

REVISTA

DE LA

UNION MATEMATICA ARGENTINA

(MIEMBRO DEL PATRONATO DE LA MATHEMATICAL REVIEWS)

REDACTADA por

J. Babini, (Director), M. Balanzat, J. Barral Souto, E. Corominas, Y. Frenke',
F. L. Gaspar, A. González Domínguez, P. Pi Calleja, J. Rey Pastor, L. A.
Santaló, F. Toranzos y A. Valeiras



MIEMBROS TITULARES DE LA U. M. A.

J. BABINI (Santa Fe) (fundador). — M. BALANZAT (San Luis). — J. BARRAL SOUTO (B. Aires) (fundador). — C. A. BULA (Rosario) (fundador). — E. COROMINAS (Mendoza). — E. CHICHIZOLA (Rosario). — C. DIEULEFAIT (Rosario) (fundador). — FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES (B. Aires) (fundador). — FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS (Rosario) (fundador). — FACULTAD DE QUÍMICA INDUSTRIAL (Santa Fe) (fundador). — Y. FRENKEL (B. Aires). — E. GASPAR (Rosario) (fundador). — F. L. GASPAR (Rosario) (fundador). — J. GIANNONE (Rosario) (fundador). — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ (Buenos Aires) (fundador). — J. GONZÁLEZ GALE (Buenos Aires) (fundador). — M. GUITARTE (Buenos Aires) (fundador). — W. S. HILL (Montevideo) (fundador). — C. ISELLA (Rosario) (fundador). — H. MAGLIANO (La Plata). — OBSERVATORIO ASTRONÓMICO (La Plata). — J. OLGUIN (Rosario) (fundador). — P. PI CALLEJA (San Juan). — E. R. RAIMONDI (Buenos Aires) (fundador). — J. E. REYNAL (Buenos Aires). — J. REY PASTOR (Buenos Aires) (fundador). — E. L. SAMATÁN (Buenos Aires) (fundador). — L. A. SANTALÓ (Rosario) (fundador). — J. SORTHEIX (Tucumán) (fundador). — D. T. A. DE SPELUZZI (Buenos Aires) (fundador). — E. TERRADAS (La Plata) (fundador). — F. TORANZOS (La Plata).



BUENOS AIRES

1943

UNION MATEMATICA ARGENTINA

JUNTA DIRECTIVA

Presidente, José González Galé. Vicepresidente, Fernando L. Gaspar. Secretaria, Yanny Frenkel. Prosecretario, Juan B. Kervor. Tesorera, Clotilde A. Bula. Profesora, Ester Ferrari. Vocales: José Sortheix, Cortés Pla, Pedro Rossell Soler. José Barral Souto, Alberto González Domínguez, E. A. De Cesare.

DELEGADOS DE LA U. M. A.

En Tucumán, Prof. José Sortheix. En Córdoba, Prof. Fernando Sánchez Sarmiento. En Santa Fe, Prof. José Babini. En Rosario, Prof. Fernando L. Gaspar. En San Luis, Prof. Manuel Balanzat. En La Plata, Prof. Fausto Toranzos. En Montevideo (R. O.), Prof. Walter S. Hill. En Asunción (Paraguay) Prof. Sergio Sispánov.

Para ingresar como miembro titular de la Unión Matemática Argentina, es necesaria la presentación del solicitante por dos socios fundadores, la admisión por la Junta, y el pago de una cuota de \$ 5. — m/n. mensuales o de \$ 50.— anuales.

Para ingresar como miembro adherente (con derecho a la Revista y a las Memorias en fascículos separados) es necesario el pago de una cuota de \$ 10.— anuales. Los pagos deberán efectuarse por cheque, giro u otro medio libre de gastos, a la orden de la Tesorera, Prof. Clotilde A. Bula, Moreno 364, Rosario.

Los señores miembros adherentes domiciliados en la Ciudad de Buenos Aires podrán, si lo prefieren, efectuar su pago en doce cuotas mensuales de \$ 1.00 m/n. cada una, que serán cobradas a domicilio.

Por ser la U. M. A. miembro del patronato de la Mathematical Reviews (sponsoring member), los socios de la U. M. A. tienen derecho a suscribirse a esa importante revista de bibliografía y crítica con 50 % de rebaja sobre el precio de suscripción que es de 13 dólares por año. Los socios de la U. M. A. pagarán por tanto sólo 6.50 dólares por año.

Los trabajos originales enviados para su publicación serán previamente analizados por un ponente, quien emitirá dictamen acerca de la novedad y corrección de sus resultados.

La impresión de las tiradas aparte, y las correcciones extraordinarias de pruebas, son por cuenta de los autores.

Abonnement annuel à l'étranger: 4.00 dollars (Etats-Unis).

Prière d'adresser toute la correspondance scientifique et administrative à l'adresse ci-dessous:

Sr. SECRETARIO DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

PROF. YANNY FRENKEL

PERÚ 222, BUENOS AIRES (REP. ARGENTINA)

PUBLICACIONES DE LA U. M. A.

VOLUMEN I (1936-1937)

Notas y memorias de C. BIGGERI, J. FAYET, J. BABINI, F. CERNUSCHI, A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ, J. REY PASTOR, SIXTO RÍOS.

Bibliografía. Extractos.

VOLUMEN II (1938-1939)

Notas y memorias de CLOTILDE A. BULA, T. LEVI-CIVITA, A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ, M. PETROVICH, C. BIGGERI, S. RÍOS, F. L. GASPAR, J. REY PASTOR, YANNY FRENKEL, J. A. DEL PERAL, F. TORANZOS.

Bibliografía. Crónica. Revista de revistas, etc.

VOLUMEN III (Fascículos separados; 1938-1939)

Nº 1. — GINO LORIA. *Le Matematiche in Ispagna e in Argentina.*

» 2. — A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre las series de funciones de Hermite.*

» 3. — MICHEL PETROVICH. *Remarques arithmétiques sur une équation différentielle du premier ordre.*

(Sigue en la contratapa)

SOBRE LA DISTRIBUCION PROBABLE DE CORPUSCULOS EN UN CUERPO, DEDUCIDA DE LA DISTRIBUCION EN SUS SECCIONES Y PROBLEMAS ANALOGOS

por L. A. SANTALÓ

Supongamos N corpúsculos de forma convexa distribuidos de manera arbitraria en el interior de un cuerpo también convexo K . Si V es el volumen de este cuerpo llamaremos *densidad media* de corpúsculos en K al cociente

$$D = \frac{N}{V} \tag{1}$$

o sea al número de ellos por unidad de volumen si la repartición fuese uniforme.

Si una recta arbitraria que atraviesa el cuerpo corta a n de estos corpúsculos y la longitud de la cuerda que determina en K es s , el cociente $\frac{n}{s}$ será la densidad media de los corpúsculos sobre la recta. Haciendo esta operación con varias rectas elegidas al azar, el objeto de esta nota consiste en ver cómo de estas distribuciones sobre las rectas se puede deducir la densidad media (1) del cuerpo entero.

En lugar de cortar por una recta se puede también cortar por varios planos y deducir de la densidad de corpúsculos en las secciones la densidad de ellos en todo el cuerpo. También consideramos los casos (§ 2, nos. 7, 9) de cortar por franjas limitadas por dos planos paralelos o bien por cilindros de sección convexa.

Como aplicación se obtiene en § 2, n.º. 3 un resultado clásico de la teoría cinética de los gases.

El método de demostración consiste en utilizar algunos resultados de Probabilidades Geométricas o de Geometría Integral para los cuales remitiremos al lector principalmente a los libros de BLASCHKE «*Vorlesungen über Integralgeometrie*, I y II» [1] o al de DELTHEIL «*Probabilités géométriques*» [2]⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Los paréntesis cuadrados se refieren a la Bibliografía citada al final.

§ 1. CASO DEL PLANO

1. *Secciones por una recta.* Supongamos primeramente una figura convexa K que contenga en su interior N corpúsculos C congruentes entre sí pero de forma cualquiera (con la sola restricción de ser también *convexos*).

Una recta cualquiera G del plano vendrá determinada por sus coordenadas polares p, ϑ o sea su distancia a un punto fijo y el ángulo de su normal con una dirección también fija. Dar una recta arbitraria en el plano significa lo mismo que dar al azar un par de números p y ϑ (p cualquier número positivo y ϑ comprendido entre 0 y 2π) y para medir un conjunto de rectas se toma la integral extendida a este conjunto de la forma diferencial [1, p. 7], [2, p. 59],

$$dG = dp \cdot d\vartheta. \quad (2)$$

Con esta expresión si se considera una línea cualquiera de longitud l y llamamos n_1 al número de puntos en que es cortada en cada posición de la recta G se verifica [1, p. 11], [2, p. 60],

$$\int n_1 dG = 2l \quad (3)$$

extendida la integración a todas las rectas que cortan a la línea considerada, únicas para las que es $n_1 \neq 0$.

Vamos a aplicar esta fórmula (3) a la línea formada por todos los contornos de los corpúsculos contenidos en K (fig. 1).

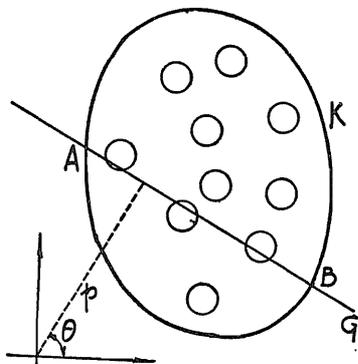


Fig. 1.

Si u es el perímetro de cada uno de ellos, la longitud total será Nu y si se representa por n el número de corpusculos que son cortados por la recta G , como cada uno tiene dos puntos de intersección, será

$$\int_{G.K \neq 0} n dG = Nu \quad (4)$$

donde con el símbolo $G.K \neq 0$ entendemos que la integración debe extenderse a todas las rectas que cortan a K .

Por otra parte, si se representa por U el perímetro de la figura K , por ser convexa y por tanto n_1 constante e igual a dos, la fórmula (3) nos da como medida de todas las rectas que cortan a K :

$$\int_{G.K \neq 0} dG = U. \quad (5)$$

Dividiendo (4) por (5) se deduce, como *valor medio del número de corpusculos que son cortados por una recta arbitraria G que atraviesa la figura K* :

$$\bar{n} = N \frac{u}{U}. \quad (6)$$

2. Llamando s a la longitud de la cuerda que la recta G determina en K y F al área de esta figura, es fácil ver que [1, p. 19], [2, p. 74],

$$\int_{G.K \neq 0} s dG = \int s dp d\vartheta = \int_0^\pi F d\vartheta = \pi F. \quad (7)$$

Por tanto la *longitud media* de las cuerdas de K vale, dividiendo (7) por (5),

$$\bar{s} = \pi \frac{F}{U}. \quad (8)$$

3. Si se quiere ahora ver la densidad de corpusculos sobre las rectas que atraviesan a K , bastará dividir el número medio (6) de ellos por la cuerda media (8), obteniéndose

$$\delta_c = \frac{\bar{n}}{s} = \frac{u}{\pi} \frac{N}{F}, \quad (9)$$

pero $\frac{N}{F}$ es la densidad media D de corpúsculos en la figura total K o sea el número de ellos por unidad de área si la repartición fuera uniforme, luego (9) puede escribirse

$$\delta_c = \frac{u}{\pi} D, \quad (10)$$

que es la relación que liga *la densidad media de corpúsculos sobre las cuerdas de las rectas que atraviesan a K con la densidad total de ellos.*

Por ejemplo, si los corpúsculos son circulares, de radio r es

$$\delta_c = 2rD. \quad (11)$$

Esta expresión representa también el número de corpúsculos que encuentra la recta G por unidad de longitud y por tanto la *distancia media* entre ellos será la inversa, o sea

$$d_c = \frac{1}{2rD} \quad (12)$$

que nos da la *distancia media entre dos corpúsculos vecinos de los N que están distribuídos al azar en el área F .*

3. PÓLYA en un artículo muy sugestivo [5], en el que llega al mismo resultado, aunque por camino completamente distinto, da a esta cuestión la siguiente interpretación gráfica: Si desde un punto arbitrario de un bosque rodeado de árboles con sección circular de radio r distribuídos con una densidad media D , se mira en todas direcciones hasta donde alcanza la vista (fig. 2) la *distancia visible media* está dada por (12).

Tomando la inversa de la fórmula (10) tendríamos una expresión más general de esta misma distancia media para el caso de no ser las secciones circulares. (Ver el Apéndice, § 3).

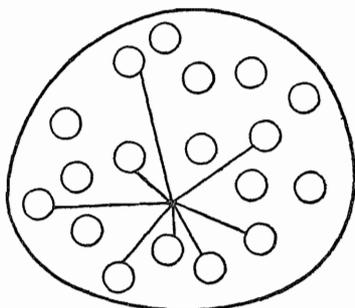


Fig. 2.

4. *Secciones por una banda paralela.* Sea el mismo problema anterior, pero ahora supongamos que se corta la figura K por una banda limitada por dos rectas paralelas a distancia Δ y de la densidad media de corpúsculos en la sección queremos deducir la densidad en la figura total (fig. 3).

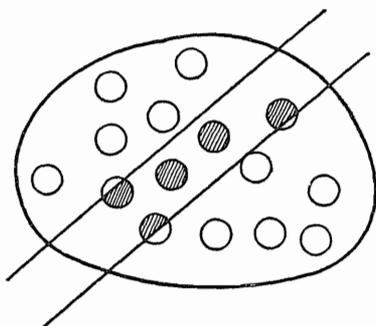


Fig. 3.

La posición de una de estas bandas paralelas queda determinada, en el plano, por las mismas coordenadas p, ϑ de una recta que puede ser, por ejemplo, su paralela media. Representando ahora por dB (densidad para conjuntos de bandas paralelas) la misma forma diferencial $dp d\vartheta$ de antes, o sea

$$dB = dp d\vartheta \quad (13)$$

y siendo n el número de corpúsculos que en cada posición que-

dan total o parcialmente interiores a la banda B , es sabido que⁽²⁾

$$\int_{B, K \neq 0} n dB = \pi N \Delta + Nu \quad (14)$$

estando extendida la integración a todas las bandas B que cortan a K y siendo, como antes, N el número total de corpúsculos contenidos en K y u la longitud del contorno de cada uno de ellos.

La medida total de las bandas paralelas de anchura Δ que cortan a K es [7, p. 18]

$$\int_{B, K \neq 0} dB = U + \pi \Delta \quad (15)$$

luego dividiendo (14) por (15) se deduce como *valor medio del número de corpúsculos encontrados por una banda arbitraria*

$$\bar{n} = \frac{\pi \Delta + u}{\pi \Delta + U} N. \quad (16)$$

Esta fórmula nos resuelve de paso el problema siguiente:

Supuestos n corpúsculos de forma convexa cualquiera y perímetro u interiores a una figura convexa K , el número medio de ellos que son alcanzados por una pincelada de anchura Δ dada arbitrariamente sobre esta figura, está dado por (16).

La fórmula (16) se encuentra también en E. GASPARD [3, p. 136].

(²) Sobre bandas paralelas móviles en el plano y para las fórmulas (15) y (17) se puede ver nuestra memoria [7].

La fórmula (14) se puede deducir de la de BLASCHKE [1, p. 37]

$$\int c_{01} dK = 2 \pi (C_0 F_1 + C_1 F_0 + U_0 U_1) \quad (*)$$

con solo suponer que la figura K que aquí interviene, de área F_0 , longitud U_0 y curvatura total C_0 , se reduce a una banda de plano limitada por rectas paralelas a distancia Δ . Habrá que sustituir dK por dB , F_0 por $\frac{1}{2} \Delta$, U_0 por 1 y C_0 se anula. Como figura fija se suponen aquí los N corpúsculos, los cuales, siendo convexos, dan $C_{01} = 2\pi n$, $C_1 = 2\pi N$ y $U_1 = Nu$. Con estas sustituciones la fórmula (*) pasa a la (14) que utilizamos en el texto.

Una demostración directa de la fórmula (14) ha sido dada por E. GASPARD [3, p. 135].

5. Llamando f al área de la parte de K que queda interior a la banda B , es sabido también que [7, p. 19], [1, p. 51],

$$\int_{B, K \neq 0} f dB = \pi \Delta F. \quad (17)$$

y por tanto el valor medio de f vale

$$\bar{f} = \frac{\pi \Delta F}{U + \pi \Delta}. \quad (18)$$

Dividiendo (16) por (18) se tendrá el *valor medio de la densidad de corpúsculos en las secciones obtenidas cortando K por B* , que valdrá

$$\delta_B = \left(1 + \frac{u}{\pi \Delta}\right) D. \quad (19)$$

Esta es la relación buscada que nos liga *la densidad total D con la densidad media de las secciones*.

§ 2. CASO DEL ESPACIO.

1. *Secciones por una recta.* Sea en el espacio un cuerpo convexo K conteniendo en su interior N corpúsculos iguales también convexos pero de forma cualquiera y distribuidos de una manera arbitraria. Queremos obtener la relación existente entre el número de estos corpúsculos que corta una recta al azar que atraviesa el cuerpo con el número total de ellos.

Una recta en el espacio está determinada por cuatro parámetros que pueden ser: las coordenadas x, y de su punto de intersección con un plano normal y la longitud y latitud φ y ϑ que fijan su dirección. Representando por $d\Omega$ el elemento de área sobre la esfera unidad correspondiente a la dirección de la recta, para medir conjuntos de rectas se toma [1, p. 66], [2, p. 90] la integral extendida al conjunto que sea, de la forma diferencial

$$dG = dx dy d\Omega. \quad (20)$$

Por ejemplo, llamando n_1 al número de puntos de inter-

sección de la recta G con una superficie de área F , este número n_1 dependerá de la posición de la recta, y extendiendo la integración a todas las posiciones de la misma se verifica [1, p. 69], [2, p. 89],

$$\int n_1 dG = \pi F. \quad (21)$$

Consideremos la superficie formada por la suma de las superficies de los N corpúsculos, cuya área valdrá Nf , si f es el área de cada uno de ellos. Como G sólo puede tener con cada corpúsculo dos puntos de intersección, llamando n al número de corpúsculos que la recta G encuentra al atravesar K , la fórmula (21) da

$$\int_{c. K \neq 0} n dG = \frac{\pi}{2} N f. \quad (22)$$

Por otra parte, la medida del conjunto total de las rectas que cortan a K es (también según (21) y siendo ahora F el el área de K)

$$\int_{c. K \neq 0} dG = \frac{\pi}{2} F, \quad (23)$$

luego, dividiendo (22) por (23):

$$\bar{n} = N \frac{f}{F}. \quad (24)$$

que nos da el *valor medio del número de corpúsculos que encontrará una recta arbitraria que atraviesa a K .*

2. Llamando s a la longitud de la cuerda que la recta G determina en K , es fácil ver, teniendo en cuenta (20) que [1, p. 77]

$$\int_{c. K \neq 0} s dG = 2\pi V \quad (25)$$

siendo V el volumen de K . De (25) y (23), por división, obtenemos como valor medio de la longitud de la cuerda s :

$$\bar{s} = \frac{4V}{F}. \quad (26)$$

Dividiendo el número medio de corpúsculos que encuentra G por la longitud media (26) de la cuerda, se tendrá la densidad media δ_c de corpúsculos sobre la recta G que será

$$\delta_c = \frac{f}{4} D, \quad (27)$$

recordando que D es la densidad $\frac{N}{V}$ de los corpúsculos en K .

Esta es, por consiguiente, *la relación existente entre la densidad de corpúsculos sobre una recta que atraviesa el cuerpo y la densidad total en el mismo.*

Dividiendo, inversamente, (26) por (24), se obtendrá la *distancia media* entre los *corpúsculos vecinos*, que valdrá

$$\bar{d} = \frac{4}{fD}. \quad (28)$$

Al decir distancia media entre corpúsculos «vecinos» entendemos, como se deduce de la manera como obtenemos la fórmula (28), que se consideran únicamente las distancias de cada corpúsculo a aquellos que son visibles desde el mismo, es decir, que se pueden unir por un segmento que no encuentra a ningún otro corpúsculo intermedio.

Si los corpúsculos son esféricos de radio r , será

$$\bar{d} = \frac{1}{\pi r^2 D}. \quad (29)$$

PÓLYA, en el artículo ya citado [5], obtiene también esta fórmula que interpreta de la manera siguiente: supuesta una caída de nieve formada por copos esféricos de radio r con una densidad D , la distancia visible media según todas las direcciones desde un punto envuelto por la nevada, está dada por (29). (Ver el Apéndice § 3).

3. *Aplicación a la teoría cinética de los gases.* El mismo método anterior sirve para resolver el problema siguiente: Sea un cuerpo K de área F y volumen V que contiene en su interior N corpúsculos convexos e iguales entre sí. ¿Cuál será el recorrido libre medio de un punto sin dimensiones que se mueve dentro de K en dirección arbitraria (todas igualmente probables)?

Sea G la recta sobre la cual en un momento considerado se mueve el punto (fig. 1, aunque ahora estamos en el espacio, la figura 1 sirve lo mismo). Los recorridos libres posibles serán los segmentos de esta recta limitados por dos corpúsculos sucesivos o por un corpúsculo y la pared de K . Llamando como antes s a la cuerda total que G determina en K o sea $s = AB$ y s_i a las cuerdas parciales interiores a los corpúsculos, la suma de recorridos libres posibles sobre G es

$$s - \sum s_i,$$

extendida la sumación al número de corpúsculos que son cortados por la recta G . En cuanto al número de recorridos libres o sea de segmentos en que la cuerda s de G queda dividida por los corpúsculos y las paredes del recipiente, es $n + 1$ siendo n , como antes, el número de corpúsculos cortados por G . Extendiendo la integración a todas las rectas que cortan a K , la fórmula (25) da:

$$\int_{c. K \neq 0} (s - \sum s_i) dG = 2\pi (V - Nv), \quad (30)$$

siendo v el volumen de cada corpúsculo. Además por la fórmula (21):

$$\int_{c. K \neq 0} (n + 1) dG = \frac{\pi}{2} (F + Nf) \quad (31)$$

siendo f el área de cada corpúsculo y F la del cuerpo K .

El valor medio de los recorridos libres se obtendrá dividiendo su suma total (30) por el número de ellos (31) o sea

$$\bar{l} = \frac{4(V - Nv)}{F + Nf}. \quad (32)$$

En el caso de ser los corpúsculos esféricos de radio r esta fórmula queda

$$\bar{l} = \frac{4(V - \frac{4}{3}N\pi r^3)}{F + 4\pi r^2 N}. \quad (33)$$

Esta fórmula se puede aplicar al caso del recorrido medio de las moléculas de un gas. Para ello basta observar que hasta ahora hemos considerado el recorrido medio de un punto sin dimensiones, si se quiere que sea el de una molécula o corpúsculo de radio r bastará suponer que ella se reduce a un punto y todas las demás duplican el radio puesto que entonces cuando el punto toque a una de estas moléculas de radio doble, es efectivamente el caso en que las dos moléculas se encontrarían. Sustituyendo en la fórmula anterior r por $2r$ se tiene pues como recorrido libre medio de las moléculas de un gas la fórmula conocida (ver por ejemplo [4, p. 34]),

$$\bar{l} = \frac{4(V-b)}{F+16\pi r^2 N} \quad (34)$$

indicando por b el volumen total de estas moléculas supuestas de radio $2r$.

En general para un gas a no mucha presión b y F son despreciables al lado de los demás términos de esta expresión y como valor aproximado se toma

$$\bar{l} = \frac{V}{4\pi r^2 N} = \frac{1}{4\pi r^2 D} \quad (35)$$

siendo D el número medio de moléculas por unidad de volumen.

4. *Caso de trayectorias curvas.* Recordando algunas fórmulas más de Geometría integral es fácil demostrar que el recorrido libre medio de un punto en el interior del cuerpo convexo K que contiene N corpúsculos distribuidos arbitrariamente es independiente de la forma de la trayectoria. Es decir, tiene el mismo valor dado por (32) lo mismo si la trayectoria es rectilínea, como allí se supuso, que si es circular o elíptica o cualquiera.

En efecto, supongamos que el punto debe moverse describiendo una trayectoria de forma arbitraria (pero siempre la misma) por ejemplo la representada por una curva cerrada C de longitud L (fig. 4).

Esta curva C (plana o alabeada) viene fijada en el espacio por seis coordenadas que pueden ser las tres x, y, z de uno de

sus puntos, más las ϑ y φ de una dirección por este punto, más la τ de una rotación alrededor de esta dirección. Entonces es

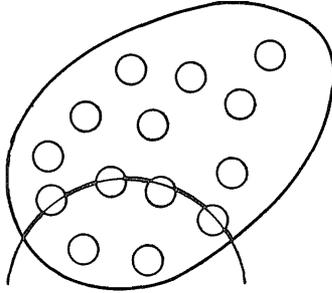


Fig. 4.

sabido que para medir un conjunto de posiciones de una tal línea se toma la integral de la llamada *densidad cinemática* que vale [1, p. 64], [6, p. 13],

$$dC = \cos \vartheta \, dx \, dy \, dz \, d\vartheta \, d\varphi \, d\tau. \quad (36)$$

Esta medida tiene la propiedad que la caracteriza de ser independiente de la posición de los ejes coordenados de referencia, o, en otras palabras, es invariante por movimientos.

Llamando n_1 al número de puntos de intersección de esta línea con las superficies de los N corpúsculos más la del cuerpo K que los contiene, vale [6, p. 39],

$$\int n_1 dC = 4\pi^2 (F + Nf) L \quad (37)$$

siendo como antes f el área de los corpúsculos y F la de K .

Luego si n es el número de partes, interiores a K y limitadas por dos corpúsculos o las paredes, en que C queda dividida, (fig. 4), como es $n_1 = 2n$, será

$$\int n dC = 2\pi^2 (F + Nf) L. \quad (38)$$

Por otra parte, si s es la parte de C que en cada posición queda interior a K y $\sum s_i$ la suma de las partes interiores a los corpúsculos, se verifica [6, p. 42]

$$\int (s - \sum s_i) dC = 8\pi^2 (V - Nv) L. \quad (39)$$

Dividiendo la longitud total (39) de las partes en que C queda dividida por los corpúsculos y paredes de K , por la suma del número de partes (38), se tendrá la *longitud media* de ellas o sea *el recorrido libre medio para un punto cuya trayectoria tuviera la forma de la línea C* , que será

$$\bar{l} = \frac{4(V - Nv)}{F + Nf}$$

que es el mismo valor (32) obtenido para el caso de las trayectorias rectilíneas.

5. *Secciones por un plano.* Veamos ahora la relación existente entre la densidad de corpúsculos en una sección plana arbitraria del cuerpo y la densidad total. Un plano viene determinado por tres parámetros que pueden ser: su distancia p a un punto fijo y la latitud y longitud ϑ y φ de la dirección de su normal. Para medir conjuntos de planos se toma la integral, extendida al conjunto de que se trate, de la forma diferencial [1, p. 66], [2, p. 92]

$$dE = dp d\Omega \quad (40)$$

siendo, como antes, $d\Omega$ el elemento de área sobre la esfera unidad correspondiente a la dirección normal al plano.

Supuestos como siempre N corpúsculos congruentes de área f , volumen v e integral de curvatura media m ⁽³⁾ repartidos arbitrariamente en el interior de K , si se representa por n el número de ellos que son cortados por un plano E que corta a K , es sabido [1, p. 102] que se verifica

(³) Recuérdese que se llama *integral de la curvatura media* a la integral $\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) d\sigma$ extendida a toda la superficie del cuerpo siendo r_1 y r_2 los radios principales de curvatura correspondientes al elemento superficial $d\sigma$. Por ejemplo para un corpúsculo esférico de radio r sería $m = 4\pi r$. Si la superficie convexa tiene líneas de discontinuidad de la curvatura media, el valor que se debe atribuir a m es el límite de la curvatura media del cuerpo paralelo exterior a distancia ε cuando ε tiende a cero.

$$\int n dE = N m. \quad (41)$$

Por otra parte, la medida de todos los planos que cortan a K es [1, p. 72], [2, p. 95],

$$\int_{E.K \neq 0} dE = M \quad (42)$$

siendo M la curvatura media total de K . De (41) y (42) por división se deduce *el valor medio del número de corpúsculos que serán cortados por un plano dado al azar*, que será

$$\bar{n} = N \frac{m}{M}. \quad (43)$$

6. Llamando σ al área de la sección que el plano E determina en K es fácil deducir de la definición (40) que es [1, p. 74]

$$\int \sigma dE = 2\pi V \quad (44)$$

y dividiendo por (42), el *valor medio* de σ será:

$$\bar{\sigma} = 2\pi \frac{V}{M}. \quad (45)$$

Dividiendo el número medio (43) de corpúsculos que son cortados por E , por el valor medio (45) del área de la sección, se tendrá la *densidad media* de corpúsculos en las secciones de K por un plano arbitrario, que valdrá

$$\delta_E = \frac{mN}{2\pi V} = \frac{m}{2\pi} D \quad (46)$$

que relaciona *la densidad media de la sección con la densidad del conjunto*.

Si los corpúsculos son esféricos de radio r , es $m = 4\pi r$ y esta relación se reduce a

$$\delta_E = 2rD.$$

7. *Secciones por franjas paralelas.* Lo mismo dicho en el n.º. 4 de § 1 para el caso del plano, se puede repetir para el espacio, suponiendo que se corta el cuerpo convexo K por una franja de espacio limitada por dos planos paralelos a distancia Δ . La posición de una de estas franjas queda determinada por la de un plano invariablemente unida a ella, de manera que como medida de un conjunto de franjas se toma la integral de la misma expresión diferencial (40) que ahora representaremos por

$$dB = dp d\Omega. \quad (47)$$

Llamando n al número de corpúsculos que en cada posición son alcanzados por la franja B , tiene lugar la fórmula [1, p. 101], [8],

$$\int n dB = (2\pi\Delta + m) N \quad (48)$$

siendo, como antes, m la curvatura media total de cada corpúsculo. Como además la medida total de las franjas que cortan a K es [7, p. 34],

$$\int_{B.K \neq 0} dB = M + 2\pi\Delta, \quad (49)$$

el valor medio del número de corpúsculos que son alcanzados por un corte de anchura Δ dado al azar en el cuerpo K será el cociente de (48) y (49) o sea

$$\bar{n} = \frac{2\pi\Delta + m}{2\pi\Delta + M} N. \quad (50)$$

8. Llamando v al volumen de la parte de K que queda interior a la franja B es [7, p. 35],

$$\int v dB = 2\pi\Delta V, \quad (51)$$

luego, según (49), el valor medio de este volumen valdrá

$$\bar{v} = \frac{2\pi\Delta V}{M + 2\pi\Delta}. \quad (52)$$

Dividiendo (50) por (52) se obtendrá el *valor medio de la densidad de corpúsculos en las secciones de K por B*,

$$\delta_B = \left(1 + \frac{m}{2\pi\Delta}\right) D, \quad (53)$$

poniendo, como siempre, $D = \frac{N}{V}$. Esta es la relación que liga la densidad total D con la densidad media de las secciones. Si los corpúsculos son esféricos de radio r es $m = 4\pi r$.

9. *Secciones por cilindros convexos.* Un cilindro convexo queda determinado en el espacio por la posición de una recta paralela a sus generatrices, más un giro alrededor de esta recta. Representando por G esta recta y por τ el giro, como medida de un conjunto de cilindros se toma la integral de la expresión [6, p. 45]

$$dZ = dG d\tau \quad (54)$$

siendo dG la expresión dada en (20).

Con esta definición se obtiene⁽⁴⁾ que la medida de todos los cilindros congruentes que cortan a un cuerpo convexo K es [6, p. 46]

$$\int_{z.K=0} dZ = 2\pi (4\pi\sigma + \pi F + \lambda M) \quad (55)$$

siendo σ el área y λ el perímetro de la sección recta del cilindro Z y F y M el área y curvatura media de K respectivamente.

Además llamando n al número de corpúsculos encontrados por este cilindro al atravesar K , tiene lugar [1, p. 101], [8],

$$\int n dZ = 2\pi (\pi f + \lambda m + 4\pi\sigma) N \quad (56)$$

luego, el valor medio del número de corpúsculos encontrados por un cilindro que atraviesa al azar el cuerpo K es

(4) Aprovecho la oportunidad para corregir que en [6] pág. 46 y 52 en esta fórmula (55) y en la (58) falta en el segundo miembro el factor 2, como es fácil darse cuenta siguiendo el razonamiento allí empleado.

$$\bar{n} = \frac{(\pi f + \lambda m + 4\pi\sigma)}{\pi F + \lambda M + 4\pi\sigma} N. \quad (57)$$

10. Llamando v al volumen de la parte de K que queda interior a Z en cada posición es [6, p. 52]

$$\int v dZ = 8\pi^2\sigma V \quad (58)$$

y teniendo en cuenta (55) el valor medio de este volumen v será

$$\bar{v} = \frac{4\pi\sigma V}{4\pi\sigma + \pi F + \lambda M}. \quad (59)$$

Dividiendo por este volumen medio el número medio (57) de corpúsculos, tendremos la densidad media de ellos

$$\delta_Z = \left(1 + \frac{\pi f + \lambda m}{4\pi\sigma}\right) D$$

que es la relación que liga la densidad media de corpúsculos en las secciones de K por cilindros congruentes arbitrarios, con la densidad total en el interior de K .

Si los corpúsculos son esféricos de radio r habrá que sustituir $f = 4\pi r^2$, $m = 4\pi r$.

§ 3. APÉNDICE

En § 1, n.º. 3 y § 2, n.º. 2 hemos identificado la *distancia media* entre dos corpúsculos vecinos con la *distancia visible media*, considerada por PÓLYA, desde un punto situado en el interior del espacio que contiene a los corpúsculos. Esta identificación es lícita considerando la manera como deben entenderse dichos valores medios y que se deduce de cómo han sido obtenidos en cada caso. En el camino seguido por PÓLYA, se empieza por considerar un segmento de longitud x que parte de un punto fijo y se calcula luego su longitud media suponiendo que todos los corpúsculos se colocan al azar. Ello equivale a buscar la longitud media de los segmentos que se pueden colocar en la

región de los corpúsculos sin que corten a ninguno de ellos. En esta forma es claro que la longitud media obtenida debe resultar igual a la distancia media obtenida por nosotros.

El camino seguido por nosotros se generaliza sin dificultad a n dimensiones. Consideremos, en efecto, como densidad para medir conjuntos de rectas la forma diferencial $dG = dP_{n-1} d\omega_n$, siendo dP_{n-1} el elemento de volumen de un hiperplano normal a la recta y $d\omega_n$ el elemento de área sobre la esfera unidad del espacio de n dimensiones correspondiente a la dirección de la recta. Esta expresión de dG es la generalización inmediata de (2) y (20). La medida de las rectas que cortan a un cuerpo convexo K vale

$$\int_{G.K \neq 0} dG = \frac{1}{2} \int \sigma d\omega_n = \frac{1}{2} \kappa_{n-1} F, \quad (60)$$

representando por σ el área de la proyección del cuerpo K en la dirección $d\omega_n$ y poniendo $1/2$ por tratarse de rectas no orientadas; la segunda integración está extendida a toda la esfera unidad n -dimensional; F es el área de K y κ_{n-1} el volumen de la esfera unidad del espacio de $n-1$ dimensiones⁽⁵⁾.

Por tanto, si f es el área de cada corpúsculo y N el número de ellos interiores al cuerpo convexo K , llamando n al número de corpúsculos cortados por la recta G en cada posición, será

$$\int n dG = \frac{1}{2} \kappa_{n-1} N f. \quad (61)$$

El número de corpúsculos encontrados por una recta arbitraria será, pues, como siempre

$$\bar{n} = \frac{f}{F} N. \quad (62)$$

Por otra parte, llamando s a la longitud de la cuerda que G determina en K es

⁽⁵⁾ Para esta fórmula (60) recordar la llamada fórmula de CAUCHY, por ejemplo en BONNESEN-FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper*, Berlín, 1934, pág. 48.

$$\int_{G, K' \neq 0} s dG = \frac{1}{2} \omega_n V \quad (63)$$

siendo ω_n el área de la esfera n -dimensional y V el volumen de K . De (63) y (60):

$$\bar{s} = \frac{\omega_n}{\kappa_{n-1}} \frac{V}{F}. \quad (64)$$

Si esta longitud media la dividimos por el número medio de corpúsculos encontrados por la recta arbitraria, tendremos la *distancia media* buscada, que será

$$\bar{d} = \frac{\omega_n}{\kappa_{n-1}} \frac{V}{fN}. \quad (65)$$

Si los corpúsculos son esféricos de radio r es $f = \omega_n r^{n-1}$ y poniendo como siempre $\frac{V}{N} = D$ resulta

$$\bar{d} = \frac{1}{\kappa_{n-1} r^{n-1} D}. \quad (66)$$

El producto $\kappa_{n-1} r^{n-1}$ es el volumen de la esfera de $n-1$ dimensiones de radio r . Esta fórmula (66) nos da pues la *distancia visible media desde un punto del espacio de n dimensiones supuesto rodeado por corpúsculos esféricos de radio r situados al azar*. Es fácil comprobar que (66) comprende como casos particulares a (12) y (29).

BIBLIOGRAFIA

- [1] W. BLASCHKE, "Vorlesungen über Integralgeometrie" Hamburger Mathematische Einzelschriften. N° 20-22. Leipzig und Berlin, 1936-37.
- [2] R. DELTHEIL, "Probabilités géométriques" Paris 1926.
- [3] E. GASPARD, "Fórmulas integrales referentes a intersección de una figura plana con bandas variables". Publicaciones del Instituto de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Matemáticas etc. de la Universidad N. del Litoral. Vol. II, n° 6, Rosario, 1940.

- [4] L. B. LOEB, “*Kinetic Theory of Gases*” New York, 1927.
- [5] G. PÓLYA, “*Zahlentheoretisches und Wahrscheinlichkeitstheoretisches über die Sichtweite im Walde*” Arch. der Math. und Phys. 27, p. 135-142 (1918).
- [6] L. A. SANTALÓ, “*Integralgeometrie 5. Ueber das kinematische Mass im Raum*” Actualités scientifiques et industrielles n° 357. Hermann. Paris, 1936.
- [7] » “*Geometría integral 7. Nuevas aplicaciones del concepto de medida cinemática en el plano y en el espacio*”. Revista de la Academia de Ciencias, Madrid, 1936.
- [8] » “*Geometría integral 15. Fórmula fundamental de la medida cinemática para cilindros y planos paralelos móviles*”. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hansischen Universität, 12, 1937.

Rosario, Julio 1943.

TEMAS PROPUESTOS

48. - Sea C un conjunto de puntos del plano, de medida M . Siendo A, B dos cualesquiera de sus puntos, se supone que la distancia entre ellos no es nunca de la forma $\sqrt{a^2 + b^2}$, siendo a, b números enteros cualesquiera (no nulos a la vez). En estas condiciones, demostrar que es $M \leq 1$.

L. A. Santaló

49. - La distinción entre espacios separables y perfectamente separables fué establecida por *Urysohn* (Math. Annalen, 94, 1925, p. 290), dando un ejemplo de espacio numerable y no perfectamente separable.

Se pide dar un ejemplo de espacio (V) , no numerable, separable y no perfectamente separable.

¿El espacio anterior podrá ser accesible?

M. Balanzat

SOBRE UNA ECUACION DIFERENCIAL DE 2º ORDEN

por SERGIO SISPÁNOV

Hemos propuesto en el N.º. 1 de este volumen (tema 42) encontrar la integral intermediaria, con una constante, de la ecuación diferencial de 2.º. orden

$$\left(\ln \frac{1+y'}{y'}\right)' = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{x+y},$$

a que se reduce el problema sobre las ecuaciones diferenciales análogas a las de *Clairaut*, y de 3er. grado con respecto a la variable dependiente y . Su integral se presenta también en el problema sobre las oscilaciones amortiguadas, poniendo de relieve una relación que existe entre ambas cuestiones tan diferentes a primera vista.

He aquí la resolución: Restando y agregando al segundo miembro de la ecuación la fracción

$$\frac{y'}{x+y}$$

lo representamos bajo la forma

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1+y'}{x+y} + \frac{y'}{x+y}$$

o lo que es lo mismo

$$(\ln x)' + \frac{1}{y} - [\ln(x+y)]' + \frac{y'}{x+y}.$$

Reconcentrando en el primer miembro los términos con logaritmos podemos escribir la ecuación propuesta del siguiente modo

$$\left[\ln \frac{(x+y)(1+y')}{xy'}\right]' = \frac{1}{y} + \frac{y'}{x+y}.$$

Efectuando la división indicada en el primer miembro y

reduciendo a común denominador los términos del segundo miembro, vamos a tener

$$\left[\ln \left(1 + \frac{x+y+yy'}{xy'} \right) \right]' = \frac{x+y+yy'}{y(x+y)}.$$

Ahora vemos que ambos miembros se convierten en 0, si

$$x + y + y y' = 0. \quad (1)$$

La ecuación homogénea a que se llegó, puede integrarse mediante la sustitución

$$y = xz$$

que conduce al siguiente resultado

$$\ln x + \int \frac{z \cdot dz}{z^2+z+1} = \text{const.} \quad (2)$$

Efectuando de diferentes maneras el cálculo de la cuadratura que figura en el primer miembro, se obtienen distintas formas de la integral buscada.

1er. método. Haciendo uso de la fórmula

$$\int \frac{z \cdot dz}{z^2+z+1} = \frac{1}{2} \ln(z^2+z+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{arc tng} \frac{2z+1}{\sqrt{3}}$$

sin dificultad encontramos

$$x = \frac{C e^{\frac{1}{\sqrt{3}} \text{arc tng} \frac{2z+1}{\sqrt{3}}}}{\sqrt{z^2+z+1}}.$$

$$y = \frac{C z e^{\frac{1}{\sqrt{3}} \text{arc tng} \frac{2z+1}{\sqrt{3}}}}{\sqrt{z^2+z+1}}.$$

2º. método. Si, antes de la integración, la función sub-integral se descompone en sumandos, resulta

$$\int \frac{z \cdot dz}{z^2+z+1} = \frac{1}{\omega-\omega^2} \left(\omega \int \frac{dz}{z-\omega} - \omega^2 \int \frac{dz}{z-\omega^2} \right) = \frac{1}{\omega-\omega^2} \ln \frac{(z-\omega)^\omega}{(z-\omega^2)^{\omega^2}},$$

siendo

$$\omega = \frac{1}{2} (-1 + i\sqrt{3}) \quad \text{y} \quad \omega^2 = \frac{1}{2} (-1 - i\sqrt{3})$$

raíces primitivas de la unidad de 3er. grado.

Sustituyendo este resultado en la ecuación (2) vamos a tener

$$\ln \frac{[x(z-\omega)]^\omega}{[x(z-\omega^2)]^{\omega^2}} = \ln c,$$

en donde c es una constante.

Recordando que xz es igual a y , podemos escribir

$$\frac{(y-\omega x)^\omega}{(y-\omega^2 x)^{\omega^2}} = c.$$

La última relación se verifica idénticamente haciendo

$$y - \omega x = c_1 t^{\omega^2}, \quad y - \omega^2 x = c_2 t^\omega,$$

en donde c_1, c_2 son nuevas constantes y t es nueva variable auxiliar.

Despejando x e y se obtienen las fórmulas

$$x = \frac{c_2 t^\omega - c_1 t^{\omega^2}}{\omega - \omega^2}, \quad y = \frac{c_2 \omega t^\omega - c_1 \omega^2 t^{\omega^2}}{\omega - \omega^2}$$

Si se pone ahora

$$c_2 = (\omega - \omega^2) \cdot C_1 \quad \text{y} \quad -c_1 = (\omega - \omega^2) \cdot C_2,$$

resultan finalmente

$$\begin{cases} x = C_1 \cdot t^\omega + C_2 \cdot t^{\omega^2} \\ y = C_1 \cdot \omega t^\omega + C_2 \cdot \omega^2 t^{\omega^2}. \end{cases} \quad (3)$$

Es muy fácil comprobar que la integral (3), que aparente-

mente depende de dos constantes y en realidad de una sola, verifica a la ecuación (1).

En efecto, diferenciando las relaciones (3) vamos a tener

$$dx = (C_1 \omega t^\omega + C_2 \omega t^{\omega^2}) \frac{dt}{t}, \quad dy = (C_1 \omega^2 t^\omega + C_2 \omega^2 t^{\omega^2}) \frac{dt}{t}$$

y por consiguiente

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{C_1 \omega^2 t^\omega + C_2 \omega t \omega^2}{C_1 \omega t^\omega + C_2 \omega^2 t^{\omega^2}}.$$

El denominador de la última expresión es igual a y . De manera que

$$y y' = C_1 \omega^2 t^\omega + C_2 \omega t \omega^2.$$

Sumando ordenadamente las fórmulas (3) con la recién obtenida resulta

$$x + y + y y' = (1 + \omega + \omega^2) \cdot (C_1 t^\omega + C_2 t^{\omega^2})$$

y como

$$1 + \omega + \omega^2 = 0,$$

entonces

$$x + y + y y' = 0.$$

3er. método. Para el cálculo de la cuadratura que figura en la ecuación (2) pueden emplearse también funciones trigonométricas. Con este objeto representemos dicha cuadratura bajo la forma

$$\int \frac{z \cdot dz}{(z + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}.$$

Si se introduce la nueva variable φ por la fórmula

$$z + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cot \varphi,$$

la cuadratura anterior se convierte en

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \cot \varphi \right) d\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \varphi - \ln \operatorname{sen} \varphi.$$

Sustituyendo este resultado en la relación (2) y teniendo en cuenta que y es igual a xz hallamos sin dificultad

$$\begin{cases} x = C e^{-\frac{\varphi}{\sqrt{3}}} \operatorname{sen} \varphi \\ y = C e^{-\frac{\varphi}{\sqrt{3}}} \operatorname{sen} \left(\varphi + \frac{2}{3} \pi \right). \end{cases} \quad (4)$$

La integral obtenida podría deducirse directamente de la forma (3) reemplazando en ella t^ω y t^{ω^2} por las expresiones

$$t^{-\frac{1}{2}} \left[\cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t \right) \pm i \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t \right) \right]$$

a las que son iguales respectivamente, en virtud de las fórmulas de *Euler*.

Haciendo luego

$$-C_1 = C_2 = \frac{i}{2} C \quad \text{y} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \ln t = \varphi$$

se llegaría a la forma (4).

En conclusión hagamos constar que la integral general de la ecuación propuesta con dos constantes arbitrarias depende de una ecuación diferencial de *Abel* no integrable por cuadraturas.

Las relaciones (4) nos indican que a las variables x e y se les puede considerar como coordenadas cartesianas de un punto material $M(x, y)$ que participa en dos movimientos vibratorios armónicos amortiguados, perpendiculares entre sí. De suerte que los diagramas de la integral obtenida forman un caso particular de las curvas de *Lissajous*.

Si los períodos de oscilaciones y sus decrementos logarítmicos son iguales, dichas curvas tienen ecuaciones

$$\begin{cases} x = A e^{-k\tau} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{T} \tau + \alpha \right) \\ y = B e^{-k\tau} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{T} \tau + \beta \right) \end{cases} \quad (5)$$

siendo A y B amplitudes máximas de las oscilaciones, α y β

fases iniciales de las mismas, T , período común de las oscilaciones, kT su decremento logarítmico, y τ el tiempo (fig. 1).

En el momento inicial del tiempo $\tau=0$ el móvil sale de una posición $M_0(x_0, y_0)$ de coordenadas

$$x_0 = A \operatorname{sen} \alpha, \quad y_0 = B \operatorname{sen} \beta,$$

engendrando, luego, una espiral con el punto asintótico O .

Dicha espiral es logarítmica, si $A=B$ y además $\beta - \alpha = \pm \frac{\pi}{2}$

Si la diferencia de fases $\beta - \alpha$ se hace igual a 0 o a $\pm \pi$, las oscilaciones se efectúan a lo largo de una recta. La trayectoria se convierte en una elipse, cuando $k=0$, pero $\beta - \alpha$ no es igual ni a 0 , ni a $\pm \pi$.

Se sabe que las ecuaciones (5) determinan el movimiento de un punto material M bajo la influencia de una fuerza de atracción F hacia un centro fijo O , proporcional a la distancia $r=OM$ del móvil a este centro. Se supone, además, que la resistencia f del medio es proporcional a la velocidad w del móvil y tiene la dirección diametralmente opuesta a w .

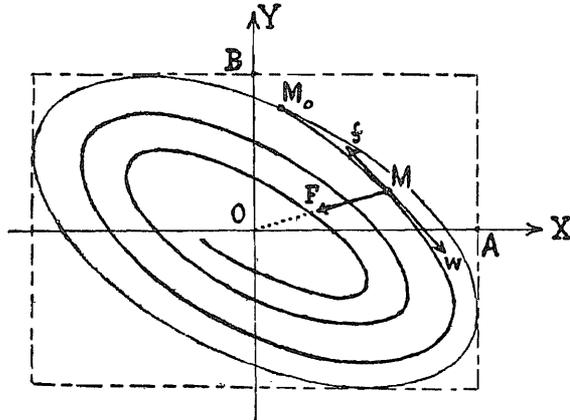


fig. 1.

La integral (4) es un caso particular de las integrales (5) que se caracteriza, evidentemente, por los siguientes valores de los elementos que determinan el movimiento:

$$A = B = C; \quad T = 2\pi, \quad k = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \alpha = 0, \quad \beta = \frac{2}{3}\pi; \quad \tau = \varphi.$$

Asunción, Paraguay.

SUCESIONES DE CICLOS SOBRE UNA ESFERA ⁽¹⁾

por W. MÄCHLER

Consideremos sobre la esfera unitaria con el centro O una sucesión de ciclos c_k ($k=1, 2, \dots, n$) con los centros O_k y los diámetros d_k de modo que

$$1^\circ) \quad c_k \text{ toque } c_{k+1} \quad (k=1, 2, \dots, n-1)$$

2°) los ciclos c_k y los vectores $\overrightarrow{OO_k}$ ($k=1, 2, \dots, n$) formen alternadamente roscas a la derecha resp. izquierda. Cuando se asocia a los ciclos c_k roscas ya sea sólo a la derecha o a la izquierda mediante los vectores

$$\overrightarrow{OE_k} = \frac{(-1)^{k\lambda}}{d_k} \cdot \frac{\overrightarrow{OO_k}}{|\overrightarrow{OO_k}|} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

cuyos valores son inversamente proporcionales a los diámetros d_k y donde λ es un factor de proporcionalidad independiente de k , las rectas $E_k E_{k+1}$ ($k=1, 2, \dots, n$) son tangentes a una misma esfera con el centro O .

Demostración: Sin restricción podemos suponer $\lambda=1$. Sea A_k el punto de contacto de los ciclos c_k y c_{k+1} y pongamos $\overrightarrow{a'_k} = 2 A_k O_k$, $\overrightarrow{a'_{k+1}} = 2 A_k O_{k+1}$. Si \mathbf{u} es un vector unitario proporcional al vector $\overrightarrow{a'_k} \wedge \overrightarrow{a'_{k+1}}$ ⁽²⁾ podemos considerar el triedro formado por los vectores

$$\mathbf{a}_k = \frac{\overrightarrow{a'_k}}{\text{sen } \varphi}, \mathbf{a}_{k+1} = \frac{\overrightarrow{a'_{k+1}}}{\text{sen } \varphi}, \mathbf{u}$$

y su triedro recíproco con los vectores \mathbf{a}^*_k , \mathbf{a}^*_{k+1} , \mathbf{u}^* , donde se tiene

$$\mathbf{a}^*_k = \frac{\mathbf{a}_{k+1} \wedge \mathbf{u}}{V}, \mathbf{a}^*_{k+1} = \frac{\mathbf{u} \wedge \mathbf{a}_k}{V}, \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{a}_k \wedge \mathbf{a}_{k+1}}{V}$$

⁽¹⁾ Bajo "ciclo" entendemos una circunferencia sobre la cual se ha elegido un sentido de recorrido. Cuestiones análogas a las de esta nota para el caso del plano han sido tratadas en W. MÄCHLER "Sobre una propiedad de las secciones cónicas verdaderas con centro", Revista de la Unión Matemática Argentina, vol. VIII, p. 145, 1942.

⁽²⁾ Con \wedge indicamos producto vectorial; con \times producto escalar.

con $V = \mathbf{u} \times (\mathbf{a}_k \wedge \mathbf{a}_{k+1})$ y φ como ángulo comprendido entre los vectores \mathbf{a}'_k y \mathbf{a}'_{k+1} exigiendo $0 < \varphi < \pi$. El vector \mathbf{u}^* es un vector unitario proporcional a $\mathbf{a}^*_k \wedge \mathbf{a}^*_{k+1}$. Podemos poner

$$\begin{aligned}\vec{OE}_k &= \delta (-1)^k \mathbf{a}^*_k \\ \vec{OE}_{k+1} &= \delta (-1)^{k+1} \mathbf{a}^*_{k+1}\end{aligned}$$

en donde $|\delta| = 1$. Poniendo $V^* = \mathbf{u}^* \times (\mathbf{a}^*_k \wedge \mathbf{a}^*_{k+1})$, tendremos, a causa de la reciprocidad de los triedros considerados la relación

$$VV^* = 1,$$

y los valores absolutos \mathbf{a}^*_k , \mathbf{a}^*_{k+1} , $\mathbf{u}^* = 1$, de los vectores \mathbf{a}^*_k , \mathbf{a}^*_{k+1} , \mathbf{u}^* son los valores recíprocos de las alturas $a_k \operatorname{sen} \varphi = a'_k = d'_k$, $a_{k+1} \operatorname{sen} \varphi = a'_{k+1} = d'_{k+1}$, $u = 1$ paralelas a ellos del paralelepípedo formado por los vectores \mathbf{a}_k , \mathbf{a}_{k+1} , \mathbf{u} .

El paralelepípedo formado por los vectores \vec{OE}_k , \vec{OE}_{k+1} , \mathbf{u}^* tiene el volumen absoluto

$$|V^*| = \frac{1}{a_k a_{k+1} \operatorname{sen} \varphi} = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{a'_k a'_{k+1}}.$$

$\vec{E}_k \vec{E}_{k+1}$ es un vector diagonal del paralelogramo formado por los vectores \vec{OE}_k , \vec{OE}_{k+1} .

Se obtiene

$$|\vec{OE}_k - \vec{OE}_{k+1}| = |\mathbf{a}^*_k + \mathbf{a}^*_{k+1}| = \frac{1}{|V^*|} |\mathbf{u} \wedge (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_{k+1})| = \frac{|\mathbf{a}'_k - \mathbf{a}'_{k+1}|}{a'_k a'_{k+1}}.$$

Como el punto A_k y los puntos finales de los vectores \mathbf{a}'_k , \mathbf{a}'_{k+1} con el punto inicial A_k son puntos de una circunferencia mayor de la esfera unitaria con el centro O se tendrá

$$|\mathbf{a}'_k - \mathbf{a}'_{k+1}| = 2 \operatorname{sen} \varphi.$$

Obtenemos pues

$$1/2 |\vec{OE}_k - \vec{OE}_{k+1}| = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{a'_k a'_{k+1}} = |V^*|.$$

Esto demuestra que el centro O tiene la distancia $\frac{1}{2}$ a la recta $E_k \vec{E}_{k+1}$ y es pues independiente de k .

17 de Julio de 1943. Valparaíso, (Chile).

Universidad Técnica.

CUESTIONES ELEMENTALES RESUELTAS

11. — *Divididos en n partes iguales cada uno de los ángulos de un cuadrilátero estudiar la naturaleza de los cuadriláteros que forman las rectas de división tomada una por cada vértice. Casos particulares.*

Solución. — Sea $A'B'C'D'$ el cuadrilátero formado por las rectas que separan de cada ángulo su parte n -sima. Como se vé en la figura el ángulo A' es exterior al triángulo $AA'D$ y por tanto

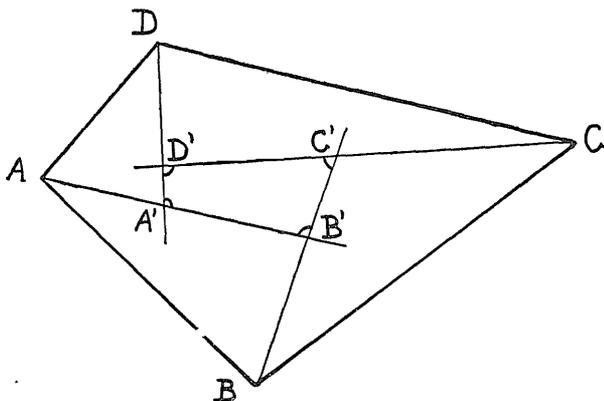
$$A' = \pi - \frac{n-1}{n}A - \frac{1}{n}D.$$

Análogamente

$$B' = \pi - \frac{n-1}{n}B - \frac{1}{n}A$$

$$C' = \pi - \frac{n-1}{n}C - \frac{1}{n}B$$

$$D' = \pi - \frac{n-1}{n}D - \frac{1}{n}C.$$



De estas relaciones se deducen las siguientes propiedades:

a) Si $ABCD$ es inscriptible, los ángulos opuestos son suplementarios, y por tanto $A' + C' = \pi$, es decir, $A'B'C'D'$ es también inscriptible.

b) Si $n=2$, $A' + C' = \pi$, o sea, $A' B' C' D'$ resulta inscrip-
tible.

c) Si $A B C D$ es un paralelogramo, resulta $A' = C'$, $B' = D'$,
es decir, también $A' B' C' D'$ es un paralelogramo.

d) Si $A B C D$ es un rectángulo, resulta $A' = B' = C' = D' =$
 $= \frac{\pi}{2}$, luego $A' B' C' D'$ también es un rectángulo.

e) Si $A B C D$ es un cuadrado, según lo anterior, $A' B' C' D'$
es desde luego un rectángulo, pero además se observa que

$$B C' = B C \cos \frac{B}{n} , \quad A B' = A B \cos \frac{A}{n}$$

$$B B' = A B \operatorname{sen} \frac{A}{n} , \quad A A' = A D \operatorname{sen} \frac{D}{n} ,$$

de las primeras igualdades se deduce $B C' = A B'$ y de las
segundas $B B' = A A'$ y por substracción resultará $B' C' = A' B'$.
Por tanto: si $A B C D$ es un cuadrado, también $A' B' C' D'$ es
un cuadrado.

Andrés Valeiras

(Alumno del Instituto N. del Profesorado
de Buenos Aires)

21. En la revista *Mathematical Monthly* (vol. 44) se calcula
el $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \right)^x$ diciendo que por ser $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ equiva-
lente a la unidad, el límite es e . Aunque en este caso parti-
cular el resultado es cierto, el razonamiento es erróneo. Buscar
ejemplos en que tal razonamiento conduzca a resultados falsos
y calcular correctamente el límite propuesto.

Solución. Sea $\delta(x)$ infinitésimo; siguiendo el razonamiento
del enunciado sería

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \delta(x) + \frac{1}{x} \right)^x = e,$$

pero en realidad es

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \delta(x) + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x \delta(x) + 1} \right)^x = e^{1 + \lim x \delta(x)},$$

que sólo es igual a e para el caso en que $\delta(x)$ sea infinitésimo de orden superior a $\frac{1}{x}$.

Apliquemos este resultado al ejercicio propuesto. Es

$$x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{3!x^2} + \frac{1}{5!x^4} - \dots$$

Luego en este caso, la función $\delta(x)$ es infinitésimo de segundo orden y el límite buscado resulta efectivamente e . Pero si en vez de $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ se pone, por ejemplo, $\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ resulta el límite \sqrt{e} .

Otra solución directa del mismo problema se obtiene aplicando la regla de L'Hospital, de la manera siguiente. Haciendo $x = \frac{1}{z}$ y tomando logaritmos, el límite buscado, aplicando sucesivamente la regla de l'Hospital, es el antilogaritmo de

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{\operatorname{sen} z}{z} + z\right)}{z} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} z}{z} + z} \left(\frac{z \cos z - \operatorname{sen} z}{z^2} + 1\right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-z \operatorname{sen} z + 2z}{\operatorname{sen} z + z \cos z + 3z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-z \cos z - \operatorname{sen} z + 2}{2 \cos z - z \operatorname{sen} z + 6z} = 1 \end{aligned}$$

y por tanto si el límite del logaritmo es 1, el límite buscado es e .

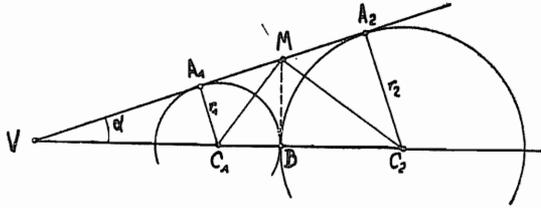
Andrés Valeiras

Alumno del Instituto N. del Profesorado
de Buenos Aires

23. Si en un ángulo triedro se inscribe una sucesión de esferas tal que cada una toque a la precedente, ¿qué relación existe entre los radios de dos esferas consecutivas?

Solución. Evidentemente los centros de todas estas esferas están sobre la recta lugar geométrico de los puntos que equidistan de las tres caras del triedro. Tracemos por esta recta un plano normal a una de las caras del triedro; la intersección será una recta tangente a todas las esferas. La sección de todas las esferas

por este plano nos dará, pues, la figura formada por una sucesión de círculos tangentes como indica la figura.



En la figura vemos que MC_1 y MC_2 son las bisectrices interior y exterior respectivamente correspondientes al vértice M del triángulo VMB . Por tanto: los centros C_1 y C_2 de dos esferas consecutivas son conjugados armónicos respecto del vértice V y del punto de contacto B de las esferas.

Por otra parte, llamando α al ángulo que forma la recta VC_2 de los centros con la tangente común VA_2 , se tiene, por semejanza de triángulos

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{VC_1}{VC_1 + r_1 + r_2}$$

o bien, poniendo $VC_1 = \frac{r_1}{\text{sen } \alpha}$,

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_1}{r_1 + (r_1 + r_2) \text{sen } \alpha},$$

de donde se deduce fácilmente

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1 - \text{sen } \alpha}{1 + \text{sen } \alpha},$$

que es la relación buscada.

El ángulo α , que es el ángulo que la bisectriz del triedro forma con cada una de las caras del mismo se puede calcular fácilmente en función de los datos del triedro, ya sea analítica o trigonométricamente.

Faiwel Goldszein
(Alumno de Ingeniería.)
Buenos Aires

COMUNICACIONES

E. COROMINAS. *Sobre la teoría de la derivación*. (Sesión del 7 de Octubre de 1941).

Estos resultados, así como la teoría correspondiente, se escinden en dos ramas: la teoría de la derivación de Peano y la teoría correlativa que estudia las derivadas de Riemann-Schwarz. Según la definición de Peano las derivadas vienen definidas por la fórmula

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} h + \frac{f''(x_0)}{2!} h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n + O(h^n)$$

y según Riemann-Schwarz son simples límites de diferencias divididas. La derivada ordinaria y la derivada simétrica son ejemplos de derivadas de Riemann-Schwarz de primer orden y la schwarziana

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}$$

es un ejemplo de derivada de segundo orden. Cuando definimos la diferencial como la parte principal del incremento y a su vez la derivada como cociente de diferenciales, utilizamos la definición de Peano, mientras que, definiéndola como límite del cociente incremental, utilizamos la definición de Riemann-Schwarz; es sabido, sin embargo, que las dos definiciones son equivalentes. En cuanto se pasa al segundo orden, derivada ordinaria, derivada de Peano y derivadas de Riemann-Schwarz son conceptos bien distintos, ya que la derivada ordinaria es generalizada por la de Peano y ésta a su vez por la multitud de derivadas de Riemann-Schwarz que se puedan dar. Para las derivadas de Peano en otras comunicaciones se enunciaron todos los teoremas clásicos del cálculo diferencial; luego la única propiedad que se pierde en la derivada de Peano es la que se origina en su definición, que en vez de obtenerse a partir de la derivada anterior se obtiene directamente de la función. Denjoy estudió bajo qué condiciones se conserva, en las derivadas de Peano, esta propiedad de las derivadas ordinarias, dando el teorema fundamental de que cuando el resto que es de la forma

$$O(h^n) = h^n \varepsilon(x_0, h) \quad (\varepsilon(x_0, h) \rightarrow 0 \text{ para } h \rightarrow 0)$$

es uniformemente acotado, todas las derivadas hasta el orden n son ordinarias salvo eventualmente la última (orden n) de la cual nada se puede afirmar. El Dr. Corominas ha demostrado sucesivamente que la acotación uniforme del resto equivale a la de $f^{(n)}(x)$ y que, en estas mismas hipótesis del teorema de Denjoy, $f^{(n)}(x)$ también es derivada ordinaria. Así, pues, para las familias de funciones de derivadas acotadas el algoritmo de Peano no da ninguna ampliación a los conceptos clásicos, tan solo *puede* generalizar la derivada para la familia de funciones de derivadas (Peano) no acotadas. Con todo ello queda aclarada cuál es la naturaleza intrínseca de la generalización de Peano. Todavía se puede disminuir la hipótesis, sustituyendo la acotación de $f^{(n)}(x)$ por la acotación en un solo sentido, es decir, superior o inferior. Las aplicaciones de este teorema central son múltiples y variadas.

En la teoría de Riemann-Schwarz los resultados son los siguientes:

1º.) Basta que exista

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h' \rightarrow 0}} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h')}{h-h'}$$

(h y $h' > 0$ tendiendo simultáneamente a cero siendo funciones continuas de una variable única) para que exista derivada lateral a la derecha. Así, por ejemplo, si existe el límite de

$$\frac{f(x_0+mh) - f(x_0-nh)}{(m-n)h}$$

($m \neq n$ y los dos positivos) para h tendiendo a cero por la derecha y por la izquierda, existe también derivada ordinaria. El enunciado sigue siendo cierto cuando m y n son de distinto signo y valor absoluto, mientras que cuando $m = -n$ obtenemos la derivada simétrica

$$\frac{f(x_0+mh) - f(x_0-mh)}{2mh}$$

en la cual, al cambiar h en $-h$ obtenemos la misma expresión. Con ello queda bien claro que la derivada simétrica puede generalizar la ordinaria, como en efecto así sucede, y que ésta es la

única generalización de la derivada ordinaria como límite de la pendiente de cuerdas de extremos infinitamente próximos al punto (h positiva y negativa). Es interesante recalcar que los infinitésimos h y h' no pueden ser equivalentes, pues en este caso es fácil demostrar que en vez de generalizar restringimos el concepto de derivada, ya que puede existir la derivada ordinaria sin que exista aquella.

2º.) Cuando existe el límite, para $h \rightarrow 0$ de la diferencia dividida tomada en los puntos

$$(h, kh, k^2h, \dots, k^nh) \quad (1 > k > 0)$$

entonces para cada h_1 ($kh < h_1 < h$)

la fórmula de Peano

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'_{h_1}(x_0)h + \frac{f''_{h_1}(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}_{h_1}(x_0)}{(n-1)!} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + o(h^n)$$

es cierta para la sucesión de puntos

$$\{ x_0 + h_1 k^i \} \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Las derivadas intermedias, de la primera a la de orden $n - 1$ dependen de la sucesión elegida o sea de h_1 , siendo funciones continuas de ella. Por el procedimiento transfinito de cadena de intervalos de Lebesgue, se demuestra que para las funciones sin puntos angulosos las derivadas 2ª. y 3ª. de este tipo, cumplen el teorema de Ricci y por tanto el teorema fundamental del cálculo integral. El concepto de punto anguloso para la derivada de tercer orden, es una generalización del concepto ordinario.

F. TORANZOS. *Sobre la generación proyectiva de las hipercuádricas en el espacio de Hilbert.* (Sesión del 10 de Julio de 1943).

Continuando un trabajo explicado en otra reunión de la U. M. A., el autor se propone encontrar un criterio general para engendrar proyectivamente las hipercuádricas en el espacio de Hilbert. En la exposición anterior se dieron criterios no generales.

Se utiliza para realizar el objetivo propuesto, un teorema

de Vitali, en el que se prueba que cualquier proyectividad puede obtenerse por el producto de tres proyectividades simples, una de primera clase (traslación), otra de segunda (afinidad) y otra de tercera (homología). Aplicando esto se obtiene la expresión analítica de la proyectividad más general. Se definen las hiper-cuádricas, como las transformadas de una esfera mediante la proyectividad general. Finalmente se compara esta definición con otra algebraica que resultaría de considerar las hiper-cuádricas como formas cuadráticas.

F. E. HERRERA. *Determinación del salto de una función.* (Sesión del 10 de Julio de 1943).

El problema ha sido abordado entre otros por Fejér, Sidon, Csillag, Lukács y Sasz, que dieron métodos particulares para la determinación del salto.

El autor, siguiendo a Titchmarsh, que ha dado un teorema general sobre integrales singulares exigiendo determinadas condiciones al núcleo, da un teorema semejante para la determinación del salto generalizado D_x , a saber:

Si $K(t, \lambda)$ es un núcleo integrable en el sentido de Lebesgue respecto de t en el intervalo $(0, B)$ para cualquier valor de λ tal que:

$$(1) \quad |K(t, \lambda)| \leq C_1 \lambda \quad \text{para } t \leq \frac{1}{\lambda}$$

$$(2) \quad |t^{1+\beta} K(t, \lambda)| \leq \frac{C_2}{\lambda^\beta} \quad \text{para } t > \frac{1}{\lambda}$$

con $\beta \geq 0$ cualquiera que sea λ (pero con la convención de reemplazar cuando $\beta=0$, λ^0 por $\lg \lambda$) y si $f(t)$ es una función periódica de período $2B$, integrable Lebesgue entre $-B$ y $+B$, se verifica en todo punto donde exista un número D_x con la propiedad:

$$(3) \quad \int_0^t |f(x+u) - f(x-u) - D_x| du = 0(t)$$

que:

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{A} \int_0^B K(t, \lambda) [f(x+t) - f(x-t)] dt = D_x$$

con

$$A = \overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^B K(t, \lambda) dt.$$

El teorema contiene como casos particulares resultados obtenidos por Sidon, Lukács y Szasz que consideran núcleos $K(t, \lambda)$ especiales.

Tales núcleos presentan la característica común de que $\int_0^B |K(t, \lambda)| dt$ permanece acotada cuando $\lambda \rightarrow \infty$.

La circunstancia de que el primer método dado para la determinación del salto (debido a Fejér), conduce a un núcleo tal que la integral de su módulo crece indefinidamente cuando λ tiende a ∞ , induce a investigar bajo qué condiciones es posible seguir obteniendo aquél a partir de (4) mediante núcleos $K(t, \lambda)$ de los cuales la integral $\int_0^B |K(t, \lambda)| dt$ no está acotada cuando $\lambda \rightarrow \infty$, aunque sí lo está $\int_0^B K(t, \lambda) dt$.

Resulta así que si $K(t, \lambda)$ es tal que $|K(t, \lambda)| \leq C_1 \lambda^{1+\alpha}$ para $t \leq \frac{1}{\lambda}$; $|t^{1+\beta} K(t, \lambda)| \leq C_2$ para $t > \frac{1}{\lambda}$ y además para todo δ fijo $\int_0^B K(t, \lambda) \{f(x+t) - f(x-t) - D_x\} dt \rightarrow 0$ cuando $\lambda \rightarrow \infty$, sigue verificándose (4) en todo punto donde existe un número D_x tal que:

$$(5) \quad \int_0^t |f(x+u) - f(x-u) - D_x| dt = O(t^{1+\gamma})$$

con $\gamma > 0$ cualquiera y $0 \leq \alpha \leq \gamma$, $0 \leq \beta < \gamma$.

Si la función $f(t)$ es de variación acotada, (5) se verifica en casi todos los puntos con $D_x = 0$ y $\gamma < 1$ cualquiera.

A. CALDERÓN. *Sobre la convergencia de desarrollos de Fourier.* (Sesión del 10 de Julio de 1943).

En este trabajo se generalizan los teoremas de convergencia de los desarrollos de Fourier en serie trigonométrica a los desarrollos en serie de funciones $\alpha_i(P)$ de una familia ortonormal cualquiera.

Para ello se transforman las sumas parciales de la serie en una integral singular donde aparece un núcleo del tipo

$$\sum_1^m \alpha_i(P) \cdot \alpha_i(Q)$$

— análogo al de la integral de Dirichlet $\frac{\text{sen}[(m+1/2)(x-y)]}{2 \text{sen } 1/2(x+y)}$

— y se buscan propiedades del mismo necesarias y suficientes para la convergencia. Utilizando teoremas conocidos se llega a los resultados siguientes: Para que converja el desarrollo de toda función continua es necesario y suficiente que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\varepsilon}^m \sum_1^m \alpha_i(P) \cdot \alpha_i(Q) \cdot dP = \begin{cases} 0 & \text{si el entorno } \varepsilon \text{ no contiene } Q \\ 1 & \text{si } \varepsilon \text{ contiene } Q \end{cases}$$

donde ε es un entorno cualquiera del recinto R donde están definidas las funciones, y que:

$$\int_R \left| \sum_1^m \alpha_i(P) \cdot \alpha_i(Q) \right| dP < A \quad \text{para todo } m.$$

Para los casos en que no se verifica esto último se enuncia otra condición de expresión menos breve, que asegura la convergencia de los desarrollos de funciones continuas con derivada continua, y los de funciones continuas de variación acotada de una variable.

BIBLIOGRAFIA

G. KNIE, *Nuevas teorías físicas*. Un vol. de 184 pág. Buenos Aires, 1944.

El libro presenta cuatro teorías modernas que han sido concebidas en los últimos años y son características para la manera de pensar de la física contemporánea; las cuatro son relativistas, pero la primera está un poco aparte, porque es una teoría clásica, mientras las otras tres son ondulatorias. La electrodinámica lineal es simplemente una generalización de la teoría de Maxwell. Es una teoría de Maxwell, hecha "superrelativista". Pues se le ha aplicado por segunda vez el principio de la relatividad que exige un límite máximo para las magnitudes físicas. El tensor de energía-impulso se ha deducido con prolijidad, para hacer resaltar bien el origen de los teoremas de conservación. También en otras partes se ha cedido cierto lugar al principio didáctico. Pero no siempre; así, que la lectura del libro no se limita siempre a una asimilación pasiva. Entre las tres teorías ondulatorias hay una estrecha relación. La teoría del fotón no es otra cosa que la de dos partículas de Dirac sin interacción. Para expresarme sumariamente: es la duplicación de la teoría del electrón, expuesta en la segunda parte. La relación entre la tercera y la cuarta parte se podría expresar así: $IV = III + \text{algo}$.

Pues resulta el curioso fenómeno de que la teoría del fotón contiene implícitamente la del mesón. Solamente en la forma se distinguen las dos partes. La tercera parte emplea en gran parte números hipercomplejos, mientras la cuarta, usando las representaciones concretas, vuelve a sistemas lineales de ecuaciones y adquiere así un aspecto netamente clásico. En la teoría del mesón se ha prescindido de la extrema reducción a un mínimo de ecuaciones, por eliminación de las redundantes ecuaciones que corresponden a los valores propios cero, que ha sido introducida por los investigadores japoneses, porque esta forma no se ha analizado todavía suficientemente. La fuerte disminución en la producción de libros físico-matemáticos ha tenido la consecuencia —para nosotros halagüeña— de que es en nuestro país, donde se ha tratado por primera vez en conjunto una serie de teorías de palpitante actualidad. Para el estudioso argentino se ofrece así una ocasión cómoda de informarse rápidamente sobre los últimos problemas de la física matemática moderna.

G. K.

NOTAS Y MEMORIAS PUBLICADAS POR EL
PROF. MARSHALL H. STONE

(Ver la biografía en este mismo volumen, p. 138)

On the order of an analytic function at a singular point. (Annals 26, 1924). An unusual type of expansion problem. (Trans. 26, 1924). — Three theorems normal orthogonal sets (Bull. 31, 1925). — Developments in Legendre polynomials (Annals 27, 1925). The convergence of Bessel's series (Bulletin 32, 1926). A composition of the series of Fourier and Birkhoff (Trans. 28, 1926). Series of Legendre polynomials (Bull. 32, 1926). Integrals analogous to Fourier integrals (Bull. 32, 1926). The Borel summability of Fourier series (Amer. J., 48, 1926). Expansions in Bessel functions (Annals, 28, 1926). The normal frequently function and general frequently functions (Bull. 33, 1927). The summability of Fourier series (Bull. 33, 1927). Irregular differential systems of order two and the related expansion problems (Trans. 29, 1927). The expansion problems associated with regular differential systems of the second order (Trans. 29, 1927). A characteristic of certain sets of trigonometric functions (Amer. J. 41, 1927).

Certain integrals analogous to Fourier integrals (Math. Zeit. 28, 1928). Developments in Hermite polynomials (Annals, 29, 1928). Hermitian symmetric operators in abstract Hilbert space (Bull. 35, 1929). Anuncio de tres comunicaciones en Bull. 35, 1929. Hausdorff's theorem concerning Hermitian forms. (Bull. 36, 1930).

Linear Transformation in Hilbert space (Proc. Acad. Wash. 15, 1929 y 1930). A note on the theory of infinite series. (Annals. 32, 1931). On one-parameter unitary groups in Hilbert space. (Annals, 33, 1932). On the structure of Boolean algebras (Bull. 39, 1933). Boolean algebras and their application to topology. (Proc. Acad. Wash. 20, 1934). Postulados for Boolean algebras and generalized Boolean algebras. (Amer. J. 57, 1935). The determination of representative elements in the residual classes of a Boolean algebra. (Fund. math. 25, 1935). Subsumption of the theory of Boolean algebras under the theory of rings. (Proc. Acad. Wash. 21, 1935). Applications of Boolean algebras to topology. (Rec. Moscou, 1, 1936). Elementary proof of the spectral theorem. (Annals, 37, 1936). The theory of representations for Boolean algebras. (Trans. 40, 1936). Applications of the theory of Boolean rings to general Topology. (Trans. 41, 1937). Algebraic characterizations of special Boolean rings. (Fund. Math. 29, 1937). Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics. (Casopis, 67, 1937). Elementary proof of some known theorems of the theory of complex Euclidian spaces. (Duke J. 3, 1937). Note on formal logic. (Amer. J. 59, 1937). The representation of Boolean algebras (Bull. 44, 1938). General theory of spectra (Proc. Acad. Wash. 26, 1940 y 1941). Characteristic functions of families of sets. (Duke J. 7, 1940).

CRONICA

SOBRE LA RESOLUCIÓN GRÁFICA DE ECUACIONES

Consecuente con su propósito de estimular a los estudiantes universitarios y a los aficionados a la Matemática, dedica esta revista algunas páginas a colaboraciones elementales, sin exigencias rigurosas de novedad, difícil de aquilatar en problemas sencillos que datan de tiempo remoto y que han sido tratados más de una vez.

Este carácter tenía una breve nota sobre la resolución gráfica de la ecuación de 2º grado, extractada de una extensa exposición de su autor; y al completarla con una nota de redacción para extenderla a la ecuación cúbica, con motivo de otra reciente aparecida en *Math. Monthly*, se hizo notar explícitamente que tales construcciones no pueden tener pretensiones de novedad. Confirmando esta opinión, se nos informa que en el *Boletín Matemático*, Año XII, núm. 4 y 8, apareció la misma solución al problema en forma elegante, debida al Sr. A. Heurtley de la Riestra; y nos complacemos en declarar la coincidencia, lamentando no haber conocido estas notas, muy anteriores, del distinguido colaborador del Boletín.

Incitados por tal coincidencia hemos revisado bibliografía para averiguar a quien pueda corresponder la prioridad en tal construcción. Desechando numerosísimos trabajos que se ocupan de diversas construcciones gráficas relativas a la ecuación cúbica, (sin contar las de la cuadrática), los que más se relacionan con la aludida construcción, a juzgar por las referencias, remontan a Grunert y son entre otros de Cunyngham, Gleason, Haldeman, Ballantine, Lodge, Running. Fujimaki, Bixby, Amadera, Borriere, Frink, . . . Alguna se sirve de la tangente a la gráfica de la ecuación cúbica, desde su intersección real, deduciendo de ella las raíces complejas; otras reducen el problema al trazado de tangente a la curva y $-x^2$, con evidente ventaja de exactitud. De otras nos faltan referencias, aun indirectas.

La inconcebible pobreza de las bibliotecas en colecciones de revistas, salvo las muy modernas, nos ha vedado consultar casi todas las memorias y queda por tanto en pie el interrogante sobre la coincidencia total o parcial con otra anterior, de la construcción pero en ningún caso quedaría disminuído el mérito del Sr. Heurtley de la Riestra.

LA BIBLIOTECA MATEMÁTICA DEL DR. DASSEN. SU DONACIÓN A LA SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA

La valiosa colección de obras de matemáticas y ciencias afines que formaba parte de la importante Biblioteca del Ingeniero y doctor Claro C. Dassen, ex-profesor de la Facultad de C. E. F. y N., que falleciera hace dos años, fué donada por la familia del extinto a la Sociedad Científica Argentina para que pase, de ese modo, al servicio de las personas estudiosas.

Es un conjunto de libros de matemáticas de inestimable valor, muchos de ellos irremplazables por lo antiguo y famoso de las ediciones y, sin duda, únicos en el país. Hay varios Euclides, desde el de Tartaglia (1565) hasta la edición Peyrard (1804) y otras; el Arquímedes de Tartaglia (1562), de Commandino (1565) y el de Peyrard; Theon de Smyrna; Heron de Alejandría; la *Aritmética* de Diofanto (Basilea, 1575) el Pappo de Commandino (Venecia, 1589): dos ediciones de las *Cónicas* de Apolonio (Bologna 1566 y Florencia 1664), también la edición de Woepeke sobre las cantidades irracionales; lo mismo podrían citarse las varias ediciones de Galileo, Tartaglia, Cardan y de Leonardo de Pisa; la Vida de Pitágoras de Dacier (1706) y otras diversas de Fino Orontio, de Ludovico Quadri, Clavius, Guido Grandi, Ozanam, Guidobaldo Dal Monte, etc. Más modernos, Fermat, Maupertuis, Riccati, Euler, Lagrange, hasta los grandes autores del siglo pasado, rematando con la gran enciclopedia de Klein y Molk. Figuran también colecciones de importantes revistas matemáticas y las actas de los Congresos Internacionales de París (1900), Roma (1908) y Cambridge (1912). Merecen señalarse igualmente muchas obras de filosofía matemática: Couturat, Boole, Fleury, Laisant y otros, así como libros clásicos de enseñanza elemental de geometría, álgebra, etc.

La donación comprende también varios instrumentos matemáticos: planímetros, integradores y compases especiales.

La entrega oficial se hizo en una solemne reunión pública a la que asistió, especialmente invitada, la familia del Dr. Dassen, el día 29 de octubre pasado. Hablaron en este acto el Presidente de la Sociedad Científica Dr. G. Bosch y el Ing. Emilio Rebuerto, quien destacó el valor de la colección recibida refiriéndose en especial al de alguno de sus ejemplares. El doctor Rodolfo Dassen, expresó el deseo que había inspirado la donación, de que esos libros fueran elementos accesibles a la labor de los matemáticos del país.

Para un mejor aprovechamiento de esa sección de su Biblioteca, la Sociedad tiene en vista la organización de un centro especial de estudios matemáticos que pondrá bajo el nombre tutelar del Dr. Claro C. Dassen.

S U M A R I O

| | PÁG. |
|--|------|
| Sobre la distribución probable de corpúsculos en un cuerpo, deducida de la distribución en sus secciones y problemas análogos, por Luis A. Santaló | 145 |
| Temas propuestos 48-49 | 164 |
| Sobre una ecuación diferencial de 2º orden (Tema Nº 42), por Sergio Sispánov | 165 |
| Sucesiones de ciclos sobre una esfera, por W. Mächler | 171 |
| Cuestiones elementales resueltas. Nº 11, por A. Valeiras; Nº 21, por A. Valeiras; Nº 23, por F. Goldszein | 173 |
| <i>Comunicaciones.</i> — E. Corominas; Sobre la teoría de la derivación. — F. Toranzos; Sobre la generación proyectiva de las hipercuádricas en el espacio de Hilbert. — F. E. Herrera; Determinación del salto de una función. — A. Calderón; Sobre la convergencia de desarrollos de Fourier | 177 |
| <i>Bibliografía.</i> — Guillermo Knie, Nuevas teorías físicas (G. K.) | 183 |
| Notas y memorias publicadas por el Prof. Marshall H. Stone | 184 |
| <i>Crónica.</i> — Sobre la resolución gráfica de ecuaciones. — La biblioteca matemática del Dr. Dassen. Su donación a la Sociedad Científica Argentina | 185 |

Contribuyen especialmente al sostenimiento de las publicaciones de
la UNION MATEMATICA ARGENTINA los siguientes

MIEMBROS PROTECTORES

COMPAÑÍA INDUSTRIAL DEL NORTE DE SANTA FE. INGENIO AZUCARERO "ARNO"
(Villa Ocampo. F. C. S. F.). — JULIO REY PASTOR (Buenos Aires). — T. G. BERLENGIERI y CIA. (Rosario). — TRICERRI HNOS. (Rosario). — MANUEL GUI-
TARTE (Buenos Aires). — CLOTILDE A. BULA (Rosario). — ELBA R. RAIMONDI
(Buenos Aires). — FERNANDO L. GASPAR (Rosario). — CARLOS ISELLA (Ro-
sario). — PEDRO J. TRICERRI (Rosario).