

1. **Dada la ecuación:** $3x + \sin(\frac{\pi x}{2}) = 0$,

- a) *¿se puede determinar si tiene solución y –en tal caso– cuántas?*
b) *si la respuesta anterior es afirmativa, hallar las soluciones.*

Consideremos la función

$$f(x) = 3x + \sin(\frac{\pi x}{2})$$

Es claro que $f(0) = 0$, es decir, tiene solución. Para saber si es o no la única estudiemos el crecimiento de f . Para ello calculamos

$$f'(x) = 3 + \frac{\pi}{2} \cos(\frac{\pi x}{2})$$

Como $-1 \leq \cos(\frac{\pi x}{2}) \leq 1$ resulta $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} \cos(\frac{\pi x}{2}) \leq \frac{\pi}{2}$ y por lo tanto $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De esta forma, f resulta ser estrictamente creciente y por consiguiente, inyectiva. Luego, como $f(0) = 0$, no puede haber otro $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$.

De modo entonces que la ecuación

$$3x + \sin(\frac{\pi x}{2}) = 0$$

tiene una única solución: $x = 0$.

2. Calcular los valores de $n \in \mathbb{Z}$ que hacen que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x^2} - 1}{x^{n+2}} = 3$$

➤ Si $n = -2$

$$\frac{e^{3x^2} - 1}{x^{n+2}} = e^{3x^2} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

No cumple lo pedido.

➤ Si $n < -2$

$$\frac{e^{3x^2} - 1}{x^{n+2}} = (e^{3x^2} - 1)x^{-n-2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

pues $-n - 2 > 0$. No cumplen lo pedido.

➤ Si $n > -2$

En este caso, tanto el numerador como el denominador tienden a 0; podemos entonces aplicar L'Hospital

$$\frac{6xe^{3x^2}}{(n+2)x^{n+1}} = \frac{6e^{3x^2}}{(n+2)x^n}$$

○ si $n = 0$

$$\frac{6e^{3x^2}}{(n+2)x^n} = 3e^{3x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 3$$

Luego, $n = 0$ es uno de los valores que buscamos.

○ si $n < 0$

Como estamos suponiendo $n > -2$, debe ser $n = -1$; entonces,

$$\frac{6e^{3x^2}}{(n+2)x^n} = 6xe^{3x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

No cumple lo pedido.

○ si $n > 0$

$$\frac{6e^{3x^2}}{(n+2)x^n} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty$$

pues el numerador tiende a 6 y el denominador a infinito. Luego, no cumplen lo pedido.

Luego, en único valor de n que cumple lo pedido es $n = 0$.

3. **Determinar los valores de las constantes a , b y c de modo que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga extremos locales en -1 y en 3 . Determinar qué tipo de extremos tiene en cada caso. ¿Alguno de ellos puede ser absoluto?**

Siendo la función

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

derivable en todo punto, para que tenga extremos en -1 y en 3 debe suceder que

$$f'(-1) = 0 \quad \text{y} \quad f'(3) = 0$$

en virtud del teorema de Fermat. Calculemos entonces

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

buscamos entonces $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} 3(-1)^2 + 2a(-1) + b = 0 \\ 3 \cdot 3^2 + 2a \cdot 3 + b = 0 \end{cases}$$

o sea,

$$\begin{cases} -2a + b = -3 \\ 6a + b = -27 \end{cases}$$

de donde,

$$8a = -3 \quad \text{y} \quad b = -9$$

Para estos valores

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + c \quad \text{y} \quad f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

entonces,

□ En $(-\infty, -1)$: $f' > 0$. Luego, f decrece.

□ En $(-1, 3)$: $f' < 0$. Luego, f crece.

□ En $(3, +\infty)$: $f' < 0$. Luego, f decrece.

De modo que, en -1 , f tiene un máximo local y en 3 un mínimo local.

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, f no puede tener extremos absolutos por no estar acotada ni superior ni inferiormente.

4. a) Hallar un polinomio $P(x)$ que satisfaga

$$\sqrt{1+x} - P(x) = o(x^4)$$

b) ¿cuál es el error que se comete al aproximar $\sqrt{1,5}$ por $P(0,5)$? ¿Puede asegurarse que es menor que 10^{-2} ?

c) ¿cuán chico debe ser el número $|h|$ de modo que se pueda asegurar que $P(h)$ aproxima a $\sqrt{1+h}$ con error menor que 10^{-4} ?

a)

Tomamos como P el polinomio de Taylor de $f(x) = \sqrt{1+x}$ de grado 4 alrededor del origen. Calculemos las derivadas de f

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1+x)^{-1/2} & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\frac{1}{2}(1+x)^{-3/2} & f''(0) &= -\frac{1}{2} \\ f'''(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}(1+x)^{-5/2} & f'''(0) &= \frac{3}{4} \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}(1+x)^{-7/2} & f^{(4)}(0) &= -\frac{15}{8} \\ f^{(5)}(x) &= \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{16}(1+x)^{-9/2} \end{aligned}$$

Entonces,

$$P(x) = 1 + x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{5}{64}x^4$$

que, por ser el polinomio de Taylor de f de grado 4 en el origen, satisface

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^4} = 0$$

o sea,

$$\sqrt{1+x} - P(x) = o(x^4)$$

b)

El error es

$$R(0,5) = f(0,5) - P(0,5)$$

Para ver si podemos asegurar que este error es menor que 10^{-2} hacemos lo siguiente. Usando la forma de Lagrange del resto,

$$R(0,5) = \frac{f^{(5)}(c)}{5!}(0,5)^5 = \frac{f^{(5)}(c)}{5!} \frac{1}{2^5}$$

donde $0 < c < 0,5$. Luego,

$$|R(0,5)| = \frac{1}{2^5} \frac{1}{5!} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2^4} (1+c)^{-9/2} = \frac{1}{2^9} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{8 \cdot 3 \cdot 5} \frac{1}{(1+c)^{9/2}} \underset{c>0}{<} \frac{7}{2^{12}} < \frac{1}{2^9} < \frac{1}{100}$$

Podemos entonces decir que el error cometido al aproximar $\sqrt{1,5}$ por $P(0,5)$ es menor que un centésimo.

c)

En este caso debemos ver que cuán cerca debe estar $1+h$ de 1 (es decir, h de 0) para poder asegurar que el error cometido es menor que 10^{-4} . Usando la forma de Lagrange del resto

$$R(h) = f(1+h) - P(h) = \frac{f^{(5)}(c_h)}{5!} h^5$$

donde $|c_h| < |h|$. Comencemos por pedir que sea $|h| < 1$, con lo cual también es $|c_h| < 1$ y de esta forma

$$1 + c_h \geq 1 - |c_h| \geq 1 - |h| > 0$$

$$|R(h)| = \frac{|f^{(5)}(c_h)|}{5!} \frac{(0, 5)^5}{= 2^4} |1 + c_h|^{-9/2} \frac{1}{8.3.5} \frac{1}{2^5} = \frac{7}{2^{12}} \frac{1}{|1 + c_h|^{9/2}} \leq \frac{7}{2^{12}} \frac{1}{(1 - |h|)^{9/2}}$$

Luego, para garantizar que sea $|R(h)| < 10^{-4}$ basta pedir que

$$\frac{7}{2^{12}} \frac{1}{(1 - |h|)^{9/2}} < \frac{1}{10^4}$$

lo que equivale a pedir,

$$\frac{7 \cdot 10^4}{2^{12}} < (1 - |h|)^{9/2}$$

$$\left(\frac{7 \cdot 5^4}{2^8} \right)^{2/9} < 1 - |h|$$

es decir,

$$|h| < 1 - \left(\frac{7 \cdot 5^4}{2^8} \right)^{2/9}$$

5. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) *Mostrar que f es continua en $\mathbb{R}^2$* b) *Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$* c) Sea $g(t) = (t, t)$, calcular(i) $(f \circ g)'(0)$ (ii) $\nabla f(0, 0) \cdot g'(0)$ d) ¿Es f diferenciable en $(0, 0)$?a)

$$|f(x, y)| = \frac{|x|y^2}{x^2 + y^2} = |x| \underbrace{\frac{y^2}{x^2 + y^2}}_{\leq 1} \leq |x| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

Esto muestra que f es continua en $(0, 0)$. En el resto lo es por ser cociente de funciones continuas con denominador nunca nulo.

b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} 0 = 0$$

c)(i)

$$f \circ g(t) = f(t, t) = \frac{t^3}{2t^2} = \frac{t}{2} \quad \implies \quad (f \circ g)'(t) = \frac{1}{2}$$

Luego,

$$(f \circ g)'(0) = \frac{1}{2}$$

(ii)

$$\nabla f(0, 0) \underset{\substack{= \\ b)}}{(0, 0)} \quad \text{y} \quad g'(0) = (1, 1)$$

Luego,

$$\nabla f(0, 0) \cdot g'(0) = (0, 0) \cdot (1, 1) = 0$$

d)Si f fuera diferenciable en $(0, 0)$, debería ser

$$\frac{1}{2} = (f \circ g)'(0) = df(0, 0)(g'(0)) = \nabla f(0, 0) \cdot g'(0) = 0$$

Luego, f no es diferenciable en $(0, 0)$.

6. Sean $f(x, y) = (\sin x, y^2 + e^x)$ y $g(u, v) = u + \frac{1}{v}$. Se define $h(x, y) = g \circ f(x, y)$

a) calcular $h(x, y)$

b) calcular $\nabla h(x, y)$ usando

(i) la fórmula hallada en a)

(ii) la regla de la cadena

a)

$$h(x, y) = g(f(x, y)) = g(\sin x, y^2 + e^x) = \sin x + \frac{1}{y^2 + e^x}$$

b)

(i)

$$\nabla h(x, y) = \left(\cos x - \frac{e^x}{(y^2 + e^x)^2}, -\frac{2y}{(y^2 + e^x)^2} \right)$$

(ii)

Calculemos la matriz jacobiana de f y el gradiente de g

$$MJf(x, y) = \begin{pmatrix} \cos x & 0 \\ e^x & 2y \end{pmatrix}, \quad \nabla g(u, v) = (1, -\frac{1}{v^2})$$

Usando la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \nabla h(x, y) &= \nabla g(f(x, y)) MJf(x, y) = \left(1, -\frac{1}{(y^2 + e^x)^2} \right) \begin{pmatrix} \cos x & 0 \\ e^x & 2y \end{pmatrix} \\ &= \left(\cos x - \frac{e^x}{(y^2 + e^x)^2}, -\frac{2y}{(y^2 + e^x)^2} \right) \end{aligned}$$

7. Hallar todas las primitivas de la función $f(x) = \operatorname{sen}(2x) \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x)$.

$$\begin{aligned}
 \int \operatorname{sen}(2x) \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x) dx &= \int 2 \operatorname{sen} x \cos x \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x) dx \stackrel{\substack{u=\operatorname{sen} x \\ du=\cos x dx}}{=} \int 2u \operatorname{arctg} u du \\
 &= u^2 \operatorname{arctg} u - \int u^2 \frac{1}{1+u^2} du \\
 &= u^2 \operatorname{arctg} u - \int \frac{u^2+1-1}{u^2+1} du = u^2 \operatorname{arctg} u - \int du + \int \frac{1}{u^2+1} du \\
 &= u^2 \operatorname{arctg} u - u + \operatorname{arctg} u + K \\
 &= (\operatorname{sen}^2 x + 1) \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x + K
 \end{aligned}$$