

RESOLUCIÓN DE ALGUNOS EJERCICIOS SOBRE TEMAS DE LA PRÁCTICA 4

1. *Probar que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces la serie $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ también lo es y además*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^m a_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$$

Llamemos

$$A_m = \sum_{n=1}^m a_n$$

es decir, la m -ésima suma parcial de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y

$$B_k = \sum_{n=m+1}^k a_n$$

es decir, la k -ésima suma parcial de $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$. Tenemos

$$A_k = A_m + B_k$$

Entonces,

$$B_k = A_k - A_m$$

para cada $k \geq m$. Pensando a m fijo y tomando límite para $k \rightarrow \infty$, como por hipótesis (A_k) converge, resulta que (B_k) también y vale

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B_k = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k - A_m$$

o sea

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^m a_n$$

2. *Calcular la suma de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} 8 \frac{(-3)^n + 2^{2n}}{4^{3n+1}}$*

Analicemos el término general

$$\begin{aligned} 8 \frac{(-3)^n + 2^{2n}}{4^{3n+1}} &= 8 \left[\frac{(-3)^n}{4^{3n+1}} + \frac{2^{2n}}{4^{3n+1}} \right] = 8 \left[\frac{(-3)^n}{64^n \cdot 4} + \frac{4^n}{64^n \cdot 4} \right] = 2 \left[\frac{(-3)^n}{64^n} + \frac{4^n}{64^n} \right] \\ &= 2 \left(-\frac{3}{64} \right)^n + 2 \left(\frac{4}{64} \right)^n \\ &= 2 \left(-\frac{3}{64} \right)^n + 2 \left(\frac{1}{16} \right)^n \end{aligned}$$

Como $|\frac{3}{4}| = \frac{3}{4} < 1$ y $|\frac{1}{16}| = \frac{1}{16} < 1$ las series

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n \quad \text{y} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^n$$

son convergentes. En consecuencia, la serie dada también lo es y vale

$$\sum_{n=2}^{\infty} 8 \frac{(-3)^n + 2^{2n}}{4^{3n+1}} = 2 \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^n$$

Calculemos entonces estas dos series

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n - \left(-\frac{3}{4}\right)^0 - \left(-\frac{3}{4}\right)^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n - 1 + \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{1 - (-3/4)} - \frac{1}{4} = \frac{1}{7/4} - \frac{1}{4} = \frac{4}{7} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{9}{28} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^n - \left(\frac{1}{16}\right)^0 - \left(\frac{1}{16}\right)^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^n - 1 - \frac{1}{16} \\ &= \frac{1}{1 - 1/16} - \frac{17}{16} = \frac{1}{15/16} - \frac{17}{16} = \frac{16}{15} - \frac{17}{16} \\ &= \frac{1}{240} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\sum_{n=2}^{\infty} 8 \frac{(-3)^n + 2^{2n}}{4^{3n+1}} = 2 \frac{9}{28} + 2 \frac{1}{240} = \frac{9}{14} + \frac{1}{240} = \frac{127}{1680}$$

3. Analizar la convergencia y convergencia absoluta de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 - 3n + \operatorname{sen} n}{4n^5 + \cos n} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Para estudiar la convergencia absoluta de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ debemos analizar si converge $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

En el caso de la primera de ellas,

$$\left| (-1)^n \frac{n^2 - 3n + \operatorname{sen} n}{4n^5 + \cos n} \right| \underset{n \geq 3}{=} \frac{n^2 - 3n + \operatorname{sen} n}{4n^5 + \cos n} = \frac{n^2(1 - \frac{3}{n} + \frac{\operatorname{sen} n}{n^2})}{n^5(4 + \frac{\cos n}{n^5})} = \frac{1}{n^3} \frac{1 - \frac{3}{n} + \frac{\operatorname{sen} n}{n^2}}{4 + \frac{\cos n}{n^5}}$$

Esto nos sugiere usar el segundo criterio de comparación y usar la serie de término general $\frac{1}{n^3}$ para comparar con la nuestra

$$\frac{\frac{n^2 - 3n + \operatorname{sen} n}{4n^5 + \cos n}}{\frac{1}{n^3}} = \frac{1 - \frac{3}{n} + \frac{\operatorname{sen} n}{n^2}}{4 + \frac{\cos n}{n^5}} \longrightarrow \frac{1}{4} > 0$$

El criterio mencionado nos permite afirmar —dado que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ converge por ser $3 > 1$ — que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 3n + \operatorname{sen} n}{4n^5 + \cos n}$$

converge, lo que a su vez asegura que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 - 3n + \operatorname{sen} n}{4n^5 + \cos n}$$

converge absolutamente.

Con respecto a la segunda serie,

$$\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}$$

y como $\frac{1}{2} < 1$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

diverge.

En consecuencia, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ no converge absolutamente.

Nos queda por averiguar si converge. Por ser una serie alternada, podemos ver si se cumplen las condiciones del criterio de Leibniz

- $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$
- (a_n) es decreciente
- $a_n \longrightarrow 0$

Por lo consiguiente, podemos asegurar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

converge.

4. Verificar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$ es convergente y calcular su suma con error menor que 10^{-1} .

Esta serie alternada verifica las condiciones requeridas por el criterio de Leibniz, por lo tanto converge.

Para calcular una aproximación de su valor real usamos el resultado que dice que –bajo las hipótesis del criterio mencionado– se tiene

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n - \sum_{n=1}^m (-1)^{n+1} a_n \right| < a_m$$

En nuestro caso

$$a_n = \frac{1}{n^3}$$

de modo que sólo nos resta encontrar un valor de m tal que

$$a_m = \frac{1}{m^3} \leq \frac{1}{10}$$

Claramente basta tomar $m = 3$ y entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^3} \simeq \sum_{n=1}^3 (-1)^{n+1} \frac{1}{n^3} = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{27} = \frac{197}{216}$$

siendo el error cometido con esta aproximación menor que 10^{-1} .

5. Mostrar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$ diverge.

En principio, si intentamos aplicar el criterio de D'Alembert

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{e^n n!} = e \frac{(n+1)n!n^n}{(n+1)(n+1)^n n!} = e \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{e}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \\ &= \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow 1 \end{aligned}$$

donde $a_n = \frac{e^n n!}{n^n}$.

Si bien este criterio no nos permite concluir qué sucede con esta serie, si recordamos que la sucesión $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es estrictamente creciente, podemos decir que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

o sea,

$$a_{n+1} > a_n$$

y esto implica que la sucesión (a_n) es estrictamente creciente. Pero entonces, dado que los a_n son positivos, es seguro que

$$a_n \not\rightarrow 0$$

y por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$$

diverge.