EXTREMOS LIGADOS

(dos ejemplos)

1. *Hallar los valores extremos absolutos que toma la función* $f(x, y) = xy$ *en la región*

$$x + y = 1 \qquad , \qquad x, y \geqslant 0$$

Notemos que lo que se nos está pidiendo es encontrar los extremos absolutos de $f|_S$, siendo

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x, y \geqslant 0 \ , \ x + y = 1\}$$

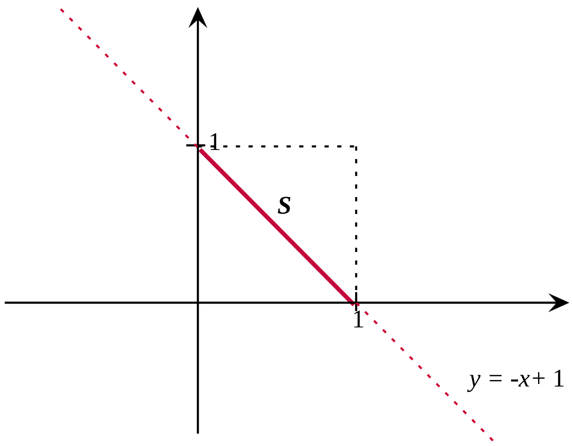
Comencemos por estudiar el conjunto S. Sus puntos pertenecen a la recta $y = -x + 1$ pero sólo debemos considerar los que tienen ambas componentes no negativas. Por lo cual, al ser $x \geqslant 0$, resulta

$$0 \leqslant y \leqslant 1$$

Y lo mismo ocurre con x; con lo cual

$$S \subset [0, 1] \times [0, 1]$$

Lo graficamos



Siendo este conjunto cerrado y acotado —es decir, compacto— podemos asegurar que f, por ser continua, toma extremos absolutos sobre S.

Hallemos los puntos críticos usando el método de los multiplicadores de Lagrange. Denotamos con

$$g(x, y) = x + y - 1$$

Luego, se trata de resolver

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

Tenemos

$$\nabla f(x,y) = (y,x) \qquad , \qquad \nabla g(x,y) = (1,1)$$

O sea,

$$\begin{cases} y = \lambda \\ x = \lambda \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

En consecuencia,

$$x = \lambda = y \quad \text{y} \quad x + y = 1$$

El único punto solución es entonces,

$$(x,y) = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \in S$$

Pero también tenemos que considerar los extremos (el borde) de S; es decir, los puntos

$$(1,0) \qquad \text{y} \qquad (0,1)$$

Hasta ahora tenemos la siguiente información

✧ f tiene máximo y mínimo absoluto en S

✧ los únicos puntos donde puede tomar los extremos absolutos son $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(1,0)$ y $(0,1)$

Por lo tanto, sólo tenemos que comparar las imágenes de estos puntos para saber dónde toma –y cuánto valen– los valores extremos.

Se tiene,

$$f(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4} \quad , \quad f(1,0) = 0 \quad , \quad f(0,1) = 0$$

De modo que

✧ El máximo valor de f sobre S es $\frac{1}{4}$ y lo toma en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

✧ El mínimo valor de f sobre S es 0 y lo toma en $(1,0)$ y en $(0,1)$

Comentario

Otra forma de resolver este problema es describir los elementos de S en forma paramétrica

$$S = \{(t, -t+1) \ / \ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

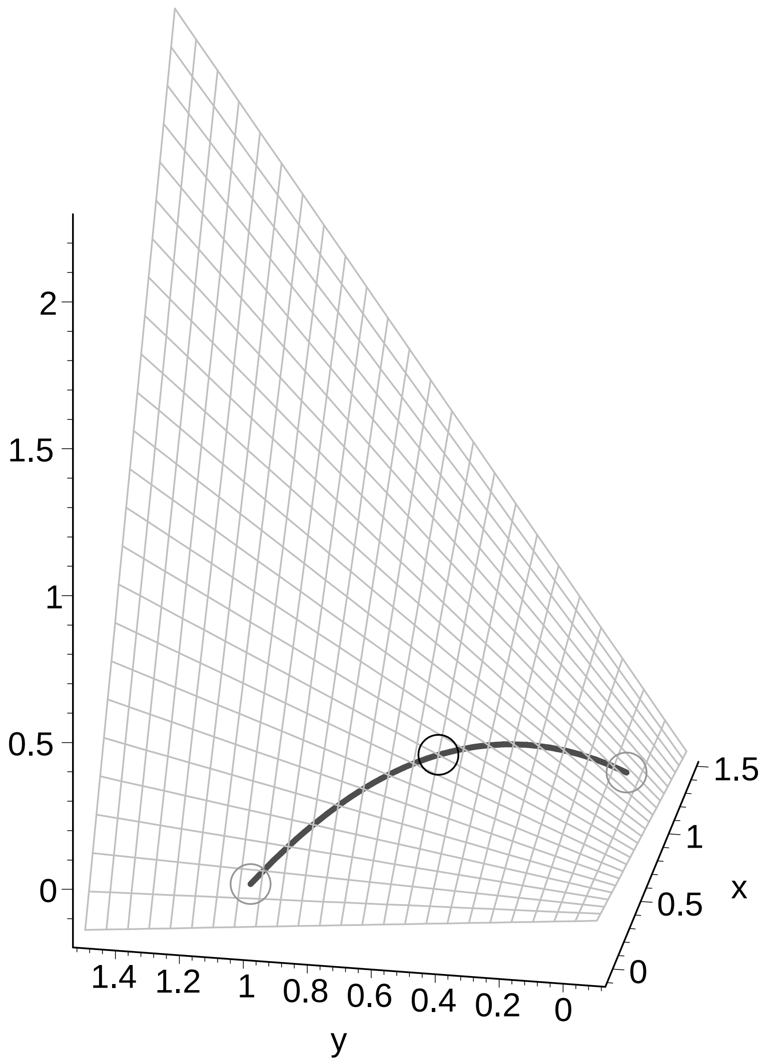
Pues entonces, los extremos absolutos que f toma sobre S son los extremos absolutos de la función una variable

$$\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad \varphi(t) = f(t, -t+1)$$

En el siguiente gráfico, la curva representa el gráfico de la función f restringida a S. Los puntos marcados son –de izquierda a derecha–

$$(0,1,f(0,1)) = (0,1,0) \quad , \quad \left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},f\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)\right) = \left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4}\right) \quad , \quad (1,0,f(1,0)) = (1,0,0)$$

El primero y el último corresponden al mínimo absoluto y el del medio al del máximo absoluto.



2. *Analizar la existencia de extremos absolutos de la función* $f(x,y) = x - y$ *sujeta a las condiciones*

$$g(x,y) = x^2 - y^2 - 1 = 0 \quad , \quad x > 0\,,\; y \geqslant 0$$

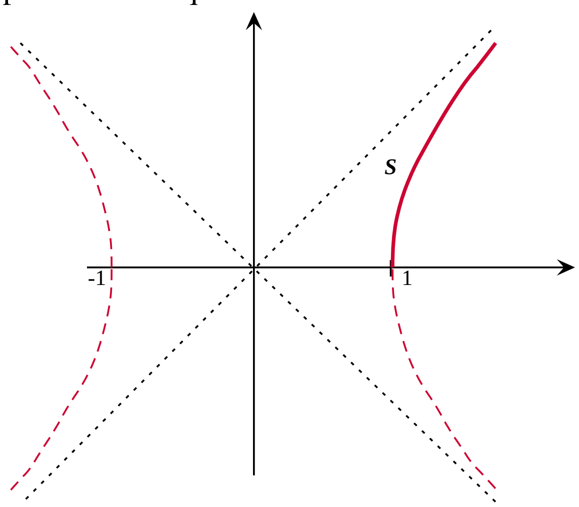
En caso de existir, calcularlos.

Se trata ahora de calcular los extremos de f sobre el conjunto

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2 - y^2 = 1\,,\; x > 0\,,\; y \geqslant 0\}$$

Es decir, los extremos de $f|_S$.

Como en el caso anterior, veamos quién es S. Es claro que sus puntos están en el primer cuadrante, sobre una hipérbola. Grafiquemos



Este conjunto no es acotado, por lo tanto no es compacto y en consecuencia vamos a tener que argumentar de alguna otra manera para justificar que admite extremos absolutos.

Observemos lo siguiente, si $\|(x,y)\| \longrightarrow +\infty$ debe ocurrir –dado que $x, y \geqslant 0$–

$$x \longrightarrow +\infty \qquad \text{o} \qquad y \longrightarrow +\infty$$

Con lo cual $x + y \longrightarrow +\infty$. Pero como $(x,y) \in S$,

$$1 = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$

O sea,

$$(x-y)(x+y) = 1$$

Si $x + y \to +\infty$, como el producto es constante, si el otro factor no se achicara el producto tendería a infinito; luego, debe suceder que

$$x - y \xrightarrow[\|(x,y)\| \to +\infty]{} 0$$

Resumiendo, hemos probado que

$$\left.\begin{array}{l} \|(x,y)\| \longrightarrow +\infty \\ (x,y) \in S \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad f(x,y) = x - y \longrightarrow 0$$

Notemos que $x - y > 0$ para cada $(x, y) \in S$.

Deducimos de aquí que existe $K > 1$ tal que

$$(x, y) \in S \quad \text{y} \quad \|(x, y)\| \geqslant K \qquad \Longrightarrow \qquad x - y = |f(x, y)| < 1 \tag{1}$$

Ahora bien, el conjunto

$$S_K = S \cap \{(x, y) \ / \ \|(x, y)\| \leqslant K\}$$

es compacto y como f es continua, $f|_{S_K}$ alcanza extremos absolutos.

Busquemos los puntos críticos de $f|_S$. Tenemos

$$\nabla f(x, y) = (1, -1) \qquad , \qquad \nabla g(x, y) = (2x, -2y)$$

Luego, debemos resolver el sistema

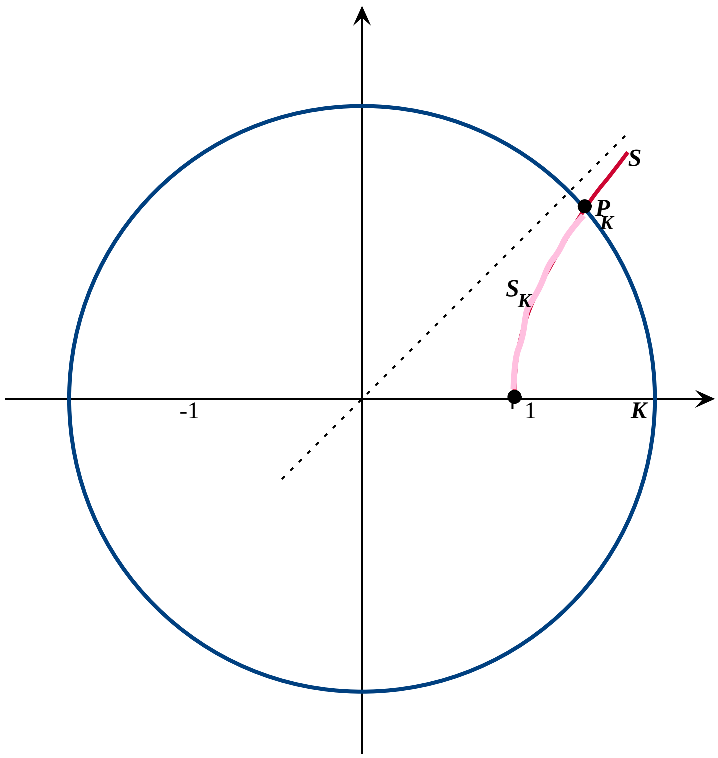
$$\begin{cases} 2\lambda x = 1 \\ 2\lambda y = 1 \\ x^2 - y^2 = 1 \ , \ x > 0 \ , \ y \geqslant 0 \end{cases}$$

De las dos primeras se concluye que $x = y$; si reemplazamos en la última vemos que este sistema es incompatible. Es decir, no hay puntos críticos.

Esto no nos asegura que no hay extremos en S_K pues nos falta considerar los bordes. En el caso de S_K el borde consta de dos puntos:

$$(1, 0) \quad \text{y} \quad P_K$$

siendo P_K la intersección de la porción de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ que está en el primer cuadrante con la circunferencia $x^2 + y^2 = K^2$



Es decir,

$$P_K = \left(\frac{\sqrt{K^2+1}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{K^2-1}}{\sqrt{2}} \right)$$

Comparemos ahora los valores de f en cada uno de estos puntos

$$f(1,0) = 1 - 0 = 1 \quad \text{y} \quad f(P_K) = \frac{\sqrt{K^2+1} - \sqrt{K^2-1}}{\sqrt{2}} \underset{\substack{\uparrow \\ \|P_K\|=K \geqslant K}}{<} 1$$

en virtud de (1).

Entonces, $f|_{S_K}$ toma su máximo absoluto $(1,0)$ y su mínimo absoluto en P_K. Pero dado que para los $(x,y) \in S - S_K$ también se cumple

$$f(x,y) < 1$$

debido a que en tal caso es $\|(x,y)\| \geqslant K$, tenemos que $f|_S$ también tiene un máximo absoluto en $(1,0)$.

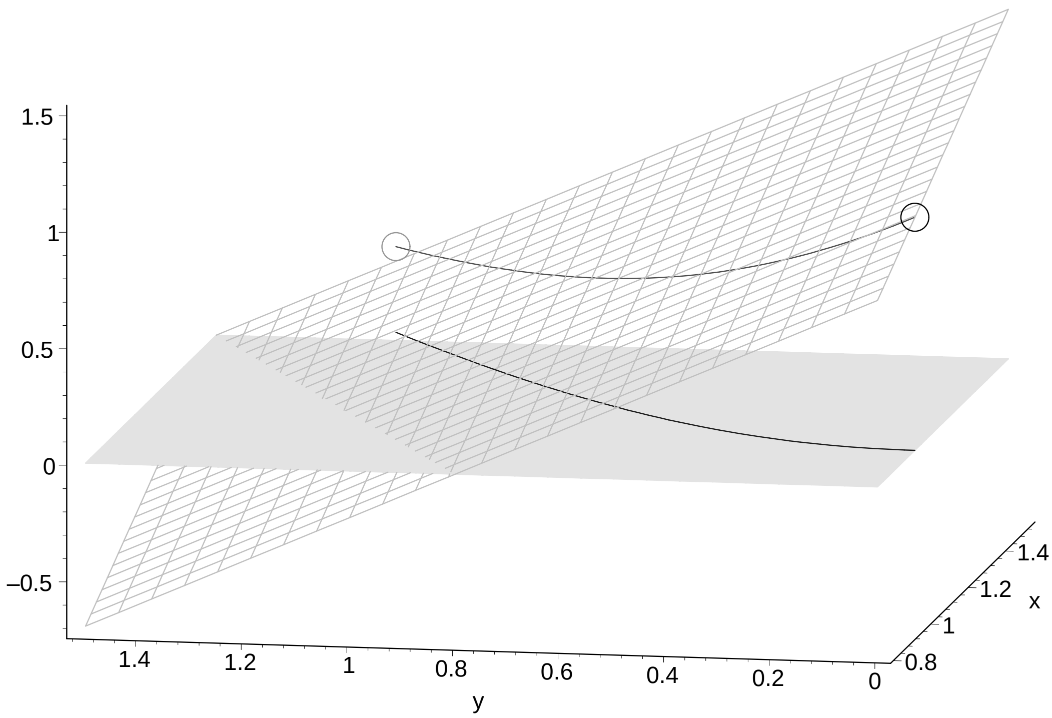
Con respecto al mínimo absoluto, recordemos que $f(x,y) > 0$ para todo $(x,y) \in S$. Esta función no toma el valor cero sobre S, pero

$$\begin{aligned} f(P_K) &= \frac{\sqrt{K^2+1}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{K^2-1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{K^2+1} - \sqrt{K^2-1}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \, \frac{2}{\sqrt{K^2+1} + \sqrt{K^2-1}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{K^2+1} + \sqrt{K^2-1}} \xrightarrow[K \to +\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Resulta entonces que si bien f toma valores tan cercanos a cero como se quiera, nunca llega a valer cero. En consecuencia, f no tiene mínimo absoluto sobre S.

El siguiente gráfico ilustra lo que sucede con esta función sobre S. Los puntos marcados corresponden a los valores máximo y mínimo sobre *un* S_K.

La curva que está sobre el plano gris horizontal es *parte* de S. La otra es *parte* de su imagen por f.


1.5
1
0.5
0
–0.5
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
y
0.8
1
1.2
1.4
x