

Práctica 2

1. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n-1}{2n^2+3}$.
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{10n}}$.
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$.
- (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.
- (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$.
- (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3+n^2}$.
- (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+3}$.
- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

2. (*) Demostrar la desigualdad

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}$$

3. Si $r_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$, demostrar que r_n converge.

4. Hallar la suma de las siguientes series:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-2}}$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$

5. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-4n+2}{n!}$.

Sugerencia: descomponer el término general en la forma

$$\frac{3n^2 - 4n + 2}{n!} = \frac{A}{n!} + \frac{B}{(n-1)!} + \frac{C}{(n-2)!}$$

6. Cuántos primeros términos hay que tomar en las series siguientes para que su suma difiera no más que en $1/10^6$ de la suma de las series correspondientes:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$.

- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$.
7. ¿Es cierto que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$ son dos series divergentes, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_k b_k$ es divergente?
8. Probar el siguiente teorema de Abel: Si $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente de números positivos, y si $\sum a_n$ converge, entonces $na_n \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$. *Sugerencia.* $na_{2n} \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n} \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$, y similarmente para na_{2n+1} .
9. (a) Supongamos que una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$. ¿Qué se puede decir de la convergencia de $\sum a_n$?
- (b) Encontrar una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que la sucesión na_n no converja a 0 y tal que $\sum a_n$ sea convergente.
- (c) ¿Es posible obtener el resultado del ítem anterior si la sucesión es de términos no negativos?
10. Probar el siguiente criterio de convergencia (condensación de Cauchy): Sea b_n una sucesión decreciente de números no negativos. Entonces la serie $\sum b_n$ converge si y sólo si la serie $\sum 2^n b_{2^n}$ converge.
11. Decir si las siguientes series convergen condicional o absolutamente:
- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}$.
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$.
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 - 2n - 1}{n!}$.
12. (a) Mostrar que si $\sum a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum a_n^2$ converge. ¿Vale este resultado si $\sum a_n$ converge sólo condicionalmente?
- (b) ¿Si $\sum a_n$ converge y $a_n \geq 0$, se puede concluir algo de $\sum \sqrt{a_n}$?
13. Supongamos que la serie $\sum n^2 |a_n|$ converge. Entonces
- (a) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| < \frac{1}{n^2}$ para $n_0 < n$,
- (b) la serie $\sum a_n$ converge.
- (c) la serie $\sum \sqrt{|a_n|}$ converge.
14. Probar el siguiente criterio de Dirichlet: Sea $\{b_n\}$ una sucesión monótona decreciente de números positivos, con $\lim b_n = 0$. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales tales que las sumas parciales $S_n = a_1 + \dots + a_n$ satisfacen $S_n \leq K$, K constante. Entonces la serie $\sum a_m b_m$ es convergente. *Sugerencia.* $\sum_{m=1}^n a_m b_m = S_1(b_1 - b_2) + S_2(b_2 - b_3) + \dots + S_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + S_n b_n$.

15. Verificar las fórmulas para todo θ que no es múltiplo de 2π :

$$\begin{aligned}\sin \theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta &= \frac{\sin(n\theta/2) \sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \\ \cos \theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta &= \frac{\sin(n\theta/2) \cos((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\end{aligned}$$

16. Sea $\{b_n\}$ una sucesión decreciente de números positivos, con $\lim b_n = 0$. Usando los dos ejercicios anteriores, mostrar que, si θ no es múltiplo de 2π , las series

$$\sum b_n \cos n\theta, \quad \sum b_n \sin n\theta$$

son convergentes. Así, por ejemplo, las series $\sum (\cos n\theta)/n^\alpha$ y $\sum (\sin n\theta)/n^\alpha$ son convergentes para todo $\alpha > 0$.

17. Sea $|\alpha| < 1$. Mostrar que

$$1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + \cdots + n\alpha^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-\alpha)^2}.$$

18. Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series convergentes (no necesariamente absolutamente), ¿es la serie producto (de Cauchy) convergente? *Sugerencia.* Considerar $a_n = b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}, n \geq 1$.

19. Hallar los valores de x para los cuales convergen las series:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right)$
- (e) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$
- (f) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+1)^n$

20. Sea a_n la sucesión definida como

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{1}{3^n} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Mostrar que la sucesión $b_n = \sqrt[n]{a_n}$ no tiene límite. Estudiar la convergencia de la serie $\sum a_n x^n$.