# RESULTADOS SOBRE LÍMITE DE SUCESIONES

**Proposición**

Sea $(a_n)$ una sucesión de números reales positivos tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell > 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$.

DEMOSTRACIÓN:

Debemos ver que dado $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\sqrt[n]{a_n} - \ell| < \varepsilon$ para todo $n \geqslant n_0$. Consideremos en principio un número $\alpha \in (0, \ell)$. Dado este $\alpha > 0$ sabemos que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n} - \ell\right| < \alpha$ para todo $n \geqslant N$. Se tiene entonces que

$$(\ell - \alpha)a_n < a_{n+1} < (\ell + \alpha)a_n$$

para todo $n \geqslant N$. Por lo tanto,

$$(\ell - \alpha)a_N < a_{N+1} < (\ell + \alpha)a_N$$

$$(\ell - \alpha)a_{N+1} < a_{N+2} < (\ell + \alpha)a_{N+1}$$

$$(\ell - \alpha)a_{N+2} < a_{N+3} < (\ell + \alpha)a_{N+2}$$

$$\vdots$$

$$(\ell - \alpha)a_{N+(n-N)-1} < a_{N+(n-N)} < (\ell + \alpha)a_{N+(n-N)-1}$$

Luego,

$$\begin{aligned} a_n = a_{N+(n-N)} &< (\ell + \alpha)a_{N+(n-N)-1} < (\ell - \alpha)(\ell - \alpha)a_{N+(n-N)-2} = (\ell - \alpha)^2 a_{N+(n-N)-2} \\ &< (\ell - \alpha)^2(\ell - \alpha)a_{N+(n-N)-3} = (\ell - \alpha)^3 a_{N+(n-N)-3} \\ &\vdots \\ &< (\ell - \alpha)^{n-N} a_{N+(n-N)-(n-N)} = (\ell - \alpha)^{n-N} a_N \end{aligned}$$

Es decir,

$$a_n < (\ell + \alpha)^{n-N}.a_N$$

para todo $n \geqslant N + 1$. Análogamente se ve que

$$a_n > (\ell - \alpha)^{n-N}.a_N$$

para todo $n \geqslant N + 1$. Esto se resume diciendo que para $n \geqslant N + 1$ es

$$(\ell - \alpha)^{n-N}.a_N < a_n < (\ell + \alpha)^{n-N}.a_N$$

Esto se puede poner en la forma

$$(\ell-\alpha)^n.\frac{a_N}{(\ell-\alpha)^N} < a_n < (\ell+\alpha)^n.\frac{a_N}{(\ell+\alpha)^N}$$

Siendo todos los términos positivos podemos aplicar raíz n-ésima miembro a miembro para llegar a

$$(\ell-\alpha)\sqrt[n]{\frac{a_N}{(\ell-\alpha)^N}} < \sqrt[n]{a_n} < (\ell+\alpha)\sqrt[n]{\frac{a_N}{(\ell+\alpha)^N}}$$

Ahora bien, fijado $\alpha$, $N$ también está fijo; luego, si tomamos límite en los términos exteriores de la desigualdad anterior resulta que el izquierdo tiende a $\ell-\alpha$ y el derecho a $\ell+\alpha$. Es posible en consecuecia encontrar un $n_0 \geqslant N$ tal que para $n \geqslant n_0$ valga que

$$(\ell-\alpha)\sqrt[n]{\frac{a_N}{(\ell-\alpha)^N}} > (\ell-\alpha)-\alpha \qquad \text{y} \qquad (\ell+\alpha)\sqrt[n]{\frac{a_N}{(\ell+\alpha)^N}} < (\ell+\alpha)+\alpha$$

De donde, para $n \geqslant n_0$ es

$$\ell-2\alpha < \sqrt[n]{a_n} < \ell+2\alpha$$

es decir, $|\sqrt[n]{a_n}-\ell| < 2\alpha$. Finalmente, dado $\varepsilon > 0$ basta tomar $0 < \alpha < \frac{\varepsilon}{2}, \ell$ y el $n_0$ hallado para él para poder concluir que

$$|\sqrt[n]{a_n}-\ell| < 2\alpha < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para todo $n \geqslant n_0$, lo que prueba que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$.

**Definición**

Sea $(a_n)$ una sucesión de números reales. Se dice que $\ell \in \mathbb{R}$ es un ***punto límite*** de $(a_n)$ si existe una subsucesión $(a_{n_k})$ que converge a $\ell$.

**Definición**

Sea $(a_n)$ una sucesión acotada de números reales. Definimos ***límite superior*** de $(a_n)$ -notado $\limsup a_n$- y ***límite inferior*** de $(a_n)$ -notado $\liminf a_n$- por

$$\limsup a_n = \sup(\mathcal{L}) \qquad \text{y} \qquad \liminf a_n = \inf(\mathcal{L})$$

donde $\mathcal{L}$ representa el conjunto de los puntos límite de $(a_n)$.

Si la sucesión no es acotada superiormente definimos $\limsup a_n = +\infty$ y si no es acotada inferiormente decimos que $\liminf a_n = -\infty$.

**Observación**

Si $(a_n)$ es acotada, $\alpha = \liminf a_n$ y $\beta = \limsup a_n$, se deduce inmediatamente de la definición y del hecho que toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente, que para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\alpha-\varepsilon < a_n < \beta+\varepsilon$$

para todo $n \geqslant n_0$.

**Proposición**

Si $(a_n)$ es una sucesión de números reales, se tiene

i) $\liminf a_n \leqslant \limsup a_n$

ii) $\liminf a_n = \limsup a_n = a \iff \lim a_n = a$

DEMOSTRACIÓN:

*i)*

★ Si $\liminf a_n = -\infty$ o $\limsup a_n = +\infty$ es claramente cierto.

★ Supongamos entonces que ambos límites son finitos. Llamemos $\alpha = \liminf a_n$ y $\beta = \limsup a_n$; debemos probar que $\alpha \leqslant \beta$.

Razonando por el absurdo, supongamos que $\beta < \alpha$ y tomemos un número $\gamma \in (\beta, \alpha)$. Sabemos que, siendo $\beta$ el límite superior, sólo puede haber una cantidad finita de elementos de la sucesión mayores que $\gamma$; luego, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leqslant \gamma$ para todo $n \geqslant n_0$. Esto obliga a que cualquier punto límite de esta sucesión sea también menor o igual que $\gamma < \alpha$. Esto contradice el hecho de ser $\alpha$ límite inferior de $(a_n)$. En consecuencia lo supuesto es falso y resulta que $\alpha \leqslant \beta$, como queríamos demostrar.

*ii)*

$\underline{\Rightarrow}$

Sea $\varepsilon > 0$. Por ser $\liminf a_n = a$, debe haber una cantidad finita de $a_n$ menores que $a - \varepsilon$ y por ser $\limsup a_n = a$ también debe haber una cantidad finita de $a_n$ mayores que $a + \varepsilon$. Luego, dado este $\varepsilon$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

para todo $n \geqslant n_0$. Esto implica que $\lim a_n = a$.

$\underline{\Leftarrow}$

Si existe $\lim a_n = a$, entonces todos los límites de sus subsucesiones van a ser también $a$ y por lo tanto $\liminf a_n = \limsup a_n = a$.

**Proposición**

Sea $(a_n)$ una sucesión acotada de números reales. Entonces,

i) $\liminf a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (\inf\{a_k \,/\, k \geqslant n\})$

ii) $\limsup a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (\sup\{a_k \,/\, k \geqslant n\})$

Demostración:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, llamemos $A_n = \inf\{a_k \ / \ k \geqslant n\}$ y $B_n = \sup\{a_k \ / \ k \geqslant n\}$).
Siendo $\{a_k \ / \ k \geqslant n\} \subset \{a_k \ / \ k \geqslant n+1\}$, resulta que

$$A_n \leqslant A_{n+1} \leqslant B_{n+1} \leqslant B_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. De aquí se deduce que la sucesión $(A_n)$ es creciente y acotada superiormente y la sucesión $(B_n)$ es decreciente y acotada inferiormente; luego, ambas convergen respectivamente a $A = \sup A_n$ y $B = \inf B_n$. Además, $A \leqslant B$. Observemos también que si $\ell \in \mathcal{L}$, i.e., $\ell$ es un punto límite de $(a_n)$, entonces existe una subsucesión $(a_{n_k})$ tal que $a_{n_k} \longrightarrow \ell$. Y como $n_k \geqslant k$ para todo $k$, se tiene que $a_{n_k} \in \{a_m \ / \ m \geqslant k\}$. De donde,

$$\begin{array}{ccccc} A_k & \leqslant & a_{n_k} & \leqslant & B_k \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A & \leqslant & \ell & \leqslant & B \end{array}$$

Finalmente, por propiedades de supremo e ínfimo se tiene

$$A \ \leqslant \ \liminf a_n \ \leqslant \ \limsup a_n \ \leqslant B$$

*i)*

Debemos ver que $A = \liminf a_n$. Teniendo en cuenta la desigualdad anterior basta comprobar que no puede ser $A < \liminf a_n$. Razonemos por el absurdo y supongamos que es $A < \liminf a_n$. Sea $\alpha$ tal que $A < \alpha < \liminf a_n$. Aplicando la observación anterior podemos decir que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \geqslant \alpha$ para todo $n \geqslant n_0$. En tal caso sería $A_n \geqslant A_{n_0} \geqslant \alpha$ para todo $n \geqslant n_0$ y por lo tanto tendríamos que $A \geqslant \alpha$, contra lo supuesto. En cosecuencia debe ser $A = \liminf a_n$.

*ii)*

Un razonamiento totalmente análogo al anterior muestra que $B = \limsup a_n$.

**Proposición**

Sea $(a_n)$ una sucesión de números reales, entonces

i) $\limsup(-a_n) = -\liminf a_n$

ii) $\limsup(a_n + b_n) \leqslant \limsup a_n + \limsup b_n$

$\liminf(a_n + b_n) \geqslant \liminf a_n + \liminf b_n$

iii) Si $(a_n)$ y $(b_n)$ son sucesiones acotadas y de términos positivos, entonces

$$\limsup(a_n.b_n) \leqslant \limsup a_n \ . \ \limsup b_n$$

DEMOSTRACIÓN:

⋆ *i)*

Si $\mathcal{L}$ indica el conjunto de puntos límite de la sucesión $(a_n)$ y $\mathcal{L}'$ el correspondiente a la sucesión $(-a_n)$, es claro que $\mathcal{L}' = -\mathcal{L}$. Por lo tanto,

$$\limsup(-a_n) = \sup \mathcal{L}' = \sup(-\mathcal{L}) = -\inf \mathcal{L} = -\liminf a_n$$

⋆ *ii)*

En efecto,

$$\begin{aligned}
\limsup a_n + \limsup b_n &= \lim_{n\to\infty} (\sup\{a_k \ / \ k \geqslant n\}) + \lim_{n\to\infty} (\sup\{b_k \ / \ k \geqslant n\}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sup\{a_k \ / \ k \geqslant n\} + \sup\{b_k \ / \ k \geqslant n\}\right) \\
&\geqslant \lim_{n\to\infty} \left(\sup\{a_k + b_k \ / \ k \geqslant n\}\right) \\
&= \limsup(a_n + b_n)
\end{aligned}$$

La otra desigualdad se muestra análogamente.

⋆ *iii)*

Teniendo en cuenta que $\sup\{a.b \ / \ a \in A \ , \ b \in B\} \leqslant \sup A \ . \ \sup B$, siempre que los elementos de ambos conjuntos sean positivos, un procedimiento similar al del inciso anterior muestra esta desigualdad.