RESOLUCIÓN DE ALGUNOS EJERCICIOS SOBRE TEMAS DE LA PRÁCTICA 1

1. ***Demostrar a partir de los axiomas de número real y de las propiedades probadas previamente***

   a) $\boldsymbol{a(-b) = -ab}$

   El segundo miembro de la igualdad que debemos probar es el inverso aditivo del número ab. Es por tanto el *único* número que sumado a ab da por resultado el neutro de la suma. En consecuencia, si probamos que el primer miembro —$a(-b)$— también cumple la misma propiedad, ambos deben ser iguales. Calculemos entonces,

   $$a(-b) + ab = a[(-b) + b] = a.0 = 0$$

   Por lo tanto podemos afirmar que

   $$a(-b) = -ab$$

   b) $\boldsymbol{(-a)(-b) = ab}$

   Usando el ejercicio anterior reiteradamente,

   $$(-a)(-b) = -[(-a)b] = -[-ab] = ab$$

   c) $\boldsymbol{a < b\,,\ c < 0 \quad \Longrightarrow \quad ac > bc}$

   Siendo $c < 0$, resulta que $-c > 0$. Usando entonces uno de los axiomas,

   $$a(-c) < b(-c)$$

   Una propiedad probada anteriormente nos permite afirmar que entonces,

   $$-ac < -bc$$

   Sumando bc miembro a miembro

   $$-ac + bc < -bc + bc$$

de donde,

$$-ac + bc < 0$$

Sumando ahora ac

$$ac + (-ac) + bc < ac + 0$$

Es decir,

$$bc < ac$$

O, lo que es lo mismo,

$$ac > bc$$

d) **$0 < 1$**

Uno de los axiomas nos asegura que $1 \neq 0$. En consecuencia, bastaría probar que no puede ser $1 < 0$. Supongamos –razonando por el absurdo– que $1 < 0$. En tal caso, $-1 > 0$. Uno de los axiomas nos permite afirmar que si multiplicamos la desigualdad $-1 > 0$ por -1, siendo este número positivo, tenemos

$$(-1)(-1) > (-1).0$$

O sea,

$$1 > 0$$

Pero esto contradice lo supuesto. Luego, esa suposición tiene que ser falsa y podemos entonces afirmar que

$$1 > 0$$

e) **Si $a, b \neq 0$, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$**

Por razones de unicidad, si probamos que $\frac{a}{b}.\frac{b}{a} = 1$, deberá ser $\frac{b}{a}$ = inverso multiplicativo de $\frac{a}{b}$. Eso es precisamente lo que debemos probar. Calculemos entonces ese producto,

$$\frac{a}{b}.\frac{b}{a} = ab^{-1}.ba^{-1} = aa^{-1}bb^{-1} = 1.1 = 1$$

Luego,

$$\frac{b}{a} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$$

f) $\boldsymbol{a > 0 \iff a^{-1} > 0}$

Supongamos primero que $a > 0$. Debemos ver que $a^{-1} > 0$. Siendo $aa^{-1} = 1 \neq 0$, es claro que $a^{-1} \neq 0$. Si fuera $a^{-1} < 0$, multiplicando miembro a miembro por el número positivo $a > 0$, tendríamos

$$a^{-1}.a < 0.a = 0$$

de donde,

$$1 < 0$$

lo que es falso. Por lo tanto, debe ser

$$a^{-1} > 0$$

Recíprocamente, si ahora suponemos $a^{-1} > 0$, razonando como en el caso anterior, vemos que necesariamente $a \neq 0$. Y si suponemos que $a < 0$, multiplicando ahora por el número positivo a^{-1} obtenemos

$$a^{-1}.a < a^{-1}.0$$

de donde,

$$1 < 0$$

lo que es falso y por lo tanto, debe ser

$$a > 0$$

g) ***Sean*** $\boldsymbol{a, b > 0}$***. Entonces***

$$\boldsymbol{a < b \iff a^2 < b^2}$$

★ $\underline{a < b \implies a^2 < b^2}$

Como $a > 0$ y $b > 0$ tenemos

$$a.a < a.b \qquad \text{y} \qquad a.b < b.b$$

Ahora, la transitividad de la relación de orden nos permite afirmar que

$$a^2 = a.a < a.b < b.b = b^2$$

como queríamos demostrar.

⋆ $\underline{a^2 < b^2 \implies a < b}$

La relación $a^2 < b^2$ equivale a $b^2 - a^2 > 0$. Pero $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$. Luego, podemos asegurar que

$$(b-a)(b+a) > 0$$

Esto, a su vez, equivale a

$$b - a > 0 \quad \text{y} \quad b + a > 0 \qquad \text{o} \qquad b - a < 0 \quad \text{y} \quad b + a < 0$$

Recordando que $a, b > 0$, la condición $b + a > 0$ se cumple siempre y la condición $b + a < 0$ no se cumple nunca pues resultaría $b < -a < 0$. Entonces,

$$b - a < 0 \quad \text{y} \quad b + a < 0$$

es falsa. Por lo tanto,

$$b - a > 0 \quad \text{y} \quad b + a > 0$$

debe ser verdadera. Finalmente, dado que $b + a > 0$ por ser ambos positivos, concluimos que vale

$$b - a > 0$$

es decir,

$$a < b$$

como queríamos probar.

h) ***Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces***

$$\boldsymbol{a < b \iff a^3 < b^3}$$

Notemos que

$$b^3 - a^3 = (b-a)(a^2 + ab + b^2)$$

Un ejercicio anterior nos asegura que

$$a^2 + ab + b^2 > 0$$

Por lo tanto,

$$b^3 - a^3 > 0 \iff b - a > 0$$

o sea,

$$a^3 < b^3 \iff a < b$$

que es precisamente lo que debíamos probar.

i) ***Sean $a, b \geqslant 0$ tales que $a + b = 0$. Entonces, $a = b = 0$***

★ Si $b = 0$, la condición $a + b = 0$ nos dice que $a = 0$. O sea, $a = b = 0$.

★ Si $b > 0$, $0 = a + b > a + 0 = a \geqslant 0$. Esto implica que $0 > 0$, lo que es claramente absurdo. Luego esta situación no se puede dar.
Concluímos entonces que necesariamente

$$a = b = 0$$

2. ***Mostrar que para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene***

$$\boldsymbol{a^2 + b^2 \geqslant 2ab} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{a^2 + b^2 \geqslant -2ab}$$

$$\begin{array}{lcl} 0 \leqslant (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab & \Longrightarrow & 2ab \leqslant a^2 + b^2 \\ 0 \leqslant (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab & \Longrightarrow & -2ab \leqslant a^2 + b^2 \end{array}$$

3. ***Resolver las siguientes desigualdades y representar el conjunto de los $x \in \mathbb{R}$ que las satisfacen en la recta.***

a) $\boldsymbol{2x - 13 > 3 - x}$

Sea $A = \{x \in \mathbb{R} \;/\; 2x - 13 > 3 - x\}$. Debemos encontrar una forma más simple que describa a A y nos permita ubicar a sus elementos sobre la recta real. A partir de los axiomas y algunas de sus consecuencias obtenemos

$$x \in A \iff 2x - 13 > 3 - x \iff 3x - 13 > 3 \iff 3x > 16 \iff x > \frac{16}{3}$$

Luego,

$$A = \left(\frac{16}{3}, +\infty\right)$$

b) $\boldsymbol{x - 3 \leqslant 3x - 2 < x + 3}$

Sea $A = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x - 3 \leqslant 3x - 3 < x + 3\}$,

$$\begin{array}{lcl} x \in A & \iff & x - 3 \leqslant 3x - 2 < x + 3 \iff x - 3 \leqslant 3x - 2 \;\text{ y }\; 3x - 2 < x + 3 \\ & \iff & -1 \leqslant 2x \;\text{ y }\; 2x < 5 \\ & \iff & -\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{5}{2} \end{array}$$

Luego,

$$A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

c) $\boldsymbol{\dfrac{2-x}{x+3} \geqslant 4}$

Sea $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ \frac{2-x}{x+3} \geqslant 4\}$,

$$\begin{aligned}
x \in A \quad &\iff \quad \frac{2-x}{x+3} \geqslant 4 \\
&\iff \quad \frac{2-x}{x+3} \geqslant 4 \quad \text{y} \quad x+3>0 \qquad \text{o} \qquad \frac{2-x}{x+3} \geqslant 4 \quad \text{y} \quad x+3<0 \\
&\iff \quad 2-x \geqslant 4(x+3) \quad \text{y} \quad x+3>0 \quad \text{o} \quad 2-x \leqslant 4(x+3) \quad \text{y} \quad x+3<0 \\
&\iff \quad 2-x \geqslant 4x+12 \quad \text{y} \quad x+3>0 \quad \text{o} \quad 2-x \leqslant 4x+12 \quad \text{y} \quad x+3<0 \\
&\iff \quad 5x \leqslant -10 \quad \text{y} \quad x+3>0 \quad \text{o} \quad 5x \geqslant -10 \quad \text{y} \quad x+3<0 \\
&\iff \quad x \leqslant -2 \quad \text{y} \quad x>-3 \quad \text{o} \quad x \geqslant -2 \quad \text{y} \quad x<-3 \\
&\iff \quad -3 < x \leqslant -2
\end{aligned}$$

dado que las condiciones $x < -3$ y $x \geqslant -2$ no se pueden dar simultáneamente.
Luego,

$$A = (-3, -2]$$

d) $\boldsymbol{2x^2 - 2 \geqslant x^2 - x}$

Sea $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 2x^2 - 2 \geqslant x^2 - x\}$,

$$x \in A \quad \iff \quad x^2 + x - 2 \geqslant 0$$

Utilizamos el procedimiento de completar cuadrados para facilitar los cálculos

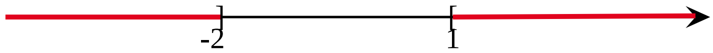
$$x^2 + x - 2 = (x + \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{4} - 2 = (x + \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{9}{4} = (x + \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2})(x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2})$$

Luego,

$$\begin{aligned}
x \in A \quad &\iff \quad (x + \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2})(x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}) \geqslant 0 \quad \iff \quad (x-1)(x+2) \geqslant 0 \\
&\iff \quad x-1 \geqslant 0 \quad \text{y} \quad x+2 \geqslant 0 \quad \text{o} \quad x-1 \leqslant 0 \quad \text{y} \quad x+2 \leqslant 0 \\
&\iff \quad x \geqslant 1 \quad \text{y} \quad x \geqslant -2 \quad \text{o} \quad x \leqslant 1 \quad \text{y} \quad x \leqslant -2 \\
&\iff \quad x \geqslant 1 \qquad \text{o} \qquad x \leqslant -2
\end{aligned}$$

Luego,

$$A = (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$$



4. ***Hallar el conjunto de números reales que satisfacen cada una de las condiciones siguientes y representar dicho conjunto sobre la recta***

a) $\mathbf{|x - 1| < |x + 3|}$

Sea $A = \{x \in \mathbb{R} \;/\; |x - 1| < |x + 3|\}$.
La definición de $|x - 1|$ cambia en 1 y la de $|x + 3|$ en -3. Esto nos sugiere considerar las tres regiones que quedan determinadas por estos puntos

$$(-\infty, -3) \qquad , \qquad [-3, 1) \qquad , \qquad [1, +\infty)$$

Llamamos

$$A_1 = A \cap (-\infty, -3) \quad , \quad A_2 = A \cap [-3, 1) \quad , \quad A_3 = A \cap [1, +\infty)$$

Es claro que

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

por lo cual basta calcular estos conjuntos A_i.

Notemos en principio que

★ en $(-\infty, -3)$: $|x - 1| = -x + 1$ y $|x + 3| = -x - 3$ pues tanto $x - 1$ como $x + 3$ son números negativos cuando x está en esta región.

★ en $[-3, 1)$: $|x - 1| = -x + 1$ y $|x + 3| = x + 3$ pues $x - 1 < 0$ y $x + 3 \geqslant 0$ cuando x está en esta región.

★ en $(1, +\infty)$: $|x - 1| = x - 1$ y $|x + 3| = x + 3$ pues tanto $x - 1$ como $x + 3$ son números positivos cuando x está en esta región.

$\triangleright \quad A_1 = \emptyset$

$$\begin{aligned} x \in A_1 \iff & \quad |x - 1| < |x + 3| \quad \text{y} \quad x < -3 \quad \iff \quad -x + 1 < -x - 3 \quad \text{y} \quad x < -3 \\ \iff & \quad 1 < -3 \quad \text{y} \quad x < -3 \end{aligned}$$

lo que es imposible.

$\triangleright \quad A_2 = (-1, 1)$

$$\begin{aligned} x \in A_2 \iff & \quad |x - 1| < |x + 3| \quad \text{y} \quad -3 \leqslant x < 1 \\ \iff & \quad -x + 1 < x + 3 \quad \text{y} \quad -3 \leqslant x < 1 \quad \iff \quad 2x > -2 \quad \text{y} \quad -3 \leqslant x < 1 \\ \iff & \quad x > -1 \quad \text{y} \quad -3 \leqslant x < 1 \quad \iff \quad -1 < x < 1 \end{aligned}$$

▹ $A_3 = [1, +\infty)$

$$\begin{aligned} x \in A_3 &\iff |x-1| < |x+3| \quad \text{y} \quad x \geqslant 1 \\ &\iff x - 1 < x + 3 \quad \text{y} \quad x \geqslant 1 \iff -1 < 3 \quad \text{y} \quad x \geqslant 1 \\ &\iff x \geqslant 1 \end{aligned}$$

Luego,

$$A = (-1, +\infty)$$

b) $\mathbf{\dfrac{|x+4|}{x} > 2}$

Sea $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ \frac{|x+4|}{x} > 2\}$.
Es este caso, nos conviene separar en las siguientes regiones

$$x < -4 \qquad , \qquad -4 \leqslant x < 0 \qquad , \qquad x > 0$$

Consideramos entonces los subconjuntos de A

$$A_1 = A \cap (-4, +\infty) \quad , \quad A_2 = A \cap [-4, 0) \quad , \quad A_3 = (0, +\infty)$$

que verifican

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

Calculemos estos subconjuntos

▹ $A_1 = \varnothing$

$$x \in A_1 \iff \frac{|x+4|}{x} > 2 \quad \text{y} \quad x < -4$$

lo que es imposible dado que el primer miembro debe ser positivo y el numerador lo es.

▹ $A_2 = \varnothing$

$$x \in A_2 \iff \frac{|x+4|}{x} > 2 \quad \text{y} \quad -4 \leqslant x < 0$$

lo que es imposible por la misma razón anterior.

▹ $A_3 = (0, 4)$

$$\begin{aligned} x \in A_3 &\iff \frac{|x+4|}{x} > 2 \quad \text{y} \quad x > 0 \underset{\substack{\uparrow \\ x>0>-4}}{\iff} x + 4 > 2x \quad \text{y} \quad x > 0 \\ &\iff x < 4 \quad \text{y} \quad x > 0 \iff 0 < x < 4 \end{aligned}$$

Luego,

$$A = (0, 4)$$

c) $\mathbf{\dfrac{8-2x}{3-|x-2|} < 0}$

Sea $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ \frac{8-2x}{3-|x-2|} < 0\}$
Para poder reemplazar $|x-2|$ por su correspondiente expresión sin las barras y saber el signo del denominador debemos considerar los puntos de la recta donde

$$|x-2| = 0 \qquad \text{y} \qquad |x-2| = 3$$

es decir,

$$x = 2 \qquad \text{y} \qquad x = 2 \pm 3$$

Notemos que

$$3 - |x-2| > 0 \iff |x-2| < 3 \iff -3 < x-2 < 3 \iff -1 < x < 5$$

Definimos los subconjuntos de A

$$A_1 = A \cap (-\infty, -1) \quad , \quad A_2 = A \cap (-1, 2) \quad , \quad A_3 = A \cap [2, 5) \quad , \quad A_4 = A \cap (5, +\infty)$$

que verifican

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

Calculemos estos subconjuntos

▹ $A_1 = (-\infty, -1)$

$$x \in A_1 \iff \frac{8-2x}{3-|x-2|} < 0 \quad \text{y} \quad x < -1 \underset{\substack{\uparrow \\ 3-|x-2|<0}}{\iff} 8 - 2x > 0 \quad \text{y} \quad x < -1$$

$$\iff x < 4 \quad \text{y} \quad x < -1 \iff x < -1$$

▹ $A_2 = \emptyset$

$$x \in A_2 \iff \frac{8-2x}{3-|x-2|} < 0 \quad \text{y} \quad -1 < x < 2 \underset{\substack{\uparrow \\ 3-|x-2|>0}}{\iff} 8 - 2x < 0 \quad \text{y} \quad -1 < x < 2$$

$$\iff x > 4 \quad \text{y} \quad -1 < x < 2$$

lo que es imposible.

▹ $A_3 = (4,5)$

$$x \in A_3 \iff \frac{8-2x}{3-|x-2|} < 0 \quad \text{y} \quad 2 \leqslant x < 5 \underset{3-|x-2|>0}{\overset{}{\underset{\uparrow}{\iff}}} 8-2x < 0 \quad \text{y} \quad 2 \leqslant x < 5$$

$$\iff x > 4 \quad \text{y} \quad 2 \leqslant x < 5 \iff 4 < x < 5$$

▹ $A_4 = \varnothing$

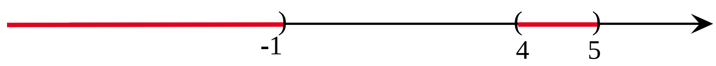
$$x \in A_4 \iff \frac{8-2x}{3-|x-2|} < 0 \quad \text{y} \quad x > 5 \underset{3-|x-2|<0}{\underset{\uparrow}{\iff}} 8-2x > 0 \quad \text{y} \quad x > 5$$

$$\iff x < 4 \quad \text{y} \quad x > 5$$

lo que es imposible.

Luego,

$$A = (-\infty, -1) \cup (4,5)$$



5. ***Probar que si $a, b \geqslant 0$, entonces $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leqslant \sqrt{|a-b|}$***

Notemos, en principio, que si $a = b = 0$ vale la igualdad y en consecuencia también la desigualdad *amplia*.

Lo mismo ocurre si $a = b$, dado que ambos miembros de la desigualdad se anulan.

Supongamos entonces que $a \neq b$. Notemos que –en particular– a y b no pueden ser simultáneamente nulos.

En tal caso, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$ y tenemos

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

Luego,

$$|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leqslant \sqrt{|a-b|} \iff \frac{|a-b|}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \leqslant \sqrt{|a-b|} \underset{\sqrt{|a-b|},\, \sqrt{a}+\sqrt{b}>0}{\underset{\uparrow}{\iff}} \frac{|a-b|}{\sqrt{|a-b|}} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\iff \sqrt{|a-b|} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} \underset{\text{por } g)}{\underset{\uparrow}{\iff}} (\sqrt{|a-b|}\,)^2 \leqslant (\sqrt{a} + \sqrt{b}\,)^2$$

$$\iff |a-b| \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Ahora bien, esta última desigualdad es claramente cierta a partir de la desigualdad triangular y del hecho que $|x| = |-x|$

$$|a-b| = |a + (-b)| \leqslant |a| + |-b| = |a| + |b|$$

Por lo tanto, siendo equivalentes, también lo es la primera.

6. ***Desarrollar las siguientes sumas***

(a) $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{5} 3n}$

$$\sum_{n=1}^{5} 3n = 3.1 + 3.2 + 3.3 + 3.4 + 3.5$$

(b) $\boldsymbol{\sum_{n=3}^{k} (-1)^n n^3}$

$$\sum_{n=3}^{k} (-1)^n n^3 = (-1)^3 3^3 + (-1)^4 4^3 + (-1)^5 5^3 + \cdots + (-1)^{k-1}(k-1)^3 + (-1)^k k^3$$

7. ***Escribir las siguientes expresiones usando el símbolo '$\sum$'***

a) $\mathbf{2 + 4 + 6 + 8 + 10}$

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 = \sum_{n=1}^{5} 2n$$

b) $\mathbf{1 - 1 + 1 - 1 + 1}$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 = \sum_{n=0}^{4} (-1)^n$$

8. ***Probar las siguientes afirmaciones usando el principio de inducción***

a) $\boldsymbol{(ab)^n = a^n b^n}$, para todo $\boldsymbol{a, b \in \mathbb{R}}$, $\boldsymbol{n \in \mathbb{N}}$

La afirmación que debemos probar para todo $n \in \mathbb{N}$ es

$$P(n) : \quad (ab)^n = a^n b^n$$

Lo hacemos usando el principio de inducción.

❒ $\underline{P(1) \text{ es verdadera}}$

$$(ab)^1 = ab = a^1 b^1$$

❒ $\underline{\text{“}P(n) \text{ verdadera} \implies P(n+1) \text{ verdadera” vale para todo } n \in \mathbb{N}}$

$$(ab)^{n+1} = (ab)^n(ab) \underset{\substack{\uparrow \\ P(n) \text{ es verdadera}}}{=} a^n b^n ab = a^n a b^n b = a^{n+1} b^{n+1}$$

b) $\mathbf{2^n > n^2}$, para todo $\boldsymbol{n \geqslant 5}$

La afirmación que debemos probar para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 5$ es

$$P(n): \quad 2^n > n^2$$

Lo hacemos usando el principio de inducción.

❐ $\underline{P(5) \text{ es verdadera}}$

$$2^5 = 32 > 25 = 5^2$$

❐ $\underline{\text{“}P(n) \text{ verdadera} \implies P(n+1) \text{ verdadera” vale para todo } n \geqslant 5}$

$$2^{n+1} = 2^n 2 \underset{\substack{\uparrow \\ P(n)\ es\ verdadera}}{>} n^2.2 = n^2 + n^2 \underset{\substack{\uparrow \\ n \geqslant 5 > 3}}{>} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

dado que –cuando $n \geqslant 3$– $n^2 > 2n + 1$ pues

$$n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2 \underset{\substack{\uparrow \\ n-1 \geqslant 2 \Rightarrow (n-1)^2 \geqslant 4}}{>} 4 - 2 = 2 > 0$$

9. ***Calcular***

a) $\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}}$

Recordando el ejercicio 5a),

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{2k+1}$$

Si llamamos $a_k = \frac{1}{2k-1}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1} a_k \\ &= \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} a_k - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} a_k - a_{n+1} = \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_{n+1} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2}\end{aligned}$$

b) $\boldsymbol{\sum_{k=n+1}^{m} a_k - a_{k-1}}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{m} (a_k - a_{k+1}) &= \sum_{k=n+1}^{m} a_k - \sum_{k=n+1}^{m} a_{k+1} \\
&= \sum_{k=n+1}^{m} a_k - \sum_{k=n+2}^{m+1} a_k \\
&= a_{n+1} \; + \; \sum_{k=n+2}^{m} a_k - \sum_{k=n+2}^{m} a_k \; - \; a_{m+1} \\
&= a_{n+1} - a_{m+1}
\end{aligned}$$