hipérbolas equilateras ($k=\sqrt{2}$);

$$v^2 = 1 + \frac{1}{3} \sqrt{9 + \rho'^2}; \quad u^2 = \frac{1}{3} \sqrt{9 + \rho'^2} - 1; \quad p = \frac{3\sqrt{3}\rho}{(9+\rho'^2)^{3/4}}$$

$$\zeta_0 = z + \frac{3\rho z'}{\rho' + 3i}$$

En los casos anteriores el contacto máximo es de tercer orden, pero si se fijan dos de los 8 valores anteriores, entonces ese contacto será de segundo orden; por ejemplo: sea determinar el parámetro de la parábola ($k=1$) de máximo contacto en un punto z y cuyo foco esté en el origen ($\zeta=0$) las fórmulas (8), (9) y (14) darían fácilmente $p = \frac{8|z|^3}{\rho^2}$.

El caso de la circunferencia ($k=0$) trae consigo $u=v=0$ lo que exige $p=\rho$ y $a=b=\rho$; $\zeta=z+\rho iz'$.

c) *Determinar las condiciones para que una cónica tenga un contacto de orden superior al ordinario.* En el caso general habrá que eliminar p , k , u y v entre (8), (9), (10), (11) y una quinta ecuación obtenida por derivación. Recordando que $\rho u' = v(1+u^2)$; $\rho v' = -u(1-v^2)$ obtenemos, derivando la (11)

$$\rho' \rho'' - 3 \rho \rho''' = 18 (uu' - vv') = \frac{18uv}{\rho} (2 + u^2 - v^2)$$

y eliminando u y v entre ésta y la (10) y (11)

$$4 \rho' (\rho'^2 + 9) = 9 \rho (\rho' \rho'' - \rho \rho''') \quad (17)$$

que es la condición para que una cónica tenga un contacto por lo menos de quinto orden. Además esta ecuación es la ecuación diferencial de todas las cónicas del plano.

Como casos particulares tendríamos: La condición para que la parábola de máximo contacto (tercer orden) tenga un contacto por lo menos del cuarto orden es

$$3 \rho \rho'' = \rho'^2 + 9.$$

La condición para que la hipérbola equilátera de máximo contacto (tercer orden) tenga un contacto por lo menos del cuarto orden es

$$3 \rho \rho'' = 2 (\rho'^2 + 9)$$

y, por último, llegamos en el caso de la circunferencia a la conocida condición $\rho' = 0$ para que la circunferencia de máximo contacto (segundo orden) tenga un contacto por lo menos de tercer orden.

Por ejemplo en la catenaria para la cual $\rho'^2 + 9 - 3\rho\rho'' = -3 - 2\frac{s^2}{a^2}$ se tendrá que la cónica de máximo contacto es una elipse, parábola o hipérbola, según sea $s^2 \leq \frac{3}{2}a^2$ y por lo tanto en los puntos para los que $s^2 = \frac{3}{2}a^2$ la parábola de máximo contacto tiene un orden superior al ordinario.

Consideremos ahora la variación respecto de s , de p , k , α y ζ . De (13) obtenemos $\alpha' - \vartheta' = \frac{uv' - u'v}{u^2 + v^2} \therefore (\rho\alpha' - 1)(u^2 + v^2) = \rho(uv' - u'v)$ y sustituyendo en (11) los valores de ρ' y ρ'' deducidos de (10)

$$\rho' = 3uv; \quad \rho'' = 3(uv' + u'v); \quad 2u^2v^2 = u^2 - v^2 + \rho(uv' + u'v)$$

de donde

$$\rho u' = -\frac{\rho\alpha'}{2v}(u^2 + v^2) + v(1 + u^2)$$

$$\rho v' = \frac{\rho\alpha'}{2u}(u^2 + v^2) - u(1 - v^2)$$

Derivando las (8), (9) y (14) y eliminando u' y v' se obtiene

$$p' = \frac{3\rho\alpha'u(u^2 + v^2)}{2v(1 + u^2)^{5/2}}$$

$$k' = \frac{\alpha'(u^2 + v^2)[u^2(u^2 + v^2) + (1 + u^2)(v^2 - u^2)]}{2uv(1 + u^2)^2}$$

$$\zeta' = \frac{\rho\alpha'z'(u^2 + v^2)(u - iv)}{2uv(1 - iu)^2(1 + v)^2} = \sigma' e^{i\vartheta_1},$$

siendo σ el arco de la curva, lugar del foco de la cónica de máximo contacto, y ϑ_1 el ángulo que forma la tangente a esta curva con el eje de las abscisas.

Será entonces

$$\sigma' = \left| \frac{\rho \alpha' (u^2 + v^2)^{3/2}}{2 u v (1 + u^2) (1 + v^2)^2} \right|$$

$$\vartheta_1 = 2(\vartheta + \gamma) - \alpha \quad \circ \quad \vartheta_1 = 2(\vartheta + \gamma) - \alpha + \pi$$

y teniendo en cuenta la (3)

$$\vartheta_1 = 2(\omega + \alpha + \pi) - \alpha - \pi \quad \circ \quad \vartheta_1 = 2(\omega + \alpha + \pi) - \alpha$$

es decir que la tangente a la curva, lugar del foco, es bisectriz interior o exterior del ángulo formado por la semirrecta MF con la dirección del eje de la cónica.

Observamos además que si $\alpha' = 0$, se anulan también p' , k' , ζ' y por tanto σ' , lo que significa que esos puntos de la curva, lugar del foco, son singulares. Es fácil demostrar que para esos puntos la cónica tiene con la curva un contacto de orden superior al ordinario. En efecto de (10), (11) y (13) se deduce

$$\begin{aligned} \rho' &= 3uv = \frac{3}{2} \operatorname{sen} 2(\alpha - \vartheta) \cdot (u^2 + v^2) \\ 2\rho'^2 - 3\rho\rho'' &= 9(u^2 + v^2) \cos 2(\alpha - \vartheta) \end{aligned}$$

de donde

$$\operatorname{tg} 2(\alpha - \vartheta) = \frac{6\rho'}{2\rho'^2 - 3\rho\rho''}$$

y derivando

$$2(\alpha' - \vartheta') = 2\left(\alpha' - \frac{1}{\rho}\right) = 6 \frac{\rho''(2\rho'^2 - 3\rho\rho'') - \rho'(\rho'\rho'' - 3\rho\rho''')}{36\rho'^2 + (2\rho'^2 - 3\rho\rho'')^2}$$

se obtiene

$$\rho\alpha' = \rho \cdot \frac{4\rho'(\rho'^2 + 9) - 9\rho(\rho'\rho'' - \rho\rho''')}{36\rho'^2 + (2\rho'^2 - 3\rho\rho'')^2}$$

que de acuerdo a (17) demuestra la propiedad enunciada.

Para terminar consideremos como ejemplo el caso de la espiral logarítmica, cuya ecuación escribiremos en la forma

$$z = s \cos \alpha e^{i \operatorname{tg} \alpha l} \cdot s \cos \alpha$$

siendo s el arco y α una constante. Derivando se obtendrá

$$z' = e^{i\theta} = e^{i(\alpha + \operatorname{tg} \alpha l \cdot s \cos \alpha)} \quad \therefore \quad \rho = \frac{1}{s'} = \frac{s}{\operatorname{tg} \alpha} ; \quad \rho' = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} ; \quad \rho'' = 0$$

y por lo tanto los valores de u y v serán constantes, y las parábolas de máximo contacto, así como las cónicas de máximo contacto (elipses) tendrán, en virtud de las (14), (15) y (16) sus centros y focos sobre una espiral logarítmica idéntica a la curva dada, de manera que con *Bernoulli* puede repetirse «*eadem mutata resurgo*».

Nota.— El Profesor Terracini nos hace observar que la propiedad relativa a la espiral logarítmica puede preverse, como sucede con otras propiedades análogas, debido a que la curva admite un grupo ∞^1 de semejanzas en sí misma, y que por lo tanto lo mismo ocurre con la curva lugar del foco de la cónica de máximo contacto, de manera que una cualquiera C de estas curvas es una curva W (de Klein-Lie) con respecto al mismo grupo. De acuerdo con propiedades generales de las curvas W las homografías que tienen unidos los 3 puntos fijos de dicho grupo (polo de la espiral y puntos cíclicos) intercambian las curvas W invariantes por el grupo; luego C es semejante a la espiral y por consiguiente igual.

José Babini

CUESTIONES EMEMENTALES RESUELTAS

13. Es bien conocido el problema llamado de los tres pueblos y las tres fuentes: Dados tres puntos A, B, C y otros tres A', B', C' , del mismo plano, es imposible trazar desde cada uno de los primeros a cada uno de los segundos un arco tal que los nueve arcos no se corten en ningún punto distinto de los seis dados. Se propone demostrar que en la superficie tórica y también en el plano proyectivo y en el anillo de Moebius, el problema tiene siempre solución. ¿Qué sucede si en vez de la segunda terna se da una cuaterna A', B', C', D' ?

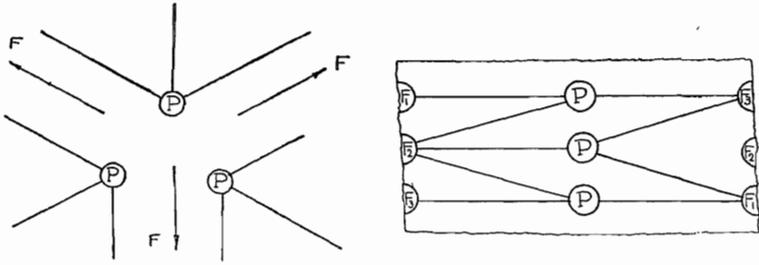
Solución. — Es sencilla la demostración de que el ya clásico problema es imposible en el campo euclídeo; en efecto, ligemos dos pueblos y dos fuentes:



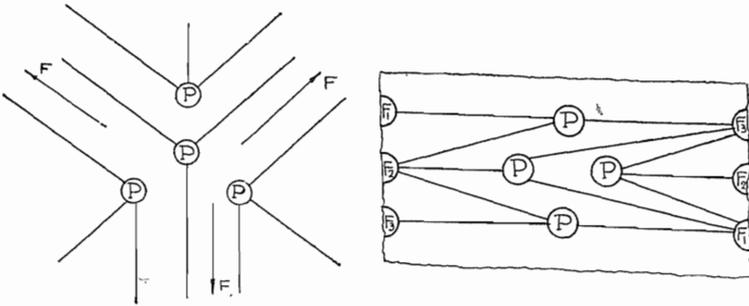
con esta operación ha quedado dividido el plano en dos zonas: 1 y 2. La situación del pueblo y fuente restantes ofrece dos posibilidades: colocar un pueblo (fuente) en 1 y la fuente (pueblo) en 2, en cuyo caso es posible unirlos a los ya existentes, mas no entre sí; y disponerlos, pueblo y fuente, en una misma región (1 ó 2 indistintamente). Para ello unamos primero la fuente a los dos pueblos, el plano ha quedado subdividido en tres regiones, cada una de las cuales tiene comunicación sólo con dos fuentes, por lo que en cualquiera de los tres recintos que pongamos el pueblo restante siempre quedará en la imposibilidad de unirse con una fuente.

Siendo la superficie esférica bilátera, al igual que el plano euclídeo, el problema planteado sobre ella carece igualmente de solución.

En cambio, en las superficies uniláteras, como el plano proyectivo, o el anillo de Moebius es posible cumplir con las condiciones del enunciado, como se ve en las siguientes figuras.



El mismo enunciado admite solución en las superficies uniláteras nombradas aún para cuatro pueblos (fuentes) y tres fuentes (pueblos).



Para cuatro pueblos y cuatro fuentes deja de ser posible el problema tanto en el campo proyectivo como en el anillo de Moebius, pero la demostración de este hecho (así como también para el caso cinco y tres) dará tema, junto a otras cuestiones, para un futuro artículo.

Juan C. Grimberg

BIBLIOGRAFIA

JULIO PALACIOS, *Introducción a la Mecánica Física*. Un vol. de 490 págs. Madrid, 1942.

Es fácil hacer el elogio de la *Introducción a la Mecánica Física*, de Julio Palacios, publicada en Madrid en el año 1942: se trata de una obra densa, de material abundante, útil para lectura de matemáticos, físicos, químicos, ingenieros, (y ya es citar bastantes gremios) por el equilibrio de sus distintas partes y por el enfoque de la Mecánica que lleva al lector, sin esfuerzo, desde la especulación matemática hasta los dominios de la técnica.

Es claro que una obra destinada a tantos lectores podría, en una primera lectura somera, ponernos alerta contra una superficialidad o una hibridez no tolerables en obras de su género. Pero tal prejuicio no subsiste a medida que se la lee detenidamente.

El profesor Palacios expone en un prólogo la intención que le ha llevado a escribir su *Mecánica* y la justifica plenamente. Obra y prólogo se confirman y hacen lógica su aparición.

Los propósitos son claros. Se hacía necesaria una *Mecánica*, en idioma castellano, que, sin el pesado mecanismo matemático, diese, a los que desean adquirir una base física, un conocimiento cualitativo de los fenómenos: por descripciones, por imágenes, por enunciación de leyes y principios. Faltaba una *Mecánica* por imágenes, es decir, para el profesor Palacios, una *Mecánica Física*, opuesta a la *Mecánica Racional*, que convierte el bagaje en andamiaje de la construcción matemática que halla su finalidad en ella misma.

Esta urgencia por el conocimiento de la *Mecánica* se explica por la concepción unitaria de las ciencias. Los esquemas mecánicos han sido modelos en todas las ramas de la Física y en todas las ciencias positivas. Por lo tanto la *Mecánica* debe ser base sobre la que se apoyen totalmente los estudios de la Física.

Por otra parte, esta posición ¿no está impregnada de un sentido histórico de la ciencia, ya que hasta mediados del siglo pasado disponía sólo de la *Mecánica* para interpretar el universo inanimado? Helmholtz, en el siglo XIX concretó: Es posible describir todos los fenómenos físicos en términos de *Mecánica*. Además, como para conocer profundamente una ciencia, se debe conocer su historia y estudiar la evolución de sus teorías, para comprender Física se debe estudiar primero *Mecánica*, ya que sólo en los últimos cien años se agregaron esquemas distintos a los mecánicos para explicar los fenómenos naturales.

Para adquirir rápidamente el dominio de la *Mecánica*, el profesor Palacios toma el camino más corto; hace lo que él llama un libro intuitivo, es decir, enseña la *Mecánica* esencialmente con imágenes y en lo posible elude las matemáticas.

Y para justificarse hace un elogio de la intuición (posición muy de la época), tal vez algo discutible.

Es cierto que la Física debe enunciar las leyes generales, de las que se deduzca la imagen del universo, respondiendo a la necesidad de aprehender la realidad y a la creencia en la armonía interna del mundo. Para lograr esta

meta, el pensamiento se ha lanzado sobre una doble vía: la lógica y la intuitiva, pretendiendo por ambas reducir la variedad sensible, que es cambio y repetición a lo permanente y necesario; convertir lo superficial en vertical, el fenómeno en ley.

Y es cierto también que para hacer ciencia “es cualidad primera la propiedad de pensar vagamente” y que no hay camino lógico para el descubrimiento de las leyes elementales. Sólo la intuición “cierra el circuitogalvánico del pensamiento”, como decía Hamilton, y, ayudada por el sentido del orden oculto detrás de las apariencias, logra los descubrimientos que, según dice el profesor Palacios “casi todos los que no se deben a la casualidad son frutos de la intuición”.

Pero nos parece excesivo que considere a la intuición como el método ideal de investigación para los seres humanos en tanto que los libros de Física se escriban para ellos y no se “deshumanice” esta ciencia. En primer lugar, porque el pensamiento humano, puesto a resolver el conflicto dramático creado entre la realidad y su necesidad de comprenderla, crea teorías, siempre cambiantes, para acercarse asintóticamente a esa realidad y a veces explica, paradójicamente, una realidad que no es precisamente la sensible. Como sucede con la Relatividad Generalizada y la Mecánica Ondulatoria.

Y en segundo lugar porque, y pese a todas las opiniones en contrario, existe la Física “deshumanizada” o la que se pretende llamar de esa manera. Acabamos de citar dos ejemplos.

Creemos que la Mecánica no puede perder su contacto con la realidad y que lo que ocurre es que debemos habituarnos al manejo de nuevos aspectos o aspectos diferentes de los que nos había habituado la Mecánica Clásica. Las Mecánicas nuevas al pretender explicar la realidad, parecen ocuparse más bien de mundos extraños y diferentes a lo real; privadas del privilegio de la intuición recurren únicamente al lenguaje matemático y luego, siguiendo un mecanismo diferente al de la Mecánica Clásica interpretan y “humanizan” las funciones que usaron en sus desarrollos. No es otra cosa.

Si no queremos considerar este aspecto extremo de las Mecánicas nuevas, que proscriben la intuición como medio de conocimiento y nos atenemos a la Mecánica Clásica, nos parece peligroso reservar a la intuición plenos derechos, confinando a los métodos matemáticos en los tratados de Mecánica Racional.

La intuición sólo no puede explicar hechos compatibles con las leyes mecánicas. Tomemos un ejemplo del libro del profesor Palacios. En la pág. 272, a propósito del movimiento del giroscopio dice: “los movimientos del giroscopio tan contrarios a la intuición inmediata, se hallan completamente de acuerdo, y son los únicos compatibles, con las leyes de la Dinámica”.

Y en la pág. 321, en el Capítulo XXII, al tratar el fenómeno de Venturi, dice: “resulta de lo que precede que, en contra de lo que indica la intuición, en un tubo recorrido por un líquido en régimen permanente, la presión es menor en las angosturas,...” Podríamos citar otros ejemplos.

Por eso el profesor Palacios, que no deja de comprender el peligro de hacer una Mecánica con un máximo de imágenes y un mínimo de conocimientos matemáticos, inicia al lector (y para ello ha intercalado en tipo de imprenta más pequeño los pertinentes desarrollos) en el manejo del instrumento mate-

mático útil para justificar los conocimientos y prevenir los posibles errores de la intuición.

El libro, dividido en cinco grandes partes: Mecánica general, Metrología, Mecánica de los sólidos, Mecánica de los fluidos y Acústica, trae una exposición previa del Cálculo Vectorial, Cálculo Tensorial y Vectorial Infinitesimal, indispensable para la deducción lógica de las leyes. Dedicó especial atención al estudio de las magnitudes complejas que el estudioso podrá aplicar más tarde en la Acústica, Óptica y Electricidad.

Esta concesión al método lógico o matemático pone en evidencia que por razones de criterio exclusivamente pedagógico se puede adoptar con rigor uno sólo de los métodos, el intuitivo o el racional para el conocimiento de la Mecánica. Y que ésta, aunque Física, necesita del puntal matemático.

No puede ser de otra manera, puesto que la realidad Física está compuesta de dos dimensiones: la intuitiva y la racional. La teoría matemática viene a ser un pensar lo intuído y la intuición a su vez, impide el confinamiento de la especulación física en la esfera abstracta de lo racional. Las dos formas del conocimiento no se alejan una de otra; por el contrario se integran fecundamente. En la Mecánica, como en toda otra rama de la Física, la descripción del fenómeno es afianzada por el desarrollo matemático y éste a su vez cobra sentido en cuanto es base de un hecho físico explicado o a explicarse. Si las Mecánicas Física y Racional parecen desplazarse sobre métodos esencialmente distintos, en realidad corren paralelas como ríos generados en la misma fuente y de común desembocadura. Infinidad de afluentes atraviesan de uno a otro enriqueciendo con sus aportes los contenidos propios de uno y otro río.

Pero la Mecánica Física no abandona el fenómeno, se atiene a lo existente y contempla su aspecto "físico", es decir el que toca a nuestros sentidos y explica nuestra inteligencia. Por eso, pedagógicamente, la Mecánica Física es base de toda la Física. En cambio, la Mecánica Racional, dice el profesor Palacios, tiene un carácter matemático con el que adquiere "gran elevación y belleza los estudios mecánicos y tienen ya en sí mismos su razón de ser: son un fin y no un medio".

El tratado del profesor Palacios cumple su propósito; es una Mecánica Física, muy útil para los que desean iniciarse en Mecánica. Los primeros capítulos, estrictamente matemáticos, proponen ejercicios, trae temas diversos, aborda una cantidad de cuestiones de actualidad. Por ejemplo, el cinematógrafo sonoro y las aplicaciones a la mecánica de guerra. Da noticias sobre experiencias de los últimos años, como son las realizadas en el año 1941 con ultra sonidos que actúan sobre partículas de humo.

Los distintos capítulos de la obra no están tratados con igual criterio y se los puede separar en tres grandes grupos.

En uno se incluyen los capítulos que se ocupan de la descripción de los fenómenos y enunciado de leyes y principios. Tales son los capítulos dedicados a la Cinemática "geometría en la que interviene el tiempo", lazo de unión entre el Cálculo y la Dinámica donde "ya se entra en el terreno propio de la Física", dinámica del punto material, la Estática incluida en la dinámica, los distintos movimientos, la estática del sólido indeformable, el trabajo, la energía y el principio de los trabajos virtuales. Quedan incluidos también:

la dinámica de los sistemas materiales, el movimiento de un sólido rígido, la gravedad y sistemas bajo su influencia, la gravitación universal y el mecanismo de sólido: rozamiento y elasticidad. Y el capítulo de gases.

La Mecánica de Flúidos es tratada con criterio empírico o matemático, según lo exija el fenómeno para no incurrir en error; por ejemplo se deduce la fórmula de Laplace. De igual manera se tratan los distintos capítulos de Acústica. Se estudian: los movimientos ondulatorios en los flúidos homogéneos, la propagación de ondas planas, ondas esféricas, reflexión y refracción y ondas estacionarias, movimiento ondulatorio en los sólidos, audición y ultrasonidos.

En el segundo grupo se pueden reunir los capítulos dedicados a los desarrollos exclusivamente matemáticos; como son: los primeros capítulos dedicados al Cálculo, y más adelante, la mecánica analítica, el movimiento relativo donde se incluye el Principio de Relatividad Restringida expuesto a la manera clásica, un resumen del cálculo de errores, estudio tensorial de la elasticidad, movimientos pendulares amortiguados y giroscopio. En la Mecánica de Flúidos se estudia teóricamente: los remolinos en líquidos y gases y movimientos de sólidos en el seno de un flúido. Y en Acústica, se desarrolla la teoría de los resonadores e impedancia de los tubos acústicos.

Y, finalmente, separamos los capítulos dedicados a la técnica o de preparación para ella. Son los que se ocupan de: mecanismos; instrumentos de medida, aplicaciones del giroscopio: a los proyectiles, torpedos, aviones y pilotaje automático, estabilización girostática de barcos y vehículos monocarriles. En Hidráulica se ven las aplicaciones a las bombas, turbinas, sustentación de aeroplanos, hélice, autogiro. Los últimos capítulos, exclusivamente técnicos, se dedican a la Fonotecnia: micrófonos, bocinas, producción de señales acústicas y sus aplicaciones a los fonolocalizadores aéreos y submarinos, sondeos acústicos y localización de piezas de artillería, ondas producidas por armas de fuego y cinematógrafo sonoro.

CECILIA MOSSIN KOTIN

- » 4. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Una nueva demostración del teorema límite del Cálculo de Probabilidades. Condiciones necesarias y suficientes para que una función sea integral de Laplace.*
- » 5. — NIKOLA OBRECHKOFF. *Sur la sommation absolue par la transformation d'Euler des séries divergentes.*
- » 6. — RICARDO SAN JUAN. *Derivación e integración de series asintóticas.*
- » 7. — Resolución adoptada por la U. M. A. en la cuestión promovida por el Sr. Carlos Biggeri.

VOLUMEN IV (Fascículo separado; 1939)

- Nº 8. — F. AMODEO. *Origen y desarrollo de la Geometría Proyectiva.*

VOLUMEN V (Fascículos separados; 1940)

- Nº 9. — CLOTILDE A. BULA. *Teoría y cálculo de los momentos dobles.*
 » 10. — CLOTILDE A. BULA. *Cálculo de superficies de frecuencia.*

VOLUMEN VI (Fascículos separados; 1940-1942)

- Nº 11. — R. FRUCHT. *Zur Geometria auf einer Fläche mit indefiniter Metrik (Sobre la Geometría de una superficie con métrica indefinida).*
 » 12. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre una memoria del Prof. J. C. Vignaux.*
 » 13. — F. TORANZOS. *Sobre las singularidades de las curvas de Jordan.*
 » 14. — M. BALANZAT. *Fórmulas integrales de la intersección de conjuntos.*
 » 15. — G. KNIE. *El problema de varios electrones en la mecánica cuantista.*
 » 16. — A. TERRACINI. *Sobre la existencia de superficies cuyas líneas principales son dadas.*
 » 17. — L. A. SANTALÓ. *Valor medio del número de partes en que una figura convexa es dividida por n rectas arbitrarias.*
 » 18. — A. WINTNER. *On the iteration of distribution functions in the calculus of probability (Sobre la iteración de funciones de distribución en el cálculo de probabilidades).*
 » 19. — E. FERRARI. *Sobre la paradoja de Bertránd.*
 » 20. — J. BABINI. *Sobre algunas propiedades de las derivadas y ciertas primitivas de los polinomios de Legendre.*
 » 21. — R. SAN JUAN. *Un algoritmo de sumación de series divergentes.*
 » 22. — A. TERRACINI. *Sobre algunos lugares geométricos.*
 » 23. — V. y A. FRAILE y C. CRESPO. *El lugar geométrico y lugares de puntos áreas en el plano.*
 » 24. — R. FRUCHT. *Coronas de grupos y sus subgrupos, con una aplicación a los determinantes.*
 » 25. — E. R. RAIMONDI. *Un problema de probabilidades geométricas sobre los conjuntos de triángulos.*

VOLUMEN VII (1940-1941)

Notas y memorias de J. BABINI, H. E. CALCAGNO, E. FERRARI, V. y A. FRAILE y C. CRESPO, G. KNIE, J. J. REBELLA, S. RIOS, R. SAN JUAN, L. A. SANTALÓ, A. TERRACINI.

Soluciones de temas propuestos. Bibliografía, Crónica, etc.

VOLUMEN VIII (1942)

Notas y memorias de J. BABINI, M. BALANZAT, R. FRUCHT, E. GASPAR, F. L. GASPAR, J. E. HERRERA, W. MÄCHLER, E. R. RAIMONDI, J. J. REBELLA, J. REY PASTOR, P. ROSSELL SOLER, M. SADOSKY, L. A. SANTALÓ.

Soluciones de temas propuestos, Bibliografía, Crónica, etc.

En 1942 la U. M. A. ha iniciado la publicación de una nueva serie de "Memorias y monografías" de las que han aparecido hasta ahora las siguientes:

- Nº 1. — GUILLERMO KNIE, *Mecánica ondulatoria en el espacio curvo* (1 volumen de 152 páginas).

Además han aparecido tres cuadernos de *Miscelanea matemática*.

S U M A R I O

	Pág.
Cálculo algebraico del endecágono regular (Tema N° 43), por Sergio Sispánov	77
Teorema de Jordan para las variedades poliédricas cerradas, por Julio Rey Pastor	89
Sobre las cónicas de máximo contacto (Tema N° 29), por José Babini	96
Cuestiones elementales resueltas. N° 13, por J. C. Grimberg	107
<i>Bibliografía.</i> — Julio Palacios, Introducción a la mecánica física (C. Mossin Kotin)	109

Contribuyen especialmente al sostenimiento de las publicaciones de
la UNION MATEMATICA ARGENTINA los siguientes

MIEMBROS PROTECTORES

COMPAÑIA INDUSTRIAL DEL NORTE DE SANTA FE. INGENIO AZUCARERO "ARNO"
(Villa Ocampo. F. C. S. F.). — JULIO REY PASTOR (Buenos Aires). — T. G.
BERLENGIERI y CIA. (Rosario). — TRICERRI HNOS. (Rosario). — MANUEL GUI-
TARTE (Buenos Aires). — CLOTILDE A. BULA (Rosario). — ELBA R. RAIMONDI
(Buenos Aires). — FERNANDO L. GASPAR (Rosario). — CARLOS ISELLA (Ro-
sario). — PEDRO J. TRICERRI (Rosario).