# El número e

## 1 Convergencia de la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Damos aquí dos demostraciones de que la sucesión $(1+\frac{1}{n})^n$ es creciente y acotada, y en consecuencia convergente.

Haremos uso de la siguiente igualdad bien conocida, la cual puede obtenerse, por ejemplo, mediante división de polinomios.

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1) \tag{1.0.1}$$

### 1.1 Primera demostración

**Lema 1.1** *$\forall x > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$:*

$$(n+1)x^n \leq nx^{n+1} + 1 \tag{1.1.2}$$

*y la igualdad vale sólo para $x = 1$.*

**Demostración:** Reemplazando, se ve que para $x = 1$ vale la igualdad. Queremos ver que

$$p(x) := nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 > 0$$

para todo $x > 0$, $x \neq 1$.

Pero, utilizando (1.0.1) tenemos,

$$\begin{aligned} p(x) = n(x^{n+1} - x^n) - (x^n - 1) &= nx^n(x-1) - (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1) \\ &= (x-1)(nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \cdots - 1). \end{aligned}$$

Ahora, si $x > 1$, $x^n > x^j$ para todo $j = 0, \cdots, n-1$ y por lo tanto ambos términos del producto son positivos. Análogamente, si $x < 1$ los dos términos son negativos.$\square$

**Corolario 1.1** *La sucesión*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

*es estrictamente creciente.*

**Demostración:** Tomando $x = (1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n+1}}$ en la desigualdad (1.1.2) obtenemos

$$(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}} \leq n\left(1+\frac{1}{n}\right) + 1 = n+2$$

y en consecuencia,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

como queríamos demostrar.$\square$

**Corolario 1.2** *La sucesión*

$$b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

*es estrictamente creciente.*

**Demostración:** Análoga a la del corolario anterior tomando ahora $x = (1 - \frac{1}{n})^{\frac{1}{n+1}}$. $\square$

**Corolario 1.3** *La sucesión*

$$c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

*es estrictamente decreciente.*

**Demostración:** Se deduce del corolario anterior ya que $c_n = 1/b_{n+1}$ En efecto,

$$c_n = \frac{1}{(\frac{n}{n+1})^{n+1}} = \frac{1}{(\frac{n+1-1}{n+1})^{n+1}} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{n+1})^{n+1}} = \frac{1}{b_{n+1}} \qquad \square$$

**Teorema 1.1** *La sucesión $a_n$ es convergente.*

**Demostración:** Teniendo en cuenta el Corolario 1.1, basta ver que la sucesión $a_n$ es acotada. Pero, es inmediato ver que

$$a_n < c_n \qquad \forall n$$

y, como $c_n$ es decreciente, resulta en particular que

$$a_n < c_1 = 4 \qquad \forall n \qquad \square$$

## 1.2 Segunda demostración

Damos ahora demostraciones alternativas de los resultados de los Corolarios 1.1 y 1.3 y en consecuencia del Teorema 1.1.

**Lema 1.2 (Desigualdad de Bernoulli)** *Para todo $x > -1$ y todo $n \in \mathbb{N}$ vale que*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

*con desigualdad estricta si $x \neq 0$.*

**Demostración:**: Consideremos primero el caso $x > 0$. Usando (1.0.1) tenemos

$$(1+x)^n - 1 = x((1+x)^{n-1} + \ldots + 1)$$

Pero como $x > 0$, tenemos que $(1+x)^j > 1$ para $j = 1, \ldots, n-1$ y por lo tanto $((1+x)^{n-1} + \ldots + 1) > n$. Resulta entonces que

$$(1+x)^n - 1 > nx$$

como queríamos demostrar.

Para el caso $-1 < x < 0$ la demostración se hace de manera análoga. En efecto, en este caso tenemos que $((1+x)^{n-1} + \ldots + 1) < n$, pues ahora $0 < (1+x)^j < 1$, y como $x < 0$ resulta $x((1+x)^{n-1} + \ldots + 1) > nx$ concluyendo la demostración. $\square$

**Corolario 1.4** *La sucesión*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

*es estrictamente creciente.*

**Demostración:** Queremos probar que $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Tenemos,

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

Entonces,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)} = \frac{\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)} > 1$$

donde, en la última desigualdad hemos usado la desigualdad de Bernoulli. $\square$

**Corolario 1.5** *La sucesión*

$$c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

*es estrictamente decreciente.*

**Demostración:** Queremos ver que $\frac{c_n}{c_{n+1}} > 1$. Tenemos,

$$\frac{1}{c_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+2}$$

y por lo tanto,

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+2} = \frac{\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)\right]^{n+2}}{1 + \frac{1}{n}}$$

pero,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n(n+2)} = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$$

En consecuencia,

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2}}{1 + \frac{1}{n}}$$

pero por la desigualdad de Bernoulli,

$$\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} > 1 + \frac{1}{n}$$

y por lo tanto,

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} > 1$$

como queríamos demostrar. □

# 2 Definición del número e

Definimos entonces el número $e$ como

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Teniendo en cuenta que $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n}) = 1$ resulta que también,

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Por lo tanto, de los Corolarios 1.1 y 1.3 resulta que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad \forall n$$

y, tomando por ejemplo $n = 5$ obtenemos que

$$2 < e < 3$$