RESOLUCIÓN DE ALGUNOS EJERCICIOS SOBRE TEMAS DE LA PRÁCTICA 8

1. ***Sean***

$$F_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \textbf{\textit{si}}\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textbf{\textit{si}}\ (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad , \qquad F_2(x,y) = |x| + |y|$$

$$F_3(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \textbf{\textit{si}}\ (x,y) = (0,0) \\ 0 & \textbf{\textit{si}}\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$F_4(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \textbf{\textit{si}}\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textbf{\textit{si}}\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$F_5(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \textbf{\textit{si}}\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textbf{\textit{si}}\ (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Demostrar que, en el origen,

a) F_1 ***es discontinua aunque existen las derivadas parciales.***

b) F_2 ***no admite derivadas parciales pero es continua.***

c) F_3 ***es diferenciable pero sus derivadas parciales son discontinuas.***

d) F_4 ***tiene derivadas parciales discontinuas que no están acotadas en ningún entorno del origen. Sin embargo, es diferenciable.***

e) F_5 ***es continua y tiene las derivadas parciales acotadas en un entorno de*** $(0,0)$ ***pero no es diferenciable.***

a)

➢ F_1 no es continua en el origen pues no existe el límite de F_1 cuando (x,y) tiende a $(0,0)$

➢ Calculemos las derivadas parciales en el origen

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{F_1(h,0)-F_1(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{F_1(0,k)-F_1(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0}{k} = \lim_{k\to 0} 0 = 0$$

b)

➢ F_2 es continua en el origen pues es suma de funciones continuas [1]

➢ Calculemos las derivadas parciales en el origen

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{F_2(h,0)-F_2(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h} \quad \text{no existe}$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{F_2(0,k)-F_2(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{|k|}{k} \quad \text{no existe}$$

c)

➢ Calculemos las derivadas parciales en el origen

$$\frac{\partial F_3}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{F_3(h,0)-F_3(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\operatorname{sen}(\frac{1}{|h|})}{h} = \lim_{h\to 0} h\operatorname{sen}(\frac{1}{|h|}) = 0$$
$$\frac{\partial F_3}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{F_3(0,k)-F_3(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{k^2\operatorname{sen}(\frac{1}{|k|})}{k} = \lim_{k\to 0} k\operatorname{sen}(\frac{1}{|k|}) = 0$$

➢ Veamos que es diferenciable en el origen

$$\begin{aligned}
\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{F_3(h,k)-F_3(0,0)-\nabla F_3(0,0)\cdot(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{F_3(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{(h^2+k^2)\operatorname{sen}(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}})}{\sqrt{h^2+k^2}}\\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\sqrt{h^2+k^2}\operatorname{sen}(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}})\\
&= 0
\end{aligned}$$

➢ Las derivadas parciales de F_3 son

$$\frac{\partial F_3}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x\operatorname{sen}(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
$$\frac{\partial F_3}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y\operatorname{sen}(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Y estas funciones no son continuas en el origen porque los primeros sumandos tienden a cero pero los segundos no tienen límite cuando (x,y) tiende a $(0,0)$.

[1]En realidad es continua en $\mathbb{R}^2$, no sólo en el origen

d)

➢ Calculemos las derivadas parciales en el origen

$$\frac{\partial F_4}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{F_4(h,0)-F_4(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\operatorname{sen}(\frac{1}{h^2})}{h} = \lim_{h\to 0} h\operatorname{sen}(\frac{1}{h^2}) = 0$$
$$\frac{\partial F_4}{\partial x}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{F_4(k,0)-F_4(0,0)}{h} = \lim_{k\to 0}\frac{k^2\operatorname{sen}(\frac{1}{k^2})}{k} = \lim_{k\to 0} k\operatorname{sen}(\frac{1}{k^2}) = 0$$

➢ Las derivadas parciales de F_4 son

$$\frac{\partial F_4}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x\operatorname{sen}(\frac{1}{x^2+y^2}) - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos(\frac{1}{x^2+y^2}) & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
$$\frac{\partial F_4}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y\operatorname{sen}(\frac{1}{x^2+y^2}) - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos(\frac{1}{x^2+y^2}) & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Y estas funciones no son continuas en el origen porque los primeros sumandos tienden a cero pero los segundos no tienen límite cuando (x,y) tiende a $(0,0)$.

➢ Las derivadas parciales de F_4 no están acotadas en ningún entorno del origen

Dada la simetría de la fórmula de F_4 basta analizar el caso de la derivada respecto de x. Teniendo presente que

$$\cos(2n\pi) = 0$$

definimos

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \longrightarrow 0$$

Calculemos

$$\lim \frac{\partial F_4}{\partial x}(x_n,0) = \frac{2}{\sqrt{2n\pi}}\operatorname{sen}(2n\pi) - 2\sqrt{2n\pi}\cos(2n\pi) = -2\sqrt{2n\pi} \to -\infty$$

cuando $n\to\infty$. Esto prueba que $\frac{\partial F_4}{\partial x}$ no está acotada en ningún entorno del origen.

➢ F_4 es diferenciable

$$\begin{aligned}\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{F_4(h,k)-F_4(0,0)-\nabla F_4(0,0)\cdot(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{F_4(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{(h^2+k^2)\operatorname{sen}(\frac{1}{h^2+k^2})}{\sqrt{h^2+k^2}}\\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\sqrt{h^2+k^2}\operatorname{sen}(\frac{1}{h^2+k^2})\\ &= 0\end{aligned}$$

<u>*e)*</u>

➢ F_5 es continua en el origen

Sea $(x,y) \neq (0,0)$,

$$F_5(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = x\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \pm x\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \pm x\sqrt{\frac{y^2}{x^2+y^2}}$$

Como la raíz está acotada y el otro factor –x– tiende a cero cuando $(x,y) \to (0,0)$, resulta que

$$F_5(x,y) \longrightarrow 0 = F_5(0,0)$$

cuando $(x,y) \to (0,0)$; luego, F_5 es continua en $(0,0)$.

➢ Calculemos las derivadas parciales de F_5

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_5}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{F_5(h,0)-F_5(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0 \\ \frac{\partial F_5}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k\to 0}\frac{F_5(0,k)-F_5(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0}{k} = \lim_{k\to 0} 0 = 0 \end{aligned}$$

➢ Las derivadas parciales de F_5 son

$$\frac{\partial F_5}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} = \begin{cases} \pm\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^{3/2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial F_5}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} = \begin{cases} \pm\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)^{3/2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Es claro que $\left|\frac{\partial F_5}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant 1$ y $\left|\frac{\partial F_5}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant 1$ para todo (x,y); luego, están acotadas en $\mathbb{R}^2$.

➢ F_5 no es diferenciable en $(0,0)$

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{F_5(h,k)-F_5(0,0)-\nabla F_5(0,0)\cdot(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{F_5(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{h^2+k^2} \end{aligned}$$

Sabemos que esta expresión no tiene límite cuando $(h,k) \to (0,0)$; luego, F_5 no es diferenciable en el origen.

2. ***Sea***

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \textbf{\textit{si}}\ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textbf{\textit{si}}\ \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) ***Mostrar que*** f ***es continua en*** $\mathbb{R}^2$

b) ***Calcular*** $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ ***y*** $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

c) ***Sea*** $g(t) = (t,t)$***, calcular***

(i) $(f \circ g)'(0)$

(ii) $\nabla f(0,0) \cdot g'(0)$

d) ***¿Es*** f ***diferenciable en*** $(0,0)$***?***

a)

$$|f(x,y)| = \frac{|x|y^2}{x^2+y^2} = |x| \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\leqslant 1} \leqslant |x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Esto muestra que f es continua en $(0,0)$. En el resto lo es por ser cociente de funciones continuas con denominador nunca nulo.

b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = \lim_{k\to 0} 0 = 0$$

c)

(i)

$$f \circ g(t) = f(t,t) = \frac{t^3}{2t^2} = \frac{t}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad (f \circ g)'(t) = \frac{1}{2}$$

Luego,

$$\boxed{(f \circ g)'(0) = \tfrac{1}{2}}$$

(ii)

$$\nabla f(0,0) \underset{\substack{\uparrow \\ b)}}{=} (0,0) \qquad \text{y} \qquad g'(0) = (1,1)$$

Luego,

$$\boxed{\nabla f(0,0) \cdot g'(0) = (0,0) \cdot (1,1) = 0}$$

d)

Si f fuera diferenciable en $(0,0)$, debería ser

$$\frac{1}{2} = (f \circ g)'(0) = df(0,0)(g'(0)) = \nabla f(0,0) \circ g'(0) = 0$$

Luego, f no es diferenciable en $(0,0)$.

3. ***Hallar la matriz asociada a la forma cuadrática*** $\phi(x,y) = -6xy + y^2$

Debemos tener en cuenta que el coeficiente de xy se forma a partir de dos sumandos con el mismo coeficiente, de modo que la matriz de ϕ es

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobémoslo

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3y & -3x + y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= -3yx + (-3x + y)y = -3xy - 3xy + y^2 = -2.3xy + y^2 = -6xy + y^2 \\ &= \phi(x,y) \end{aligned}$$

4. Sea

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & \textbf{\textit{si}} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \textbf{\textit{si}} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ ***y*** $\frac{\partial f}{\partial y}$

b) comprobar que $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=-1$ ***y*** $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=1$

c) ¿contradice esto un resultado conocido?

a)

- En $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=\lim_{h\to0}0=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{0-0}{k}=\lim_{k\to0}0=0$$

- En $(x,y)\neq(0,0)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=\frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)2x}{(x^2+y^2)^2}\\&=\frac{3x^4y+3x^2y^3-x^2y^3-y^5-2x^4y+2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}\\&=\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{xy^4+4x^3y^2-x^5}{(x^2+y^2)^2}$$

En resumen,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}-\frac{xy^4+4x^3y^2-x^5}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

b)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,k)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{-\frac{k^5}{k^4}}{k}=\lim_{k\to0}-\frac{k^5}{k^5}=-1$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-\frac{-h^5}{h^4}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^5}{h^5}=1$$

c)

El hecho que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ no contradice ningún resultado conocido sobre la conmutatividad de las derivadas segundas mixtas dado que f no es de clase C^2 en $(0,0)$.

5. ***Sean*** $F(x, y, z) = z - e^x \operatorname{sen} y$ ***y*** $P = (\ln 3, \frac{3\pi}{2}, -3)$***. Hallar***

a) $\nabla F(P)$

b) la recta normal a la superficie de nivel de F ***que pasa por*** P

c) el plano tangente a dicha superficie en P

d) los valores máximo y mínimo de las derivadas direccionales en P

a)

Calculemos el gradiente de F,

$$\nabla F(x, y, z) = (-e^x \operatorname{sen} y, -e^x \cos y, 1)$$

En P,

$$\nabla F(P) = (-e^{\ln 3} \operatorname{sen}(\tfrac{3\pi}{2}), -e^{\ln 3} \cos(\tfrac{3\pi}{2}), 1) = (3, 0, 1)$$

b)

Cualquier superficie de nivel de F es de la forma: $F(x, y, z) = c$. Como $P = (\ln 3, \frac{3\pi}{2}, -3)$ debe estar en ella

$$c = F(P) = F(\ln 3, \tfrac{3\pi}{2}, -3) = -3 - e^{\ln 3} \operatorname{sen}(\tfrac{3\pi}{2}) = -3 - 3(-1) = 0$$

Es decir, la superficie de nivel que pasa por P es

$$S : F(x, y, z) = 0$$

La recta normal tiene la dirección del gradiente en P; luego,

$$L = \{P + t\nabla F(P) \ / \ t \in \mathbb{R}\}$$

Es decir,

$$L = \{(\ln 3, \tfrac{3\pi}{2}, -3) + t(3, 0, 1) \ / \ t \in \mathbb{R}\}$$

c)

El plano tangente en P está dado por la ecuación

$$\nabla F(P) \cdot ((x, y, z) - P) = 0$$

En este caso se escribe,

$$(3, 0, 1) \cdot (x - \ln 3, y - \tfrac{3\pi}{2}, z + 3) = 0$$

o sea, la ecuación del plano tangente es

$$3x + z = 3 \ln 3 - 3$$

d)

El máximo valor de la derivada direccional corresponde a la dirección del gradiente, es decir

$$\frac{\nabla F(P)}{\|\nabla F(P)\|}$$

y el mínimo valor a la misma dirección con sentido opuesto,

$$-\frac{\nabla F(P)}{\|\nabla F(P)\|}$$

Siendo F diferenciable en P, estos valores son

$$\text{VALOR MÁXIMO} = f'_{\frac{\nabla F(P)}{\|\nabla F(P)\|}}(P) = \nabla F(P) \cdot \frac{\nabla F(P)}{\|\nabla F(P)\|} = \|\nabla F(P)\| = \sqrt{10}$$
$$\text{VALOR MÍNIMO} = f'_{-\frac{\nabla F(P)}{\|\nabla F(P)\|}}(P) = \nabla F(P) \cdot \frac{-\nabla F(P)}{\|\nabla F(P)\|} = -\|\nabla F(P)\| = -\sqrt{10}$$

6. ***Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática definida positiva.***

   a) Sabiendo que $f_1 : B(\mathbf{0}, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface $f_1(x, y) = \phi(\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$, ¿se puede saber qué signo tiene $f_1(x, y)$? ¿Cuánto vale $f_1(0, 0)$?

   b) Sabiendo que $f_2 : B(\boldsymbol{x}_0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface $f_2(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = \phi(\varepsilon h_1, \varepsilon h_2) \qquad (0 < \varepsilon < 1)$, ¿se puede saber qué signo tiene $f_2(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h})$? ¿Cuánto vale $f_2(\boldsymbol{x}_0)$?

   c) Sabiendo que $f_3 : B(\boldsymbol{x}_0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface $f_3(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}) = f_3(\boldsymbol{x}_0)+\phi(\varepsilon h_1, \varepsilon h_2) \quad (0 < \varepsilon < 1)$, ¿se puede determinar qué relación (de orden) hay entre $f_2(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})$ y $f_2(\boldsymbol{x}_0)$? Interpretar gráficamente.

   Analizar estos casos cuando ϕ es definida negativa.

<u>a)</u>

Como $\phi(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$f_1(x, y) \geqslant 0 \quad \text{y} \quad f_1(x, y) = 0 \quad \text{solamente en } (0, 0)$$

Además, $f_1(0, 0) = \phi(0, 0) = 0$ por ser ϕ una forma cuadrática. Luego,

$$f_1(x, y) > f_1(0, 0) = 0$$

para todo $(x, y) \in B(\mathbf{0}, 1) - \{(0, 0)\}$

<u>b)</u>

Tenemos

$$f_2(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = \phi(\varepsilon h_1, \varepsilon h_2) = \varepsilon^2\phi(\mathbf{h}) > 0$$

para todo $0 < ||\mathbf{h}|| < 1$. Además,

$$f_2(\mathbf{x}_0) = \phi(\varepsilon\mathbf{0}) = 0$$

Luego,

$$f_2(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) > f_2(\mathbf{0}) = 0$$

para todo $0 < ||\mathbf{h}|| < 1$.

<u>c)</u>

En este caso tenemos

$$f_3(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f_3(\mathbf{x}_0) = \phi(\varepsilon h_1, \varepsilon h_2) = \varepsilon^2\phi(\mathbf{h}) > 0$$

para todo $0 < ||\mathbf{h}|| < 1$.

Es decir,

$$f_3(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) > f_3(\mathbf{x}_0)$$

para todo $0 < ||\mathbf{h}|| < 1$.

Esto nos dice que f_2 y f_3 tienen un mínimo local estricto en el punto $\mathbf{x}_0$.

En el caso *a)* podemos decir que f_1 tiene un mínimo local estricto en el origen que vale cero.

Si la forma cuadrática fuera definida negativa obtendríamos los mismos resultados reemplazando únicamente *mínimo* por *máximo*.

7. ***Sean*** $g(x, y) = (x^2 + \operatorname{sen} y, xy)$ ***y*** $f(u, v, w) = (u + v, we^u)$***. Se define***

$$h(u, v, w) = g \circ f(u, v, w)$$

a) calcular $h_1(u, v, w)$

b) hallar $\dfrac{\partial h_1}{\partial u}(u, v, w)$ ***usando***

(i) la fórmula hallada en a)

(ii) la regla de la cadena

a)

La función h tiene dos componentes

$$h(u, v, w) = g \circ f(u, v, w) = (g_1(f(u, v, w), g_2(f(u, v, w))))$$

Luego,

$$h_1(u, v, w) = g_1(f(u, v, w)) = g_1(u + v, we^u) = (u + v)^2 + \operatorname{sen}(we^u)$$

b)

(i)

$$\frac{\partial h_1}{\partial u}(u, v, w) = \frac{\partial}{\partial u}\Big((u + v)^2 + \operatorname{sen}(we^u)\Big) = 2(u + v) + we^u \cos(we^u)$$

(ii)

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_1}{\partial u}(u, v, w) &= \frac{\partial g_1}{\partial x}(f(u, v, w))\frac{\partial f_1}{\partial u}(u, v, w) + \frac{\partial g_1}{\partial y}(f(u, v, w))\frac{\partial f_2}{\partial u}(u, v, w)\\ &= 2(u + v).1 + \cos(we^u).we^u\end{aligned}$$

8. ***a) Enunciar el Teorema del Valor Medio***

b) Mostrar que

$$|\operatorname{sen}(xy)| \leqslant x^2 + y^2$$

<u>a)</u>

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$ tales que el ***segmento*** que los une $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{(1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} \ / \ 0 \leqslant t \leqslant 1\} \subset U$. Entonces, existe $\mathbf{c} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ tal que

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = df(\mathbf{c})(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

<u>b)</u>

Consideremos la función de clase C^1

$$f(x, y) = \operatorname{sen}(xy)$$

Usando el resultado anterior

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = |\nabla f(x_0, y_0) \cdot ((x, y) - (0, 0))| \leqslant ||\nabla f(x_0, y_0)|| \, ||(x, y)||$$

donde (x_0, y_0) es un punto del segmento que une (x, y) con $(0, 0)$; i.e., $(x_0, y_0) = t_0(x, y)$ con $0 \leqslant t_0 \leqslant 1$.

Tenemos

$$\nabla f(x_0, y_0) = (y \cos(xy), x \cos(xy))$$

con lo cual

$$||\nabla f(x_0, y_0)|| = \left(y_0^2 \cos^2(x_0 y_0) + x_0^2 \cos^2(x_0 y_0)\right)^{1/2} = |\cos(x_0 y_0)| \, ||(x_0, y_0)||$$

Pero $(x_0, y_0) = t_0(x, y)$ –con $0 \leqslant t_0 \leqslant 1$– por lo tanto

$$||(x_0, y_0)|| = t_0 ||(x, y)|| \leqslant ||(x, y)||$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |\operatorname{sen}(xy)| = |f(x, y) - f(0, 0)| &\leqslant ||\nabla f(x_0, y_0)|| \, ||(x, y)|| \\ &= |\cos(x_0 y_0)| \, ||(x_0, y_0)|| \, ||(x, y)|| \\ &\leqslant ||(x_0, y_0)|| \, ||(x, y)|| \\ &\leqslant ||(x, y)||^2 \\ &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

9. ***Hallar la matriz Hessiana de la forma cuadrática*** $\phi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$

Calculemos primero su gradiente

$$\nabla\phi(x, y) = (2ax + 2by, 2bx + 2cy)$$

De modo que

$$MH\phi(x, y) = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2c \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

10. ***Sea*** $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ***dada por*** $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$***. Probar que*** $J(f)(x, y) \neq 0$ ***para todo*** (x, y) ***pero que f no es inyectiva.***

Calculemos el jacobiano de **f**

$$J(\mathbf{f})(x, y) = \det\begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \operatorname{sen} y \\ e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{pmatrix} = e^{2x} \cos^2 y - (-e^{2x}\operatorname{sen}^2 y) = e^{2x} \neq 0$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Sin embargo, **f** no es inyectiva dado que

$$\mathbf{f}(x, y + 2k\pi) = \mathbf{f}(x, y)$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y todo $k \in \mathbb{Z}$, en virtud de la periodicidad de sen y cos.

11. Sea $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ***de clase*** C^3 ***tal que***

$$\psi(t) = 2 - 2t + 4t^2 + R_2(t)$$

con $\lim_{t \to 0} \frac{R_2(t)}{t^2} = 0$***. Hallar el polinomio de Taylor de orden*** 2 ***de*** $f(x,y) = \psi(2x+3y)$ ***en*** $(0,0)$***.***

Como $\psi(t) = 2 - 2t + 4t^2 + R_2(t)$ y $\frac{R_2(t)}{t^2} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$ quiere decir que el polinomio de Taylor de ψ alrededor de 0 es

$$P(t) = 2 - 2t + 4t^2$$

Luego,

$$\psi(0) = 2 \quad , \quad \psi'(0) = -2 \quad , \quad \psi''(0) = 4.2!$$

Siendo $R_2(0) = 0$, podemos escribir

$$\frac{R_2(2x+3y)}{x^2+y^2} = \begin{cases} \dfrac{R_2(2x+3y)}{(2x+3y)^2} \, \dfrac{(2x+3y)^2}{x^2+y^2} & \text{si } \; 2x+3y \neq 0 \\ 0 & \text{si } \; 2x+3y = 0 \end{cases}$$

El hecho que $\lim_{t \to 0} \frac{R_2(t)}{t^2} = 0$ nos asegura que

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{R_2(2x+3y)}{(2x+3y)^2} = 0$$

Con respecto al otro cociente,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \frac{(2x+3y)^2}{x^2+y^2} &= \frac{4x^2+9y^2+12xy}{x^2+y^2} = \frac{|4x^2+9y^2+12xy|}{x^2+y^2} \\ &\leqslant \frac{4x^2+9y^2+12|x|\,|y|}{x^2+y^2} = 4\frac{x^2}{x^2+y^2} + 9\frac{y^2}{x^2+y^2} + 6\frac{2|x|\,|y|}{x^2+y^2} \\ &\leqslant 19 \end{aligned}$$

es decir, está acotado. Por lo tanto,

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{R_2(2x+3y)}{x^2+y^2} = 0$$

Y en consecuencia, como

$$f(x,y) = \psi(2x+3y) = 2 - 2(2x+3y) + 4(2x+3y)^2 + R_2(2x+3y)$$

tenemos que el polinomio de grado 2

$$P(x,y) = 2 - 2(2x+3y) + 4(2x+3y)^2 = f(x,y) - R_2(x,y)$$

es el polinomio de Taylor de f alrededor de $(0,0)$.

12. ***Sea la superficie en*** $\mathbb{R}^3$

$$S\ :\ x\ln y - \operatorname{sen} z + xy^2 = 1$$

a) ***hallar el plano tangente a*** S ***en*** $P = (2, 1, \frac{\pi}{2})$

b) ***demostrar que existe una función*** $\varphi(x, z)$ ***definida en un entorno de*** $(2, \frac{\pi}{2})$ ***tal que su gráfico está contenido en la superficie*** S

c) ***hallar la ecuación del plano tangente al gráfico de*** φ ***en*** $(2, \frac{\pi}{2})$

Sea $F(x, y, z) = x\ln y - \operatorname{sen} z + xy^2 - 1$. De esta forma,

$$S\ :\ F(x, y, z) = 0$$

En primer lugar verifiquemos que $P \in S$: $F(2, 1, \frac{\pi}{2}) = 2\ln 1 - \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) + 2.1 - 1 = 0$.

<u>*a)*</u>

$$\nabla F(x, y, z) = (\ln y + y^2, \tfrac{x}{y} + 2xy, -\cos z)$$

En P,

$$\nabla F(P) = (1, 6, 0)$$

Luego, la ecuación del plano tangente a S en P es

$$(1, 6, 0) \cdot (x - 2, y - 1, z - \tfrac{\pi}{2}) = 0$$

O sea,

$$\boxed{x + 6y = 8}$$

<u>*b)*</u>

Como F es C^1 y $\frac{\partial F}{\partial y}(2, 1, \frac{\pi}{2}) = 6 \neq 0$ el teorema de la función implícita nos asegura que existe $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1, $U \subset \mathbb{R}^2$ entorno de $(2, \frac{\pi}{2})$, tal que

$$F(x, \varphi(x, z), z) = 0$$

para $(x, z) \in U$, lo que dice que $\text{gráf}(\varphi) = \{(x, \varphi(x, z), z)\ /\ (x, z) \in U\} \subset S$.

<u>*c)*</u>

El plano tangente al gráfico de φ en $(2, \frac{\pi}{2})$ tiene ecuación

$$y = \varphi(2, \tfrac{\pi}{2}) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(2, \tfrac{\pi}{2})(x - 2) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(2, \tfrac{\pi}{2})(z - \tfrac{\pi}{2})$$

Recordando que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(2,\tfrac{\pi}{2}) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(2,1,\frac{\pi}{2})}{\frac{\partial F}{\partial y}(2,1,\frac{\pi}{2})} = -\frac{1}{6} \qquad , \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z}(2,\tfrac{\pi}{2}) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}(2,1,\frac{\pi}{2})}{\frac{\partial F}{\partial y}(2,1,\frac{\pi}{2})} = -\frac{0}{6} = 0$$

Esa ecuación se escribe

$$x + 6y = 8$$

i.e., la misma que obtuvimos antes, como era de esperar.

13. ***Sea*** $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ***dada por*** $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$**.**

a) ***Probar que*** $(0, 0)$ ***es un punto crítico pero no extremo***

b) ***Probar que*** $\pm\sqrt{2}(1, -1)$ ***son mínimos absolutos estrictos***

c) ***¿Hay máximos absolutos?***

Comencemos por calcular el gradiente de f

$$\nabla f(x, y) = (4x^3 - 4(x - y), 4y^3 + 4(x - y)) = 4(x^3 - x + y, y^3 - y + x)$$

Siendo la función diferenciable en todo punto, los únicos puntos donde puede haber extremos son los puntos críticos; es decir, las soluciones de

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 - y + x = 0 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones llegamos a que debe ser

$$x^3 = -y^3$$

o sea

$$y = -x$$

Reemplanzando en la primera ecuación llegamos a que

$$x^3 - 2x = 0$$

de donde

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x^2 = 2$$

lo que implica –recordando que debe ser $y = -x$– que las soluciones son

$$(0, 0) \quad , \quad (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \quad , \quad (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

Otras cálculos que nos conviene tener hechos corresponden a las derivadas segundas de f

$$MHf(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 1 & 1 \\ 1 & 3y^2 - 1 \end{pmatrix}$$

<u>*a)*</u>

Si calculamos la matriz Hessiana de f en $(0, 0)$

$$MHf(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es $(-1)(-1) - 1.1 = 0$. El criterio no decide en este caso; de modo entonces que vamos a tener que intentar otro camino.

Notemos que si nos acercamos al origen por la recta $(x, 0)$, el eje x, el incremento de la función toma valores

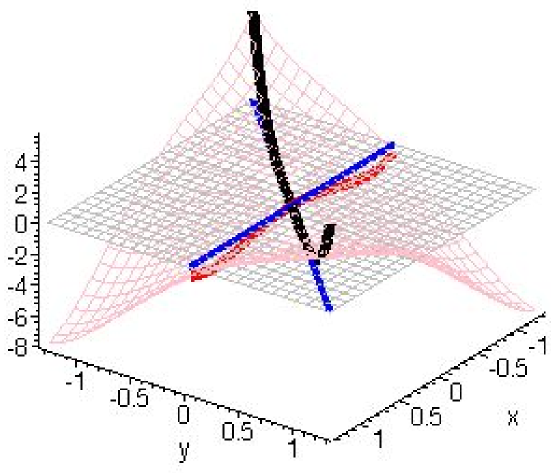
$$f(x,0) - f(0,0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$$

que son negativos cuando $|x| < \sqrt{2}$; mientras que si nos acercamos por la recta (x, x), el incremento de la función vale

$$f(x,x) - f(0,0) = 2x^4$$

que claramente es positivo. Esto nos asegura que —en todo entorno del $(0, 0)$— el incremento de la función cambia de signo y en consecuencia en $(0, 0)$ hay un punto de ensilladura.

El siguiente gráfico ilustra el comportamiento de f cerca del origen. Las rectas azules son las que tomamos en el dominio de f para acercarnos al origen, la curva roja es la imagen del eje x y la curva negra la imagen de (x, x). El plano es $z = 0$, es decir, el domino de f.



<u>b)</u>

Sabemos que $\pm\sqrt{2}(1, -1)$ son puntos críticos, analicemos la matriz Hessiana para ver si podemos decidir si son extremos

$$MHf(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad MHf(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

ambos determinantes valen $24 > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\pm\sqrt{2}(1, -1)) = 5 > 0$. Esto nos asegura que en ambos puntos la función toma valores mínimos locales.

Pero nos piden probar que son mínimos absolutos y esto no lo garantiza el criterio. Comencemos por calcular $f(\pm\sqrt{2}(1, -1)) = -8$; de modo entonces que deberemos probar que

$$f(x,y) > f(\pm\sqrt{2}(1,-1)) = -8$$

siempre que $(x,y) \neq \pm\sqrt{2}(1,-1)$.

En principio,

$$f(x,y) - f(\pm\sqrt{2}(1,-1)) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 + 8 = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy + 8$$

pero teniendo en cuenta que

$$x^4 - 2x^2 = (x^2-2)^2 + 2x^2 - 4 \quad , \quad y^4 - 2y^2 = (y^2-2)^2 + 2y^2 - 4$$

resulta que

$$f(x,y)-f(\pm\sqrt{2}(1,-1)) = (x^2-2)^2+(y^2-2)^2+2(x^2+y^2+2xy) = (x^2-2)^2+(y^2-2)^2+2(x+y)^2 \geqslant 0$$

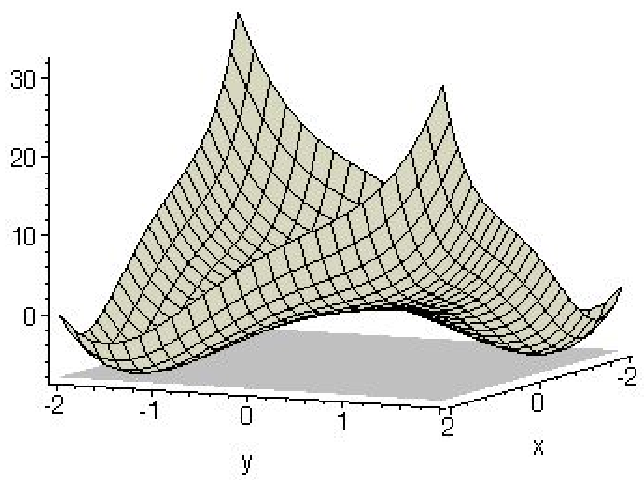
para todo (x,y) y únicamente vale 0 cuando

$$|x| = \sqrt{2} \quad , \quad |y| = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad y = -x$$

o sea, en los puntos $\pm\sqrt{2}(1,-1)$.

De esta forma queda probado que en estos puntos f toma mínimos absolutos.

El siguiente gráfico ilustra esta situación



c)

El gráfico anterior puede hacernos sospechar que f toma valores infinitamente grandes. Eso lo podemos comprobar analizando cómo se comporta f sobre la recta (x, x)

$$f(x, x) = 2x^4$$

se ve que f tiende a $+\infty$ cuando $x \to \infty$.

De modo que f no tiene máximos absolutos.

14. ***La función —diferencialble en todo el plano—***

$$f(x,y) = -y^4 - e^{-x^2} + 2y^2\sqrt{e^x + e^{-x^2}}$$

tiene un único punto crítico que es mínimo local pero no absoluto.

Hallemos los puntos críticos de f, es decir, las soluciones de

$$\nabla f(x,y) = \left(2xe^{-x^2} + y^2\frac{1}{\sqrt{e^x + e^{-x^2}}}(e^x - 2xe^{-x^2}), -4y^3 + 4y\sqrt{e^x + e^{-x^2}}\right) = (0,0)$$

o sea

$$\begin{cases} 2xe^{-x^2} + y^2\frac{1}{\sqrt{e^x+e^{-x^2}}}(e^x - 2xe^{-x^2}) = 0 \\ y(y^2 - \sqrt{e^x + e^{-x^2}}) = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación se deduce que

$$y = 0 \quad \text{o} \quad y^2 = \sqrt{e^x + e^{-x^2}}$$

Si $y = 0$, la primera ecuación nos dice que debe ser $x = 0$; obtenemos así que $(0,0)$ es punto crítico de f.

Si $y^2 = \sqrt{e^x + e^{-x^2}}$, entonces la primera ecuación se escribe

$$2xe^{-x^2} + e^x - 2xe^{x^2} = 0$$

es decir,

$$e^x = 0$$

concluimos que esta situación no se puede dar y por lo tanto el único punto crítico de f es el origen. Notemos además que f no puede tener extremos en otros puntos dado que es diferenciable en todo el plano.

Analicemos si hay extremo en el origen. Para ello necesitamos las derivadas segundas de f

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2} \\ &\quad + y^2(-\tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x^2})^{-3/2})(e^x - 2xe^{-x^2})^2 + (e^x + e^{-x^2})^{-1/2}(e^x - 2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = 2y\frac{1}{\sqrt{e^x + e^{-x^2}}}(e^x - 2xe^{x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -12y^2 + 4\sqrt{e^x + e^{-x^2}} \end{aligned}$$

y entonces,

$$MHf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 4\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

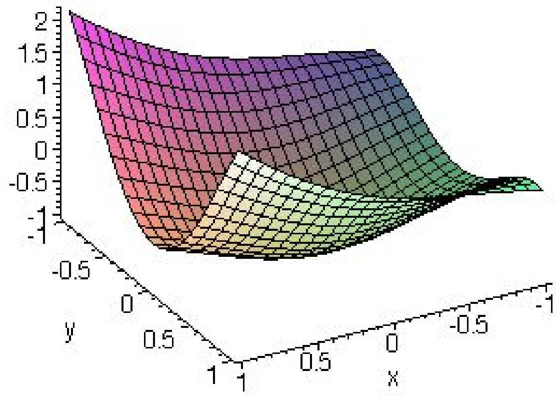
su determinante es $4(2\sqrt{2} - 1) > 0$ y como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$ resulta que f tiene en $(0,0)$ un mínimo local que vale -1.

Para ver que no es absoluto basta notar que

$$f(0,y) = -y^4 + 2\sqrt{2}y^2 - 1 = -y^2(y^2 - 2\sqrt{2}) - 1 \longrightarrow -\infty$$

cuando $y \to \infty$.

El siguiente gráfico ilustra el comportamiento de esta función



*15. **Analizar la existencia de extremos locales y absolutos de la función***

$$f(x,y) = -4y^4 + 8x^2y^2 - \frac{1}{32}x^2 + 3$$

Esta función, por ser diferenciable en todo punto, sólo puede tener extremos en sus puntos críticos. Calculemos entonces la solución de

$$\nabla f(x,y) = (16xy^2 - \tfrac{1}{16}x, -16y^3 + 16x^2y) = (0,0)$$

o sea,

$$\begin{cases} x(256y^2 - 1) = 0 \\ y(x^2 - y^2) = 0 \end{cases}$$

Las soluciones son

$$(0,0) \quad , \quad (\tfrac{1}{16}, \tfrac{1}{16}) \quad , \quad (-\tfrac{1}{16}, \tfrac{1}{16}) \quad , \quad (\tfrac{1}{16}, -\tfrac{1}{16}) \quad , \quad (-\tfrac{1}{16}, -\tfrac{1}{16})$$

Para analizar si son o no extremos vamos a calcular la matriz Hessiana de f

$$MHf(x,y) = \begin{pmatrix} 16y^2 - \frac{1}{16} & 32xy \\ 32xy & 16x^2 - 48y^2 \end{pmatrix}$$

En cada uno de los puntos críticos,

$$MHf(0,0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad MHf(\pm\tfrac{1}{16}, \pm\tfrac{1}{16}) = \begin{pmatrix} 0 & \pm\frac{1}{8} \\ \pm\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Deducimos de aquí que –respecto del origen– el criterio no decide pero respecto de los demás puntos críticos podemos decir que son puntos de ensilladura dado que el determinante de la matriz Hessiana es negativo.

Analicemos qué sucede en el origen. El incremento de la función en el origen es

$$f(x,y) - f(0,0) = -4y^2 + 8x^2(y^2 - \tfrac{1}{256})$$

que es negativo si $\|(x,y)\| = \|(x,y) - (0,0)\| < \frac{1}{16}$.

En consecuencia, encontramos un entorno del origen donde

$$f(x,y) \leqslant f(0,0) = 3$$

Esto nos asegura que f tiene un máximo local en el origen.

Con respecto a los extremos absolutos, consideremos la imágenes por f de $(0,y)$ y (x,x)

$$f(0,y) = -4y^4 + 3 \longrightarrow -\infty \qquad \text{cuando} \quad y \to \infty$$

$$f(x,x) = 4x^4 - \frac{1}{32}x^2 + 3 \longrightarrow +\infty \qquad \text{cuando} \quad x \to \infty$$

De modo que f no tiene extremos absolutos. El siguiente gráfico ilustra el comportamiento de esta función