Volumen IX Número 4

REVISTA

DE LA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

(Miembro del patronato de la Mathematical Reviews)

□

BUENOS AIRES
1943

Para ingresar como miembro titular de la Unión Matemática Argentina, es necesaria la presentación del solicitante por dos socios fundadores, la admisión por la Junta, y el pago de una cuota de $ 5. — m/n. mensuales o de $ 50.— anuales.

Para ingresar como miembro adherente (con derecho a la Revista y a las Memorias en fascículos separados) es necesario el pago de una cuota de $ 10.— anuales. Los pagos deberán efectuarse por cheque, giro u otro medio libre de gastos, a la orden de la Tesorera, Prof. Clotilde A. Bula, Moreno 364, Rosario.

Los señores miembros adherentes domiciliados en la Ciudad de Buenos Aires podrán, si lo prefieren, efectuar su pago en doce cuotas mensuales de $ 1.00 m/n. cada una, que serán cobradas a domicilio.

Por ser la U. M. A. miembro del patronato de la Mathematical Reviews (sponsoring member), los socios de la U. M. A. tienen derecho a suscribirse a esa importante revista de bibliografía y crítica con 50 % de rebaja sobre el precio de suscripción que es de 13 dólares por año. Los socios de la U. M. A. pagarán por tanto sólo 6.50 dólares por año.

Los trabajos originales enviados para su publicación serán previamente analizados por un ponente, quien emitirá dictamen acerca de la novedad y corrección de sus resultados.

La impresión de las tiradas aparte, y las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

Abonnement annuel à l'etranger: 4.00 dollars (Etats-Unis).

Prière d'adresser toute la correspondance scientifique et administrative à l'adresse ci-dessous:

SR. SECRETARIO DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

PROF. YANNY FRENKEL

PERÚ 222, Buenos Aires (REP. ARGENTINA)

PUBLICACIONES DE LA U. M. A.

VOLUMEN I (1936 - 1937)

Notas y memorias de C. BIGGERI, J. FAYET, J. BABINI, F. CERNUSCHI, A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ, J. REY PASTOR, SIXTO RIOS.

Bibliografía. Extractos.

VOLUMEN II (1938 - 1939)

Notas y memorias de CLOTILDE A. BULA, T. LEVI-CIVITA, A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ, M. PETROVICH, C. BIGGERI, S. RIOS, F. L. GASPAR, J. REY PASTOR, YANNY FRENKEL, J. A. DEL PERAL, F. TORANZOS.

Bibliografía. Crónica. Revista de revistas, etc.

VOLUMEN III (Fascículos separados; 1938 - 1939)

Nº 1. — GINO LORIA. *Le Matematiche in Ispagna e in Argentina.*
» 2. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre las series de funciones de Hermite.*
» 3. — MICHEL PETROVICH. *Remarques arithmétiques sur une équation differentielle du premier ordre.*

(Sigue en la contratapa)

REPRESENTACIONES DE UN RING RELACIONADO CON EL SPIN 1

por Guillermo Knie

La emanación de Dirac describe partículas de spin 1/2, 0 y 1 (1).

En el primer caso los 4 símbolos α que intervienen en ella, son anticonmutativos. En el segundo y tercer caso ellos determinan un álgebra más complicada. Cambiando su denominación en β, las β satisfacen la regla de conmutación:

$$\beta_l \beta_m \beta_n + \beta_n \beta_m \beta_l = \beta_l \delta_{nm} + \beta_n \delta_{lm} . \tag{1}$$

El número máximo de símbolos que satisfacen entre ellos esta regla, es 5(2) (según *Schrödinger*). Ellos determinan lo que en álgebra se llama, un ring de 136 miembros (3). Si se limita el número de elementos básicos a 4, el número de miembros linealmente independientes se reduce a 126. Partiendo de tres símbolos básicos especiales que son los tres componentes del spin 1, se obtiene un subring de 10 miembros (4). Mi intención es demostrar que eligiendo tres β cualesquiera que no sean componentes del spin 1, es decir, que no satisfagan las relaciones

$$\beta_1 \beta_2 - \beta_2 \beta_3 = i \beta_3 \quad \text{y cíclicamente} \tag{2}$$

se obtiene un subring más general que el subring del spin 1, de manera que tenemos ahora el sistema

$$136, \qquad 126, \qquad 35, \qquad 10.$$

Cada uno de estos 4 miembros significa el número de miembros de un ring que es subring del anterior. El número y el grado de las representaciones que ellos admiten es diferente

(1) Prescindiendo de un factor i en el término de masa.

(2) Guillermo Knie, Monografías físico-matemáticas Nº 1: *Algebra del spin.*

(3) Compare también: Sakata y Taketani, *Proc. Math. Phys. Soc. Jap.* 22, 1940.

(4) Guillermo Knie, *Revista Electrotécnica,* Noviembre de 1943.

y depende, pues, del número de elementos básicos. En el último caso había 2 representaciones irreducibles del grado $r=1$ y $r=3$ resp. Este caso se obtendrá ahora por especialización del anterior.

Partimos, pues, de

$$\beta_1, \ \beta_2, \ \beta_3$$

que satisfacen sólamente las relaciones (1). Para construir todos los productos linealmente independientes, es conveniente, considerar también los cuadrados $\beta_1^2 \ \beta_2^2 \ \beta_3^2$, porque ellos tienen propiedades de conmutatividad muy sencillos.

De (1) obtenemos por especialización de índices:

$$\beta_1 \beta_2^2 + \beta_2^2 \beta_1 = \beta_1$$

multiplicando a la derecha resp. a la izquierda por β_1 e igualando, se obtiene:

$$\beta_1^2 \beta_2^2 = \beta_2^2 \beta_1^2 \tag{3}$$

Los β_k^2 son, pues, conmutativos (e idempotentes).

Además conmutan con el producto de dos β de diferentes índices. Por ej.: De (1) obtenemos:

$$\beta_1 \ \beta_2 \beta_3 + \beta_3 \beta_2 \beta_1 = 0 \qquad \text{o}$$

$$\beta_1^2 \beta_2 \beta_3 + \beta_1 \beta_3 \ \beta_2 \beta_1 = 0.$$

Como

$$\beta_1 \ \beta_3 \beta_2 + \beta_2 \beta_3 \beta_1 = 0$$

resulta por substitución:

$$\beta_1^2 \beta_2 \beta_3 = \beta_2 \beta_3 \beta_1^2 \tag{4}$$

Más favorable todavía que los β_k^2 resulta el uso de la combinación $\eta_k = 2 \beta_k^2 - 1$.

Pues los η_k además de conservar las dos propiedades mencionadas de los β_k^2 poseen propiedades de conmutación sencillas con los β_k. Tenemos

$$\beta_l \eta_k = \beta_l (2 \beta_k^2 - 1)$$

$$\eta_k \beta_l = (2 \beta_k^2 - 1) \beta_l .$$

Pero sumando, resulta

$$\beta_l \eta_k + \eta_k \beta_l = 0 \qquad \text{por (1).} \tag{5}$$

Además tenemos

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \beta_l \eta_l = \eta_l \beta_l = \beta_l & \text{a)} & \text{y} \\ \eta_l^2 = 1 & \text{b)} & \text{por (1)} \\ \eta_l \eta_m = \eta_l \eta_m & \text{c)} & \\ \eta_l \beta_m \beta_n = \beta_m \beta_n \eta_l & \text{d)} & \text{por (3) y (4).} \end{array} \right.$$

Las propiedades enumeradas de los η_l hacen suponer que estos símbolos se pueden utilizar con ventaja para la obtención de todos los elementos del ring y la construcción del centro, es decir, de los elementos conmutables con todos los elementos del ring. Formamos, pues, productos de los β_k entre ellos, de los η_k entre ellos y productos de los β_k con los η_k. El número de productos linealmente independientes es $12 + 7 + 15$. Si agregamos $\eta_k^2 = 1$ obtenemos 35 términos. El término $\eta_k \eta_l \eta_m$ es del más alto grado en β_k (grado 6). Todos los demás productos se dejan reducir a combinaciones lineales de estos 35 términos. Procedemos ahora a la construcción del centro. Los términos conmutables con todos los demás — si prescindimos de la unidad — han de ser con toda seguridad las combinaciones simétricas de los η_k o están estrechamente relacionados con ellas. Basta considerar:

$$(7) \qquad \begin{array}{l} S_1 = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 \\ S_2 = \eta_1 \eta_2 + \eta_2 \eta_3 + \eta_3 \eta_1 \\ S_3 = \eta_1 \eta_2 \eta_3 . \end{array}$$

Encontramos fácilmente:

$$\beta_k S_1 \neq S_1 \beta_k$$

$$\beta_k S_2 \neq S_2 \beta_k$$

$$\beta_k S_3 \neq S_3 \beta_k$$

Luego S_3 pertenece al centro. Una segunda posibilidad es una combinación lineal de S_1 y S_2:

$$S_1 + c S_2.$$

Basta probar con β_1 debido a la simetría de los S. Tenemos

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) &= (\eta_1 - \eta_2 - \eta_3)\, \beta_1 = (\eta_1 - \eta_1 \eta_2 - \eta_1 \eta_3)\, \beta_1 \\ \beta_1 (\eta_1 \eta_2 + \eta_1 \eta_3 + \eta_2 \eta_3) &= (-\eta_1 \eta_2 - \eta_1 \eta_3 + \eta_2 \eta_3)\, \beta_1 = \\ &= (-\eta_2 - \eta_3 + \eta_2 \eta_3)\, \beta_1 \end{aligned}\right\} \text{por } (6).$$

Restando se obtiene: $\beta_1 (S_1 - S_2) = (S_1 - S_2) \beta_1$.

Luego $S_1 - S_2$ pertenece al centro. Una tercera posibilidad no existe. El centro está formado, pues, de [5]

$$S_3,\ S_1 - S_2 \text{ y de la unidad.}$$

Luego hay tres representaciones. Si sus dimensiones son r_1, r_2 y r_3, debe ser

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 35 \tag{8}$$

según un teorema bien conocido. De esto resulta de manera unívoca:

$$r_1 = 5 \qquad r_2 = 3 \qquad r_3 = 1.$$

Existe, pues, una representación en 5 dimensiones, una en tres y una representación trivial unidimensional. En cuanto a la forma de estas representaciones [6], prescindiendo de un factor i están relacionadas con los elementos básicos de las rotaciones infinitesimales en tres resp. 5 dimensiones.

En tres dimensiones una rotación infinitesimal está dada por

---

[5] Si 4 o 5 β_k sirven de elementos básicos para formar el ring, $S_1 - S_2$ pertenecen también al centro, extendiéndose en este caso la numeración, hasta la cifra 4 resp. 5. Lo mismo se puede decir de S_3 para 5 β_k. Porque $\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 \eta_5$ conmuta con β_k. Pero para 4 de las β_k hay una diferencia. Como $\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4$ anticonmuta con β_k debe ser completada por otra combinación. Se ve fácilmente que $\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 - \eta_1 \eta_2 \eta_3 - \eta_2 \eta_3 \eta_4 - \eta_3 \eta_4 \eta_1 - \eta_4 \eta_1 \eta_2 = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 (1 - \sum_{\mu} \eta_{\mu})$ satisface la exigencia de conmutabilidad. Al correr β_k de la izquierda a la derecha, dos expresiones son intercambiadas, las demás no varían

[6] Vea también G. Knie, *Nuevas teorías físicas* (en prensa).

$$\begin{aligned} dx_1 &= bx_3 - cx_2 \\ dx_2 &= cx_1 - ax_3 \\ dx_3 &= ax_2 - tx_1\,. \end{aligned} \qquad (9)$$

Se obtienen tres elementos básicos de este grupo triparamétrico, eligiendo

$$\begin{aligned} &a=1, \quad b=0, \quad c=0 \\ &a=0, \quad b=1, \quad c=0 \\ &a=0, \quad b=0, \quad c=1. \end{aligned}$$

Coordinando las tres filas y columnas de un sistema de matrices a las coordenadas x_1, x_2, x_3 se obtiene la representación: (después de multiplicar por i)

$$\beta_1 = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -i \\ \cdot & i & \cdot \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & i \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -i & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & -i & \cdot \\ i & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \qquad (10)$$

y análogamente en cinco dimensiones.

El caso especial: $\beta_3 = i\,(\beta_1 \beta_2 - \beta_2 \beta_1)$ (7) (11)

produce una reducción en el número de términos independientes de 35 a 10 y del centro de 3 a 2. Se tiene ahora:

$$S_3 = -1$$

equivalente a la unidad.

El número de representaciones irreducibles ahora es 2 y

$$3^2 + 1^2 = 10.$$

$$S_1 - S_2 \text{ se puede reemplazar por } S_1 = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$$

$$\sim \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2$$

debido a la relación

$$2\,(\beta_1^2\,\beta_2^2 + \beta_1^2\,\beta_3^2 + \beta_2^2\,\beta_3^2) = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2$$

consecuencia de (11) y de las relaciones cíclicas resultantes de (11).

Buenos Aires, septiembre 1943.

---

(7) Tratado por mí en *Revista Electrotécnica*, octubre 1943.

UNA DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE DESARGUES, EXTENDIDO AL CASO DE UNA TRANSVERSAL, NO SECANTE A LA CONICA

por Elías A. de Cesare

Recuérdese, que una involución Ω_p, se dice que es armónica, con una proyectividad π, no involutoria, si Ω_p, es armónica, con la involución Ω, unida para π (1).

Sea la proyectividad no involutoria

$$\pi \equiv \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \tag{1}$$

siendo Ω, su involución unida. Llamando en π, pares de puntos asociados, a los pares de la forma $(A\,B')$, $(A'\,B)$, formemos la involución

$$\Omega_p \equiv \begin{pmatrix} A & B' & A' & B \\ B' & A & B & A' \end{pmatrix} \tag{2}$$

en que sean conjugados, dos pares de elementos asociados en π.

Definida la Ω_p, llamemos D' al conjugado de C, en Ω_p, es decir sea:

$$\Omega_p\, C \equiv D'. \tag{3}$$

Por la (1), se podrá determinar el elemento D, tal que:

$$\pi^{-1} D' = D$$

o lo que es lo mismo

$$\pi D \equiv D' \tag{4}$$

(1) Véase: F. Severi, *Complementi di Geometria Proiettiva.* Zanichelli, Bologna, 1906, pág. 119.

De (1) y (4) resulta:

$$ABCD \barwedge A'B'C'D'$$

o también

$$ABCD \barwedge B'A'D'C'.$$

Existe así una proyectividad

$$\pi_1 \equiv \begin{pmatrix} A & B & C \\ B' & A' & D' \end{pmatrix} \tag{5}$$

tal que:

$$\pi_1 D \equiv C'. \tag{6}$$

Teniendo en cuenta (2), (3), resulta

$$\pi_1 \equiv \Omega_p$$

por tener tres pares de elementos homólogos comunes; y teniendo en cuenta la (6), resulta que D, C', son elementos conjugados en Ω_p.

Se puede así escribir:

$$\Omega_p \equiv \begin{pmatrix} B' & A & B & A' & D' & C & D & C' \\ A & B' & A' & B & C & D' & C' & D \end{pmatrix}. \tag{7}$$

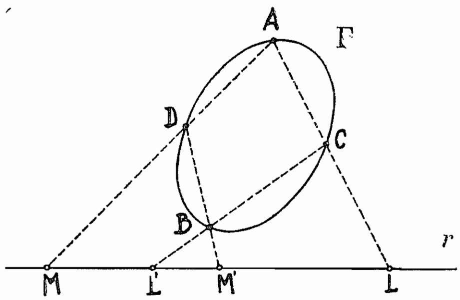
Transformando la π, mediante la Ω_p, sale (1)

$$\Omega_p \,.\, \pi\, \Omega_p^{-1} \equiv \begin{pmatrix} A' & B' & C' \\ A & B & C \end{pmatrix} = \pi^{-1}.$$

Por lo tanto, la Ω_p, transformará a la Ω, en Ω^{-1}, y como Ω, es involutoria, es decir $\Omega \equiv \Omega^{-1}$, resulta, que la Ω_p transforma en sí misma, a la Ω. En otros términos, Ω y Ω_p, son permutables, y esto significa decir, que los elementos dobles imaginarios de Ω, son conjugados en Ω_p.

(1) Las transformaciones deben efectuarse en el orden Ω_p^{-1}, π, Ω_p.

Consideremos un cuadrángulo completo $A B C D$, inscripto, en la cónica Γ, y sea r, una recta de su plano, no secante a Γ.



Consideremos a Γ, engendrada, por los haces de rayos con centro en A y B, y llamemos $\pi \equiv \pi_{BA}$ la proyectividad que resulta sobre r, cortando primero el haz con centro en A, y luego el haz con centro en B. Siendo $L \equiv A C . r$; $L' \equiv BC . r$, $M \equiv AD . r$; $M' \equiv B D . r$, será $\pi L \equiv L'$ y $\pi M \equiv M'$.

Se tendrá pues:

$$\pi \equiv \begin{pmatrix} L & L'' & M & M'' & \dots \\ L' & L & M' & M & \dots \end{pmatrix} \quad (p)$$

Si L_1, es el conjugado armónico de L, respecto de L', L'' y del mismo modo M_1, conjugado armónico de M, respecto de M', M'', será:

$$\Omega \equiv \begin{pmatrix} L & L_1 & M & M_1 \\ L_1 & L & M_1 & M \end{pmatrix}$$

la involución unida de la π, involución que define, los puntos dobles imaginarios, según los cuales, la r, corta a la Γ.

Formemos una involución Ω_p de la π; se tiene:

$$\Omega_p \equiv \begin{pmatrix} M' & L & M & L' \\ L & M' & L' & M \end{pmatrix} \qquad (p')$$

ésta involución, será armónica, con Ω, es decir, los elementos dobles imaginarios de Ω, son conjugados en Ω_p.

Pero la Ω_p, no es sino, la involución, que sobre r, determinan los pares de lados opuestos, del cuadrángulo completo $ABCD$. Podemos entonces, formular la proposición:

Los pares de puntos imaginarios, comunes a la r *y a* Γ, *son conjugados, en la involución, que los pares de lados opuestos, de un cuadrángulo completo inscripto en la cónica, determinan sobre la misma recta.*

Buenos Aires, julio 1943.

TEMAS PROPUESTOS

47. - Se llaman curvas-D de una superficie aquellas cuya esfera osculatriz en cada punto es tangente a la superficie. Se pide estudiar las curvas-D sobre un cono de revolución.

L. A. Santaló

SOBRE LA INTEGRAL $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{2/3}}$.

por Angel J. Guarnieri

1. — En la cuestión elemental No. 10 (Vol. VII, pág. 86) se pide calcular esta integral entre los límites 0 y 1 y entre 1 e ∞. Para ello basta darle la forma de integral euleriana, poniendo $x = \sqrt{y}$ en el primer caso y $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$ en el segundo. Resulta:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^{2/3}} = \frac{1}{2}\int_0^1 y^{-1/2}(1-y)^{-2/3}\,dy = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{5}{6})}$$

$$I_2 = \int_1^\infty \frac{dx}{(1-x^2)^{2/3}} = \frac{1}{2}\int_0^1 y^{-5/6}(1-y)^{-2/3}\,dy = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{6})\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{1}{2})}$$

Es fácil probar que I_2 vale el doble de I_1. En efecto:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\Gamma(\frac{1}{6})\Gamma(\frac{5}{6})}{\left[\Gamma(\frac{1}{2})\right]^2} = \frac{\pi/\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}}{\pi} = 2,$$

pues

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}} \qquad \text{y} \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

2. — En el tema No. 27 del mismo volumen (pág. 80) se propone expresar la misma integral en forma de integral elíptica de Legendre. Tal expresión es posible, pues poniendo $y = (1-x^2)^{1/3}$ se tiene una curva algebraica de género 1.

Como es sabido, el género de una curva es la diferencia entre el máximo de puntos dobles y de retroceso que corresponde a su orden: $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, y el número de los que realmente tiene: $g=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-d-r$. Las curvas de género 0 son las unicursales, es decir aquellas cuyas coordenadas cartesianas se pueden expresar en función racional de un parámetro; las de género 1, o elípticas, admiten una expresión de sus coordenadas mediante funciones elípticas de un parámetro. Estas tienen $\frac{1}{2}n(n-3)$ puntos dobles y de retroceso. Las cúbicas $(n=3)$ pueden tener a lo más uno de tales puntos; en tal caso son unicursales, y tomando el punto singular como origen se puede adoptar como parámetro la pendiente del radio vector. Las que carecen de un tal punto son de género 1 o elípticas; se demuestra que mediante una perspectiva se puede reducirlas siempre a la forma $y^2=4x^3-g_2x-g_3$, expresión bien conocida en la teoría de las funciones elípticas de Weierstrass; haciendo $x=p(t)$ resulta $y=p'(t)$.

Según una de las fórmulas de Plücker, la clase de una curva es $k=n(n-1)-2d-3r$; luego las cúbicas de género 1 son de 6ª. clase, mientras las unicursales son de 4ª. o 3ª.

La curva en cuestión es una cúbica sin punto doble, pues la derivada $y'=-\frac{2x}{3(1-x^2)^{2/3}}$ toma en cada punto un valor (real) único. Luego es de género 1, y la integral propuesta se podrá expresar mediante funciones elípticas, lo cual se logra así:

Sea $I=\int_x^\infty \frac{dx}{(1-x^2)^{2/3}}$. La sustitución $1-x^2=-z^3$ la reduce a la forma normal de Weierstrass, con $g_2=0$ y $g_3=-4$: $I=\frac{3}{2}\int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{z^3+1}}=3\int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3+4}}=3u \therefore z=p(u\,;0,-4)$. Las raíces de z^3+1 son: $e_1=-1$, $e_2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $e_3=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; poniendo: $H^2=(e_1-e_2)(e_1-e_3)=\left(-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=3$, los tratados indican la sustitución: $z = e_1 + H \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} = -1 + \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}$. De aquí: $z^3 + 1 = 3\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}\left(1 - \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} + \operatorname{tg}^4 \frac{\varphi}{2}\right)$

y $dz = \left(\sqrt{3} \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \middle| \cos^2 \frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$; por tanto:

$$I = \frac{3}{2}\int_{\varphi}^{\pi} \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \,.\, d\varphi}{\cos^2\frac{\varphi}{2}\sqrt{3} \,.\, \sqrt[4]{3} \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^4\frac{\varphi}{2} - \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}} =$$

$$= \frac{3}{2\sqrt[4]{3}} \int_{\varphi}^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^4\frac{\varphi}{2} + \operatorname{sen}^4\frac{\varphi}{2} - \sqrt{3} \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2}}}$$

y como la expresión bajo raíz es igual a

$$\frac{1}{4}[(1 + \cos\varphi)^2 + (1 - \cos\varphi)^2 - \sqrt{3} \operatorname{sen}^2 \varphi] =$$

$$= \frac{1}{4}[2 + 2\cos^2\varphi - \sqrt{3} \operatorname{sen}^2\varphi] = \frac{1}{4}[4 - (2 + \sqrt{3}) \operatorname{sen}^2\varphi] =$$

$$= 1 - \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \operatorname{sen}^2 \varphi = 1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi, \quad \text{queda finalmente:}$$

$$I = \frac{\sqrt[4]{27}}{2}\int_{\varphi}^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}} = \frac{\sqrt[4]{27}}{2}\left[\int_0^{\pi} - \int_0^{\varphi}\right] = \frac{\sqrt[4]{27}}{2}\,[2k - F(\varphi, k)],$$

siendo $F(\varphi, k)$ la integral elíptica de 1ª. especie de Legendre. Haciendo $k = \operatorname{sen}\vartheta$, se tiene: $\operatorname{sen}\vartheta = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}|2}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^{\circ}}{2}}$ $= \cos 15^{\circ} = \operatorname{sen} 75^{\circ} \;\therefore\; \vartheta = 75^{\circ}$; esta expresión del módulo k mediante un ángulo se utiliza en las tablas de Legendre.

Se calculará ahora la integral propuesta entre los límites 0 y 1, y entre 1 e ∞. La correspondencia entre los límites de las tres variables x, z, φ es:

x :	0	1	∞
z :	-1	0	∞
φ :	0	φ_1	π

La integral completa $K=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\mathrm{sen}^2\varphi}}$ vale, según las tablas: $K=2{,}76806$. El ángulo φ_1 se obtiene haciendo $z=0$ en la expresión $z=-1+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2} \therefore \mathrm{tg}\frac{\varphi_1}{2}=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$, y $\varphi_1=74^\circ\,27'18''$.

Resulta: $\int_0^1\frac{dx}{(1-x^2)^{2/3}}=\frac{\sqrt[4]{27}}{2}\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\mathrm{sen}^2\varphi}}=$

$$=1{,}13975\times 1{,}84537=2{,}10326.$$

$$\int_1^\infty\frac{dx}{(1-x^2)^{2/3}}=\frac{\sqrt[4]{27}}{2}\int_{\varphi_1}^{\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\mathrm{sen}^2\varphi}}=\frac{\sqrt[4]{27}}{2}\left[\int_0^{\pi}-\int_0^{\varphi_1}\right]=$$

$$\frac{\sqrt[4]{27}}{2}\left[2k-\int_0^{\varphi_1}\right]=\frac{\sqrt[4]{27}}{2}[2\times 2{,}76806-1{,}84537]=1{,}13975\times 3{,}69074$$

$=4{,}20652$, que es el doble de la anterior, como ya se vió.

El problema queda, pues, resuelto. Las consideraciones que siguen exceden la cuestión propuesta, pero ofrecen algún interés.

3. — *Inversión de la integral.* Conviene tener el módulo complementario k' y el otro período ik' : $k'^2=1-k^2, k'=\cos 75^\circ=\mathrm{sen}\,15^\circ$; con este valor las tablas dan: $k'=1{,}59814$. Se tiene, pues:

$$k^2=\frac{2+\sqrt{3}}{4},\quad k=\mathrm{sen}\,75^\circ \therefore K=2{,}76806$$

$$k'^2=\frac{2-\sqrt{3}}{4},\quad k'=\mathrm{sen}\,15^\circ \therefore K'=1{,}59814.$$

Utilizando la notación de Weierstrass: $\frac{1}{3}\,I=u=\int_z^\infty\frac{dz}{\sqrt{4z^3+4}}$

$\therefore z=p\,(u\,;\,0,-4)$ y $x^2=1+z^3=1+p^3\,u$. Los períodos son:

$$\omega_1=\int_{-1}^\infty\frac{dz}{\sqrt{4z^3+4}}=\frac{\mathrm{K}}{\sqrt{H}}=\frac{2{,}76806}{\sqrt[4]{3}}=2{,}10326\ ;\ \omega_2=i\int_1^\infty\frac{dy}{\sqrt{4y^3-4}}=$$

$$\frac{i\mathrm{K}'}{\sqrt{H}}=i\,\frac{1{,}59814}{\sqrt[4]{3}}=1{,}21431\,i.$$

Con las funciones de Jacobi: $\frac{1}{3} I = u = \frac{1}{2\sqrt[4]{3}} \int_{\varphi}^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}}$

$\therefore \operatorname{sen}(\pi - \varphi) = \operatorname{sn} t$, siendo $t = 2\sqrt[4]{3}\,.\,u$. Entonces: $\cos\varphi = -\operatorname{cn} t$, y $\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{1+\operatorname{cn} t}{1-\operatorname{cn} t}$; de aquí: $z = -1 + \sqrt{3}\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2} = -1 + \sqrt{3}\,\frac{1+\operatorname{cn} t}{1-\operatorname{cn} t}$, $x^2 = 1 + z^3 = 3\sqrt{3}\,\frac{[(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})\operatorname{cn}^2 t](1+\operatorname{cn} t)}{(1-\operatorname{cn} t)^3}$

$= 3\sqrt{3}\,\frac{[4-(2+\sqrt{3})\operatorname{sn}^2 t]\operatorname{sn}^2 t}{(1-\operatorname{cn} t)^4} = 12\sqrt{3}\,\frac{1-k^2\operatorname{sn}^2 t}{(1-\operatorname{cn} t)^4}\operatorname{sn}^2 t = \sqrt{27}\,\frac{\operatorname{dn}^2 t.\operatorname{sn}^2 t}{(1-\operatorname{cn} t)^4}$

Adoptando el signo $+$: $x = 2\sqrt{27}\,\frac{\operatorname{dn} t.\operatorname{sn} t}{(1-\operatorname{cn} t)^2}$. Los períodos k y ik' ya fueron calculados.

Se ve que: $p\,u = -1 + \sqrt{3}\,\frac{1+\operatorname{cn}(2\sqrt{3}.u)}{1-\operatorname{cn}(2\sqrt{3}.u)}$. En efecto, cuando el discriminante $g_2{}^3 - 27\,g_3{}^2$ es negativo, las funciones de Weierstrass y Jacobi están ligadas por la relación: $p\,u = e_1 + H\,\frac{1+\operatorname{cn}(2\sqrt{H}.u)}{1-\operatorname{cn}(2\sqrt{H}.u)}$.

4. — *La integral en el campo complejo.* La integral de Schwarz: $\omega = \int_{\infty}^{z} \frac{dz}{(1-z^2)^{2/3}}$ tiene la interesante propiedad de transformar el eje real del plano z en un triángulo equilátero del plano ω, dispuesto como muestra la figura.

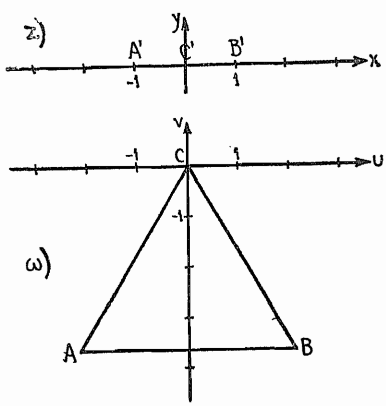


Fig. 1

En efecto: $\omega' = (1 - z^2)^{-2/3}$, $\text{Arg}\,\omega' = -\frac{2}{3}[\text{Arg}\,(1+z) + \text{Arg}\,(1-z)]$. Cuando z recorre el eje real, se tiene:

$$z < -1;\ \text{Arg}\,\omega' = -\frac{2}{3}(\pi + 0) = -\frac{2}{3}\pi$$

$$-1 < z < 1;\ \text{Arg}\,\omega' = -\frac{2}{3}(0 + 0) = 0$$

$$z > 1;\ \text{Arg}\,\omega' = -\frac{2}{3}(0 - \pi) = \frac{2}{3}\pi.$$

Como $\text{Arg}\,\omega'$ es el ángulo que forman las curvas correspondientes en la transformación, se ve que a la semirrecta $(-\infty, -1)$ corresponde un segmento de recta girado respecto de ella $-\frac{2}{3}\pi$ (lado CA); al segmento $(-1, +1)$, el lado AB, y a la semirrecta $(1, \infty)$, el BC, resultando un triángulo equilátero. El vértice C está en el origen, pues a $z = \infty$ corresponde $\omega = 0$. La longitud del segmento $\overline{AB}$ es, evidentemente: $\overline{AB} = \omega_2 - \omega_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(1-x^2)^{2/3}} = 4{,}20652$, según se calculó antes. Si se utiliza el CA, se tiene $\Delta\omega = \Delta z \,.\, e^{-\frac{3}{2}\pi i}$, $|\Delta\omega| = |\Delta z| = \Delta z$; luego: $\overline{CA} = |\omega_1| = \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{(1-x^2)^{2/3}}$, y análogamente: $\overline{BC} = |\omega_2| = \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{(1-x^2)^{2/3}}$. Se ve ahora porque se verifica que $\int_{1}^{\infty} = 2\int_{0}^{1}$.

Si en vez de ∞ se toma un valor real cualquiera a como límite inferior de la integral, el triángulo experimenta una traslación cuya magnitud está dada por $-\int_{\infty}^{a}$, pues $\omega = \int_{\infty}^{z} = \int_{\infty}^{a} + \int_{a}^{z} = \int_{\infty}^{a} + \omega' \therefore \omega' = \omega - \int_{\infty}^{a}$. Si se multiplica la integral por una constante $C \neq 0$, el lado del triángulo queda multiplicado por $|C|$ y éste gira de un ángulo igual a $\text{Arg}\,C$.

Es innecesario agregar que la representación es conforme, excepto en los vértices del triángulo, en que se anula $\omega' \sigma \frac{1}{\omega'}$.

Hasta aquí se ha considerado la correspondencia entre el eje real y el contorno del triángulo. En cuanto al interior de éste, es fácil ver que corresponde al semiplano superior del plano z, pues, como la transformación conforme conserva el sentido de los ángulos, a puntos situados a la izquierda del contorno cuando se lo recorre en sentido positivo, deben corresponder puntos también a la izquierda del eje x.

Esto no significa que el exterior del triángulo corresponda al semiplano inferior. En realidad, la transformación aquí establecida corresponde a una determinación del argumento de $\sqrt[3]{(1-z^2)^2}$, que tiene 3 valores. En el plano z hay que considerar una superficie de Riemann de 3 hojas, obtenida cortándolo según el eje real de 1 a $+\infty$ y de 1 a $-\infty$, pues -1 y $+1$ son puntos de ramificación de 2º. orden. Si un punto describe una curva cerrada alrededor de B', por ejemplo, (que no contenga a A'), el correspondiente describe también una curva cerrada alrededor de B (no conteniendo al A). Pero mientras esta última consta de una sola vuelta, la otra tiene tres, una en cada hoja de la superficie de Riemann; al atravesar el punto móvil la semirrecta $(1, +\infty)$ pasa a otra hoja, pero ésto no sucede al atravesar el segmento $(-1,+1)$. Cuando el 1er. punto (en z) describe un ángulo π, el 2º. (en ω) describe uno de $\frac{\pi}{3}$; considerando 6 ángulos iguales alrededor de B, corresponden sucesivamente a los semiplanos superiores e inferiores de las 3 hojas, aunque no la totalidad de la superficie limitada por sus lados. En efecto: según un teorema de Schwarz, si una función analítica toma valores reales a lo largo de una curva, toma valores conjugados en puntos simétricos respecto de la misma. A lo largo de AB la función $z=f(\omega)$ es real; luego al triángulo ABC_1, simétrico del ABC (en ω), debe corresponder el semiplano inferior de la 1ª. hoja (en z), simétrico del superior. Aplicando este «principio de las imágenes» se establece la correspondencia más general entre los planos z y ω: La reflexión en $(1,+\infty)$ del semiplano inferior de la 1ª. hoja da el semiplano superior de la 2ª., al cual corresponderá el triángulo BA_1C_1, simétrico del BAC_1, etc.; así siguiendo, resulta un exágono regular de centro B y lado CA, que representa la totalidad del plano z. Si ahora se refleja el BC_2A_2 en C_2A_2 se obtiene el $B_3C_2A_2$, y reflejando el semiplano superior de la 3ª. hoja en la semirrecta $(-\infty, -1)$ se obtiene el inferior de

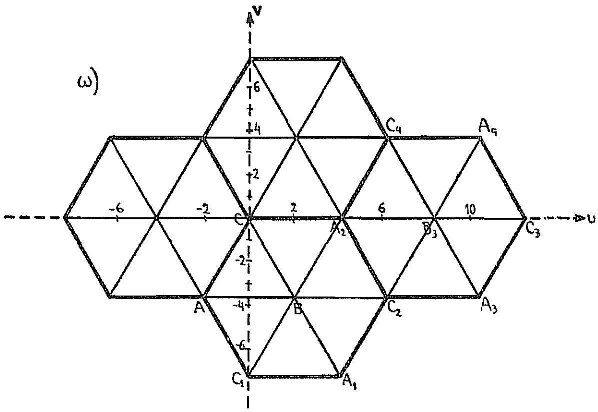


Fig. 2

la 1ª., luego el exágono de centro B_3 y lado A_2C_2 también representa la totalidad del plano z. Es decir, este plano está representado por cualquier exágono de una red dibujada en el ω, y como estos exágonos se reproducen en dos dimensiones, la función $z = z(\omega)$ es doblemente periódica, y elíptica por ser polos sus únicas singularidades. Este resultado no constituye, desde luego, ninguna novedad, pues se vió anteriormente que $z^2 = 1 + p^3\left(\frac{\omega}{3}\right)$.

La función $p\left(\frac{\omega}{3}\right)$, definida en el plano ω, tiene sus polos dobles en los puntos C, y sus ceros en los A y B. Es sabido que no tiene otras singularidades. El período real $2\Omega_1$, con la variable ω, es el segmento $CC_3 = 3l = 3 \times 4{,}20652$; con la variable $u = \frac{\omega}{3}$ se reduce a la 3ª. parte: $2\omega_1 = 4{,}20652$. El período imaginario $2\Omega_2$, con ω, es el segmento $CC_1 = 2h = l\sqrt{3} = \sqrt{3} \times 4{,}20652$; con u es: $2\omega_2 = \frac{4{,}20652}{\sqrt{3}} = 2{,}42863i$. Estos valores coinciden con los calculados antes, en la inversión de la integral. Por ser negativo el discriminante de la ecuación $p'u = 4p^3u + 4$, los períodos $2\omega_1$ y $2\omega_2$ no son primitivos; lo son, en cambio, los imaginarios conjugados $2\omega' = \omega_1 + \omega_2 = \frac{1}{3} 2\Omega'$ y $2\omega'' = \omega_1 - \omega_2 = \frac{1}{3} 2\Omega''$ siendo $\Omega' = CC_4$ y $\Omega'' = CC_2$.

Transformando el eje real del plano z en una circunferencia del plano t, se obtendrá en definitiva una función que transforma la circunferencia en triángulo. Es sabido que lo primero se logra con una función de la forma $z = \alpha \frac{\beta+t}{\gamma+t}$. Eligiendo

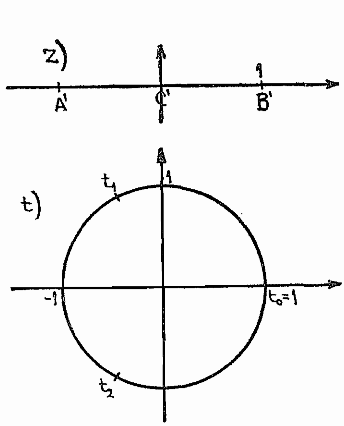


Fig. 3

do una circunferencia de centro en el origen y radio 1, y haciendo corresponder $t_0 = 1$ a $z = \infty$, y t_1, t_2 (de argumentos $\frac{2\pi}{3}$ y $-\frac{2\pi}{3}$) a $z = -1$ y $z = 1$, se calcula $\beta = 1$, $\gamma = -1$, $\alpha = -i\sqrt{3}$, y resulta: $z = i\sqrt{3}\frac{1+t}{1-t}$. Entonces: $dz = \frac{2i\sqrt{3}}{(1-t)^2}dt$, $1 - z^2 = 1 + 3\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^2 = 4\frac{1+t+t^2}{(1-t)^2} = 4\frac{1-t^3}{(1-t)^3}$, y $\int_\infty^z \frac{dz}{(1-z^2)^{2/3}} = i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\int_1^t \frac{dt}{(1-t^3)^{2/3}}$

Luego la función $\omega = C\int_1^t \frac{dt}{(1-t^3)^{2/3}}$ transforma al círculo dado en triángulo equilátero.

El problema de la representación conforme de triángulos y, en general, polígonos, mediante círculos fué resuelto por Christoffel y especialmente H. A. Schwarz basándose en el teorema fundamental de Riemann, pues son recintos simplemente conexos. Dado un triángulo cualquiera de vértices $\omega_1 \omega_2 \omega_3$ y ángulos exteriores $\lambda_1\pi, \lambda_2\pi, \lambda_3\pi$ ($\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2$), y tres puntos $z_1 z_2 z_3$ de un círculo cualquiera, la función que transforma éste en aquél es:

$$\omega = k\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{(z-z_1)^{\lambda_1}(z-z_2)^{\lambda_2}(z-z_3)^{\lambda_3}} + k' \text{ siendo } k \neq 0 \text{ y } k' \text{ constantes.}$$

Se ve que la función antes considerada: $\omega = k\int_1^t \frac{dt}{(1-t^3)^{2/3}}$

es un caso particular de aquélla, con $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\frac{2}{3}$ y $t_n=e^{\frac{2}{3}n\pi i}$

Aquélla, a su vez, es caso particular de la siguiente, que transforma un círculo en un polígono convexo de s lados:

$$\omega = k\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{(z-z_1)^{\lambda_1}(z-z_2)^{\lambda_2}\ldots(z-z_s)^{\lambda_s}} + k'.$$

Por ejemplo, si se eligen como puntos z_i, sobre una circunferencia de radio 1 y centro en el origen, las 4 raíces de la unidad, y se toma $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\frac{1}{2}$, y además $k=1$, $k'=0$, resulta: $\omega=\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$, que transforma el círculo en un cuadrado.

Para obtener cualquier polígono regular sirve: $\omega=\int_0^z \frac{dz}{(1-z^n)^{\frac{n}{2}}}$.

Escuela de Ingeniería, San Juan.

ECUACION FUNCIONAL
$f(x^m) : f(x) = ax$

por Sergio Sispánov

Generalizando la ecuación funcional

$$\frac{f(x^m)}{f(x)} = m \, . \, x^{m-1}$$

propuesta en el número 5 de Vol. VIII (tema 41) nos ocuparemos de la ecuación

$$f(x^m) : f(x) = ax^\alpha. \tag{1}$$

Supongamos, primero, que la variable x y las constantes $a, m,$ son positivas, y que además $m \neq 1$.

Aplicando la sustitución

$$f(x) = x^{\frac{\alpha}{m-1}} \varphi(x), \tag{2}$$

reducimos la ecuación (1) a la forma

$$\varphi(x^m) : \varphi(x) = a.$$

Haciendo luego

$$x = e^{e^{y \ln m}}, \qquad \varphi(x) = e^{\psi(y)}, \tag{3}$$

vamos a tener sucesivamente

$$x^m = e^{e^{(y+1) \ln m}}, \qquad \varphi(x^m) = e^{\psi(y+1)}, \qquad a = e^{\ln a}$$

y la ecuación anterior se convierte en

$$e^{\psi(y+1) - \psi(y)} = e^{\ln a},$$

en donde e es la base de los logaritmos naturales.

La última relación nos conduce evidentemente a la siguiente ecuación a diferencias finitas:

$$\Delta\psi(y) = \psi(y+1) - \psi(y) = ln\, a.$$

Con auxilio de una sumación inmediata llegamos a la fórmula

$$\psi(y) = y\, ln\, a + ln\, C. \tag{4}$$

La letra C, representa una constante arbitraria de sumación, si la función $\psi(y)$ es analítica para todos los valores finitos de y.

En el caso más general de que dicha función no estuviese sometida a ninguna condición, C representaría una función arbitraria de la forma

$$C(y-[y]),$$

en donde, según la notación de *Gauss*, el símbolo $[y]$ significa la parte entera de la variable y. De manera que el argumento se convierte en la siguiente identidad entre potencias de base y límites

$$0 \leqq y - [y] < 1.$$

Volviendo a la segunda de las relaciones (3) podemos reemplazar $\psi(y)$ por su expresión (4), lo que nos da

$$\varphi(x) = C(e^y)^{ln a}.$$

Tomando logaritmos naturales de ambos miembros de la primera de las mismas igualdades (3), resulta

$$ln\, x = e^{y\, ln\, m},$$

de donde

$$e^y = (ln\, x)^{\frac{1}{ln\, m}}. \tag{5}$$

La sustitución de este resultado en la expresión para $\varphi(x)$ recién hallada, conduce a la fórmula

$$\varphi(x) = C(ln\, x)^{\frac{ln\, a}{ln\, m}}.$$

Ahora, la relación (2) suministra la expresión para la función buscada $f(x)$

$$f(x) = C\, x^{\frac{\alpha}{m-1}}\, (ln\, x)^{\frac{ln\, a}{ln\, m}}. \tag{6}$$

Según lo expuesto anteriormente, la letra C representa aquí una constante arbitraria, o bien, en el caso más general, puede ser una función arbitraria del argumento

$$y - [y],$$

en donde, de conformidad con la relación (5),

$$y = \frac{ln(ln\, x)}{ln\, m}.$$

Hagamos algunas observaciones respecto a la fórmula (6). El exponente

$$\frac{ln\, a}{ln\, m}$$

no depende de la base en la cual se toman los logaritmos y es igual a $\log_m a$.

En lugar de los logaritmos naturales que figuran en (6) pueden escribirse logaritmos en cualquier otra base; el efecto producido por el cambio de la base se neutraliza multiplicando C por un factor constante convenientemente elegido.

A fin de evitar valores complejos para $f(x)$ que pueden obtenerse cuando $0 < x < 1$ y $ln\, x$ es negativo, podría emplearse la fórmula

$$f(x) = C\, x^{\frac{\alpha}{m-1}}\, |ln\, x|^{\frac{ln\, a}{ln\, m}}, \tag{7}$$

que se deduce de la fórmula (6) reemplazando en ella C por

$$C(-1)^{\frac{ln\, a}{ln\, m}}.$$

En la misma ocasión, se practicarían las sustituciones

$$x = e^{-e^{y\, ln\, m}}, \qquad \varphi(x) = e^{-\psi(y)}$$

en lugar de las sustituciones (3), si se quisiera tener para la variable auxiliar y valores reales.

Las igualdades (6) y (7) suministran para $f(x)$ valores reales también en el caso de que sean las constantes a y m, ambas negativas, si la razón

$$\frac{\ln a}{\ln m}$$

es real.

En conclusión, consideremos algunos casos excepcionales.

Si $m=1$, la ecuación (1) se convierte en una identidad, cuando $a=1$, $\alpha=0$; y no admite soluciones, cuando no se cumple con una de estas condiciones.

Si $m=0$ y $a\neq 0$, se obtiene

$$f(x)=\frac{f(1)}{a}\,.\,x^{-\alpha},$$

desempeñando el factor

$$\frac{f(1)}{a}$$

el papel de una constante arbitraria.

Si $m=0$ y $a=0$, la ecuación se reduce a la igualdad

$$f(1)=0.$$

En el caso particular que figura en el enunciado del problema se tendrán

$$a=m, \qquad \alpha=m-1,$$

y por consiguiente

$$f(x)=C\,x\ln x.$$

Asunción, Paraguay.
26 de Enero de 1943.

TEMA RESUELTO

33. *Demostrar la identidad*

$$n\, u_n = \sum_{p+q+r=n-1} u_p\, u_q\, u_{r+1} - d \sum_{p+q+r-n=2} u_p\, u_{q+1}\, u_{r+1}$$

donde con $n!\, u_n = n^{(n,d}$ *se indica la factorial de grado y base iguales a* n *y diferencia* d.

Solución. La identidad anterior podrá escribirse

$$n\, u_n = \sum_{p+r=n-1} u_p\, u_{r+1} + (1-d) \sum_{p+q+r=n-2} u_p\, u_{q+1}\, u_{r+1}. \qquad (1)$$

Transformemos la primera sumatoria aplicando el binomio de Vandermonde. Será

$$\sum_{p+r=n-1} u_p\, u_{r+1} = \sum_{r+p+q=n-1} \frac{n^{(p,d}}{p!}\, \frac{(-r-1)^{(q,d}}{q!}\, \frac{(r+1)^{(r+1,d}}{(r+1)!}$$

$$= \sum_{p+q+r=n-1} \frac{n^{(p,d}}{p!} \binom{q+r}{r} (-1)^q\, \frac{[(q+r)d+(r+1)(1-d)]^{(q+r,d}}{(q+r)!}.$$

Para $q+r$ constante, la sumatoria en r es

$$\Delta^{q+r}[(q+r)\,d+1-d]^{(q+r,d} = (q+r)!\, (1-d)^{q+r}$$

con lo que la primera sumatoria de (1) se convierte en

$$\sum_{p=0}^{n-1} \frac{n^{(p,d}}{p!} (1-d)^{n-1-p}.$$

Con semejantes transformaciones la segunda sumatoria de (1) es

$$\sum_{p=0}^{n-2} \frac{n^{(p,d}}{p!} \sum_{q+r=n-2-p} (1-d)^{n-2-p} = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{n^{(p,d}}{p!} (1-d)^{n-2-p} (n-1-p),$$

y el segundo miembro de (1) es

$$\sum_{p=0}^{n-1} \frac{n^{(p,d}}{p!} (1-d)^{n-1-p} (n-p)$$
$$= \sum_{p=0}^{n-1} \frac{n^{(p+1,d}}{p!} (1-d)^{n-1-p} - \sum_{p=1}^{n-1} \frac{n^{(p,d}}{(p-1)!} (1-d)^{n-p} = \frac{n^{(n,d}}{(n-1)!} = n\, u_n$$

y la identidad queda demostrada.

Tal identidad es trivial para $d=1$, mientras que para $d=0$ se convierta en la siguiente identidad entre potencias de base y grado iguales

$$\frac{n^n}{(n-1)!} = \sum_{p+q+r=n-1} \frac{p^p}{p!} \cdot \frac{q^q}{q!} \cdot \frac{(r+1)^{r+1}}{(r+1)!}.$$

En: J. Babini, *Series cuyos coeficientes contienen factoriales* (Revista de la Unión Matemática Argentina, Vol. I, p. 17, Buenos Aires, 1937) puede verse otra demostración de la identidad propuesta, así como de otra más general que da lugar a casos particulares sencillos como por ejemplo

$$(2n+1)\, u_n = \sum_{p+q+r=n} u_p\, u_q\, u_r \qquad \text{con} \qquad u_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

José Babini

PROFESOR MARSHALL H. STONE

Biografía. Nació el 8 de abril de 1903 en New York City. Doctorado en 1926. Instructor en la Columbia University 1925-27; en la Harvard Univ. 1927-28 y asistente en 1928-31. Profesor asociado en la Yale Univ. 1931-33; en la Harvard 1933-37. Profesor en ella desde 1937 y Jefe del Departamento de Matemáticas desde 1942.

Redactor de las Trans. Amer. Math. Soc. de los Annals of Math. y del Amer. Math. Journal. Miembro de la National Academy of sciences, 1937. Director de su sección de Matemáticas en 1943. Miembro de la American Philosophical Society, 1943. Doctor Honoris-causa de la Universidad Mayor de San Marcos (Perú) 1943. Presidente de la Americana Mathematical Society, 1943.

Después del maestro máximo, el discípulo predilecto. Reciente aún la inolvidable visita del profesor Birkhoff, siempre presente en el afecto de todos, cuyas lecciones fueron las primeras que despertaron eficaz interés en nuestro modesto ambiente, después de las fugacísimas de tantos eminentes matemáticos, la misma universidad de Harvard nos ha enviado este año al más prestigioso de los jóvenes investigadores norteamericanos en el campo de la moderna orientación abstracta que, quiérase o no, ha emprendido esta ciencia secular.

Toda la imponente construcción levantada en milenios de esfuerzo constructivo ha quedado encasillada en los dos grandes cuerpos de doctrina que se llaman Algebra abstracta y Geometría abstracta; el primero como generalización de la Aritmética, y el segundo siguiendo la pauta de la teoría de los conjuntos de puntos de Cantor, o sea la teoría geométrica del espacio E_n. Por obra de Hilbert, Fréchet, Riesz, Hausdorff, se ha visto que el método cantoriano es aplicable a entes abstractos cualesquiera, con leves cambios de palabras a veces, y con sutiles distinciones de nuevos casos al ascender en la escala de la generalidad. Gran progreso pareció el encuadrar el Análisis clásico en el amplio cuerpo de los espacios métricos, y en especial del espacio de Hilbert, que constituye la natural ampliación del espacio E_n; pero posteriormente se ha visto que la esencia de muchos métodos es más bien de índole topológica; y a medida que va creciendo esa imponente construcción abstracta que bajo el título genérico de Topología engloba disciplinas muy diversas, se va realizando la lenta y difícil tarea de ubicar en ella gran parte de los métodos del clásico Análisis, y del nacido en este siglo.

La Matemática entera se va topologizando, es decir, se va haciendo geometría cualitativa, geometría pura de posición, mientras el Algebra o más bien la Aritmética abstracta, parecía una construcción insular, alejada de toda aplicación, después de haber influido hondamente en todo el organismo la idea de "grupo". Pero recientemente ha cambiado el panorama. Elaborados, siguiendo el ejemplo de Boole, numerosos cuerpos de doctrina deductiva, a partir de diversas combinaciones de postulados aritméticos, se ha visto que nuevas estructuras algebraicas como los *husos* (lattices) sistematizan doctrinas que parecían infinitamente lejanas, como antaño aconteció con la idea de grupo, y basta ver los índices de las revistas actuales para medir la ampiltud del nuevo rumbo impreso a la Matemática entera por las nuevas ideas directrices.

El profesor Stone ha dado un magnífico curso sobre la teoría de las representaciones o correspondencias muy generales entre espacios abstractos, de la que es uno de los principales creadores, y vencida la natural dificultad de acomodación de las mentes educadas en los métodos clásicos, todos se han visto obligados a confesar que las aplicaciones logradas justifican el esfuerzo de abstracción necesario para entrar a fondo en ese nuevo mundo, parco en fórmulas, pero denso en generalidad y rico en promesas.

Toda la obra ya realizada por el sabio profesor en su breve pero profícua labor de investigación, pertenece a ese ámbito de la moderna matemática abstracta. Sus dos grandes memorias en las Transactions of the

American Mathematical Society, de 1936 y 1937, descubrieron insospechadas relaciones entre operadores en el espacio de Hilbert, álgebras de Boole, sistemas semiordenados y Lógica matemática. Con el sencillo artificio de definir la suma (mód 2) es decir, de no considerar los puntos pertenecientes a número par de sumandos, el álgebra de Boole se convierte en *anillo* y es aplicable la clásica teoría Frobenius, Emmy Noether, Wedderburn,.... Estas interesantes conexiones entre campos que parecían lejanos han tenido repercusión en la bibliografía; la tesis de su discípulo Mac Neille y algunos trabajos de McCoy, Montgomery, Alexander, Zappin, Kakutani y los muy interesantes de su colega Garret Birkhoff han proseguido la indagación de lazos entre esos cuerpos doctrinales, en los cuales pueden cosecharse importantes novedades.

Otras conexiones surgen también de este modo algebraico de enfocar los problemas geométricos; y una muy importante, de la que pueden esperarse sabrosos frutos, es la existencia entre la Topología combinatoria y la contínua. Ya se inician las exploraciones en tal sentido y baste citar p. ej. la memoria de Wallman, quien sigue método "closely related to that of M. H. Stone", como el mismo autor declara.

La evolución total de la Matemática es ya un hecho; teorías enteras de corte clásico como la de series e integrales de Fourier, se simplifican de modo sorprendente bajo el influjo de los nuevos métodos (un ejemplo elocuente tomado de la sensacional memoria de Gelfand nos dió en su última clase) y según confiesa su propio autor, ya debería ser rehecha su obra "Linear Transformations in Hilbert Space and their applications to Analysis" aparecida en 1932, en la prestigiosa colección de las "Colloquium Publications" que edita la American Mathematical Society. Obra de su primera juventud este monumental libro, que ya descubría una fuerte personalidad en la investigación y la exposición didáctica, fué el punto de partida que lo condujo a las investigaciones abstractas, hacia las que ha logrado despertar el interés de nuestros jóvenes matemáticos, con el estímulo del propio ejemplo y con la eficacia de su exposición clara y escueta, desarrollada en correctísimo castellano.

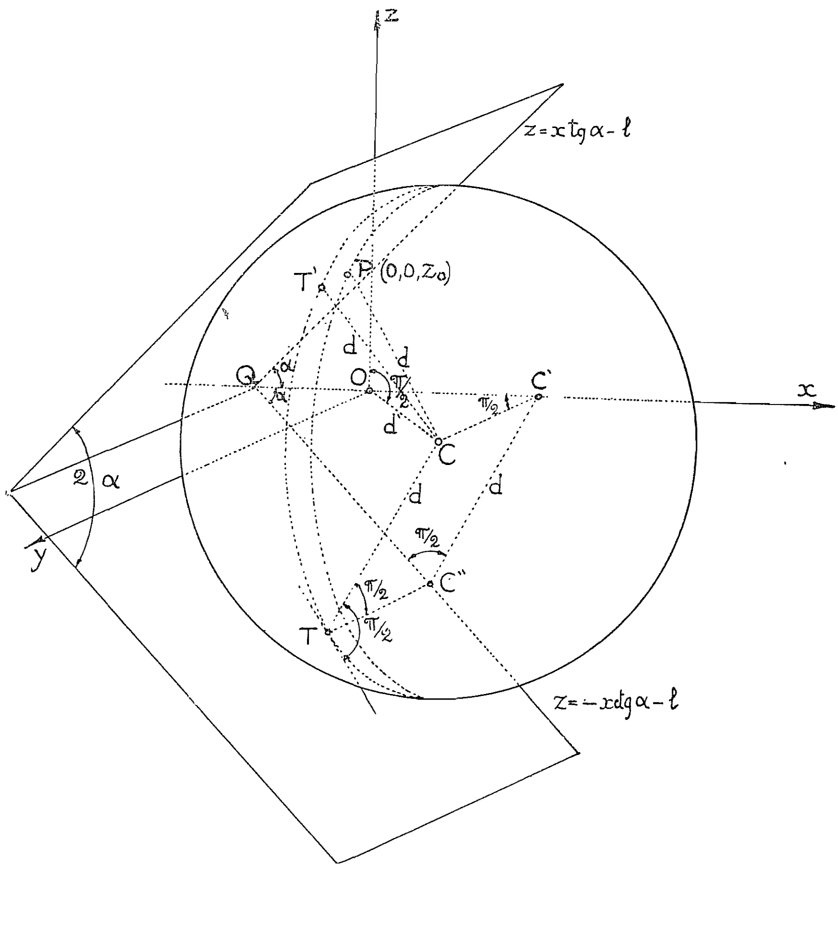
El envío en años sucesivos de profesores de la alta jerarquía de Birkhoff y Stone, y el esfuerzo realizado por ambos para aprender a fondo nuestra lengua, en homenaje al país y para asegurar la fructificación de sus enseñanzas, es motivo de gratitud hacia ambos y hacia la gran nación norteamericana, inmensa por su extensión y por su fuerza, pero mucho más todavía por su espíritu.

J. R. P.

18. — Dados dos planos y un punto P no situado en ellos, se consideran todas las superficies esféricas que pasan por este punto P y son tangentes a los dos planos. Se pide el lugar geométrico de los puntos de contacto y el estudio del cono de vértice P que forman los radios de dichas esferas.

Solución: 1.º) Caso general: Los planos se cortan según el ángulo diedro 2α (tomamos aquél en que está situado P); adoptamos como ejes coordenados los que tienen por centro la proyección de P sobre el bisector de 2α, eje y la recta paralela a la intersección de los planos dados, eje z el que contiene a P y eje x la recta normal a las anteriores.

Sea C un centro de esfera que cumpla las condiciones pedidas: $CT = CT' = CP = d$ y tendremos (ver la figura):



En $\triangle O\,C\,C'$ rectángulo en C' es $d'^2 = x^2 + y^2$
En $\triangle O\,P\,C$ » » O es $d'^2 = d^2 - z_0^2$
En $\triangle Q\,C'\,C''$ » » C'' es $d^2 = (l + x)^2 \operatorname{sen}^2\alpha$

siendo $l = O\,Q$. Deducimos:

$$x^2 + y^2 = (l + x)^2 \operatorname{sen}^2\alpha - z_0^2.$$

La ecuación del lugar de los centros de las esferas que cumplen el enunciado es por lo tanto:

$$[1] \left\{ \begin{array}{l} x^2 \cos^2\alpha + y^2 - 2\,l\,x \operatorname{sen}^2\alpha - l^2 \operatorname{sen}^2\alpha + z_0^2 = 0 \\ z = 0. \end{array} \right.$$

Curva plana de segundo grado

A) El lugar de los puntos de tangencia de las esferas y los planos dados será proyección de la [1]; para obtenerla multiplicamos x por $\cos\alpha$:

$$[2] \quad x^2 \cos^4\alpha + y^2 - 2\,l\,x \operatorname{sen}^2\alpha \cos\alpha - l^2 \operatorname{sen}^2\alpha + z_0^2 = 0.$$

El determinante cuadrático vale:

$$\triangle = -\cos^4\alpha\,, \text{ es decir, } \triangle < 0$$

para cualquier valor de α; la curva es siempre tipo elipse.

El determinante cúbico vale:

$$A = z_0^2 \cos^4\alpha - l^2 \operatorname{sen}^2\alpha \cos^2\alpha$$

distinto en general de cero, y que toma ese valor (ecuación con un solo punto real) cuando:

a] $\alpha = 0$; los dos planos coinciden y el punto está contenido en ellos. (Por el planteo resulta necesariamente $z_0 = 0$).

b] $\alpha \neq 0$ $z_0 = l \operatorname{tg} \alpha$; el punto está sobre uno de los planos.

c] La [2] nunca puede llegar a ser circunferencia, pues debería ser $\cos^4\alpha = 1$, o sea, $\alpha = 0$ caso a] ya considerado.

d] si $l = 0$; $z_0 = 0$ (necesariamente, dado el planteo; si $z_0 \neq 0$ daríamos un giro de 90° al sistema de ejes y tendríamos $z_0 = 0$, $l \neq 0$) y la curva degenera en un punto.

e] si $z_0 = 0$, $l \neq 0$ obtenemos una elipse como en el caso general.

B) Estudio del cono de vértice P que forman los radios de las esferas:

La ecuación del cono en el sistema de ejes de origen trasladado a P es:

$$x^2 \cos^2\alpha + y^2 + 2\, l\, x\, z \,\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{z_0} - l^2 z^2 \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{z_0^{\,2}} + z^2 = 0.$$

que no es un cono de revolución salvo que:

a′] $\alpha = 0$ caso a] anterior en que el cono degenera en infinitas rectas coincidentes normales a los planos en P.

b′] $\alpha \neq 0, \dfrac{z_0}{l} = \operatorname{tg}\alpha$. El punto P está sobre uno de los planos y el cono degenera en una recta normal al mismo en P.

c′] si $z_0 = 0$. El cono degenera en el plano bisector a los dados.

d′] si $z_0 = 0$; $l = 0$ no existe cono.

2.º) Casos particulares no considerados por la ecuación.

A) Los planos dados son paralelos y el punto P es interior a ellos (está en el semiespacio respecto a cada plano que contiene al otro).

El lugar de los puntos de tangencia es una circunferencia. El cono es de revolución.

a] si $d_1 = d_2$ el cono es el plano equidistante de los dados.

b] si $d_1 = 0$ el cono se reduce a una recta y la circunferencia a un punto. c] $d_1 = d_2 = 0$ ya fué considerado.

B) Los planos dados son paralelos y P no es interior a ellos ni contenido en uno de ellos.

a] $d_3 \neq 0$. No existe solución, a menos que se tome como tal la siguiente: La esfera degenera en un plano paralelo a los dados, la circunferencia es la impropia y el cono es la recta que pasa por P y es normal a los planos dados.

b]. $d_3 = 0$. La curva de contacto de las esferas con los planos coincidentes es todo el plano, las generatrices son todas las rectas que pasan por P y los centros de las esferas describen un paraboloide de revolución de centro P y directriz los planos coincidentes.

Juan Carlos Grimberg

CRONICA

ASAMBLEA DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA
10 de julio de 1943

Abierto el acto, por el Vicepresidente, Profesor José González Galé, el Doctor Rey Pastor informa que ha recibido cartas y telegramas de los miembros de la comisión directiva residentes en Rosario y en Santa Fe, dispuestos a concurrir a la reunión y que él les ha rogado no emprendan viaje especial, aplazando su venida hasta la próxima sesión en honor del Profesor Stone. A continuación elogia la activa labor de la señorita Bula y los señores Babini y Santaló así como la fecunda obra del Secretario de la entidad doctor Fernando L. Gaspar, gracias a cuya prodigiosa actividad, ahora en suspenso por enfermedad, la U. M. A. ha podido consolidar su floreciente situación y se acuerda enviarle un telegrama para agradecerle, haciendo votos para su restablecimiento.

Puesta a consideración la renovación de la junta directiva queda constituída en la siguiente forma: Presidente, José González Galé. Vicepresidente, Fernando L. Gaspar. Secretaria, Yanny Frenkel. Prosecretario, Juan B. Kervor. Tesorera, Clotilde A. Bula. Protesorera, Ester Ferrari. Vocales: José Sortheix, Cortés Plá, Pedro Rossell Soler, José Barral Souto, Alberto González Domínguez, E. A. De Cesare.

Habiéndose recibido una circular de la Biblioteca Nacional de Lima expresando interés por las publicaciones de la U. M. A. se resuelve enviar un ejemplar completo de las mismas.

Se hace constar el agrado con que se ha visto la aceptación del cargo del delegado de la U. M. A. en el Paraguay por parte del eminente matemático Sergio Sispánov.

Sigue la parte científica de la reunión con asistencia del Profesor Marshall H. Stone al que saluda el presidente agradeciendo su adhesión.

El doctor Rey Pastor informa que los alumnos de ingeniería, Klimovsky y Grinberg han resuelto interesantes problemas de Topología y Geometría Multidimensional, que la señorita Ferrari continúa fructuosamente sus trabajos en los espacios V, así como las doctoras Celina Repetto y María A. Ferrari siguen aportando nuevos resultados a la teoría de las funciones D_λ.

A continuación se exponen los trabajos siguientes:

JULIO REY PASTOR: *Un problema geométrico sobre figuras convexas en* E_n .

FÉLIX E. HERRERA: *Sobre un teorema para determinar el salto de ciertas funciones discontinuas.*

FAUSTO TORANZOS: *Generación proyectiva de hipercuádricas en el espacio de Hilbert.*

ALBERTO CALDERÓN: *Algunas condiciones necesarias y otras suficientes para la convergencia de las series de Fourier.*

Asistieron al acto las personas siguientes: José Barral Souto, Mario Bunge, Alberto Calderón, E. A. de Césare, Eleonora Cometta, Osvaldo Falco, Serafina Ferrara, Ester Ferrari, Yanny Frenkel, Alberto González Domínguez, José González Galé, Juan B. Kervor, Julio Rey Pastor, Juan Rodal, Pedro Rossel Soler, Roque Scarfiello, A. Vignatti.

Además asistió a la parte científica de la reunión el Profesor Marshall H. Stone de la Universidad de Harward.

» 4. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Una nueva demostración del teorema límite del Cálculo de Probabilidades. Condiciones necesarias y suficientes para que una función sea integral de Laplace.*
» 5. — NIKOLA OBRECHKOFF. *Sur la sommation absolue par la transformation d'Euler des séries divergentes.*
» 6. — RICARDO SAN JUAN. *Derivación e integración de series asintóticas.*
» 7. — Resolución adoptada por la U. M. A. en la cuestión promovida por el Sr. Carlos Biggeri.

VOLUMEN IV (Fascículo separado; 1939)

Nº 8. — F. AMODEO. *Origen y desarrollo de la Geometría Proyectiva.*

VOLUMEN V (Fascículos separados; 1940)

Nº 9. — CLOTILDE A. BULA. *Teoría y cálculo de los momentos dobles.*
» 10. — COTILDE A. BULA. *Cálculo de superficies de frecuencia.*

VOLUMEN VI (Fascículos separados; 1940 - 1942)

Nº 11. — R. FRUCHT. *Zur Geometria auf einer Fläche mit indefiniter Metrik (Sobre la Geometría de una superficie con métrica indefinida).*
» 12. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre una memoria del Prof. J. C. Vignaux.*
» 13. — F. TORANZOS. *Sobre las singularidades de las curvas de Jordan.*
» 14. — M. BALANZAT. *Fórmulas integrales de la intersección de conjuntos.*
» 15. — G. KNIE. *El problema de varios electrones en la mecánica cuantista.*
» 16. — A. TERRACINI. *Sobre la existencia de superficies cuyas líneas principales son dadas.*
» 17. — L. A. SANTALÓ. *Valor medio del número de partes en que una figura convexa es dividida por* n *rectas arbitrarias.*
» 18. — A. WINTNER. *On the iteration of distribution functions in the calculus of probability (Sobre la iteración de funciones de distribución en el cálculo de probabilidades).*
» 19. — E. FERRARI. *Sobre la paradoja de Bertrand.*
» 20. — J. BABINI. *Sobre algunas propiedades de las derivadas y ciertas primitivas de los polinomios de Legendre.*
» 21. — R. SAN JUAN. *Un algoritmo de sumación de series divergentes.*
» 22. — A. TERRACINI. *Sobre algunos lugares geométricos.*
» 23. — V. y A. FRAILE y C. CRESPO. *El lugar geométrico y lugares de puntos áreas en el plano.*
» 24. — R. FRUCHT. *Coronas de grupos y sus subgrupos, con una aplicación a los determinantes.*
» 25. — E. R. RAIMONDI. *Un problema de probabilidades geométricas sobre los conjuntos de triángulos.*

VOLUMEN VII (1940 - 1941)

Notas y memorias de J. BABINI, H. E. CALCAGNO, E. FERRARI, V. y A. FRAILE y C. CRESPO, G. KNIE, J. J. REBELLA, S. RIOS, R. SAN JUAN, L. A. SANTALÓ, A. TERRACINI.

Soluciones de temas propuestos. Bibliografía, Crónica, etc.

VOLUMEN VIII (1942)

Notas y memorias de J. BABINI, M. BALANZAT, R. FRUCHT, E. GASPAR, F. L. GASPAR, J. E. HERRERA, W. MÄCHLER, E. R. RAIMONDI, J. J. REBELLA, J. REY PASTOR, P. ROSSELL SOLER, M. SADOSKY, L. A. SANTALÓ.

Soluciones de temas propuestos, Bibliografía, Crónica, etc.

En 1942 la U. M. A. ha iniciado la publicación de una nueva serie de "Memorias y monografías" de las que han aparecido hasta ahora las siguientes:

Nº 1. — GUILLERMO KNIE, *Mecánica ondulatoria en el espacio curvo* (1 volumen de 152 páginas).

Además han aparecido tres cuadernos de *Miscelanea matemática.*

SUMARIO
