Análisis 1

Segundo Cuatrimestre 2005

Práctica 6

(1) Calcule las derivadas parciales de las siguientes funciones:
  (a) $f(x,y) = x^4 + 2xy + y^3x - 1$
  (b) $f(x,y,z) = ye^x + z$
  (c) $f(x,y) = x^2\sin^2(y)$
  (d) $f(x,y) = \sin x$
  (e) $f(x,y,z) = z(cos(xy) + ln(x^2+y^2+1))$
  (f) $f(x,y) = xe^{x^2+y^2}$
  (g) $f(x,y) = \int_x^y e^{\sin t}dt$
  (h) $f(x,y) = \int_x^{x^2+y^2} e^t dt$
  (i) $f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$

(2) Calcule
  (a) $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)$ para $f(x,y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$
  (b) $\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)$ para $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+z^2} + \ln(y)$
  (c) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0), \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$, para $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(3) Dadas las funciones

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$f_2(x,y) = |x| + |y|$$

$$f_3(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Demuestre que en el origen
  (a) f_1 es discontinua aunque existen las derivadas parciales.
  (b) f_2 no admite derivadas parciales pero es continua.
  (c) f_3 es diferenciable pero sus derivadas parciales son discontinuas.

(4) Estudie la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de las siguientes funciones en el origen:
  (a) $f(x,y,z) = \sqrt{|xyz|}$
  (b) $f(x,y) = \begin{cases} x\sin\left(4\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) & \text{si} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$
  (c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$
  (d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$
  (e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y}\sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si} \quad y\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y=0 \end{cases}$

(5) Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Muestre que f no es diferenciable en $(0,0)$. Sin embargo, para cualquier curva diferenciable $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ que pase por el origen una sola vez, se cumple que $f(\Phi(t))$ es derivable para todo t.

(6) Encuentre la ecuación del plano que pasa por $(2,1,0),(3,2,-1),(2,-1,1)$.

(7) (a) Encuentre dos vectores no paralelos ortogonales a $(-1,1,2)$.
(b) Escriba la ecuación del plano que pasa por el punto $(0,1,2)$ y es ortogonal al vector $(1,1,1)$.

(8) (a) Escriba la ecuación del plano que pasa por el punto (a,b,c) y es ortogonal al vector (v_1,v_2,v_3).
(b) Encuentre la ecuación de la recta normal al plano de ecuación $6x-2y+4z=0$ que pasa por el punto $(3,1,1)$.

(9) (a) Encuentre un vector unitario perpendicular a los dos vectores $(1,1,1)$ y $(3,1,0)$.
(b) Encuentre un vector normal al plano que pasa por los puntos $(1,0,1)$, $(3,4,0)$ y $(1,-1,3)$.

(10) (a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x_1,x_2) = (x_1+x_2, x_1-x_2, 2x_1+3x_2)$$

(i) Verifique que f es una transformación lineal y calcule su matriz asociada.
(ii) Calcule la matriz de la diferencial $Df(x)$.
(iii) ¿Qué relación hay entre estas dos matrices?

(b) Muestre que lo ocurrido en el item anterior vale para cualquier transformación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

(11) Sean $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ las transformaciones lineales dadas por

$$F(x_1,x_2) = (2x_1, x_1+x_2, 7x_1-x_2)$$
$$G(x_1,x_2,x_3) = (x_1-x_3, x_1-4x_2, 2x_1-x_2+x_3, 5x_2)$$

(a) Calcule las matrices asociadas a F y a G.
(b) Calcule $G\circ F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ y su matriz asociada, ¿qué relación hay entre ésta y las halladas en a)? Justifique la respuesta.

(12) Dada la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $T(x,y) = 2x-3y$
(a) Calcule la ecuación del plano $Graf(T)$.
(b) Encuentre un sistema de generadores de dicho plano.

(13) (a) Encuentre una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cuyo gráfico sea el plano

$$\pi = \{(x,y,z) \in: \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$$

(b) De la matriz en la base canónica asociada a la f hallada en a).

(14) Si se corta la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ con el plano de ecuación $y=0$ se obtiene una circunferencia. De la parametrización de la recta tangente a dicha circunferencia en el punto $(1,0,0)$ y en el punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(15) Estudie la diferenciabilidad de las siguientes funciones en los puntos indicados y escriba la ecuación del plano tangente cuando éste exista.
(a) $f(x,y) = xy+1-\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)$ en $(1,5)$ y en $(2,2)$.
(b) $f(x,y) = x^{1/4}y^{1/4}$ en $(0,0)$ y en $(16,1)$.
(c) $f(x,y) = \frac{x}{y}$ en (x_0,y_0) con $y_0 \neq 0$.
(d) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$ en $(0,0)$ y en $(1,0)$.

(e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ en $(0,0)$ y en $(-1,1)$.

(16) Calcule $DF(x)$ para las siguientes funciones:
(a) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (x,y)$
(b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$
(c) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y,z) = (x + e^z + y, yx^2)$
(d) $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F(x) = ||x||^2$

(17) Calcule el gradiente de f para
(a) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} + z^2$
(b) $f(x,y,z) = xy + xz + yz$
(c) $f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$

(18) Calcule los ángulos formados por el gradiente de la función $f(x,y) = x^{\sqrt{3}}+y$ en el punto $(1,1)$ y los ejes de coordenadas.

(19) Grafique las siguientes curvas en el plano o el espacio seguń corresponda
(a) $\sigma(t) = (1,1,t)$
(b) $\sigma(t) = (1,1,t^2)$
(c) $\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$
(d) $\sigma(t) = (t - \operatorname{sen}(t), 1 - \cos(t))$
(e) $\sigma(t) = (\cos(2t), \operatorname{sen}(2t))$

(20) Determinar los vectores velocidad y aceleración y la ecuación de las rectas tangentes a las siguientes curvas en t_0
(a) $\sigma(t) = (6t, 3t^2, t^3), \quad t_0 = 0$
(b) $\sigma(t) = (\cos^2(t), 3t - t^3, t), \quad t_0 = 0$
(c) $\sigma(t) = (\operatorname{sen}(3t), \cos(3t), 2t), \quad t_0 = 1$

(21) Encuentre curvas σ que representen los siguientes conjuntos o trayectorias.
(a) $\{(x,y)/y = e^x\}$
(b) $\{(x,y)/4x^2 + y^2 = 1\}$
(c) $\{(x,y,z)/x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1,\ z = x^2 + y^2,\ z \neq 0\}$

(22) Sean $f(u,v,w) = u^2 + v^3 + wu$ y $g(x,y) = x \sin y$. Dadas

$$u(t) = t^2 + 1, v(t) = \sin t, w(t) = t - 1 \text{ y } x(t) = \sin t, y(t) = t$$

caclule

$$\frac{d}{dt} f\left(u(t), v(t), w(t)\right) \text{ y } \frac{d}{dt} g\left(x(t), y(t)\right)$$

(a) usando la regla de la cadena
(b) sustituyendo

(23) Sean $f(u,v) = e^{uv} \sin(u^2+v^2), g(u,v,w) = \ln(u^2+v^2+w^2+1)$. Dadas

$$u(x,y) = x + y, v(x,y) = xy, w(x,y) = x - y + 1$$

calcule las derivadas parciales de las funciones

$$f\left(u(x,y), v(x,y)\right) \text{ y } g\left(u(x,y), v(x,y), w(x,y)\right)$$

(a) usando la regla de la cadena
(b) sustituyendo

(24) Calcule las derivadas parciales de las siguientes funciones:
(a) $f(x,y) = \int_0^{2y} x^2 z + z^3 dz$
(b) $f(x,y) = \int_{\sqrt{x}}^{x} \sin(xyz) dz$
(c) $f(x,y,z) = \int_5^{x+2y} \sin(x^2 + yz + t) dt$

(25) a) ¿Para qué valores de $p \in \mathbb{R}_{>0}$ es

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^p \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

diferenciable en $\mathbb{R}^2$?¿Para qué valores de p es f de clase C^1?

b) La función f se puede escribir como $g(x^2+y^2)$ con $g(t) = t^p \operatorname{sen} \frac{1}{t}$ si $t > 0$ y $g(0) = 0$. ¿Qué conclusiones se obtienen si se estudia la diferencibilidad de g?

(26) Sean $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivables y $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable. Calcule las derivadas parciales de las siguientes funciones:
(a) $F(x,y) = G(f(x)g(y), f(x)h(y))$
(b) $F(x,y) = G(x^y, y^x) \quad (x, y > 0)$
(c) $F(x,y) = G(x, G(x,y))$
(d) $F(x,y) = f(x)^{g(y)} \quad$ (si $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$)
(e) $F(x,y) = G\left(\int_x^{f(y)} h(t)dt, g(y)\right)$

(27) Usando la expresión

$$z = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)(x - x_0, y - y_0)$$

para una función f adecuada, aproxime $\left(0,99e^{0,2}\right)^8$.

(28) Calcule la derivada direccional de f en x_0 en la dirección v siendo:
(a) $f(x,y) = \sin x \cos y \qquad x_0 = (1,1) \qquad v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
(b) $f(x,y) = x^4 + \ln(xy) \qquad x_0 = (e,1) \qquad v = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$
(c) $f(x,y,z) = e^z(xy + z^2) \qquad x_0 = (0,1,0) \qquad v = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
(d) $f(x,y,z) = y + yz + zxy \qquad x_0 = (1,1,1) \qquad v = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
(e) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \qquad x_0 = (1,1,1) \qquad v = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
(f) $f(x,y,z) = x^{yz} \qquad x_0 = (e,e,0) \qquad v = \left(\frac{12}{13}, \frac{3}{13}, \frac{3}{13}\right)$
Si f es diferenciable en x_0 verificar que la derivada calculada coincide con $\nabla f(x_0) \cdot v$.

(29) Dada la superficie $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$. Muestre que el vector $v = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es normal a la superficie S en el punto $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e interprete este hecho geométricamente.

(30) Sea $f(x,y) = x^{1/3}y^{1/3}$
(a) Usando la definición de derivada direccional, muestre que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

y que $\pm e_1, \pm e_2$ son las únicas direcciones para las cuales existe la derivada direccional en el origen.
(b) Muestre que f es continua en $(0,0)$.
(c) ¿Es f diferenciable en $(0,0)$?

(31) Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciables en $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que la función definida por $h(x) = f(x)g(x)$ es diferenciable en x_0 y

$$\nabla h(x_0) = f(x_0)\nabla g(x_0) + g(x_0)\nabla f(x_0)$$

¿Qué relación existe entre las derivadas direccionales de h en x_0 en la dirección $v(||v|| = 1)$ y las derivadas direccionales de f y g en x_0 en la misma dirección?

(32) Muestre que la derivada direccional de f en el punto (x_0, y_0) en la dirección $-v$ (recordar que $||v|| = 1$) es igual a la derivada direccional de f en (x_0, y_0) en la dirección de v pero con el signo opuesto, o sea

$$-\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial(-v)}(x_0)$$

(33) (a) Pruebe que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable y tal que para algún $v, ||v|| = 1$ se cumple que $Df(x) \cdot v = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces en cada recta que lleve la dirección de v, f será constante.
(b) Construya ejemplos de lo demostrado anteriormente para $n = 2$ y $v = (1,0), (0,1)$ y $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(34) Calcule las derivadas direccionales de f en el origen en cualquier dirección $v, ||v|| = 1$, siendo

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(35) Calcule ecuación del plano tangente y de la recta normal, cuando existan, a las superficies dadas en los puntos indicados
(a) $x^{10}y - \cos(z)x + 7 = 0 \qquad x_0 = (7,0,0)$
(b) $xy - z\ln(y) + e^{xy} = 1 \qquad x_0 = (0,1,1)$
(c) $xy\sin(y) + ze^{xy} - z^2 = 0 \qquad x_0 = (4,0,1)$
(d) $\cos(x)\cos(y)e^z = 0 \qquad x_0 = (\pi/2, 1, 0)$

(36) Dada una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en (x_0, y_0) y $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x,y,z) = f(x,y) - z$, vea qué relación existe entre el plano tangente al gráfico de f en (x_0, y_0) y el plano tangente a una superficie de nivel de h en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

(37) Encuentre los planos tangentes a la superficie

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21\right\}$$

que sean paralelos al plano $\Pi : x + 4y + 6z = 8$.

(38) Encuentre la dirección en que la función $z = x^2 + xy$ crece más rápidamente en el punto $(1,1)$.¿Cuál es la magnitud $||\nabla z||$ en esta dirección? Interprete geométricamente esta magnitud.

(39) Si $h(x,y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ denota la altura de una montaña en la posición (x,y).¿En qué dirección desde $(1,0)$ debería uno comenzar a caminar para escalar más rápido?

(40) (a) Muestre que si $\nabla f(x_0) \neq 0$ entonces $-\nabla f(x_0)$ apunta en la dirección a lo largo de la cual f decrece más rápidamente.
(b) Una distribución de temperaturas en el plano está dada por la función $f(x,y) = 10 + 6\cos(x)\cos(y) + 4\cos(3y)$. En el punto $(\pi/3, \pi/3)$ encuentre las direcciones de más rápido crecimiento y más rápido decrecimiento.

(41) El capitán Ralph se encontró en el lado soleado de Mercurio y notó que su traje espacial se fundía. La temperatura en su sistema rectangular de coordenada en su vecindad viene dada por

$$T(x,y,z) = e^{-x} + e^{-zy} + e^{-3z}$$

Si él está ubicado en $(1,1,1)$. ¿En qué dirección deberá comenzar a moverse con el fin de enfriarse lo más rápido posible?

(42) Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Pruebe que $|DF(x,y)| \neq 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ pero que F no es inyectiva.

(43) Determine si las siguientes aplicaciones son localmente inversibles de clase C^1 en P y calcular el diferencial de F^{-1} en el punto $F(P)$,
(a) $F(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ en $P = (x,y) \neq (0,0)$
(b) $F(x,y) = (\sin x, \cos(xy))$ en $P = (\pi, \pi/2)$

(44) Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x,y) = (x^3y + 3x^2y^2 - 7x - 4y, xy + y)$

(a) Demostrar que existe un entorno $U \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $(1,1) \in U$, un entorno $V \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $(-7,2) \in V$ y una inversa para F, $F^{-1} : V \to U$, C^1 tal que $F^{-1}(-7,2) = (1,1)$.

(b) Sean $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^1 tal que $\frac{\partial g}{\partial x}(1,1) = 2$, $\frac{\partial g}{\partial y}(1,1) = 5$ y $v = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Calcular $\frac{\partial (goF^{-1})}{\partial v}(-7,2)$.

(45) Sea $f(x,y,z) = x^3 - 2y^2 + z^2$. Demuestre que $f(x,y,z) = 0$ define una función implícita $x = \varphi(y,z)$ en el punto $(1,1,1)$. Encuentre $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1,1)$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(1,1)$.

(46) Encuentre la solución $y = f(x,z)$ de $x^2 + y^2 - z^3 = 0$ en un entorno de los siguientes puntos del plano xz y escribir explícitamente esos entornos

(a) $(5,10)$

(b) $(0,64)$

(47) Determine las derivadas parciales de las funciones que quedan definidas implícitamente en un entorno del punto dado mediante las relaciones

(a) $f(x,y) = \frac{1}{4}x^2 - y^2 = 1 \quad P = (2,0)$

(b) $g(x,y) = x^5 + y^y + xy = 3 \quad P = (1,1)$

(c) $h(x,y,z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 8 = 0 \quad P = (0,0,2)$

(48) El paraboloide $3x^2 + 2y^2 - 2z = 1$ y la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 2 = 0$ se cortan en el punto $(1,1,2)$:

(a) Hallar el plano tangente en dicho punto, probar que ambos planos se cortan ortgonalmente y encontrar la recta de intersección de los dos planos tangentes.

(b) Usando el teorema de la función implícita, probar que en dicho punto, las dos superficies se cortan ortogonalmente y que la recta tangente a la curva de intersección de las dos superficies en dicho punto es la intersección de los dos planos tangentes.

(49) Probar que existe una curva que es intersección de las superficies $z = 4x^2 - 3y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 24$ en el punto $P = (2,-2,4)$. Hallar la recta tangente de dicha curva en el punto P.