RESOLUCIÓN DE ALGUNOS EJERCICIOS SOBRE TEMAS DE LA PRÁCTICA 3

1. ***Sean A , B subconjuntos no vacíos de números reales tales que $A \subset B$ y B está acotado superiormente. Probar que $\sup A \leqslant \sup B$.***

En primer lugar observemos que si α es una cota superior de B, como todo elemento de A también lo es de B, entonces α es cota superior de A; i.e., A está acotado superiormente y como ambos son no vacíos podemos asegurar que existen $\sup A$ y $\sup B$.

Nos falta ver que $\sup A$ no puede superar a $\sup B$. Recordemos que $\sup B$ es —en particular— una cota superior de B, por lo cual también lo es de A. Por lo tanto, siendo el supremo la menor de las cotas superiores, necesariamente debe ser $\sup A \leqslant \sup B$.

2. ***Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente. Probar que existe una sucesión $(a_n) \subset A$ tal que $a_n \longrightarrow \inf A$.***

La idea principal es que cualquier número que sea mayor que $\inf A$ no puede ser cota inferior de A, dado que el ínfimo es la *mayor* de las cotas inferiores.

Consideramos entonces, una sucesión de números —mayores que $\inf A$— pero que se vayan acercando a $\inf A$. Por ejemplo, llamemos $x_n = \inf A + \frac{1}{n}$.

Por ser $x_n > \inf A$, sabemos que no puede ser cota inferior; por lo tanto debe haber un elemento de A que sea menor que x_n. Sea entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \in A \qquad \text{tal que} \qquad a_n < x_n = \inf A + \frac{1}{n}$$

Es claro que esta sucesión cumple todo lo pedido pues, por ser $a_n \in A$ es $\inf A \leqslant a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo cual

$$\inf A \leqslant a_n < \inf A + \frac{1}{n}$$

lo que asegura que $a_n \longrightarrow \inf A$.

3. ***Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente. Probar que si β es una cota inferior de A y existe una sucesión $(a_n) \subset A$ tal que $a_n \longrightarrow \beta$, entonces $\inf A = \beta$.***

Como β es cota inferior, sólo nos resta ver si γ es otra cota inferior entonces, $\gamma \leqslant \beta$.

Si fuera $\gamma > \beta$, como $a_n \longrightarrow \beta$, debe existir un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\gamma < a_n < \beta$$

para todo $n \geqslant n_0$. Pero esto no es posible porque β es cota inferior de A. Luego, debe ser $\gamma \leqslant \beta$ y en consecuencia podemos afirmar que

$$\beta = \inf A$$

4. ***Calcular supremo e ínfimo —si existen— de***

$$\boldsymbol{A = \left\{ \frac{3n-2}{5n+4} \Big/ n \in \mathbb{N} \right\}}$$

y probar que lo son.

❏ Escribamos la expresión $\frac{3n-2}{5n+4}$ de una manera que resulte más fácil de manejar

$$\begin{aligned} \frac{3n-2}{5n+4} &= \frac{3}{5}\,\frac{5}{3}\,\frac{3n-2}{5n+4} = \frac{3}{5}\,\frac{15n-10}{15n+12} = \frac{3}{5}\,\frac{15n+12-12-10}{15n+12} \\ &= \frac{3}{5}\left(1 - \frac{22}{15n+12}\right) \\ & \frac{3}{5} - \frac{66}{75n+60} \end{aligned}$$

Se trata entonces de buscar supremo e ínfimo de

$$A = \left\{ \frac{3}{5} - \frac{66}{75n+60} \Big/ n \in \mathbb{N} \right\}$$

❏ Veamos si este conjunto está acotado

Siendo $\frac{66}{75n+60} > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\frac{3}{5} - \frac{66}{75n+60} < \frac{3}{5}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo que nos asegura que $\frac{3}{5}$ es cota superior de A.

Por otro lado, para ver si está acotado inferiormente, notemos que la sucesión $\dfrac{66}{75n+60}$ es decreciente, por lo que $-\dfrac{66}{75n+60}$ es creciente y también lo es $\dfrac{3}{5} - \dfrac{66}{75n+60}$. En consecuencia, esta expresión toma su menor valor cuando $n = 1$ y entonces $\frac{1}{9}$ es cota inferior de A.

❏ Calculemos el supremo y el ínfimo

Notemos que $\frac{1}{9} = \frac{3.1-2}{5.1+4} \in A$. Resulta entonces que $\frac{1}{9}$ es cota inferior y está en el conjunto, es decir

$$\frac{1}{9} = \min A = \inf A$$

Con respecto al supremo, sabemos que $\frac{3}{5}$ es cota superior de A. También es claro que

$$\frac{3}{5} - \frac{66}{75n+60} \longrightarrow \frac{3}{5}$$

y como $\frac{3}{5} - \frac{66}{75n+60} \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, un resultado análogo a *3.*, nos asegura que

$$\frac{3}{5} = \sup A$$

5. ***Calcular supremo e ínfimo —si existen— de***

$$\boldsymbol{A = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; x^2 - x < 2\right\}}$$

y probar que lo son.

Comencemos por reescribir la desigualdad $x^2 - x < 2$ de forma que nos resulte más fácil trabajar con ella

$$x^2 - x < 2 \quad \iff \quad x^2 - x - 2 < 0 \quad \iff \quad (x+1)(x-2) < 0 \quad \iff \quad -1 < x < 2$$

Esto nos dice que

$$A = (-1, 2)$$

Claramente, -1 es cota inferior y 2 es cota superior. También son, respectivamente, ínfimo y supremo de A. En efecto, usando nuevamente ***3.***, basta notar que las sucesiones

$$(-1 + \tfrac{1}{n}) \subset A \qquad , \qquad (2 - \tfrac{1}{n}) \subset A$$

satisfacen

$$-1 + \frac{1}{n} \longrightarrow -1 \qquad , \qquad 2 - \frac{1}{n} \longrightarrow 2$$

6. ***Probar que si $\boldsymbol{y - x > 1}$, entonces existe $\boldsymbol{m \in \mathbb{Z}}$ tal que $\boldsymbol{y \leqslant m \leqslant x}$.***

Sabemos que

$$[x] \leqslant x < [x] + 1 \qquad , \qquad [y] \leqslant y < [y] + 1$$

Bastaría ver entonces que $[x] + 1 \leqslant [y]$. Si fuera $[x] + 1 > [y]$ sería

$$[x] \underset{y-x>1>0 \Rightarrow x<y}{\overset{}{\underset{\uparrow}{\leqslant}}} [y] < [x] + 1$$

pero siendo $[x], [y], [x] + 1 \in \mathbb{Z}$,

$$[x] = [y]$$

lo que no puede suceder pues $y - x > 1$.

7. ***Sea $x \in \mathbb{R}$. Mostrar que existen sucesiones de números racionales (r_n) y (r'_n) tales que***

$$r_n < x < r'_n \qquad y \qquad r'_n - r_n \longrightarrow 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. ¿Se puede determinar si estas sucesiones son convergentes?

❏ Construimos (r_n)

Lo hacemos por un procedimiento inductivo, a partir de la densidad de los números racionales.

Dados los números reales $x - 1$ y x, existe $r_1 \in \mathbb{Q} \ : \ x - 1 < r_1 < x$
Dados los números reales $\max\{x - \frac{1}{2}, r_1\}$ y x, existe $r_2 \in \mathbb{Q} \ : \ \max\{x - \frac{1}{2}, r_1\} < r_2 < x$
Dados los números reales $\max\{x - \frac{1}{3}, r_2\}$ y x, existe $r_3 \in \mathbb{Q} \ : \ \max\{x - \frac{1}{3}, r_2\} < r_3 < x$
$\vdots$
Dados los números reales $\max\{x - \frac{1}{n+1}, r_n\}$ y x, existe $r_{n+1} \in \mathbb{Q} \ : \ \max\{x - \frac{1}{n+1}, r_n\} < r_{n+1} < x$

De esta forma construimos una sucesión *creciente* de números racionales (r_n) que satisface

$$x - \frac{1}{n} < r_n < x$$

de donde,

$$r_n \longrightarrow x$$

❏ Construimos (r'_n)

Lo hacemos por un procedimiento inductivo, a partir de la densidad de los números racionales.

Dados los números reales x y $x + 1$, existe $r'_1 \in \mathbb{Q} \ : \ x < r'_1 < x + 1$
Dados los números reales x y $\min\{x + \frac{1}{2}, r'_1\}$, existe $r'_2 \in \mathbb{Q} \ : \ x < r'_2 < \min\{x + \frac{1}{2}, r'_1\}$
Dados los números reales x y $\min\{x + \frac{1}{3}, r'_2\}$, existe $r'_3 \in \mathbb{Q} \ : \ x < r'_3 < \min\{x + \frac{1}{3}, r'_2\}$
$\vdots$
Dados los números reales x y $\min\{x + \frac{1}{n+1}, r'_n\}$, existe $r'_{n+1} \in \mathbb{Q} \ : \ x < r'_{n+1} < \min\{x + \frac{1}{n+1}, r'_n\}$

De esta forma construimos una sucesión *decreciente* de números racionales (r'_n) que satisface

$$x < r'_n < x + \tfrac{1}{n}$$

de donde,

$$r'_n \longrightarrow x$$

Finalmente, como ambas tienden a x, es claro que $r_n - r'_n \longrightarrow 0$.

8. ***Estudiar la monotonía y acotación de la sucesión***

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{\sqrt{2}} \\ \boldsymbol{a_{n+1}} = \boldsymbol{\sqrt{2 + a_n}} \end{cases}$$

Para estudiar la monotonía debemos ver que $a_{n+1} - a_n$ tiene siempre el mismo signo,

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{2 + a_n} - a_n = \frac{2 + a_n - a_n^2}{\sqrt{2 + a_n} + a_n} = -\frac{(a_n - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}}{\sqrt{2 + a_n} + a_n} = \frac{\frac{9}{4} - (a_n - \frac{1}{2})^2}{\sqrt{2 + a_n} + a_n}$$

Analicemos esta desigualdad

$$\frac{9}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 > 0 \iff \left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{3}{2} \iff -1 < x < 2$$

❏ Acotación

Probemos por inducción que $0 < a_n < 2$.

⋆ $P(1)$ es verdadera

$$a_1 = \sqrt{2} \in (0, 2)$$

⋆ $P(n)$ verdadera $\Longrightarrow$ $P(n + 1)$ verdadera

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} > 0 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \underset{\substack{\uparrow \\ a_n < 2}}{<} \sqrt{2 + 2} = 2$$

❏ Monotonía

$$a_{n+1} - a_n = \frac{\frac{9}{4} - (a_n - \frac{1}{2})^2}{\sqrt{2 + a_n} + a_n} \underset{\substack{\uparrow \\ 0 < a_n < 2}}{>} 0$$

Luego, (a_n) es estrictamente creciente.

9. *Un ejemplo*

Consideremos una sucesión (a_n) que verifica

$$a_{3n} = \frac{n}{n+1} \longrightarrow 1$$
$$a_{3n+1} = \sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$$

Esto no garantiza que $a_n \longrightarrow 1$ ni que converja a otro valor pues, por ejemplo, podría ser

$$a_{3n+2} = \frac{n!}{2^n} \longrightarrow +\infty$$

y en tal caso no tendría límite ya que, de tenerlo, todas las subsucesiones deberían tender a ese valor.

10. *Hallar todas las subsucesiones convergentes de la sucesión $a_n = \mathrm{sen}(n\frac{\pi}{2})$*

Comencemos por notar que los valores de $\mathrm{sen}(n\frac{\pi}{2})$ dependen de la paridad de n

$$\begin{aligned} n = 2k: &\quad \mathrm{sen}(n\tfrac{\pi}{2}) = \mathrm{sen}(2k\tfrac{\pi}{2}) = \mathrm{sen}(k\pi) = 0 \\ n = 2k+1: &\quad \mathrm{sen}(n\tfrac{\pi}{2}) = \mathrm{sen}((2k+1)\tfrac{\pi}{2}) = \mathrm{sen}(\tfrac{\pi}{2} + k\pi) = \pm 1 \end{aligned}$$

En el caso en que n es impar no siempre obtenemos el mismo valor, otra vez depende de la paridad, de k en este caso

$$\begin{aligned} n = 2k+1 \text{ y } k = 2t: &\quad \mathrm{sen}(n\tfrac{\pi}{2}) = \mathrm{sen}((2k+1)\tfrac{\pi}{2}) = \mathrm{sen}((4t+1)\tfrac{\pi}{2}) \\ &\quad = \mathrm{sen}(\tfrac{\pi}{2} + 2\pi) = \mathrm{sen}(\tfrac{\pi}{2}) = 1 \\ n = 2k+1 \text{ y } k = 2t+1: &\quad \mathrm{sen}(n\tfrac{\pi}{2}) = \mathrm{sen}((2k+1)\tfrac{\pi}{2}) = \mathrm{sen}((4t+3)\tfrac{\pi}{2}) \\ &\quad = \mathrm{sen}(\tfrac{3\pi}{2} + 2\pi) = \mathrm{sen}(\tfrac{3\pi}{2}) = -1 \end{aligned}$$

Esto sugiere considerar, en lugar de la paridad de n, los posibles restos de su división por 4 y las correspondientes subsucesiones

$$\begin{aligned} a_{4k} &= \mathrm{sen}(4k\tfrac{\pi}{2}) = \mathrm{sen}(2k\pi) = 0 \quad \longrightarrow \quad 0 \\ a_{4k+1} &= \mathrm{sen}((4k+1)\tfrac{\pi}{2}) = \mathrm{sen}(2k\pi + \tfrac{\pi}{2}) = 1 \quad \longrightarrow \quad 1 \\ a_{4k+2} &= \mathrm{sen}((4k+2)\tfrac{\pi}{2}) = \mathrm{sen}((2k+1)\pi) = 0 \quad \longrightarrow \quad 0 \\ a_{4k+3} &= \mathrm{sen}((4k+3)\tfrac{\pi}{2}) = \mathrm{sen}(2k\pi + \tfrac{3\pi}{2}) = -1 \quad \longrightarrow \quad -1 \end{aligned}$$

Cualquier otra subsucesión de (a_n) tiene que ser subsucesión [1] de —como mínimo— una de éstas, con lo cual cualquier subsucesión convergente de (a_n) debe tener por límite uno de estos valores

$$-1 \quad , \quad 0 \quad , \quad 1$$

[1]cuanto menos a partir de un valor del subíndice

11. ***Hallar el límite superior e inferior de la sucesión*** $\boldsymbol{a_n = (-1)^n \left(2 + \frac{3}{n}\right)}$

Debemos encontrar todos los puntos límite de (a_n); i.e., los límites de todas las subsucesiones convergentes de esta sucesión.

Notemos que $2 + \frac{3}{n} \longrightarrow 2$. Luego, todo va a depender de la paridad de n a causa del factor $(-1)^n$. Tenemos

$$\begin{aligned} a_{2k} &= 2 + \frac{3}{2k} \quad \longrightarrow \quad 2 \\ a_{2k+1} &= -2 - \frac{3}{2k+1} \quad \longrightarrow \quad -2 \end{aligned}$$

El conjunto de puntos límite de (a_n) es entonces,

$$\mathcal{L} = \{-2, 2\}$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \limsup a_n &= \sup \mathcal{L} = 2 \\ \liminf a_n &= \inf \mathcal{L} = -2 \end{aligned}$$