RESOLUCIÓN DE ALGUNOS EJERCICIOS SOBRE TEMAS DE LA PRÁCTICA 2

1. ***Sea*** $a_n = \begin{cases} b_n & \textit{si } n \textit{ es par} \\ c_n & \textit{si } n \textit{ es impar} \end{cases}$

   a) ***Probar que si*** $b_n \longrightarrow \ell$ ***y*** $c_n \longrightarrow \ell$***, entonces*** $a_n \longrightarrow \ell$

   Dado $\varepsilon > 0$ debemos encontrar un número $n_0 \in \mathbb{N}$ —relacionado con el ε dado— para el cual sea cierta la implicación siguiente

$$n \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \quad |a_n - \ell| < \varepsilon$$

   Como sabemos que $b_n \longrightarrow \ell$, dado este ε, podemos asegurar que existe un número natural n_1 que verifica

$$n \geqslant n_1 \quad \Longrightarrow \quad |b_n - \ell| < \varepsilon$$

   Pero lo mismo sucede con la otra sucesión; luego, existe otro número natural n_2 tal que

$$n \geqslant n_2 \quad \Longrightarrow \quad |c_n - \ell| < \varepsilon$$

   Entonces, si tomamos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, la condición $n \geqslant n_0$ implica –en particular– que $n \geqslant n_1, n_2$. Por lo tanto, vale

$$n \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \quad |a_n - \ell| = \begin{cases} |b_n - \ell| & \text{si } n \text{ es par} \\ |c_n - \ell| & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} < \begin{cases} \varepsilon & \text{si } n \text{ es par} \\ \varepsilon & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} = \varepsilon$$

   b) ***¿Qué pasa en otro caso?***

   Veamos qué tiene que pasar con las sucesiones (b_n) y (c_n) en el caso en que (a_n) tenga límite. Llamemos

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

   Para cualquier $\varepsilon > 0$, sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

   Pero entonces, si tomamos $n \geqslant n_0$ y n *par* resulta –dado que $a_n = b_n$ en ese caso–

$$|b_n - a| < \varepsilon$$

Análogamente, si tomamos $n \geqslant n_0$ y *n impar* resulta –ahora $a_n = c_n$–

$$|c_n - a| < \varepsilon$$

Dado que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, esto nos dice que las sucesiones (b_{2m}) y (c_{2m+1}) también convergen a a.

Este hecho y el resultado anterior nos permiten afirmar que

$$a_n \longrightarrow a \qquad \Longleftrightarrow \qquad b_{2n} \longrightarrow a \quad \text{y} \quad c_{2n+1} \longrightarrow a$$

En consecuencia, si alguna de las sucesiones (b_{2n}) o (c_{2n+1}) no tiene límite o bien convergen a límites distintos se puede asegurar que (a_n) no tendrá límite.

2. ***Calcular los límites de las sucesiones siguientes***

   a) $\boldsymbol{\sqrt[n]{n^2 + n + 7}}$

Usando uno de los resultados, para calcular este límite nos alcazaría ver que esta sucesión esta *encerrada* entre dos sucesiones que convergen al mismo límte. Intentemos encontrarlas. Tenemos

$$n^2 \leqslant n^2 + n + 7 \leqslant n^2 + n^2 + n^2 \leqslant 3n^2$$

siempre que $n \geqslant 3$. Por lo tanto,

$$\sqrt[n]{n^2} \leqslant \sqrt[n]{n^2 + n + 7} \leqslant \sqrt[n]{3n^2}$$

para $n \geqslant 3$.

Calculemos el límite de las sucesiones de los extremos de estas desigualdades. Para ello nos servirá recordar que

$$\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1 \qquad \text{y} \qquad \sqrt[n]{a} \longrightarrow 1 \;\; (\text{si } a > 0)$$

y también que un producto de sucesiones convergentes converge al producto de los límites, pues entonces obtenemos

$$\sqrt[n]{n^2} = (\sqrt[n]{n})^2 \longrightarrow 1^2 = 1$$

y

$$\sqrt[n]{3n^2} = \sqrt[n]{3}\,\sqrt[n]{n^2} \longrightarrow 1.1 = 1$$

En consecuencia

$$\sqrt[n]{n^2 + n + 7} \longrightarrow 1$$

b) $\dfrac{-n^3 - 3n^2 + 5n - 2}{4n^5 - 3n^4 - 2n^2 + 7}$

Analicemos numerador y denominador por separado. En este caso necesitaremos recordar que $\dfrac{1}{n^k} \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$, cualquiera sea el número natural *fijo* k. También que si la sucesión es producto de dos, una de las cuales tiende a infinito y la otra a un número real no nulo, entonces su límite es infinito.

$$-n^3 - 3n^2 + 5n - 2 = \underbrace{n^3}_{\substack{\downarrow \\ +\infty}} \underbrace{\left(-1 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2} - \frac{2}{n^3}\right)}_{\substack{\downarrow \\ -1<0}} \longrightarrow -\infty$$

Con respecto al denominador,

$$4n^5 - 3n^4 - 2n^2 + 7 = \underbrace{n^5}_{\substack{\downarrow \\ +\infty}} \underbrace{\left(4 - \frac{3}{n} - \frac{2}{n^3} + \frac{7}{n^5}\right)}_{\substack{\downarrow \\ 4>0}} \longrightarrow +\infty$$

El hecho de saber a qué tiende el numerador y el denominador —dado que ambos tienden a infinito— no ayuda a saber a qué tiende el cociente.

Pero, usando las cuentas anteriores, podemos reescribir ese cociente de forma tal que sí nos a permita calcular el límite

$$\frac{-n^3 - 3n^2 + 5n - 2}{4n^5 - 3n^4 - 2n^2 + 7} = \frac{n^3\left(-1 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2} - \frac{2}{n^3}\right)}{n^5\left(4 - \frac{3}{n} - \frac{2}{n^3} + \frac{7}{n^5}\right)} = \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \underbrace{\frac{\left(-1 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2} - \frac{2}{n^3}\right)}{\left(4 - \frac{3}{n} - \frac{2}{n^3} + \frac{7}{n^5}\right)}}_{\substack{\downarrow \\ -4}} \longrightarrow 0$$

c) $\dfrac{n!}{n^n}$

En este caso no hace falta hacer mucho cálculo para comprobar que tanto el numerador como el denominador tienden a $+\infty$, lo que no nos soluciona el problema. Reescribamos el cociente

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\,\frac{n-2}{n}\,\cdots\,\frac{2}{n}\,\frac{1}{n}$$

Todos los factores están entre 0 y 1, luego

$$0 \leqslant \frac{n!}{n^n} = \frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\,\frac{n-2}{n}\,\cdots\,\frac{2}{n}\,\frac{1}{n} \leqslant 1$$

Esto tampoco nos dice mucho sobre el límite pues los extremos no tienden a lo mismo. Pero, si separamos un factor — digamos $\frac{1}{n}$ — los demás siguen estando entre 0 y 1 y en consecuencia

$$\underbrace{0}_{\substack{\downarrow\\0}} \leqslant \frac{n!}{n^n} = \frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\,\frac{n-2}{n}\,\ldots\,\frac{2}{n}\,\frac{1}{n} \leqslant \underbrace{\frac{1}{n}}_{\substack{\downarrow\\0}}$$

Ahora sí podemos afirmar que

$$\frac{n!}{n^n} \longrightarrow 0$$

d) $\boldsymbol{\dfrac{a^n}{n!}}$ $\quad$ **($a > 0$)**

Notemos que si $0 < a \leqslant 1$, entonces

$$\frac{a^n}{n!} = \underbrace{a^n}_{\substack{\uparrow\\\text{entre 0 y 1}}}\ \underbrace{\frac{1}{n!}}_{\substack{\downarrow\\0}} \longrightarrow 0$$

En cambio, si $a > 1$, $a^n \longrightarrow \infty$; luego, en este caso vamos a tener que apelar a otros argumentos para calcular el límite.

Podemos aplicar el criterio de D'Alembert a la sucesión $a_n = \frac{a^n}{n!}$. Debemos calcular el límite de

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \longrightarrow 0 < 1$$

En consecuencia, dado que este límite es menor que 1 podemos decir que

$$\frac{a^n}{n!} \longrightarrow 0$$

e) $\boldsymbol{\sqrt[n]{3n2^n - 4n + 7}}$

Aplicamos el resultado que no asegura que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \ell \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \ell$$

supuesto que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

En nuestro caso es $a_n = 3n2^n - n^2 + 4$. Calculemos entonces el límite de ese cociente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3(n+1)2^{n+1} - (n+1)^2 + 4}{3n2^n - n^2 + 4} = \frac{(n+1)2^{n+1}\left(3 - \frac{n+1}{2^{n+1}} + \frac{4}{(n+1)2^{n+1}}\right)}{n2^n\left(3 - \frac{n}{2^n} + \frac{4}{(n)2^n}\right)}$$

Lo que se puede reescribir en la forma

$$2\,\frac{n+1}{n}\,\frac{3 - \frac{n+1}{2^{n+1}} + \frac{4}{(n+1)2^{n+1}}}{3 - \frac{n}{2^n} + \frac{4}{(n)2^n}} \longrightarrow 2$$

Luego,

$$\sqrt[n]{3n2^n - 4n + 7} \longrightarrow 2$$

3. ***Mostrar que la sucesión $a_n = \dfrac{2n}{3n+1}$ es de Cauchy.***

Dado $\varepsilon > 0$ debemos encontrar un número natural n_0 para el que sea cierta la implicación

$$\left.\begin{array}{l} n \geqslant n_0 \\ p \geqslant 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$$

Trabajemos con $|a_{n+p} - a_n|$ y veamos cuál debe ser la relación de n_0 con ε

$$\begin{aligned}
|a_{n+p} - a_n| &= \left|\frac{2(n+p)}{3(n+p)+1} - \frac{2n}{3n+1}\right| = \frac{|(2n+2p)(3n+1) - (2n)(3n+3p+1)|}{(3n+3p+1)(3n+1)} \\
&= \frac{|6n^2 + 2n + 6np + 2p - 6n^2 - 6np - 2n|}{(3n+3p+1)(3n+1)} = \frac{2p}{(3n+3p+1)(3n+1)} \\
&= \frac{2p}{3n+3p+1}\frac{1}{3n+1} \underset{0 \leqslant 2p \leqslant 3p+3n+1}{\underset{\uparrow}{\leqslant}} \frac{1}{3n+1} \\
&\leqslant \frac{1}{3n}
\end{aligned}$$

Basta entonces tomar un n_0 que verifique

$$\frac{1}{3n_0} < \varepsilon$$

o sea

$$n_0 > \frac{1}{3\varepsilon}$$

lo que es posible en virtud del principio de Arquímedes.

Hemos probado entonces que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$ y $p \geqslant 0$

$$|a_{n+p} - a_n| \leqslant \underset{\text{cuentas anteriores}}{\underset{\uparrow}{\ldots}} \leqslant \frac{1}{3n} < \frac{1}{3\frac{1}{3\varepsilon}} = \varepsilon$$

Esto muestra que la sucesión es de Cauchy.

Observación: notar que el n_0 que encontramos es independiente de p, sólo depende de ε.

4. ***Sea (a_n) una sucesión no acotada. Mostrar que tiene una subsucesión que diverge a $+\infty$ o a $-\infty$***

Que la sucesión no sea acotada implica que no existe ningún $M > 0$ que verifique

$$|a_n| \leqslant M$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto nos dice que

- ⋆ no existe $M > 0$ tal que $a_n \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$

o bien que

- ⋆ no existe $M' > 0$ tal que $a_n \geqslant -M'$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Supongamos que vale la primera, si no fuera así debería valer la otra y la demostración sería análoga.

Si consideramos, por ejemplo, $M = 1$ podemos asegurar –dado que $a_n \nleq M$ para todo n– que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_{n_1} > 1$$

Tomando ahora $M = 2$, podemos asegurar que existe $n_2 \in \mathbb{N}$ –que podemos suponer mayor que n_1– tal que

$$a_{n_2} > 2$$

Un procedimiento inductivo nos muestra que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe otro natural n_k tal que

$$n_k > n_{k-1} \quad \text{y} \quad a_{n_k} > k$$

El hecho que $n_k > n_{k-1}$ y que están definidos para todos los $k \in \mathbb{N}$ nos asegura que (a_{n_k}) es una subsucesión de (a_n). Y la desigualdad

$$a_{n_k} > k$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ implica que

$$a_{n_k} \longrightarrow +\infty$$