Aproximación por Polinomios

(Polinomio de Taylor)

María del Carmen Calvo

Entre todas las funciones reales de una variable real, los polinomios figuran entre las que nos ocasionan menos inconvenientes a la hora de estudiarlas. Como sólo involucran operaciones de suma y producto, no resulta complicado evaluarlas en cualquier número racional.

Esto no ocurre, por ejemplo, con $f(x) = e^x$; incluso para el número natural $x = 1$ es imposible escribir *todas* las cifras decimales de $f(1) = e$. Por eso, cuando necesitamos tener al menos una idea de la *magnitud* del verdadero valor de $f(1)$ buscamos una aproximación. Para esto resultan muy útiles los polinomios.

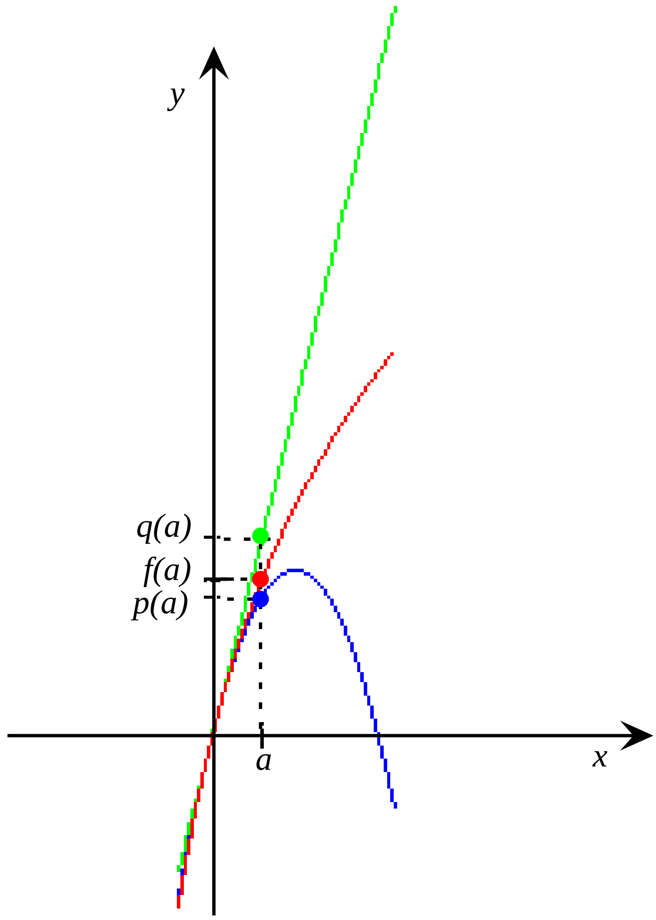
En este trabajo nos ocuparemos de ver cómo nos ayudan para aproximar, principalmente, funciones que toman valores no racionales.

I. *Introducción*

La siguiente figura muestra el gráfico de tres funciones: f , p y q.

Supongamos que necesitamos calcular el valor de $f(a)$ que resulta ser un número irracional. Si supiéramos que los valores $p(a)$ y $q(a)$ son fáciles de hallar podríamos utilizarlos como una aproximación al verdadero valor $f(a)$.

En tal caso, ¿cuál de ellos nos daría una mejor aproximación? Es decir, cuál deberíamos elegir para lograr que al reemplazar el valor exacto —$f(a)$— por una aproximación —$p(a)$ o $q(a)$— el error que cometemos resulte lo más chico posible?



Mirando la figura es claro que $p(a)$ es el que está más cerca de $f(a)$. Por lo tanto, podríamos decir que

$$f(a) \simeq p(a)$$

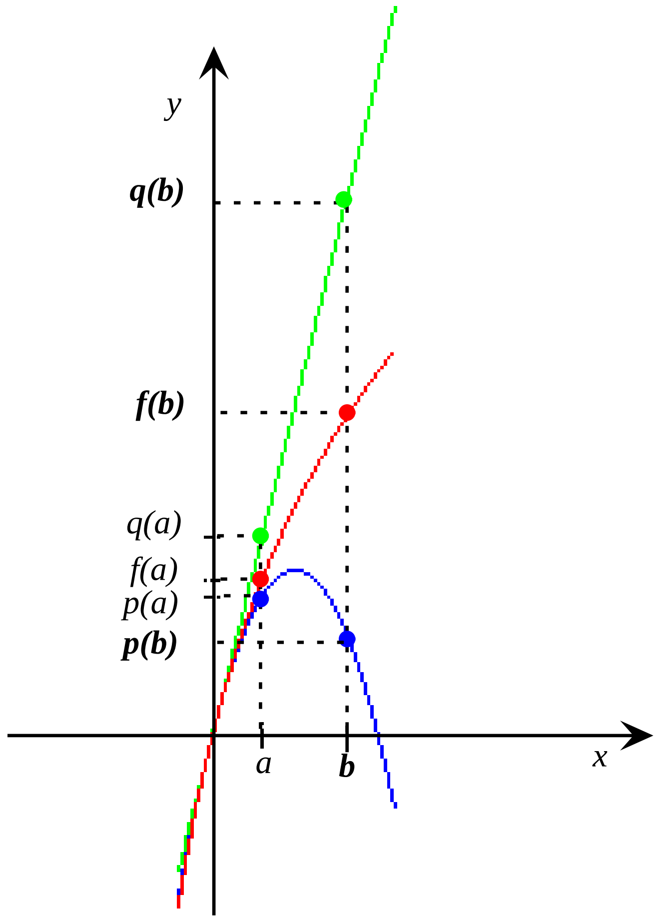
y de esta forma cometeríamos un error menor que si hubiésemos elegido $q(a)$.

En este sentido parece razonable decir que la función p *aproxima mejor* a f en a que la función q.

Además, mirando el gráfico, uno se siente tentado a decir que este error no es realmente grande. Lógicamente, habría que precisar qué entendemos por *grande* o *chico*; esto siempre va a depender de la precisión con la que necesitemos trabajar.

Cabe preguntarse ahora si seguirá siendo p quien mejor aproxima a f si, en vez de trabajar alrededor del punto a, lo hacemos alrededor de otro punto b.

La siguiente figura es la misma que la anterior con el agregado del punto b y sus respectivos valores para cada una de las funciones,



No es necesario pensarlo mucho para responder. De la misma manera que antes pudimos haber pensado que $p(a)$ está *muy cerca* de $f(a)$, ahora deberíamos decir que eso ya no ocurre en b.

Sacamos como conclusión, a partir de este ejemplo, que una función puede ser una buena aproximación de otra alrededor de un punto y dejar de serlo alrededor de otro.

En las siguientes secciones encararemos la tarea de ver cómo encontrar, para una función f dada y un punto a en su dominio, una función p que esté en la situación del caso anterior.

II. *Polinomio de Taylor de orden* 1

Sea $f : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable. Nos proponemos encontrar un polinomio de grado menor o igual que 1 que cumpla el papel de p alrededor de $a = 0$, pensando en la notación utilizada en la introducción.

Tal vez sea conveniente aclarar qué significa *encontrar* p. En principio, por ser p un polinomio, encontrar p es simplemente encontrar sus coeficientes. De lo que se trata entonces es de ver qué relación tienen esos coeficientes con la función f a la que p debe aproximar.

Dado que el grado tiene que ser menor o igual que 1, podemos escribirlo en la forma

$$p(t) = at + b$$

Se trata entonces de ver cómo se relacionan a y b con f. En principio, como queremos que p *esté cerca* de f alrededor de $t = 0$, es necesario [1] que

$$p(0) = f(0)$$

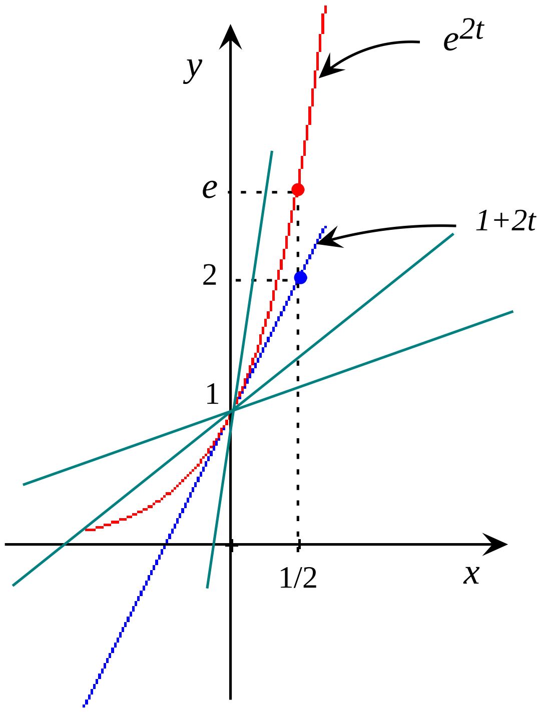
Luego,

$$b = f(0)$$

Ya avanzamos un poco,

$$p(t) = at + f(0)$$

Miremos el siguiente gráfico,



Todas las rectas pasan por el punto $(0, 1)$; es decir, coinciden con f en $t = 0$. De modo que no mentimos si decimos que cuando $|t|$ es chico, sus valores aproximan el valor de f. Pero este gráfico también muestra que la recta de pendiente 2 es la que está *mucho más cerca* de f que las demás.

Esto sugiere que la condición

$$\lim_{t \to 0} f(t) - p(t) = 0$$

no alcanza para conseguir la recta (i.e., el polinomio de grado 1) que mejor aproxima a f en $t = 0$ pues esa condición la cumplen todas las rectas, no sólo la de pendiente 2.

[1] pues tanto f como p son continuas

Vamos a pedir entonces que p cumpla algo más fuerte

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t)-p(t)}{t} = 0 \quad [2] \tag{1}$$

Recordando que el término independiente de p es $f(0)$, con lo cual

$$p(t) = f(0) + at$$

la condición (1) se escribe

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t)-f(0)-at}{t} = 0$$

o, lo que es lo mismo,

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t)-f(0)}{t} - a = 0$$

de donde obtenemos el valor de a

$$a = \lim_{t\to 0} \frac{f(t)-f(0)}{t} = f'(0)$$

Esto muestra que hay un único polinomio —entre los que tienen grado menor o igual que 1— que es el que mejor aproxima a f cerca de $t = 0$.

Lo llamamos ***polinomio de Taylor de orden*** 1 de f en $t = 0$ y lo denotamos

$$P_1(t) = f(0) + f'(0)t$$

Observación

Con el objeto de simplificar el planteo del problema supusimos que f era derivable en un entorno de $t = 0$. Pero, ¿era necesaria realmente esa hipótesis? Si miramos con cuidado lo que hicimos veremos que sólo necesitamos que f fuera derivable en $t = 0$. Aunque sí es cierto que, salvo algún caso excepcional, siempre trabajaremos con funciones que son derivables en todo un entorno del punto, no sólo en el punto.

Ejemplos

En los casos siguientes, hallar el polinomio de Taylor de orden 1 *de* f *en* $t = 0$

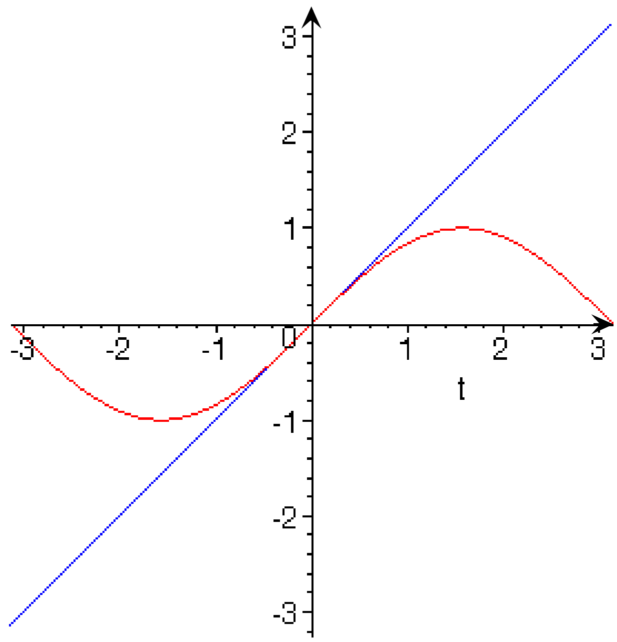
1. $f(t) = \operatorname{sen} t$

   Para $f(x) = \operatorname{sen} x$ tenemos: $f(0) = \operatorname{sen} 0 = 0$ y $f'(0) = \cos 0 = 1$. Luego,

   $$P_1(t) = t$$

   La siguiente figura muestra la cercanía entre los gráficos de f y de su polinomio de Taylor P_1 en un entorno del origen,

[2] ¿por qué decimos que esta condición es más fuerte que la anterior?



2. $f(t) = 3t + 2$

   Se tiene: $f(0) = 2$ y $f'(0) = 3$. Luego,

$$P_1(t) = 2 + 3t = f(t)$$

   ¿Es razonable que nos haya dado $P_1 = f$ en este caso?

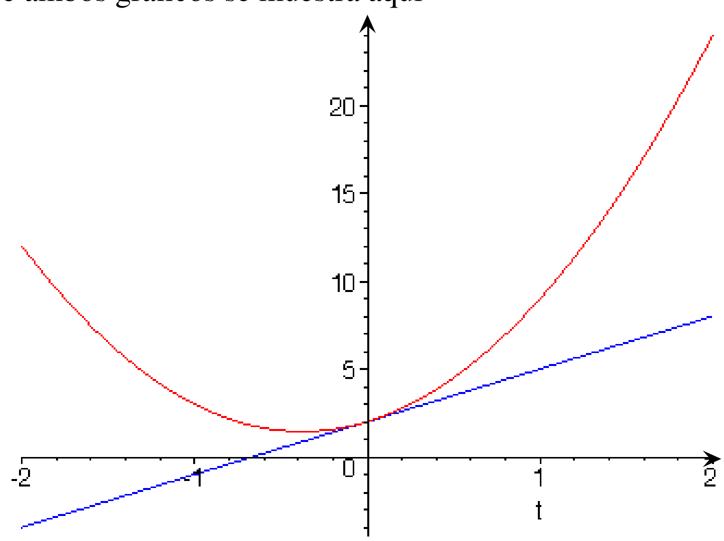
3. $f(t) = 4t^2 + 3t + 2$

   Se tiene: $f(0) = 2$ y $f'(0) = 3$. De modo que

$$P_1(t) = 3t + 2$$

   ¿Le sorprende este resultado? ¿Lo puede generalizar al caso en que f sea un polinomio cualquiera?

   La relación entre ambos gráficos se muestra aquí



Nota: la escala de ambos ejes no es la misma

Esto que hicimos alrededor de $t = 0$ se puede reproducir en un entorno de cualquier otro punto donde f sea derivable.

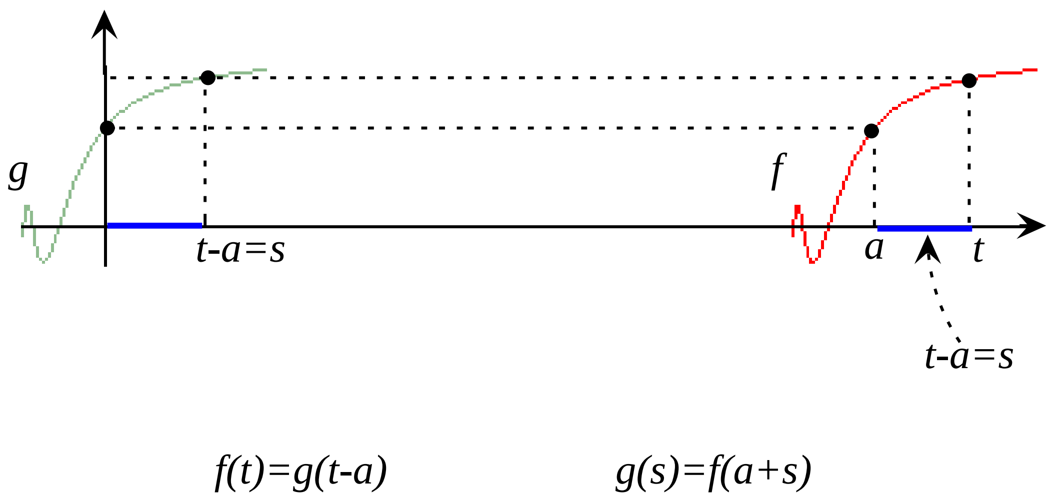
Supongamos que f está definida en un intervalo $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ y sea $a \in (\alpha, \beta)$ un punto donde f es derivable. Como dijimos que queríamos *copiar* lo que hicimos alrededor de $t = 0$, consideramos la función la función

$$g(s) = f(a + s)$$

que va a estar definida para los s tales que $a + s \in (\alpha, \beta)$; i.e.,

$$s \in (\alpha - a, \beta - a)$$

y resultará derivable en $s = 0$. Es conveniente notar que el gráfico de g alrededor de $s = 0$ coincide con el gráfico de f alrededor de $t = a$, como ilustra la siguiente figura,



Siendo g derivable en $s = 0$ tenemos definido su polinomio de Taylor de orden 1

$$p_1(s) = g(0) + g'(0)s$$

el que mejor aproxima a g cerca de 0 entre todos los polinomios de grado menor o igual que 1; i.e., el único que satisface

$$\lim_{s \to 0} \frac{g(s) - g(0)}{s} = 0$$

Recordando que $g(s) = f(a + s)$ y aplicando la regla de la cadena,

$$g'(0) = f'(a)$$

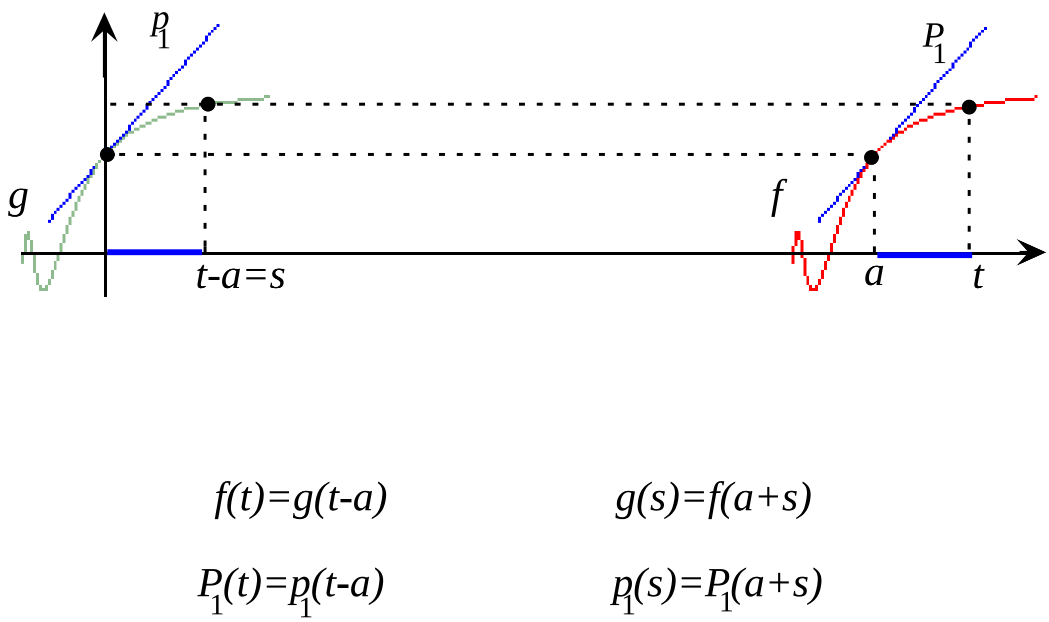
De modo que

$$g(0) = f(a) \qquad \text{y} \qquad g'(0) = f'(a)$$

por lo cual

$$p_1(s) = f(a) + f'(a)s$$

Pero como el gráfico de g se obtiene desplanzando horizontalmente el gráfico de f, es razonable esperar que el polinomio de grado menor o igual que 1 que mejor aproxima a f alrededor de a tenga el mismo gráfico que p_1 pero trasladado la misma distancia en sentido opuesto,



Resulta así que el polinomio

$$P_1(t) = f(a) + f'(a)(t - a)$$

tiene grado menor o igual que 1 y satisface

$$\lim_{t \to a} \frac{f(t) - P_1(t)}{t - a} \underset{s=t-a}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} \lim_{s \to 0} \frac{f(a + s) - P_1(a + s)}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{g(s) - p_1(s)}{s} = 0$$

Es decir, es el que mejor aproxima a f alrededor de $t = a$ entre todos los polinomios de grado menor o igual que 1.

Definición

Sea f una función definida en un entorno del punto a en el que es derivable. Llamamos ***polinomio de Taylor de orden*** 1 de f en a al polinomio

$$\boxed{P_1(t) = f(a) + f'(a)(t-a)}$$

Es el único polinomio de grado menor o igual que 1 que satisface la condición

$$\lim_{t \to a} \frac{f(t) - P_1(t)}{t - a} = 0 \qquad (✦)$$

Ejemplos

En los casos siguientes, hallar el polinomio de Taylor de orden 1 *de* f *en* $t = a$

1. $f(t) = \operatorname{sen} t \quad — \quad a = \frac{\pi}{2}$

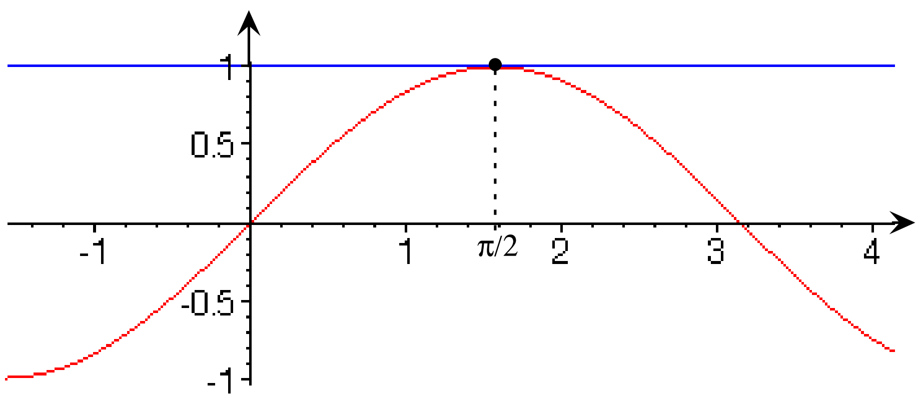
   Se tiene

   $$f(\tfrac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{2}) = 1 \qquad , \qquad f'(\tfrac{\pi}{2}) = \cos(\tfrac{\pi}{2}) = 0$$

   Luego,

   $$P_1(t) = 1$$

   NOTA: En este caso, el polinomio de orden 1 tiene grado 0.



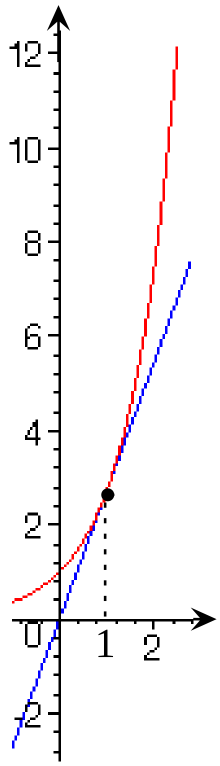
La condición (✦) en este caso nos dice

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} t - 1}{t - \frac{\pi}{2}} = 0$$

2. $f(t) = e^t$ — $a = 1$

   Se tiene
$$f(1) = e \qquad , \qquad f'(1) = e$$

   Luego,
$$P_1(t) = e + et$$



   La condición (✦) en este caso nos dice
$$\lim_{t\to 1} \frac{e^t - [e + e(t-1)]}{t-1} = 0$$

3. $f(t) = 3 + 2t$ — $a = -4$

   Se tiene
$$f(-4) = -5 \qquad , \qquad f'(-4) = 2$$

   Luego,
$$P_1(t) = -5 + 2(t+4)$$

   Nota: en un ejemplo anterior vimos que el polinomio de Taylor de orden 1 en $t = 0$ de una función (una recta) coincidía con la propia función. ¿Vale lo mismo en este caso? ¿Le sorprende?

Al comienzo planteamos la idea de conseguir un polinomio que aproximara a una determinada función f alrededor de un punto a con el objeto de *reemplazar* el verdadero valor $-f(a)-$ que se supone difícil de calcular, por un valor cercano $P_1(a)$ que se calcula a partir únicamente de sumas y productos. Al hacer esto es importante tener una idea clara de la magnitud del error que cometemos en esa aproximación. En la parte final de esta sección nos ocuparemos de analizarlo.

Comencemos poniéndole un nombre a ese error. Concretamente, llamaremos ***resto*** o ***término complementario*** de Taylor de orden 1 a la diferencia entre la función y su polinomio de Taylor de orden 1 en a

$$R_1(t) = f(t) - P_1(t)$$

Notemos que la condición (✦), con esta nueva notación, se escribe

$$\lim_{t\to a} \frac{R_1(t)}{t-a} = 0$$

Supondremos a partir de ahora que f admite derivada segunda en un entorno del punto a. Conviene observar que por ser $f(a) = P_1(a)$ y $f'(a) = P_1'(a)$ resulta

$$R_1(a) = R_1'(a) = 0$$

Y, como tanto f como P_1 son dos veces derivables en un entorno de a, resulta que también lo es R_1. Necesitamos tener presente este hecho porque intentamos aplicar (dos veces consecutivas) el Teorema de Cauchy con el objeto de poder conocer un poco más a este resto que precisamente es el error que intentamos estimar.

Llamemos

$$\varphi(t) = (t-a)^2$$

y consideremos el cociente,

$$\frac{R_1(t)}{(t-a)^2}$$

que se puede escribir

$$\frac{R_1(t)}{(t-a)^2} = \frac{R_1(t)}{\varphi(t)} = \frac{R_1(t) - R_1(a)}{\varphi(t) - \varphi(a)}$$

Siendo ambas funciones derivables podemos aplicar el Teorema de Cauchy que nos garantiza que existe un t_1 *entre* a y t [3] tal que

$$\frac{R_1(t)}{(t-a)^2} = \frac{R_1(t)}{\varphi(t)} = \frac{R_1(t) - R_1(a)}{\varphi(t) - \varphi(a)} = \frac{R_1'(t_1)}{\varphi'(t_1)}$$

[3] esto se puede resumir diciendo $|t_1 - a| < |t - a|$

pero como tanto R_1' como φ' se vuelven a anular en a podemos volver a aplicar el Teorema de Cauchy y obtenemos un segundo punto t_2, ahora entre t_1 y a, tal que

$$\begin{aligned}\frac{R_1'(t_1)}{\varphi'(t_1)} &= \frac{R_1'(t_1) - R_1'(a)}{\varphi'(t_1) - \varphi'(a)} \\ &= \frac{R_1''(t_2)}{\varphi''(t_2)}\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$P_1''(t) = 0$$

por ser de grado menor o igual que 1; luego,

$$R_1''(t_2) = f''(t_2)$$

Por otro lado,

$$\varphi'(t) = 2(t-a) \quad , \quad \varphi''(t) = 2$$

entonces, volviendo al cálculo previo, resulta

$$\frac{R_1''(t_2)}{\varphi''(t_2)} = \frac{f''(t_2)}{2}$$

Hemos probado entonces que existe un punto –que llamaremos más simplemente c [4]– entre a y t tal que

$$\frac{R_1(t)}{(t-a)^2} = \frac{f''(c)}{2}$$

O, dicho de otro modo,

$$\boxed{R_1(t) = \frac{f''(c)}{2}(t-a)^2}$$

Podemos decir entonces que si f es dos veces derivable en un entorno de a, para cada t en ese entorno existe un c —$|c-a| < |t-a|$— tal que

$$f(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + \frac{f''(c)}{2}(t-a)^2$$

Esta ecuación recibe el nombre de ***fórmula de Taylor de orden* 1 *de* f *en* a**.

Ejemplo

Escribir la fórmula de Taylor de orden 1 *de* $f(t) = \operatorname{sen} t$ *en* $t = 0$ *y estimar la magnitud del error que se comete al aproximar el verdadero valor de* $\operatorname{sen} \frac{1}{4}$ *por* $P_1(\frac{1}{4})$.

En un ejemplo anterior obtuvimos el polinomio de Taylor de orden 1 de f en $t = 0$

$$P_1(t) = t$$

[4] $c = t_2$

Sólo nos falta entonces analizar el resto. Por lo hecho arriba y siendo f infinitamente derivable sabemos que para cada t en un entorno de 0 existe un c ($|c| < |t|$) tal que

$$R_1(t) = \frac{f''(c)}{2}t^2 = \frac{-\cos c}{2}t^2$$

Luego, la fórmula de Taylor de orden 1 para esta función en $t = 0$ es

$$\operatorname{sen} t = t - \frac{\cos c}{2}t^2$$

para un c: $|c| < |t|$.

En particular esto vale para $t = \frac{1}{4}$; i.e., existe un c: $|c| < \frac{1}{4}$ tal que

$$\operatorname{sen}\frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{\cos c}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

De modo que el error que cometemos al reemplazar el valor sen $\frac{1}{4}$ por $\frac{1}{4}$ es

$$-\frac{\cos c}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = -\frac{\cos c}{32}$$

Como no podemos saber cuál es el valor de c [5], para estimar el error usaremos que el valor absoluto del coseno no supera a 1; con lo cual,

$$|R_1(\tfrac{1}{4})| = \left|-\frac{\cos c}{32}\right| = \frac{|\cos c|}{32} \leqslant \frac{1}{32} = \frac{1}{2^5} = \frac{5^5}{10^5} = \frac{3125}{100.000} = 0,03125$$

Quiere decir que

$$-0,03125 < \operatorname{sen}\frac{1}{4} - \frac{1}{4} < 0,03125$$

sumando $\frac{1}{4}$ miembro a miembro

$$-0,03125 + 0,25 < \operatorname{sen}\frac{1}{4} < 0,03125 + 0,25$$

i.e.,

$$0,21875 < \operatorname{sen}\frac{1}{4} < 0,28125$$

La magnitud de este error sólo nos permite asegurar que

$$\operatorname{sen}\frac{1}{4} = 0,2\ldots$$

Con este procedimiento no es posible saber cuál es la segunda cifra decimal (sólo que está entre 1 y 8).

[5] sabemos que existe y dónde está, pero no cuánto vale exactamente

III. *Polinomio de Taylor de orden* 2

Haciendo un planteo análogo al anterior buscamos en esta ocasión un polinomio de grado menor o igual que 2 que aproxime a la función con mayor precisión que la que nos da el de orden 1.

Pretendemos también dar una idea de la manera en que se generaliza este procedimiento de modo de encontrar aproximaciones de funciones por polinomios de grado n. Esto es importante pues, al imponer ciertas condiciones adicionales, se logrará que al aumentar el grado aumente también la precisión (i.e., cada vez el error será menor).

En primer lugar vamos a trabajar alrededor del origen y después trasladaremos todo a un punto a genérico (como hicimos antes).

Suponemos que f es dos veces derivable en $t = 0$ [6]. El polinomio que estamos buscando, por ser de grado menor o igual que 2 debe tener la forma

$$p(t) = at^2 + bt + c$$

Como pretendemos que *aproxime mejor* que P_1, debe empezar por cumplir lo que satisface P_1

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t) - p(t)}{t} = 0$$

Notemos que

$$\frac{f(t) - p(t)}{t} = \frac{f(t) - (at^2 + bt + c)}{t} = \frac{f(t) - (bt + c)}{t} - at$$

por lo tanto,

$$\frac{f(t) - (bt + c)}{t} = \frac{f(t) - (at^2 + bt + c)}{t} + at \longrightarrow 0$$

cuando $t \to 0$. Pero el único polinomio que cumple esto es P_1; luego,

$$bt + c = P_1(t) = f(0) + f'(0)t$$

de donde obtenemos

$$c = f(0) \quad , \quad b = f'(0)$$

Tenemos hasta ahora,

$$p(t) = f(0) + f'(0)t + at^2$$

i.e., sólo nos falta hallar a.

Habíamos dicho que le íbamos a pedir a p que satisfaga una condición adicional que garantice una mejor aproximación. Concretamente, el polinomio que estamos buscando deberá satisfacer

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t) - p(t)}{t^2} = 0 \tag{2}$$

[6] lo que implica que f es derivable en un entorno del origen

Claramente esto implica

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t)-p(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \left[\frac{f(t)-p(t)}{t^2}\, t \right] = \lim_{t\to 0} \frac{f(t)-p(t)}{t^2} \lim_{t\to 0} t = 0$$

Es decir, la condición que agregamos asegura que se cumple la anterior.

Reescribamos la expresión

$$\frac{f(t)-p(t)}{t^2} = \frac{f(t)-f(0)-f'(0)t-at^2}{t^2}$$

Dado que tanto numerador como denominador tienden a cero cuando $t \to 0$, podemos aplicar la regla de l'Hospital

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{f(t)-p(t)}{t^2} &= \lim_{t\to 0} \frac{f(t)-f(0)-f'(0)t-at^2}{t^2} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f'(t)-f'(0)-2at}{2t} = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0} \frac{f'(t)-f'(0)}{t} - a \\ &= \frac{1}{2} f''(0) - a \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta la condición (2) llegamos al valor de a

$$a = \frac{1}{2} f''(0)$$

Probamos entonces que hay un único polinomio de grado menor o igual que 2 que satisface la condición (2). Lo llamamos ***polinomio de Taylor de orden* 2 *de* f *en*** 0 y lo denotamos

$$P_2(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2} t^2$$

A la expresión

$$R_2(t) = f(t) - P_2(t)$$

la llamamos ***resto*** o ***término complementario de Taylor de orden*** 2 de f en 0. Satisface la condición

$$\lim_{t\to 0} \frac{R_2(t)}{t^2} = 0$$

Sea f una función que admite derivada segunda en a [7]. Llamamos

$$g(s) = f(a+s)$$

Resulta que g posee en $s = 0$ las mismas propiedades que f tiene en el punto a. Además

$$g(0) = f(a) \quad , \quad g'(0) = f'(a) \quad , \quad g''(0) = f''(a)$$

[7] y por lo tanto derivada primera en un entorno de a

Para g tenemos definido su polinomio de Taylor de orden 2

$$p_2(t) = g(0) + g'(0)s + \frac{1}{2}g''(0)s^2 = f(a) + f'(a)s + \frac{1}{2}f''(a)s^2$$

que es el único que cumple

$$\lim_{s\to 0} \frac{g(s) - p_2(s)}{s^2} = 0$$

Como en la sección anterior, vemos que el polinomio

$$P_2(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + \frac{1}{2}f''(a)(t-a)^2$$

tiene grado menor o igual que 2 y además satisface

$$\lim_{t\to a} \frac{f(t) - P_2(t)}{(t-a)^2} \underset{\substack{\uparrow \\ s=t-a}}{=} \lim_{s\to 0} \frac{f(a+s) - P_2(a+s)}{s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{g(s) - p_2(s)}{s^2} = 0$$

Es decir, es el que mejor aproxima a f alrededor de $t = a$ entre todos los polinomios de grado menor o igual que 2.

Definición

Sea f una función derivable en un entorno del punto a en el que admite derivada segunda. Llamamos ***polinomio de Taylor de orden*** 2 de f en a al polinomio

$$\boxed{P_1(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(t-a)^2}$$

Es el único polinomio de grado menor o igual que 2 que satisface la condición

$$\lim_{t\to a} \frac{f(t) - P_2(t)}{(t-a)^2} = 0 \qquad (✦✦)$$

A la expresión

$$R_2(t) = f(t) - P_2(t)$$

la llamamos ***resto*** o ***término complementario de Taylor de orden*** 2 de f en $t = a$.

Ejemplos

Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 *de* f *en* a *y escribir en cada caso la condición que lo hace único.*

1. $f(t) = e^t$ — $a = 0$

   Se tiene

   $$f(0) = e^0 = 1 \quad , \quad f'(0) = e^0 = 1 \quad , \quad f''(0) = e^0 = 1$$

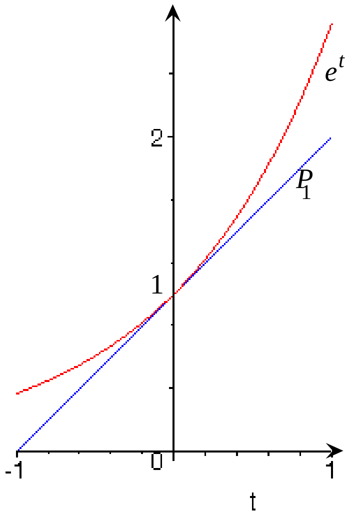
   Luego,

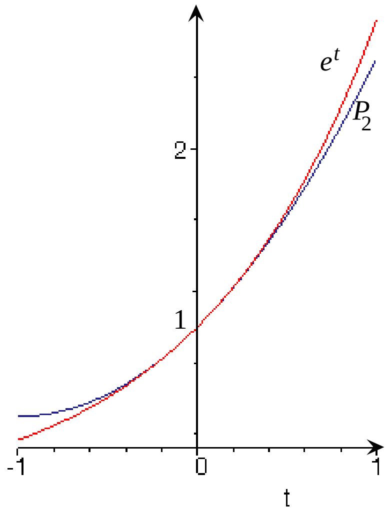
   $$P_2(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

La condicíon (✦✦) nos dice que

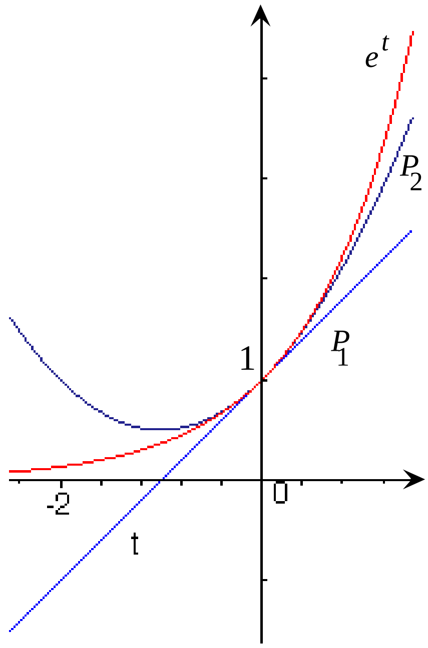
$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - (1 + t + \frac{1}{2}t^2)}{t^2} = 0$$

La siguiente figura muestra la mejor aproximación del polinomio de grado 2 con respecto a la del de grado 1





Ahora ponemos las tres funciones en el mismo gráfico y ampliamos un poco el dominio para que se vea mejor el gráfico de P_2, que por supuesto es una parábola,



2. $f(t) = \operatorname{sen} t$ — $a = \frac{\pi}{2}$

Se tiene

$$f(\tfrac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}\tfrac{\pi}{2} = 1 \quad , \quad f'(\tfrac{\pi}{2}) = \cos\tfrac{\pi}{2} = 0 \quad , \quad f''(\tfrac{\pi}{2}) = -\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{2} = -1$$

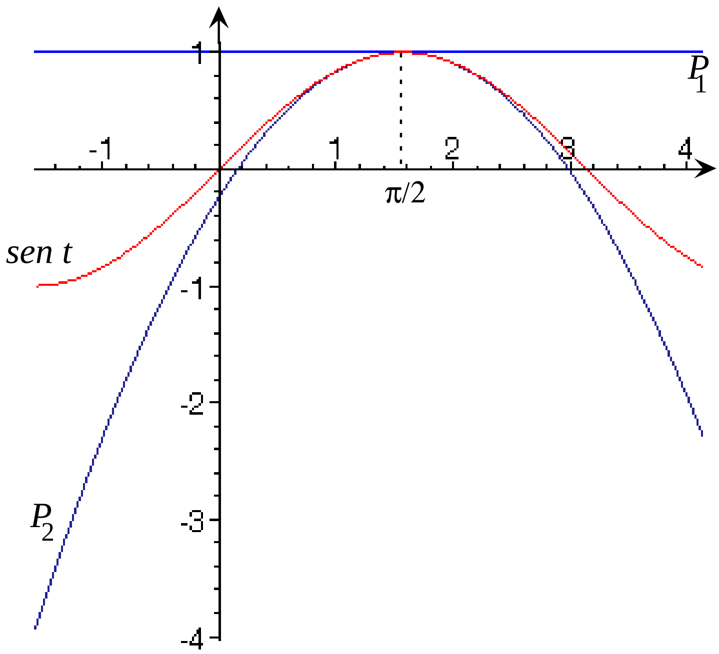
Luego,

$$P_2(t) = 1 - \frac{1}{2}(t - \tfrac{\pi}{2})^2$$

La condición (✦✦) nos dice que

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} t - [1 - \frac{1}{2}(t-\frac{\pi}{2})^2]}{(t-\frac{\pi}{2})^2} = 0$$

La siguiente figura compara los tres gráficos: el de f , el de P_1 y el de P_2



Para finalizar esta sección veremos qué forma adopta el resto de orden 2 si la función f es tres veces derivable en un entorno de a. Tal como trabajamos en el caso anterior, se tratará de aplicar (ahora 3 veces) el Teorema de Cauchy a la expresión

$$\frac{R_2(t)}{(t-a)^2}$$

pero primero notemos que

$$R_2(a) = f(a) - P_2(a) = 0 \quad , \quad R_2'(a) = f'(a) - P_2'(a) = 0$$

$$R_2''(a) = f''(a) - P_2''(a) = 0 \quad , \quad R_2'''(a) = f'''(a)$$

dado que $P_2''' \equiv 0$ por ser un polinomio de grado menor o igual que 2.

Razonando como lo hicimos para R_1, sucesivas aplicaciones del Teorema de Cauchy nos aseguran que existen t_1, t_2, t_3 tales que $|t_3 - a| < |t_2 - a| < |t_1 - a| < |t - a|$ que satisfacen

$$\begin{aligned} \frac{R_2(t)}{(t-a)^3} &= \frac{R_2'(t_1)}{\varphi'(t_1)} = \frac{R_2''(t_2)}{\varphi''(t_2)} = \frac{R_2'''(t_3)}{\varphi'''(t_3)} \\ &= \frac{f'''(t_3)}{3.2} = \frac{f'''(t_3)}{3!} \end{aligned}$$

donde ahora $\varphi(t) = (t-a)^3$.

Se concluye de aquí que si f es tres veces derivable en un entorno de a, entonces existe un c: $|c-a| < |t-a|$ tal que

$$R_2(t) = \frac{f'''(a)}{3!}(t-a)^3$$

Con lo cual la fórmula de Taylor de orden 2 de f en a toma la forma

$$f(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + \frac{1}{2}f''(a)(t-a)^2 \; + \; \frac{1}{3!}f'''(c)(t-a)^3$$

donde $|c-a| < |t-a|$.

Trabajando como lo hicimos en el ejemplo al final de la sección anterior, resolver el siguiente

Ejercicio

Escribir la fórmula de Taylor de orden 2 *de* $f(t) = \cos t$ *en* $t = 0$ *y estimar la magnitud del error que se comete al aproximar el verdadero valor de* $\cos \frac{1}{4}$ *por* $P_2(\frac{1}{4})$.